УДК 621.391 : 519.72

В. Н. Малозёмов, С. М. Машарский, К. Ю. Цветков

СИГНАЛ ФРЭНКА И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ[1]

На основе сигнала Фрэнка построены два бесконечных множества сигналов, циклические или n-ичные сдвиги которых образуют ортогональные базисы. Такие базисы могут эффективно использоваться при проектировании систем широкополосной связи с кодовым множественным доступом, когда базисные сигналы берутся в качестве переносчиков информации.

§1. Введение

Возьмем матрицу Фурье порядка n. Если записать последовательно строки этой матрицы в виде одномерного массива длиной $N = n^2$, то получим сигнал Фрэнка на основном периоде [1]. Сигнал Фрэнка обладает следующими свойствами:

1. Все его отсчеты по модулю равны между собой.
2. Циклические сдвиги этого сигнала образуют ортогональный базис в пространстве дискретных N-периодических сигналов.

В данной статье на основе сигнала Фрэнка строятся два бесконечных множества сигналов V_1 и V_2. Сигналы из V_1 обладают свойствами $1, 2$ сигнала Фрэнка. Для сигналов из V_2 сохраняется свойство 1, а свойство 2 принимает такой вид:

$2'$. n-ичные сдвиги сигналов из V_2 образуют ортогональные базисы.

Относительно сигнала Фрэнка устанавливается, что не только его циклические сдвиги, но и n-ичные сдвиги образуют ортогональный базис. Доказывается, что эти два базиса имеют ровно $2n$ общих элементов.

Постоянно будут использоваться стандартные обозначения: $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\lfloor \alpha \rfloor$ — целая часть числа α, $\langle k \rangle_n := k - \lfloor k/n \rfloor n$ — остаток от деления целого числа k на натуральное n.

§2. Предварительные сведения

Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ называются сигналами. Нам потребуется единичный N-периодический импульс — сигнал $\delta_N(j)$, равный единице, когда j делится на N, и равный нулю при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что δ_N — четный сигнал, т. е. $\delta_N(-j) = \delta_N(j)$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

В $\mathbb{C}_N$ обычным способом вводятся скалярное произведение и норма:

$$\langle x,\, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \overline{y(j)}, \qquad \|x\| = \langle x,\, x \rangle^{1/2}.$$

Сигналу x сопоставим автокорреляционную последовательность

$$R_x(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j+k)\, \overline{x(j)}.$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 99-01-00747).

П р е д л о ж е н и е 1. *Система сдвигов* $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ *образует ортонормированный базис в* $\mathbb{C}_N$ *тогда и только тогда, когда* $R_x(k) = \delta_N(k)$ *при* $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу N-периодичности имеем

$$R_x(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x\big(j - \langle N-k\rangle_N\big)\,\overline{x(j)} = \big\langle x\big(\,\cdot - \langle N-k\rangle_N\big),\, x\big\rangle,$$

поэтому условие $R_x(k) = \delta_N(k) \equiv \delta_N\big(\langle N-k\rangle_N\big)$ равносильно тому, что

$$\langle x(\cdot - l),\, x\rangle = \delta_N(l) \quad \text{при} \quad l = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{2.1}$$

Вместе с тем, при $k, k' \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$\langle x(\cdot - k),\, x(\cdot - k')\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x\big((j-k') - (k-k')\big)\,\overline{x(j-k')} =$$

$$= \sum_{j'=0}^{N-1} x\big(j' - (k-k')\big)\,\overline{x(j')} = \big\langle x\big(\,\cdot - \langle k-k'\rangle_N\big),\, x\big\rangle,$$

так что условие ортонормированности

$$\langle x(\cdot - k),\, x(\cdot - k')\rangle = \delta_N(k-k') \equiv \delta_N\big(\langle k-k'\rangle_N\big)$$

сводится к такому условию

$$\big\langle x\big(\,\cdot - \langle k-k'\rangle_N\big),\, x\big\rangle = \delta_N\big(\langle k-k'\rangle_N\big),$$

которое в свою очередь равносильно (2.1).

