SPb. Math. Society Preprint 2000-13 16 Oct 2000

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА $\mathrm{AP_S}$ И p-ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ (СЛУЧАЙ $1 \leqslant s \leqslant \infty$)

О.И.Рейнов.

Продолжение исследований, начатых в предыдущей работе автора "Аппроксимационные свойства AP_s и p-ядерные операторы (случай $0 < s \leq 1$)" (см. препринт 99-14 СПб МО; статья готовится к печати в Записках научн. сем. ПОМИ, 2000). Изучаются банаховы пространства, обладающие (или не обладающие) аппроксимационными свойствами AP_s, $1 \leq s \leq \infty$, в связи с вопросом, при каких условиях на банаховы пространства X и Y для непрерывного оператора T из X в Y из p-ядерности его второго сопряженного будет следовать p-ядерность самого оператора T. Приводятся некоторые достаточные условия для положительного ответа на этот вопрос. Показывается, что эти условия в некотором смысле необходимы, причем соответствующие контрпримеры устанавливаются в максимально сильной форме. В частности, доказывается что существует такое сепарабельное банахово пространство V с базисом, что для каждого $p \geqslant 1, p \neq 2$, найдется оператор $T \in \mathrm{L}(V,V)$, $T \notin \mathrm{N}_p(V,V)$, для которого T^{**} является p-ядерным. Как и в случае $p < 2$, рассмотренном в предыдущей работе, ранее в подобного рода примерах соответствующие пространства не обладали даже свойством аппроксимации.

Некоторые теоремы явно приспособлены для применения их при построении контрпримеров различного рода, но обычно выделяется какое-то центральное направление в области их приложений. Так, видимо, обстоит дело и с замечательной теоремой Линденштраусса, в которой приводится обобщение конструкций Джеймса банаховых пространств типа знаменитого пространства Джеймса, имеющего коразмерность один в своем втором сопряженном. Речь идет о теореме из работы [Lind]: каждое сепарабельное банахово пространство X является фактором пространства Y^* с ограниченно полным базисом при факторотображении, сопряженное к которому изометрично и дополняемо вкладывает X^* в пространство Y^{**}. Теорема в [Lind], как отмечает автор работы, явилась обобщением основной теоремы Джеймса [James], предназначавшейся для построения пространств следующего типа: само пространство, так же как и все его первые $n+1$ сопряженных пространств, сепарабельно, а $(n+2)$-е сопряженное пространство несепарабельно. Линденштраусс выражает уверенность в том, что "пространства, построенные

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант №97-0-1.7-36) и Федеральной целевой программой "Интеграция" (грант № 326.53).

© О. И. Рейнов, 2000

Джеймсом (или, более общо, в теореме выше), будут полезны в качестве контрпримеров также и в другом контексте". Уже в работе [Lind] сам автор наметил возможную направленность подобных приложений, установив одно "гипотетическое" предложение, которое очень быстро, при широком участии других математиков, обрело реальность. Именно, в предположении, что найдется банахово пространство без свойства аппроксимации (что годом позже подтвердил Энфло [Enflo]), он доказал существование сепарабельного банахова пространства с базисом Шаудера, сопряженное к которому не обладает свойством аппроксимации. После того, как Энфло построил свой известный пример сепарабельного рефлексивного пространства без свойства аппроксимации, теорема Линденштраусса почти моментально нашла свое применение в работе [FJ] для доказательства отличия свойства аппроксимации от свойства ограниченной аппроксимации, а также в конструкции не ядерного оператора с ядерным сопряженным (это были контрпримеры к двум гипотезам А. Гротендика). Таким образом, направление в геометрической теории банаховых пространств, связанное с аппроксимационными условиями различного рода, стало одним из главных направлений в приложениях теоремы Линденштраусса (но приложения, естественно, не ограничиваются рамками банаховой теории аппроксимации).

Автор настоящей заметки также "принял участие" в применении теоремы и тоже при попытках ответить отрицательно на некоторые вопросы, относящиеся к аппроксимации суммирующих и другого типа операторов в банаховых пространствах конечномерными в той или иной топологии. Первая работа автора [ReiDN2] (см. также ее подробное изложение в [ReiMN]) принесла отрицательные ответы на вопросы, подобные вопросам Гротендика, о связи между так называемыми свойствами аппроксимации и ограниченной аппроксимации порядка p при $p > 1$ (для $p = 1$ это соответствующие свойства Гротендика, и с ними разобрались, как отмечалось выше, Фигель и Джонсон). Эти свойства были введены Сафаром [Saph] в 1970 году, который получил много положительных результатов, но результаты отрицательного характера (контрпримеры) появились лишь в 1981 г. Теорема Линденштраусса стала основанием, на котором выросли примеры пространств со свойствами аппроксимации порядка p, но без соответствующих свойств ограниченной аппроксимации, а также примеры не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными. В дальнейшем, снова на основе теоремы Линденштраусса (и примера Энфло), стало возможным, например, упростить конструкцию Фигеля–Джонсона и получить, в некотором смысле, даже более сильный, чем их, результат — см. [ReiOja]. Для нас полезно сказать несколько слов о центральной идее применения в заметке [ReiOja] теоремы Линденштраусса. Она очень проста и суть ее сводится к следующему. Если $z = \sum x_k^* \otimes x_k$ — ненулевой тензорный элемент Энфло, порождающий нулевой ядерный оператор, то при помощи теоремы Линденштраусса мы можем поднять ограниченную последовательность (x_k) без существенного увеличения нормы до последовательности в некотором сепарабельном сопряженном пространстве с базисом, получив ненулевой ядерный оператор, который, однако, наследует некоторые "плохие" свойства начального элемента z.

Дальше уже, имея перед собой определенную цель, нетрудно получить контрпример типа примера Фигеля–Джонсона. Эта же идея проходит (если немного повозиться с чуть более сложной ситуацией) и при рассмотрении "плохих" p-ядерных тензорных элементов для $p \in (1,2)$ (для двойки в принципе не может быть подобных контрпримеров в силу "гильбертовости" показателя $p = 2$). Рассмотрение здесь именно случая $p < 2$ возможно благодаря экстремальной конструкции Энфло. Еще в 1955 г. Гротендик установил, что никакой $2/3$-ядерный тензорный элемент не может порождать нулевой оператор. В примере Энфло построен нулевой оператор, порождаемый ненулевым тензорным элементом, являющимся p-ядерным элементом для любого $p > 2/3$ (см. [Dav], [Ptch]). Для $p > 2$ пример Энфло, либо другие контрпримеры к проблеме аппроксимации Гротендика, соединенные с теоремой Линденштраусса ничего похожего (если пользоваться той же идеей) не дают, поскольку в этой ситуации про последовательность (x_k) известно только, что она слабо p'-суммируема (см. [ReiMN]), тогда как последовательность функционалов (x_k^*) всего лишь абсолютно p-суммируема, и теорема Линденштраусса не гарантирует возможность поднятия последовательности (x_k) до снова слабо p'-суммируемой последовательности. В этой ситуации нужно некоторое обобщение теоремы Линденштраусса, некая модифицированная конструкция пространства Линденштраусса, для которой уже станет возможным поднимать слабо суммируемые последовательности при факторотображениях до снова же слабо суммируемых последовательностей так, чтобы "плохие" свойства ненулевых p-ядерных тензорных элементов наследовались "поднятыми" до пространства с базисом p-ядерными тензорными элементами или, что в случае пространства с базисом то же, p-ядерными операторами. Одна из основных целей данной работы — привести это обобщение и ряд его применений.