Приходим к выводу, что система сдвигов $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ является ортонормированной тогда и только тогда, когда $R_x = \delta_N$. Остается отметить, что количество сигналов в указанной системе совпадает с размерностью пространства $\mathbb{C}_N$. ▲

Обозначим через $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ дискретное преобразование Фурье (ДПФ). По определению сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ имеет компоненты

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из единицы.

П р е д л о ж е н и е 2. *Сигнал* x *порождает в* $\mathbb{C}_N$ *ортонормированный базис* $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ *в том и только том случае, когда* $|X(k)| = 1$ *при* $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Винера–Хинчина

$$[\mathcal{F}_N(R_x)](k) = |X(k)|^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Если система сдвигов $\{x(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$, то согласно предложению 1 $R_x = \delta_N$. В силу (2.2) получаем

$$|X(k)|^2 = [\mathcal{F}_N(\delta_N)](k) \equiv 1,$$

так что $|X(k)| = 1$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Наоборот, пусть $|X(k)| = 1$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Согласно (2.2) $[\mathcal{F}_N(R_x)](k) \equiv 1$. По формуле обращения для ДПФ имеем

$$R_x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega_N^{kj} = \delta_N(j).$$

Остается снова сослаться на предложение 1. ▲

§3. Первое обобщение сигнала Фрэнка

Обозначим через F_n матрицу Фурье порядка $n \geq 2$ с элементами $F_n[j_1, j_0] = \omega_n^{j_1 j_0}$, $j_0, j_1 = 0, 1, \ldots, n-1$. Сигнал Фрэнка $E(j)$ имеет период длиной $N = n^2$ и на основном периоде $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ определяется формулой

$$E(j_1 n + j_0) = F_n[j_1, j_0], \quad j_0, j_1 = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.1}$$

Введем матрицу H_n с элементами

$$H_n[j_1, j_0] = \frac{1}{n}\, b(j_0)\, F_n[\langle j_1 + p(j_0)\rangle_n, \pi(j_0)], \quad j_0, j_1 = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.2}$$

Здесь $b(j_0)$ — комплексные коэффициенты, $p(j_0) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и π — некоторая перестановка чисел $0, 1, \ldots, n-1$. Обобщенный сигнал Фрэнка ψ, связанный с прореживанием по времени, на основном периоде определим так:

$$\psi(j_1 n + j_0) = H_n[j_1, j_0], \quad j_0, j_1 = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.3}$$

Перестановка столбцов π матрицы F_n и циклические перестановки $j_1 \to \langle j_1 + p(j_0)\rangle_n$ внутри столбцов с индексами $\pi(j_0)$ были введены Хаймиллером [2]. При $p(j_0) \equiv 0$ и $\pi(j_0) \equiv j_0$ сигнал ψ изучался в [3]. Мы исследуем наиболее полное обобщение сигнала Фрэнка и даем существенно более простые, чем в [3], доказательства свойств сигнала ψ.

Согласно (3.2)

$$H_n[j_1, j_0] = \frac{1}{n}\, b(j_0)\, \omega_n^{(j_1 + p(j_0))\pi(j_0)}.$$

Обозначим $B(j_0) = b(j_0)\, \omega_n^{p(j_0)\pi(j_0)}$. Тогда

$$H_n[j_1, j_0] = \frac{1}{n}\, B(j_0)\, \omega_n^{j_1 \pi(j_0)}. \tag{3.4}$$

Л е м м а 1. *Дискретное преобразование Фурье $\Psi = \mathcal{F}_N(\psi)$ сигнала ψ имеет компоненты*

$$\Psi(k) = B\big(\pi^{-1}(\langle k\rangle_n)\big)\, \omega_N^{-k\pi^{-1}(\langle k\rangle_n)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

Доказательство. На основании (3.3) и (3.4) получаем

$$\Psi(k) := \sum_{j=0}^{N-1} \psi(j)\, \omega_N^{-kj} = \sum_{j_0,j_1=0}^{n-1} \psi(j_1 n + j_0)\, \omega_N^{-k(j_1 n + j_0)} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j_0,j_1=0}^{n-1} B(j_0)\, \omega_n^{j_1[\pi(j_0)-k]}\, \omega_N^{-kj_0} = \sum_{j_0=0}^{n-1} B(j_0)\, \omega_N^{-kj_0}\, \delta_n\big(\pi(j_0) - \langle k\rangle_n\big) =$$

$$= B\big(\pi^{-1}(\langle k\rangle_n)\big)\, \omega_N^{-k\pi^{-1}(\langle k\rangle_n)}. \quad \blacktriangle$$

Теорема 1. *Для того чтобы сигнал ψ вида* (3.3) *порождал ортонормированный базис $\{\psi(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ в пространстве $\mathbb{C}_N$, необходимо и достаточно, чтобы $|b(j_0)| = 1$ при $j_0 = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Доказательство. В силу (3.5)

$$|\Psi(k)| = \big|B\big(\pi^{-1}(\langle k\rangle_n)\big)\big| = \big|b\big(\pi^{-1}(\langle k\rangle_n)\big)\big| \quad \text{при } k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Теперь заключение теоремы следует из предложения 2. $\blacktriangle$

Множество обобщенных сигналов Фрэнка ψ вида (3.3), у которых все коэффициенты $b(j_0)$ по модулю равны единице, во введении было обозначено через V_1.

§4. Поразрядная арифметика

По-прежнему считаем, что $N = n^2$. В поразрядной арифметике оперируют с числами из множества $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Возьмем два числа j, k из этого множества и представим их в виде $j = j_1 n + j_0$, $k = k_1 n + k_0$, где j_0, j_1, k_0, k_1 принадлежат $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Поразрядная сумма $j \underset{n}{\oplus} k$ и поразрядная разность $j \underset{n}{\ominus} k$ чисел j и k определяются так:

$$j \underset{n}{\oplus} k = \langle j_1 + k_1\rangle_n n + \langle j_0 + k_0\rangle_n, \quad j \underset{n}{\ominus} k = \langle j_1 - k_1\rangle_n n + \langle j_0 - k_0\rangle_n.$$

Число $j^* = \langle -j_1\rangle_n n + \langle -j_0\rangle_n$ называется n-ично противоположным числу j. Очевидно, что $j \underset{n}{\oplus} j^* = 0$.

Приведем некоторые свойства поразрядного сложения и вычитания, которые потребуются в дальнейшем.

(1) $j \underset{n}{\ominus} k = j \underset{n}{\oplus} k^*$;

(2) $(j \underset{n}{\ominus} k) \underset{n}{\oplus} k = j, \quad (j \underset{n}{\oplus} k) \underset{n}{\ominus} k = j$;

(3) $(j \underset{n}{\ominus} k) \underset{n}{\ominus} (l \underset{n}{\ominus} k) = j \underset{n}{\ominus} l$;

(4) $j \underset{n}{\ominus} k = 0$ тогда и только тогда, когда $j = k$;

(5) $\delta_N(j \underset{n}{\ominus} k) = \delta_N(j - k)$.

Проверим, например, свойство (3). Имеем

$$(j \underset{n}{\ominus} k) \underset{n}{\ominus} (l \underset{n}{\ominus} k) = \big\langle \langle j_1 - k_1\rangle_n - \langle l_1 - k_1\rangle_n \big\rangle_n n + \big\langle \langle j_0 - k_0\rangle_n - \langle l_0 - k_0\rangle_n \big\rangle_n =$$

$$= \langle j_1 - l_1 \rangle_n n + \langle j_0 - l_0 \rangle_n = j \underset{n}{\ominus} l.$$

Свойство (2) следует из (1), (4) — из (2), (5) — из (4).

Отметим, что отображения $j \to j^*$ и $j \to j \underset{n}{\ominus} k$ при фиксированном k являются перестановками чисел $0, 1, \ldots, N-1$.