§0. Предварительные сведения

Все рассматриваемые нами пространства $X, Y, Z, \ldots$ — банаховы. Элементы этих пространств мы обычно обозначаем соответствующими строчными буквами: $x \in X$, $y \in Y, \ldots$, $x^* \in X^*$, $y^{**} \in Y^{**}, \ldots$. Функционалы будут также обозначаться через f и т.п., а значения их, например, функционала x^* или f, на элементе x — либо через $\langle x^*, x\rangle$, $\langle f, x^*\rangle$, либо через $x^*(x)$, $f(x)$; эти обозначения равноправны. Если надо указать пространство, в котором рассматривается норма $\|\cdot\|$ элемента $x \in X$, то мы пишем $\|x\|_X$. Обозначения для последовательности элементов некоторого множества: $(f_k), (f_k)_k$ и т.д., для замкнутой линейной оболочки B — $[B]$; значение отображения на некотором элементе — $Ax, A(x)$; для образа отображения используем как обозначение типа $\varphi^* X^*$, так и типа $\varphi(E)$.

Обозначения l_p, c_0 стандартны; нормы в этих пространствах мы также обозначаем через $\|\alpha\|_p = \|\alpha\|_{l_p}$ для $\alpha = (\alpha_k) \in l_p$ и $\|\alpha\|_\infty = \|\alpha\|_{c_0}$ во втором случае; r' - сопряженный с r показатель (но в §1 мы используем и другое обозначение при доказательстве леммы 1.3). Договоримся под l_p при $p = \infty$ понимать пространство c_0.

Мы говорим, что банахово пространство X *вполне сепарабельно,* если все его

сопряженные пространства $X^*, X^{**}, \ldots$ сепарабельны.

Через $\mathrm{L}(X,Y)$ обозначается пространство всех (линейных непрерывных) операторов из X в Y со стандартной нормой (вообще, в данной работе под термином "оператор" всегда будет пониматься линейный непрерывный оператор).

Мы используем стандартные обозначения из теории операторных идеалов — Π_p, QN_p, N_p, I_p — определения этих классов можно найти в [Ptch], [Pers], [PersPi], [GLR] (абсолютно p-суммирующие, квази-p-ядерные, p-ядерные, p-интегральные в смысле Гротендика операторы; рассматриваются те значения показателей, для которых имеет смысл соответствующее обозначение). Далее, $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ — квазинормированный идеал таких операторов T, что второй сопряженный к T оператор лежит в N_p. Нетрудно понять, что $T \in \mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $\pi_Y T \in \mathrm{N}_p(X,Y^{**})$, где, как обычно принято, через π_Y обозначается каноническое изометрическое вложение пространства Y в его второе сопряженное Y^{**} (часто мы будем опускать индекс, указывающий на то, какое пространство вкладывается в свое второе сопряженное, — из контекста будет понятно, где действует оператор π. Кроме того, если это не приводит к недоразумению, мы иногда будем считать, что рассматриваемое банахово пространство является подпространством своего второго сопряженного, — это удобно, в частности, для упрощений некоторых формул). Нормы в указанных операторных пространствах будут обозначаться, соответственно, через π_p — для первых двух, ν_p и i_p — для второй пары. Отметим, что если пространство X рефлексивно или имеет сепарабельное сопряженное, то $\Pi_p(X,Y) = \mathrm{QN}_p(X,Y)$ и $\mathrm{I}_p(X,Y^{**}) = \mathrm{N}_p(X,Y^{**})$ для всякого банахова пространства Y и любого $p \in [1,\infty)$ (см. [Pers], [ReiDAN]).

Если $0 < p \leqslant \infty$, то через $X^* \widehat{\otimes}_p Y$ обозначается ассоциированное с пространством $N_p(X,Y)$ p-проективное тензорное произведение. Удобно будет использовать обозначение $\widetilde{z}$ для оператора, порождаемого некоторым тензорным элементом $z \in X^* \widehat{\otimes}_p Y$, а также иногда через $A \circ z$ суперпозицию A и z, где A, z — тензоры или операторы. В основном, кружок мы будем использовать тогда, когда один из символов A, Z обозначает тензорный элемент.

Напомним, что если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то $(X^* \widehat{\otimes}_p Y)^* = \Pi_{p'}(Y, X^{**})$ с естественной двойственностью, определяемой при помощи следа суперпозиции операторов [Saph], [Ptch].

Пусть $p \in (0,\infty]$. Говорят, что банахово пространство Y *обладает свойством* AP_p *аппроксимации порядка* p (коротко — $Y \in \mathrm{AP}_p$), если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно (и, следовательно, $X^* \widehat{\otimes}_p Y = \mathrm{N}_p(X,Y)$). При $p \in [1,\infty]$ пространство Y *обладает свойством* BAP_p, если для любого X естественное отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{I}_p(X,Y)$ есть C-изометрическое вложение для некоторого числа $C \geq 1$; в случае, когда константу C можно взять равной 1, говорят, что Y обладает свойством MAP_p.

Если $p = 1$, то мы используем общепринятые в этом случае аббревиатуры AP, BAP, MAP, и говорим просто о свойствах аппроксимации, ограниченной аппроксимации и метрической аппроксимации.

Если X^* или Y обладает свойством аппроксимации и $p \in [1,\infty]$, то $\mathrm{QN}_p(X,Y)^* = \mathrm{I}_{p'}(Y,X^{**})$.

В одном месте работы нам будет удобно использовать еще и такое обозначение: $X^* \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$, если для любого Y естественное отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно. Понятно, что это некоторое новое аппроксимационное условие, налагаемое на пространство X^*, и можно определить соответствующие аппроксимационные свойства для произвольного не обязательно сопряженного пространства. Мы однако, по крайней мере в этой работе, не пойдем так далеко и не станем исследовать банаховы пространства, обладающие подобными аппроксимационными свойствами, а ограничимся всего лишь введенным обозначением.

Будем говорить, что оператор $T : X \to Y$ (*компактно*) *факторизуется через пространство* Z, если найдутся два (компактных) оператора $A : X \to Z$ и $B : Z \to Y$, для которых $T = BA$. Если $Z = L_p(\mu)$, то говорят о *p-факторизуемых операторах* (основную информацию об идеале таких операторов можно найти в [Ptch]).

В §1 нам понадобятся некоторые более конкретные понятия и один простой факт, которые мы сейчас и вспомним.

Пусть $0 < r \leqslant \infty$. Последовательность (z_k) элементов нормированного пространства Z называется *слабо r-суммируемой,* если $(\langle z^*, z_k\rangle) \in l_r$ для всех функционалов $z^* \in Z^*$. Мы полагаем $\varepsilon_r(z_k) := \sup\{\|(\langle z^*, z_k\rangle)\|_{l_r} : \|z^*\| \leqslant 1\}$.