§5. Второе обобщение сигнала Фрэнка

Все сигналы в этом параграфе будем рассматривать на основном периоде $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Сигналу x сопоставим еще одну автокорреляционную последовательность [4]

$$R_x^{(1)}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j \underset{n}{\oplus} k)\, \overline{x(j)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Предложение 3. *Система n-ичных сдвигов $\{x(\cdot \underset{n}{\ominus} k)\}_{k=0}^{N-1}$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$ тогда и только тогда, когда $R_x^{(1)}(k) = \delta_N(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$.*

Доказательство. Имеем

$$R_x^{(1)}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j \underset{n}{\ominus} k^*)\, \overline{x(j)} = \langle x(\cdot \underset{n}{\ominus} k^*),\, x \rangle,$$

поэтому условие $R_x^{(1)}(k) = \delta_N(k) \equiv \delta_N(k^*)$ равносильно тому, что

$$\langle x(\cdot \underset{n}{\ominus} l),\, x \rangle = \delta_N(l) \quad \text{при} \quad l = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5.1}$$

Далее, при $k, k' \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$\langle x(\cdot \underset{n}{\ominus} k),\, x(\cdot \underset{n}{\ominus} k') \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x\big((j \underset{n}{\ominus} k') \underset{n}{\ominus} (k \underset{n}{\ominus} k')\big)\, \overline{x(j \underset{n}{\ominus} k')} =$$

$$= \sum_{j'=0}^{N-1} x\big(j' \underset{n}{\ominus} (k \underset{n}{\ominus} k')\big)\, \overline{x(j')} = \big\langle x\big(\,\cdot\, \underset{n}{\ominus} (k \underset{n}{\ominus} k')\big),\, x \big\rangle,$$

так что условие ортонормированности

$$\langle x(\cdot \underset{n}{\ominus} k),\, x(\cdot \underset{n}{\ominus} k') \rangle = \delta_N(k - k') \equiv \delta_N(k \underset{n}{\ominus} k')$$

сводится к такому условию

$$\big\langle x\big(\,\cdot\, \underset{n}{\ominus} (k \underset{n}{\ominus} k')\big),\, x \big\rangle = \delta_N(k \underset{n}{\ominus} k'),$$

которое в свою очередь равносильно (5.1).

Приходим к выводу, что система n-ичных сдвигов $\{x(\cdot \underset{n}{\ominus} k)\}_{k=0}^{N-1}$ является ортонормированной тогда и только тогда, когда $R_x^{(1)}(k) = \delta_N(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Остается отметить, что количество сигналов в указанной системе совпадает с размерностью пространства $\mathbb{C}_N$. ▲

Рассмотрим при $N = n^2$ дискретные функции Виленкина–Крестенсона [4, 5]:

$$v_k(j) = \omega_n^{k_1 j_1 + k_0 j_0}. \tag{5.2}$$

Здесь $j = j_1 n + j_0$, $k = k_1 n + k_0$. Отметим, что

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \delta_N(j), \quad j = 0, 1, \ldots N-1. \tag{5.3}$$

Действительно,

$$\sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \sum_{k_1=0}^{n-1} \sum_{k_0=0}^{n-1} \omega_n^{k_1 j_1 + k_0 j_0} = \sum_{k_1=0}^{n-1} \omega_n^{k_1 j_1} \sum_{k_0=0}^{n-1} \omega_n^{k_0 j_0} =$$

$$= n^2 \delta_n(j_1) \delta_n(j_0) = N \delta_N(j).$$

Сигналы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ образуют ортогональный базис в пространстве $\mathbb{C}_N$ и $\|v_k\| = n$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Обозначим через $\mathcal{W}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона (ДПВК). По определению сигнал $Y = \mathcal{W}_N(x)$ имеет компоненты

$$Y(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \overline{v_k(j)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Предложение 4. *Сигнал x порождает в $\mathbb{C}_N$ ортонормированный базис $\{x(\cdot \underset{n}{\ominus} k)\}_{k=0}^{N-1}$ в том и только том случае, когда $|Y(k)| = 1$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой Винера–Хинчина в базисе (5.2) [4, с. 108]:

$$[\mathcal{W}_N(R_x^{(1)})](k) = |Y(k)|^2, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5.4}$$