Пусть $r \geqslant 1$ и (h_k) обозначает стандартную последовательность ортов пространства l_r (в случае $r = \infty$ мы сейчас рассматриваем пространство c_0). Без труда проверяется, что последовательность (z_k) элементов пространства Z является слабо r-суммируемой тогда и только тогда, когда вполне определен и ограничен линейный оператор $T : l_{r'} \to Z$, заданный соотношениями $Th_k := z_k$; при этом $\|T\| = \varepsilon_r(z_k)$.

Напомним, что базис Шаудера (z_k) банахова пространства Z называется *ограниченно полным,* если для всякой числовой последовательности (a_k) такой, что $\sup_N \|\sum_{k=1}^N a_k z_k\| < \infty$, ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k z_k$ сходится, и называется *натягивающим базисом,* если биортогональная с ним система функционалов образует базис сопряженного пространства Z^*. Если базис натягивающий, то биортогональная система функционалов — ограниченно полный базис. Если базис (z_k) ограниченно полный, то пространство Z изоморфно сопряженному пространству, точнее, пространству, сопряженному к линейной оболочке биортогональной системы функционалов этого базиса; в случае, когда ограниченно полный базис является монотонным, Z даже изометрично указанному сопряженному пространству (подробности и другие свойства базисов можно найти в монографии [LiTz, раздел 1.b]).

Следующий факт, конечно, хорошо известен, но поскольку мы не можем привести конкретную ссылку на соответствующую литературу, то приведем его доказательство. Под единичным элементом нормированного пространства будем понимать любой элемент единичной нормы.

Лемма 0.1. *Всякий единичный элемент пространства X разлагается в абсолютно сходящийся ряд по любой заранее фиксированной ε-сети единичной сферы*

$S(X)$ пространства X $(0 < \varepsilon < 1)$. При этом, разумеется, сама сеть не обязана лежать на этой сфере.

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, V — ε-сеть для сферы $S(X)$. Возьмем произвольный элемент $x \in S(X)$ и выберем для него такой $x_1 \in V$, что $\alpha_2 := \|x - x_1\| \leqslant \varepsilon$. Далее, найдем $x_2 \in V$, для которого $\left\| \dfrac{x - x_1}{\|x - x_1\|} - x_2 \right\| \leqslant \varepsilon$ и положим $\alpha_3 := \|x - x_1 - \alpha_2\, x_2\|$. Теперь выберем такой $x_3 \in V$, что

$$\left\| \frac{x - x_1 - \alpha_2\, x_2}{\|x - x_1 - \alpha_2\, x_2\|} - x_3 \right\| \leqslant \varepsilon$$

и положим $\alpha_4 := \|x - x_1 - \alpha_2\, x_2 - \alpha_3\, x_3\|$ и т.д.. Мы получим разложение элемента x в сходящийся ряд:

$$x = x_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3 + \ldots, \qquad x_k \in V,\ |\alpha_k| \leqslant \varepsilon^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \square$$

В частности, если $\{x_n\}$ — счетное всюду плотное на единичной сфере пространства X множество, последовательность единичных элементов $\{e_n\}$ из нормированного пространства E порождает все E и линейное отображение, переводящее e_n в x_n, непрерывно, то его образ есть все пространство X. Действительно, можно рассмотреть дополнительно естественное отображение $l_1 \to E$, переводящее базисные векторы пространства l_1 в элементы e_n (оно, конечно, непрерывно) и взять суперпозицию $l_1 \to E \to X$, которая будет действовать "на" по вышесказанному, и тем более, образ E накроет все пространство X.

§1. Обобщение теоремы Й. Линденштраусса

Под *факторотображением* из пространства Y на пространство X мы понимаем такое отображение $\varphi : Y \to X$, что естественное отображение из $Y/\operatorname{Ker}\varphi$ на X есть изометрия. Через $\pi : Y \to Y^{**}$ ниже обозначается каноническое вложение пространства Y в его второе сопряженное Y^{**}.

Теорема 1.1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства X существует сепарабельное банахово пространство Y, обладающее следующими свойствами.*

1) *Y имеет монотонный натягивающий базис и, следовательно, сопряженное пространство Y^* сепарабельно и имеет монотонный ограниченно полный базис;*

2) *существует факторотображение φ из Y^* на X;*

3) *$Y^{**} = \pi Y \oplus \varphi^* X^*$ (и, следовательно, Y^{**} изоморфно пространству $Y \oplus X^*$).*

4) *Для всякого $\varepsilon > 0$, любого $r \in [1, +\infty)$ и для каждой слабо r-суммируемой последовательности (z_k) в X существует такая слабо r-суммируемая последовательность (y_k^*) в Y^*, что $\varphi(y_n^*) = z_n, n = 1, 2, \ldots$, и $\varepsilon_r(y_n^*) \leqslant \varepsilon_r(z_n) + \varepsilon$.*

Доказательство теоремы мы разобьем на несколько шагов. Начнем с определения пространства Y.

Пусть $S = \{x_i\}$ — счетное всюду плотное подмножество единичной сферы пространства X. Рассмотрим пространство E_1 всех вещественных последовательностей $\alpha = (\alpha_j)$, для которых

$$\|\alpha\| := \sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|=1}} \left\{ \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{0=n_0<n_1<\dots<n_k} \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \langle f, \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i x_i \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \right\} < \infty. \tag{1.1}$$

Отметим сразу, что из (1.1) моментально вытекает тот факт, что для $\alpha \in E_1$ все нормы вида $\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \|$ не превосходят $\|\alpha\|$.

Далее, для каждого $f \in X^*$ ряд $\sum_i \langle f, \alpha_i x_i \rangle$ сходится. Действительно, пусть подобный ряд расходится. Тогда он не сходится в себе, и для некоторого $\varepsilon > 0$ мы можем найти цепочку $0 < l_1 < m_1 < l_2 < m_2 < \dots < l_k < m_k < \dots$ натуральных чисел, для которой любой отрезок ряда вида $\sum_{i=l_k+1}^{m_k} \langle f, \alpha_i x_i \rangle$ будет по модулю больше ε. Это противоречит условию (1.1).

Таким образом, ряд $\sum_i \alpha_i x_i$ слабо сходится в себе и, следовательно, *-слабо сходится в пространстве X^{**} к некоторому элементу, который мы обозначим через $\varphi(\alpha)$. Формула $\varphi(\alpha) := w^*\text{-}\lim_N \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$ определяет естественное отображение $\varphi : E_1 \to X^{**}$, причем понятно, что $\|\varphi\| \leqslant 1$.

Пусть (e_k) — последовательность ортов в пространстве E_1.

Лемма 1.2. *Последовательность ортов образует ограниченно полный монотонный базис в пространстве E_1.*

Доказательство. Для $f \in X^*$ и $\alpha \in E_1$ обозначим через $(f;\alpha)$ величину, стоящую в фигурных скобках формулы (1.1). Предположим, что для некоторой числовой последовательности α $\sup_N \| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \| =: C < \infty$. Тогда, по определению нормы (1.1), последовательность α лежит в E_1 (и $\|\alpha\| = C$). Нам надо показать, что ряд $\sum_1^\infty \alpha_i e_i$ сходится в E_1.

Введем еще пару обозначений: если $\alpha \in E_1$, то $\alpha_{(N)} := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, 0, 0, \dots)$ и $\alpha^{(N)} := (0, 0, \dots, 0, \alpha_{N+1}, \alpha_{N+2}, \dots) = \alpha - \alpha_N$. Заметим, что, во-первых, $\|\alpha^{(N)}\| \searrow$, $\|\alpha_{(N)}\| \nearrow \|\alpha\|$ и, во-вторых, для любого $f \in X^*$ $(f;\alpha_{(N)}) \nearrow$ и $(f;\alpha^{(N)}) \searrow 0$ (если последнее предельное соотношение не верно, то мы применим стандартный метод "скользящего горба" для получения противоречия с ограниченностью последовательности $\left((f;\alpha_{(N)})\right)$).

Пусть $\varepsilon := \lim_N \|\alpha^{(N)}\| > 0$ (т.е. интересующий нас ряд не сходится). Для каждого N выберем в X^* такой функционал f_N единичной нормы, что $(f_N;\alpha^{(N)}) \geqslant 1/2\,\|\alpha^{(N)}\|$ $(\geqslant \varepsilon/2 > 0)$. В силу сепарабельности пространства X, существует подпоследовательность $(f_{N_j})_j$, *-слабо сходящаяся в X^* к некоторому функционалу f. Так как для каждого натурального N выполняются соотношения $(f;\alpha) \geqslant (f;\alpha^{(N)})$ и $(f_N;\alpha) \geqslant (f_N;\alpha^{(N)}) \geqslant \varepsilon/2$, то $(f;\alpha) \geqslant \underline{\lim}_j (f_{N_j};\alpha) \geqslant \varepsilon/2$ и, аналогично, $(f;\alpha^{(K)}) \geqslant \varepsilon/2$ для любого $K \geqslant 1$. С другой стороны, из определения $(f;\alpha)$ и ограниченности последовательности $\left((f;\alpha_{(N)})\right)$, как отмечалось, вытекает, что $(f;\alpha^{(K)}) \to 0$. $\square$

Положим $E := \varphi^{-1}(X) \subset E_1$. Так как $\varphi(e_k) = x_k$ и множество S плотно на сфере пространства X, то φ отображает E на все пространство X, причем $\|\varphi\| = 1$, а поскольку семейство (e_k) образует ограниченно полный монотонный базис в своей замкнутой линейной оболочке, то на самом деле $E_1 = E, \varphi$ действует из E на X и $E = Y^*$, где Y — подпространство в E^*, порожденное биортогональными функционалами (f_k) к базису (e_k). В частности, *-слабый предел в определении отображения φ можно заменить на слабый предел. Более того, всякий (слабо сходящийся) ряд $A := \sum \alpha_j x_j$, где $\alpha = (\alpha_j) \in E$, на самом деле сходится по норме в X, так как $A = \varphi(\alpha) = \varphi(\sum \alpha_j e_j)$ и отображение φ непрерывно.

Итак:

1) E есть банахово пространство всех числовых последовательностей, удовлетворяющих условию (1.1), в котором семейство (e_j) ортов образует монотонный ограниченно полный базис;

2) E изометрично пространству Y^*, сопряженному к некоторому банахову пространству Y, причем при естественном вложении π подпространство $\pi Y \subset Y^{**}$ есть замкнутая линейная оболочка $[f_j]$ множества биортогональных функционалов (f_j) к базису (e_j); само семейство (f_j) образует натягивающий базис в своей оболочке $[f_j]$; далее мы отождествляем пространства E и Y^*;

3) отображение $\varphi : E \to X, \varphi(\alpha) = \sum \alpha_j x_j$ (ряд сходится в X), есть факторотображение из Y^* на X (поскольку $\varphi(e_k) = x_k$) и, таким образом, $\varphi^* : X^* \to Y^{**}$ — изометрическое вложение.

Если $u = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j f_j \in \pi Y$, то $\beta_j \to 0$. Поэтому, как и в [Lind], для $x^* \in X^*$ имеем:

$$\|\varphi^*(x^*) + u\| \geqslant \sup_i |(\varphi^*(x^*) + u)(e_i)| =$$
$$= \sup_i |\langle x^*, x_i\rangle + \beta_i| \geqslant \overline{\lim}_i |\langle x^*, x_i\rangle| = \|x^*\| = \|\varphi^*(x^*)\|.$$

Следовательно, $\pi Y \cap \varphi^* X^* = \{0\}$ и естественный проектор из $\pi Y + \varphi^* X^*$ на $\varphi^* X^*$ с ядром πY есть проектор единичной нормы.

Лемма 1.3. *Для всякого $\varepsilon > 0$, любого $r \in [1, +\infty)$ и для каждой слабо r-суммируемой последовательности (z_k) в X существует такая слабо r-суммируемая последовательность (y_k^*) в Y^*, что $\varphi(y_n^*) = z_n, n = 1, 2, \ldots$, и $\varepsilon_r(y_n^*) \leqslant \varepsilon_r(z_n) + \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $r \in [1, +\infty)$ и (z_k) — произвольная слабо r-суммируемая последовательность в X. Мы будем считать, что $\|z_k\| \leqslant 1$ для каждого k. Пусть, далее, $(\varepsilon_k) \in l^1, \delta := \sum_1^{\infty} \varepsilon_k$ и $w_k := x_{m_k}$ $(m_1 < m_2 < \ldots)$ — такая последовательность элементов множества S, что $\left\| w_k - \dfrac{z_k}{\|z_k\|} \right\|_X < \varepsilon_k$ для всякого k. Наконец, пусть $(\overline{y}_k^*)$ — последовательность элементов Y^*, для которой $\|e_{m_k} - \overline{y}_k^*\|_E < \varepsilon_k$ и $\varphi(\overline{y}_k^*) = \dfrac{z_k}{\|z_k\|}$. Мы утверждаем, что элементы $y_k^* := \|z_k\| \, \overline{y}_k^*$ образуют нужную нам слабо r-суммируемую последовательность в Y^*.

Для доказательства рассмотрим линейный оператор (формально заданный на финитных последовательностях) $T : l_s \to E$, где $1/s + 1/r = 1$, определяемый

соотношениями $Th_k = y_k^*, k \geqslant 1$ (здесь h_k — k-й орт в l_s). Имеем для $\alpha \in l_s$ (при $s = \infty$ нужна соответствующая модификация):

$$\|T\alpha\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k^* \right\|_E \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\|z_k\| \, \overline{y}_k^* - \|z_k\| \, e_{m_k} \right) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|z_k\| \, e_{m_k} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^s \right)^{1/s} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\overline{y}_k^* - e_{m_k}\|^r \right)^{1/r} + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|z_k\| \, e_{m_k} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\alpha\|_s \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|z_k\| \, e_{m_k} \right\|.$$

Оценим второе слагаемое в последней сумме. Для $k \in \mathbb{N}, 0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ и $f \in X^*, \|f\| \leqslant 1$:

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \langle \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \|z_i\| \, w_i, f \rangle \right|^2 = \sum_{j=1}^{k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \langle \|z_i\| \, w_i, f \rangle \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \langle z_i, f \rangle \right| + \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \langle \|z_i\| \left(w_i - \frac{z_i}{\|z_i\|} \right), f \rangle \right| \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \langle z_i, f \rangle \right| + \|\alpha\|_s \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \varepsilon_i \right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \langle z_i, f \rangle \right|^2 +$$

$$+ 2 \, \|\alpha\|_s \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \langle z_i, f \rangle \right| \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k + \|\alpha\|_s^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \langle z_i, f \rangle \right|^2 + 2 \, \|\alpha\|_s^2 \, \varepsilon_r(z_n) \, \delta + \|\alpha\|_s^2 \, \delta^2.$$