Если система сдвигов $\{x(\cdot \underset{n}{\ominus} k)\}_{k=0}^{N-1}$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$, то согласно предложению 3 $R_x^{(1)} = \delta_N$. В силу (5.4)

$$|Y(k)|^2 = [\mathcal{W}_N(\delta_N)](k) \equiv 1,$$

так что $|Y(k)| = 1$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Наоборот, пусть $|Y(k)| = 1$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Согласно (5.4) $[\mathcal{W}_N(R_x^{(1)})](k) \equiv 1$. По формуле обращения для ДПВК и (5.3) имеем

$$R_x^{(1)}(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_k(j) = \delta_N(j), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Остается снова сослаться на предложение 3. ▲

Введем матрицу G_n с элементами

$$G_n[j_1, j_0] = \frac{1}{n}\, a(j_1)\, F_n[\pi(j_1), \langle j_0 + p(j_1)\rangle_n], \quad j_0, j_1 = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{5.5}$$

Здесь $a(j_1)$ — комплексные коэффициенты, $p(j_1) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и π — некоторая перестановка чисел $0, 1, \ldots, n-1$. Обобщенный сигнал Фрэнка φ, связанный с прореживанием по частоте, на основном периоде определим так:

$$\varphi(j_1 n + j_0) = G_n[j_1, j_0], \quad j_0, j_1 = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{5.6}$$

Согласно (5.5)

$$G_n[j_1, j_0] = \frac{1}{n}\, a(j_1)\, \omega_n^{\pi(j_1)(j_0 + p(j_1))}.$$

Обозначим $A(j_1) = a(j_1)\, \omega_n^{\pi(j_1) p(j_1)}$. Тогда

$$G_n[j_1, j_0] = \frac{1}{n}\, A(j_1)\, \omega_n^{\pi(j_1) j_0}. \tag{5.7}$$

Л е м м а 2. *Дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона $P = \mathcal{W}_N(\varphi)$ сигнала φ имеет компоненты*

$$P(k) = A\big(\pi^{-1}(k_0)\big)\, \omega_n^{-k_1 \pi^{-1}(k_0)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{5.8}$$

где $k = k_1 n + k_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании (5.6) и (5.7) получаем

$$P(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(j)\, \overline{v_k(j)} = \frac{1}{n} \sum_{j_1, j_0 = 0}^{n-1} A(j_1)\, \omega_n^{\pi(j_1) j_0 - k_1 j_1 - k_0 j_0} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{n-1} A(j_1)\, \omega_n^{-k_1 j_1}\, \delta_n\big(\pi(j_1) - k_0\big) = A\big(\pi^{-1}(k_0)\big)\, \omega_n^{-k_1 \pi^{-1}(k_0)}. \quad \blacktriangle$$

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы сигнал φ вида (5.6) порождал ортонормированный базис $\{\varphi(\cdot \underset{n}{\ominus} k)\}_{k=0}^{N-1}$ в пространстве $\mathbb{C}_N$, необходимо и достаточно, чтобы $|a(j_1)| = 1$ при $j_1 = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (5.8)

$$|P(k)| = \big|A\big(\pi^{-1}(k_0)\big)\big| = \big|a\big(\pi^{-1}(k_0)\big)\big| \quad \text{при} \ \ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Теперь заключение теоремы следует из предложения 4. $\blacktriangle$

Множество обобщенных сигналов Фрэнка φ вида (5.6), у которых все коэффициенты $a(j_1)$ по модулю равны единице, во введении было обозначено через V_2.

Выясним, почему циклические сдвиги $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k=0}^{N-1}$ сигнала φ из V_2 не образуют, вообще говоря, ортонормированный базис.