При $s \geqslant 2$ (и, следовательно, $r \leqslant 2$) имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \, \langle z_i, f \rangle \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\alpha_i|^s \right)^{2/s} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f \rangle|^r \right)^{2/r} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\alpha_i|^s \right)^{2/s} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f \rangle|^r \right)^{2/r} \leqslant \|\alpha\|_s^2 \, \varepsilon_r(z_n)^2.$$

При $s \in [1,2]$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\alpha_i|^s \right)^{2/s} \max_{1\leqslant j\leqslant k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f\rangle|^r \right)^{2/r} \leqslant \|\alpha\|_s^2 \, \varepsilon_r(z_n)^2 .$$

При $s = \infty$:

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\max_i |\alpha_i| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f\rangle| \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \max_{n\geqslant 1} |\alpha_n|^2 \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f\rangle| \right)^2 \leqslant \|\alpha\|_{c_0}^2 \, \varepsilon_1\left((z_n)\right)^2 .$$

Следовательно, $\|T\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_s \, \delta + \left(\|\alpha\|_s^2 \varepsilon_r(z_n)^2 + 2\,\|\alpha\|_s^2 \varepsilon_r(z_n)\,\delta + \|\alpha\|_s^2 \delta^2 \right)^{1/2}$, откуда $\|T\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_s \left(\varepsilon_r(z_n) + o(1)\right)$ при $\delta \to 0$, т.е. $\|T\| \leqslant \varepsilon_r(z_n) + o(1)$ при $\delta \to 0$. Так как (y_n^*) есть образ последовательности ортов пространства l_s при отображении T, то из последнего вытекает, что при достаточно малом $\delta > 0$ будет выполняться неравенство $\varepsilon_r(y_n^*) \leqslant \varepsilon_r(z_n) + \varepsilon$; в частности, последовательность (y_n^*) слабо r-суммируема и по построению ее образ при отображении φ есть последовательность (z_n). $\square$

Осталось установить, что $Y^{**} \subset \pi Y \oplus \varphi^* X^*$.

Подпространство $W := \pi Y \oplus \varphi^* X^*$ замкнуто в Y^{**}, поскольку естественные проекторы из W на обе компоненты прямой суммы непрерывны и каждая из этих компонент замкнута в полном пространстве Y^{**}.

Поэтому (вспомним лемму 0.1) достаточно, как и в [Lind], показать, что подпространство $W \subset Y^{**}$ образует 15/16-сеть для единичной сферы пространства Y^{**}.

Предварительно, докажем следующую лемму (мы следуем идее из [Lind]).

Лемма 1.4. *Пусть множество A состоит из всех элементов $u \in \pi Y$, для которых существуют такие целые числа k, $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k$, функционал $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leqslant 1$, и набор чисел $(\mu_j)_{j=1}^k$, что*

$$u = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mu_j \langle x^*, x_i\rangle \, f_i, \qquad \sum_{j=1}^{k} |\mu_j|^2 \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Для $1 \leqslant k_0 \leqslant k$ обозначим через t часть $\sum_{j=1}^{k_0}$ суммы в (1.2), а через z — оставшуюся часть $\sum_{j=k_0+1}^{k}$. Тогда $\|t\|^2 + \|z\|^2 \leqslant 1$. В частности, множество A лежит в замкнутом единичном шаре подпространства $\pi Y \subset Y^{**}$. Более того, $\|\cdot\|$-замкнутая выпуклая оболочка множества A совпадает с этим шаром.

Доказательство. Пусть $u \in A$ и (1.2) — одно из его представлений. Пусть, далее, единичные элементы $\alpha^t, \alpha^z \in E$ таковы, что для заранее фиксированного $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения $\langle t, \alpha^t\rangle^2 \geqslant \|t\|^2 - \varepsilon$ и $\langle z, \alpha^z\rangle^2 \geqslant \|z\|^2 - \varepsilon$. Тогда

$$\langle t, \alpha^t\rangle^2 + \langle z, \alpha^z\rangle^2 =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k_0} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mu_j\, \alpha_i^t\, \langle x^*, x_i\rangle\right)^2 + \left(\sum_{j=k_0+1}^{k} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mu_j\, \alpha_i^z\, \langle x^*, x_i\rangle\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k_0} |\mu_j|^2 \sum_{j=1}^{k_0} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i^t\, \langle x^*, x_i\rangle\right)^2 + \sum_{j=k_0+1}^{k} |\mu_j|^2 \sum_{j=k_0+1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i^z\, \langle x^*, x_i\rangle\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} |\mu_j|^2 \leqslant 1$$

и $\|t\|^2 + \|z\|^2 \leqslant 1 + 2\varepsilon$.

Если наше последнее утверждение не верно, то найдется точка $\alpha \in E = Y^*$, $\|\alpha\| = 1$, для которой $a := \sup\{\langle u, \alpha\rangle : u \in A\} < 1$.

Пусть целые числа k, $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k$, и функционал $x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1$, таковы, что

$$1 = \|\alpha\| \geqslant \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i\, \langle x^*, x_i\rangle\right)^2\right)^{1/2} \geqslant \sqrt{(1+a)/2}.$$

Пусть, далее, в этой ситуации u определяется формулой (1.2), где для каждого j

$$\mu_j := \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i\, \langle x^*, x_i\rangle.$$

Тогда $u \in A$ и

$$\langle u, \alpha\rangle = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \mu_j\, \alpha_i\, \langle x^*, x_i\rangle = \sum_{j=1}^{k} |\mu_j|^2 \geqslant (1+a)/2 > a,$$

что противоречит определению числа a. $\square$

Нам удобно переписать соотношение (1.2) в несколько другом виде — так, чтобы получить полный аналог формулы (1) из [Lind]. Положим в (1.2) $x_j^* := \mu_j\, x^*$. Тогда (1.2) превращается в соотношение

$$u = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \langle x_j^*, x_i\rangle\, f_i, \qquad \sum_{j=1}^{k} \|x_j^*\|^2 \leqslant 1. \tag{1.3}$$

Итак, почему подпространство $W \subset Y^{**}$ образует 15/16-сеть для единичной сферы пространства Y^{**}?

Ниже в обозначениях и рассуждениях мы следуем работе [Lind]. Мы обязаны привести целиком эти рассуждения, поскольку теорема 1.1 является самым важным инструментом получения большинства наших следующих результатов[1]. Всякое целое n_j, появляющееся в соотношении (1.3), мы будем называть *точкой разделения* для $u \in A$.

Пусть $y^{**} \in Y^{**}$, $\|y^{**}\| = 1$. Пусть, далее,

$$v_m := \sum_{l=1}^{\gamma_m} \lambda_{l,m} u_{l,m}, \quad \lambda_{l,m} \geqslant 0, \quad \sum_{l=1}^{\gamma_m} \lambda_{l,m} = 1, \quad u_{l,m} \in A, \tag{1.4}$$

и v_m *-слабо сходится к y^{**} при $m \to \infty$. Такая последовательность существует в силу *-слабой плотности единичного шара подпространства πY в единичном шаре пространства Y^{**}, сепарабельности пространства $Y^* = E$ и последнего утверждения из леммы 1.4.

Случай a). Существует такое целое i_0, что для любого $i > i_0$

$$\overline{\lim}_m {\sum}' \lambda_{l,m} \geqslant 1/8,$$

где $\sum'$ означает суммирование только по тем индексам l, для которых $u_{l,m}$ не имеет точки разделения между i_0 и i.

В этом случае, используя соображения компактности, мы можем считать, что $v_m = v'_m + v''_m$, где $v'_m = \sum' \lambda_{l,m}\, u_{lm}$, каждый элемент $u_{l,m}$ в последней сумме не имеет точки разделения между i_0 и некоторым i_m, $\sum' \lambda_{l,m} \geqslant 1/16$, $\lim_m i_m = \infty$ и v''_m *-слабо сходится к некоторой точке $z^{**} \in Y^{**}$. Так как $\|v''_n\| \leqslant 15/16$, то $\|z^{**}\| \leqslant 15/16$, при этом $y^{**} - z^{**} = w^*\text{-}\lim_m v'_m$. Из (1.3) и (1.4) и из предположения об элементах $u_{l,m}$, которые входят в сумму v'_m, вытекает, что существует такой $t'_m \in X^*$, что $\|t'_m\| \leqslant \sum' \lambda_{l,m} \leqslant 1$ и $v'_m(e_i) = t'_m(x_i)$ для $i_0 \leqslant i \leqslant i_m$. Мы можем считать, что t'_m *-слабо сходится к некоторой точке t^*. Для $i \geqslant i_0$ имеем:

$$(y^{**} - z^{**})(e_i) = t^*(x_i) = \varphi^* t^*(e_i),$$

т.е. $y^{**} - z^{**}$ отличается от $\varphi^* t^*$ на элемент из линейной оболочки $[f_i]_{i=1}^{i_0}$ и, таким образом, лежит в πY. Следовательно, $d(y^{**}, W) \leqslant \|z^{**}\| \leqslant 15/16$.

Случай b). Не существует целого i_0, удовлетворяющего условию случая a).

[1] Кроме того, доказательство теоремы из статьи [Lind] отсутствует в русской математической литературе, а ее оригинал, может быть, трудно доступен в России. Поэтому включение в нашу работу основной части доказательства теоремы Линденштраусса вполне целесообразен и с этой точки зрения.

Пусть i_0 таково, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{i_0} y^{**}(e_i)\, f_i \right\| \geqslant 7/8. \tag{1.5}$$

Выбор такого числа i_0 возможен, поскольку сумма из левой части неравенства (1.5) *-слабо сходится к y^{**} при $i_0 \to \infty$. Существует такое целое $i_1 > i_0$, что для всех достаточно больших m

$$\sum\nolimits'' \lambda_{l,m} \geqslant 7/8,$$

где суммирование в $\sum''$ происходит по всем тем индексам l, для которых $u_{l,m}$ имеет точку разделения между i_0 и i_1.

Для каждого l, входящего в $\sum''$, обозначим через $i(l,m)$ первую после i_0 точку разделения для $u_{l,m}$ (так что $i(l,m) \leqslant i_1$) и представим $u_{l,m}$ в виде $u_{l,m} = t_{l,m} + z_{l,m}$, где $t_{l,m} \in \pi Y$ определяется соотношениями

$$t_{l,m}(e_i) = \begin{cases} u_{l,m}(e_i), & i \leqslant i(l,m), \\ 0, & i > i(l,m). \end{cases}$$

Из леммы 1.4 вытекает, что

$$\|t_{l,m}\|^2 + \|z_{l,m}\|^2 \leqslant 1. \tag{1.6}$$

Пусть $t_m := \sum'' \lambda_{l,m}\, t_{l,m}$, $z_m := \sum'' \lambda_{l,m}\, z_{l,m}$ и $v'_m := v_m - (t_m + z_m)$. Тогда $\|v'_m\| \leqslant 1 - \sum'' \lambda_{l,m} \leqslant 1/8$ и $z_m(e_i) = 0$ для $i \leqslant i_0$. По соображениям компактности можно считать, что существуют пределы

$$v^{**} := w^*\text{-}\lim v'_m,\ t^{**} := w^*\text{-}\lim t_m,\ z^{**} := w^*\text{-}\lim z_m.$$

Ясно, что $\|v^{**}\| \leqslant 1/8, y^{**} = v^{**} + t^{**} + z^{**}$ и $z^{**} = 0$ для $i \leqslant i_0$. Поэтому из (1.5) вытекает, что

$$\|t^{**}\| \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{i_0} t^{**}(e_i)\, f_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{i_0} (y^{**} - v^{**})(e_i)\, f_i \right\| \geqslant 7/8 - \|v^{**}\| \geqslant 3/4.$$

Следовательно,

$$3/4 \leqslant \underline{\lim}_m \|t_m\| \leqslant \underline{\lim}_m \sum\nolimits'' \lambda_{l,m}\, \|t_{l,m}\|. \tag{1.7}$$

Напомним элементарное числовое неравенство (3) из [Lind], которое используется далее. Если α_i, β_i и λ_i — такие неотрицательные числа, что $\sum_i \lambda_i \leqslant 1$ и $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \leqslant 1$ для всех i, то

$$\left(\sum_i \alpha_i \lambda_i \right)^2 + \left(\sum_i \beta_i \lambda_i \right)^2 \leqslant \left(\sum_i \lambda_i \right) \left(\sum_i \lambda_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \right) \leqslant 1. \tag{1.8}$$

Из (1.6), (1.7) и (1.8) вытекает, что

$$\|z^{**}\| \leqslant \overline{\lim}_m {\sum}'' \lambda_{l,m} \|z_{l,m}\| \leqslant (1-(3/4)^2)^{1/2} = \sqrt{7}/4.$$

Так как $t^{**} \in [f_i]_{i=1}^{i_1} \subset \pi Y$, то $d(y^{**}, W) \leqslant \|v^{**}\| + \|z^{**}\| \leqslant 1/8 + \sqrt{7}/4 < 15/16$. $\square$

Замечание 1.5. Представляется интересным следующая переформулировка теоремы 1.1: для любого сепарабельного банахова пространства X существует сепарабельное банахово пространство Y, обладающее свойствами 1)–3) из теоремы 1.1 и такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ и любого $p \in [1, +\infty]$ каждый оператор $T : l_p \to X$ может быть поднят (относительно факторотображения φ) до непрерывного линейного оператора $\widetilde{T} : l_p \to Y^*$ так, что $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\| + \varepsilon$.

Следствие 1.6. *Для любого сепарабельного пространства X существует такое сепарабельное банахово пространство Z, что*

(i) Z^{**} сепарабельно и имеет базис;

(ii) существует линейный гомоморфизм ψ из Z^{**} на X с ядром πZ и такой, что подпространство $\psi^* X^*$ дополняемо в Z^{***};

(iii) для всякого $\varepsilon > 0$, любого $r \in [1, +\infty)$ и для каждой слабо r-суммируемой последовательности (x_k) в X существует такая слабо r-суммируемая последовательность (z_k^{**}) в Z^{**}, что $\psi(z_k^{**}) = x_k, k = 1, 2, \ldots$, и $\varepsilon_r(z_k^{**}) \leqslant (2+\varepsilon)\,\varepsilon_r(x_k)$.