Л е м м а 3. *Дискретное преобразование Фурье $\Phi = \mathcal{F}_N(\varphi)$ сигнала φ имеет компоненты*

$$\Phi(k_1 n) = A\bigl(\pi^{-1}(k_1)\bigr), \quad k_1 = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$\Phi(k) = \frac{1-\omega_n^{-k}}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} A(j_1)\, \frac{\omega_n^{-kj_1}}{1-\omega_n^{\pi(j_1)}\, \omega_N^{-k}}, \quad \textit{если } k \textit{ не делится на } n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (5.6) и (5.7), запишем

$$\Phi(k) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi(j)\, \omega_N^{-kj} = \sum_{j_1, j_0=0}^{n-1} G_n[j_1, j_0]\, \omega_N^{-k(j_1 n + j_0)} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} A(j_1)\, \omega_n^{-kj_1} \sum_{j_0=0}^{n-1} \omega_n^{\pi(j_1) j_0}\, \omega_N^{-kj_0}.$$

Если $k = k_1 n$ при некотором $k_1 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, то

$$\Phi(k_1 n) = \sum_{j_1=0}^{n-1} A(j_1)\, \delta_n\bigl(\pi(j_1) - k_1\bigr) = A\bigl(\pi^{-1}(k_1)\bigr).$$

Пусть k не делится на n. В этом случае

$$\Phi(k) = \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} A(j_1)\, \omega_n^{-kj_1} \sum_{j_0=0}^{n-1} \omega_N^{j_0[n\pi(j_1)-k]} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} A(j_1)\, \omega_n^{-kj_1}\, \frac{1-\omega_n^{n\pi(j_1)-k}}{1-\omega_N^{n\pi(j_1)-k}} = \frac{1-\omega_n^{-k}}{n} \sum_{j_1=0}^{n-1} A(j_1)\, \frac{\omega_n^{-kj_1}}{1-\omega_n^{\pi(j_1)}\, \omega_N^{-k}}. \quad \blacktriangle$$

Лемма 3 показывает, что обеспечить выполнение условия $|\Phi(k)| \equiv 1$ за счет выбора коэффициентов $a(j_1)$ непросто.

§6. Циклические и n-ичные сдвиги сигнала Фрэнка

Согласно теоремам 1 и 2 системы сигналов

$$\bigl\{n^{-1} E(j-k)\bigr\}_{k=0}^{N-1} \quad \text{и} \quad \bigl\{n^{-1} E(j \underset{n}{\ominus} k)\bigr\}_{k=0}^{N-1},$$

где E — сигнал Фрэнка, определяемый формулой (3.1), образуют ортонормированные базисы в пространстве $\mathbb{C}_N$. При $k = 0$ эти системы имеют общий элемент $n^{-1}E(j)$. Возникает вопрос, сколько всего общих элементов в этих системах. Другими словами, сколько найдется пар (k, q), таких, что

$$E(j-k) = E(j \underset{n}{\ominus} q) \quad \forall j = 0, 1, \ldots, N-1\,? \tag{6.1}$$

На этот вопрос можно дать полный ответ.

Теорема 3. *Существует ровно $2n$ пар (k, q), при которых выполняется соотношение* (6.1). *А именно,*

$$k = q = sn, \quad s = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$k = (s+1)n - 1, \quad q = \langle s+1 \rangle_n n + n - 1, \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Пусть $j = j_1 n + j_0$, $k = k_1 n + k_0$, $q = q_1 n + q_0$, где $j_0, j_1, k_0, k_1, q_0, q_1$ принадлежат множеству $\{0, 1, \dots, n-1\}$. По определению сигнала Фрэнка

$$E(j-k) = E\big((j_1 - k_1)n + (j_0 - k_0)\big) = E\big(\big\langle j_1 - k_1 + \big\lfloor \tfrac{j_0 - k_0}{n} \big\rfloor \big\rangle_n n + \langle j_0 - k_0 \rangle_n\big) =$$

$$= \omega_n^{(j_1 - k_1 + \lfloor (j_0 - k_0)/n \rfloor)(j_0 - k_0)},$$

$$E(j \ominus_n q) = E(\langle j_1 - q_1 \rangle_n n + \langle j_0 - q_0 \rangle_n) = \omega_n^{(j_1 - q_1)(j_0 - q_0)}.$$

Значит, соотношение (6.1) равносильно системе нелинейных сравнений

$$\big(j_1 - k_1 + \big\lfloor \tfrac{j_0 - k_0}{n} \big\rfloor\big)(j_0 - k_0) \equiv (j_1 - q_1)(j_0 - q_0) \bmod n, \tag{6.2}$$

соответствующих различным j_0, j_1 из $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Неизвестными здесь являются k_0, k_1, q_0, q_1 и их нужно искать на множестве $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Удивительно, но система (6.2) может быть решена.

Допустим, что система (6.2) имеет решение. Тогда при $j_0 = k_0$ должно быть

$$(j_1 - q_1)(k_0 - q_0) \equiv 0 \bmod n \quad \forall j_1 = 0, 1, \dots, n-1.$$

В частности, при $j_1 = \langle q_1 + 1 \rangle_n$ получаем $k_0 \equiv q_0 \bmod n$, а поскольку $k_0, q_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, то необходимо $k_0 = q_0$.

При $k_0 = q_0$ система (6.2) перепишется так:

$$\big(q_1 - k_1 + \big\lfloor \tfrac{j_0 - k_0}{n} \big\rfloor\big)(j_0 - k_0) \equiv 0 \bmod n \quad \forall j_0 = 0, 1, \dots, n-1. \tag{6.3}$$

Рассмотрим три случая.

1) $k_0 = 0$. При $j_0 = 1$ согласно (6.3) имеем $q_1 \equiv k_1 \bmod n$, так что $q_1 = k_1$. Нетрудно проверить, что при $k_0 = 0$, $k_1 = q_1 = s$, $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, система сравнений (6.3) выполняется для всех $j_0 = 0, 1, \dots, n-1$ (первая скобка в левой части обращается в ноль).

2) $k_0 = n - 1$. При $j_0 = 0$ согласно (6.3) имеем $q_1 \equiv k_1 + 1 \bmod n$, откуда следует, что $q_1 = \langle k_1 + 1 \rangle_n$. При $k_0 = n-1$, $k_1 = s$, $q_1 = \langle s+1 \rangle_n$, $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, система (6.3) принимает вид $\lfloor (j_0 + 1)/n \rfloor (j_0 + 1) \equiv 0 \bmod n$. Последнее сравнение выполняется при $j_0 \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ за счет первого сомножителя в левой части, а при $j_0 = n-1$ — за счет второго сомножителя.

3) $k_0 \in \{1, \dots, n-2\}$. При $j_0 = k_0 + 1$ и $j_0 = k_0 - 1$ согласно (6.3) имеем

$$q_1 \equiv k_1 \bmod n, \quad q_1 \equiv k_1 + 1 \bmod n.$$

Эти два сравнения несовместны.

Приходим к выводу, что система (6.2) имеет ровно $2n$ решений

$$k_0 = q_0 = 0, \quad k_1 = q_1 = s, \quad s \in \{0, 1, \ldots, n-1\};$$

$$k_0 = q_0 = n-1, \quad k_1 = s, \quad q_1 = \langle s+1 \rangle_n, \quad s \in \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

что соответствует заключению теоремы. ▲

Замечание. При $n = 2$ системы сигналов $\{2^{-1}E(\cdot - k)\}_{k=0}^{3}$ и $\{2^{-1}E(\cdot \underset{n}{\ominus} k)\}_{k=0}^{3}$ совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frank R. L.* Polyphase complementary codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1980. V. 26. N 6. P. 641–647.

2. *Heimiller R. C.* Phase shift pulse codes with good periodic correlation properties // IRE Trans. Inform. Theory. 1961. V. 7. N 4. P. 254–257.

3. *Suehiro N., Hatori M.* Modulatable orthogonal sequences and their application to SSMA systems // IEEE Trans. Inform. Theory. 1988. V. 34. N 1. P. 93–100.

4. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.

5. *Дагман Э. Е., Кухарев Г. А.* Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983.

Поступила в редакцию

ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

V. N. Malozemov, S. M. Masharsky, and K. Yu. Tsvetkov

FRANK SIGNAL AND ITS GENERALIZATIONS