Доказательство. Пусть Y и $\varphi : Y^* \to X$ — из теоремы 1.1, $Z := \operatorname{Ker} \varphi, I : Z \to Y^*$ — тождественное вложение. Положим $T := I^* \pi_Y : Y \to Y^{**} \to Z^*$. Тогда T есть изоморфизм из Y на Z^* и, так как

$$\langle T^* \pi_Z z, y\rangle = \langle \pi_Z z, Ty\rangle = \langle Ty, z\rangle = \langle I^* \pi_Y y, z\rangle = \langle \pi_Y y, Iz\rangle = \langle Iz, y\rangle,$$

то $T^* \pi_Z = I$. Поэтому T^* — изоморфизм из Z^{**} на Y^*, индуцирующий изоморфизм $T' : Z^{**}/\pi_Z Z \to Y^*/IZ$. Если $\psi := \varphi T^*$, то ψ — гомоморфизм и подпространство $\psi^* X^* = T^{**} \varphi^* X^*$ дополняемо в $Z^{***} = T^{**} Y^{**}$.

Пусть (x_n) — слабо r-суммируемая последовательность в X. По выбору пары Y и φ можно найти такую слабо r-суммируемую последовательность (y_n^*), что $\varphi(y_n^*) = x_n$ для каждого n. Так как $(T^*)^{-1}$ есть изоморфизм, то, полагая $z_n^{**} := (T^*)^{-1} y_n$, получаем слабо r-суммируемую последовательность, чей образ при отображении ψ есть последовательность (x_n). Остается заметить, что $\|(T^*)^{-1}\| \leqslant 2$. $\square$

Следствие 1.7. *Для любого сепарабельного пространства X существует такие сепарабельное банахово пространство Z и гомоморфизм ψ из Z^{**} на X с ядром πZ, что подпространство $\psi^* X^*$ дополняемо в Z^{***} и для любого $p \in [1, \infty)$ имеют место утверждения:*

а) для любых банахова пространства E и отображения $T \in \mathrm{L}(X, E)$ оператор $T\psi$ является абсолютно p-суммирующим тогда и только тогда, когда абсолютно p-суммирующим является оператор T; при этом $\pi_p(T\psi) \leqslant \pi_p(T) \leqslant 2\pi_p(T\Psi)$;

b) для любого банахова пространства E

$$\Pi_p(Z^{**},E)=\Pi_p(Z,E)\oplus\Pi_p^0(Z^{**},E)\simeq\Pi_p(Z,E)\oplus\Pi_p(X,E),$$

где $\Pi_p^0(Z^{**},E)$ — подпространство тех операторов из $\Pi_p(Z^{**},E)$, которые аннулируются на πZ.

Это вытекает непосредственно из следствия 1.6. $\square$

Утверждения, подобные следствиям 1.6–1.7, имеют многочисленные применения при изучении различных аппроксимационных свойств банаховых пространств (частично мы рассмотрим их ниже). Сейчас нам хотелось бы привести примеры применения другого рода, непосредственно не связанных с аппроксимационными условиями.

Следствие 1.8. *Для любых $p\geqslant 1$, рефлексивного пространства E и сепарабельного пространства X существует такое сепарабельное пространство Z, что в Z^{**} есть базис и*

$$\Pi_p(Z,E)^{**}\simeq\Pi_p(Z,E)\oplus\Pi_p(X,E).$$

Доказательство. Это получается из следствия 1.7,b) и равенств

$$\Pi_p(Z^{**},E)=(\mathrm{N}_{p'}(E,Z^{**}))^*=\mathrm{QN}_p(Z,E)^{**}=\Pi_p(Z,E)^{**}.$$

При $p=1$ второе равенство вытекает из теоремы 1.1 [МакСам] (см. также ниже лемму 2.7), а при остальных p — например, из результатов [Pers] или [ReiDAN]; последнее равенство, для любого $p\geqslant 1$ есть следствие сепарабельности пространства Z^*, — см., например, [ReiDAN]. $\square$

Наше следующее утверждение дополняет следствие 1 из [ReiPMI] и вместе с ним полностью завершает рассмотрение соответствующей ситуации для всех показателей $p>0$. Мы включим в часть b) этого утверждения случай $p\leqslant 1$, рассмотренный в [ReiPMI], поскольку формулировка получаемого факта в этом случае, в отличие от a), в точности такая же, как и при $p>1$. Относительно a) при $p\leqslant 1$ см. [ReiPMI].

Следствие 1.9. *Для всякого сепарабельного пространства X существует такое сепарабельное пространство Z, что Z^{**} имеет базис, $Z^{**}/\pi Z$ изоморфно X, подпространство $(\pi Z)^\perp$ дополняемо в Z^{**} и выполняются следующие условия:*

a) для любых показателя $p\geqslant 1$ и банахова пространства E тензорное произведение $E^*\widehat{\otimes}_pX$ изоморфно произведению $E^*\widehat{\otimes}_p(Z^{**}/\pi Z)$, которое, в свою очередь, канонически изометрично факторпространству $\mathrm{N}_p(E,Z^{**})/\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$;

b) для любых показателя $p>0$ и банахова пространства E пространство $\mathrm{N}_p(E,X)$ изоморфно пространству $\mathrm{N}_p(E,Z^{**}/\pi Z)$, которое канонически изоморфно (изометрично при $p\geqslant 1$) факторпространству $\mathrm{N}_p(E,Z^{**})/\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,\pi Z)$.

Доказательство. Пусть $p\in(1,\infty]$ и Z — банахово пространство из следствия 1.6. Обозначим для простоты фактор–пространство $Z^{**}/\pi Z$ через F. Факторотображение $\psi: Z^{**}\to F=Z^{**}/\pi Z$ естественным образом индуцирует отображение $\Psi:\mathrm{N}_p(E,Z^{**})\to E^*\widehat{\otimes}_pF$, $\Psi(T):=\psi\circ T$. В силу свойства (iii) из следствия

1.6 и по определению тензорной нормы в $E^*\widehat{\otimes}_p F$, отображение Ψ является гомоморфизмом из $\mathrm{N}_p(E,Z^{**})$ на $E^*\widehat{\otimes}_p F$. Пусть $U\in\operatorname{Ker}\Psi$; это означает, что для любого $A\in\Pi_{p'}(F,E^{**})$ след trace $A\circ\psi\circ U$ равен нулю, или что для любого $B\in\Pi_{p'}(Z^{**},E^{**}), B|_{\pi Z}\equiv 0$, след trace $B\circ U$ равен нулю. Отсюда вытекает, что $U(E)\subset\pi Z$ (в противном случае найдется одномерный оператор $R\in\Pi_{p'}(Z^{**},E^{**})$, тождественно равный нулю на πZ, для которого trace $R\circ U\neq 0$). Итак, $U\in\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,Z)$. Нам надо уточнить это включение: установить, что $U\in\mathrm{N}_p(E,\pi Z)\subset\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,\pi Z)$.

Предположим, что $U\notin\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$. Тогда найдется оператор $B\in\Pi_{p'}(Z^{**},E^{**})$ такой, что trace $B\circ U=1$, но trace $B\circ T=0$ для любого $T\in\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$. Так как $\pi Z\in\mathrm{AP}$, то из последнего вытекает тождество $B|_{\pi Z}\equiv 0$, что противоречит выбору U. Поэтому $U\in\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$. С другой стороны, очевидно, что для любых $V\in\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$ и $B\in\Pi_{p'}(Z^{**},E^{**})$, где $B|_{\pi Z}\equiv 0$, имеем: trace $B\circ V=0$. Поэтому $\operatorname{Ker}\Psi=\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$.

Рассмотрим теперь факторотображение Ψ_0 :

$$\mathrm{N}_p(E,Z^{**})\xrightarrow{\Psi}E^*\widehat{\otimes}_p F\xrightarrow{j}\mathrm{N}_p(E,F),$$

где j — каноническое факторотображение. Его ядро $\operatorname{Ker}\Psi_0$ состоит из всех тех операторов $U\in\mathrm{N}_p(E,Z^{**})$, которые превращаются в тождественный нуль после действия факторизации $\psi: Z^{**}\to F$, т.е. из тех U, для которых $U(E)\subset\operatorname{Ker}\psi$. Это и означает, что $\operatorname{Ker}\Psi_0=\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,\pi Z)$. $\square$

Сейчас хорошо известно, что идеалы N_p при $p>2/3, p\neq 2$, не являются регулярными, т.е. $\mathrm{N}_p\neq\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ (см. [FJ], [ReiMN] для $p\geqslant 1$ и [ReiИсч, следствие 3.1] для $p\in(2/3,1)$). В заключение этого параграфа мы отметим следующий намного более сильный результат.

Следствие 1.10. *Если $p\in(2/3,\infty]$, $p\neq 2$, то идеал конечномерных операторов не плотен в идеале $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$; в частности, идеал $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ не минимален* (определение см. в [Ptch]).

Доказательство. Как известно (и этим мы будем пользоваться в следующем параграфе), существуют сепарабельные пространства E и X, для которых $E^*\widehat{\otimes}_p X\neq\mathrm{N}_p(E,X)$ [FJ], [ReiMN], [ReiИсч]. Для $p\geqslant 1$, по следствию 1.9, существует такое сепарабельное пространство Z с базисом, что $\mathrm{N}_p(E,Z)\neq\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,Z)$, причем тождественное отображение $\mathrm{N}_p(E,Z)\to\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,Z)$ есть изометрическое вложение (пространство Z^{**} обладает свойством метрической аппроксимации). Для $p<1$ надо воспользоваться теоремой 3 из [ReiPOMI]: в этом случае существуют оператор $T\in\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(Z^{**},Z)\setminus\mathrm{N}_1(Z^{**},Z)$, где Z^{**} имеет базис. Если этот оператор приближается в пространстве $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(Z^{**},Z)$ конечномерными отображениями, то тем более он приближается ими и в пространстве $N_1^{\mathrm{reg}}(Z^{**},Z)\subset N_1(Z^{**},Z^{**})$. Но $N_1(Z^{**},Z)$ вкладывается в $N_1(Z^{**},Z***)$ при каноническом вложении изометрично. Поэтому оператор T должен приближаться конечномерными и в пространстве $N_1(Z^{**},Z)$, что противоречит его выбору. $\square$

§2. Операторы с p-ядерными вторыми сопряженными

Теорема 2.1. *Пусть $s \geqslant 1$. Предположим, что*

a) каноническое отображение $X^* \otimes_s Y^{****} \to \mathrm{L}(X, Y^{****})$ взаимно однозначно, либо

b) $Y^{***} \in \mathrm{AP}_1$.

Тогда

$$\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(X, Y) \subset \mathrm{N}_s(X, Y).$$

В частности, это верно, если $X^* \in \mathrm{AP}_s^{\mathrm{dual}}$ или $Y^{****} \in \mathrm{AP}_s$.

Доказательство. В этом доказательстве мы обозначим через N^s дуальный к N_s операторный идеал (см. [Ptch]), а через ${}_s\widehat{\otimes}$ — "дуальное" к $\widehat{\otimes}_s$ тензорное произведение (таким образом, формально $Z^*{}_s\widehat{\otimes}W^* = W^*\widehat{\otimes}_s Z^*$ для любых банаховых пространств Z, W). Предположим, что существует такой оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$, что $T \notin \mathrm{N}_s(X, Y)$, но $\pi_Y T \in \mathrm{N}_s(X, Y^{**})$. По условию $\mathrm{N}_s(X, Y^{**}) = X^*\widehat{\otimes}_s Y^{**}$; следовательно, существует такой оператор $U \in \Pi_{s'}(Y^{**}, X^{**})$, что $U|_Y \equiv 0$ (и, значит, $(\pi_Y^* U^*)|_{X^*} = 0$) и $\operatorname{trace} U \circ t = 1$, где $t = \pi_Y T$. Рассмотрим оператор

$$V := (U^*|_{X^*}) \circ T^* \circ \pi_Y^* : \; Y^{***} \xrightarrow{\pi_Y^*} Y^* \xrightarrow{T^*} X^* \xrightarrow{U^*} Y^{***}.$$

В случае a)

$$T^*\pi_Y^* \in Y^{****}{}_s\widehat{\otimes}X^* \,(= X^*\widehat{\otimes}_s Y^{****}) = \mathrm{N}^s(Y^{***}, X^*), \quad U^* \in (Y^{****}{}_s\widehat{\otimes}X^*)^*.$$

Поэтому след $\operatorname{trace} U^* \circ (T^*\pi_Y^*)$ не зависит от выбора представления $T^*\pi_Y^*$ как элемента пространства $\mathrm{N}^s(Y^{****}, X^*)$. Как и при доказательстве теоремы 2,1) из [ReiPMI], нетрудно видеть, что если $t = \sum x_n^* \otimes y_n^{**}$, то

$$T^*\pi_Y^* = \sum \pi_Y^{**}(y_n^{**}) \otimes x_n^* = \sum y_n^{**} \otimes x_n^*.$$

Поэтому, с одной стороны, $\operatorname{trace} U^* \circ (T^*\pi_y^*) = \sum \langle \pi_Y^{**} y_n^{**}, U^* x_n^* \rangle = 0$, а с другой стороны, $\operatorname{trace} U^* \circ (T^*\pi_y^*) = \sum \langle y_n^{**}, U^* x_n^* \rangle = 1$. Противоречие.

В случае b)

$$U^* \circ (T^*\pi_Y^*) \in \mathrm{N}_1(Y^{***}, Y^{***}) = Y^{****}\widehat{\otimes}_1 Y^{***}$$

и след $\operatorname{trace} U^* \circ (T^*\pi_Y^*)$ не зависит от ядерного представления этого оператора, что ведет к противоречию по аналогии с предыдущим случаем. □

Замечание 2.2. В отличие от теоремы 2 из [ReiPMI], в теореме 2.1 не совсем понятно, какое аппроксимационное условие достаточно наложить на Y^{***}, чтобы формулировка теоремы стала такой же приятной как и формулировка теоремы 2 в [ReiPMI]. Видимо условие $Y^{***} \in \mathrm{AP}_1$ намного сильнее, чем нужно.

Покажем теперь, что аппроксимационные предположения в утверждениях теоремы 2.1 существенны.

Теорема 2.3. 1) *Для каждого $q > 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство F, вполне сепарабельное пространство Z, операторы $T \in \mathrm{L}(F, Z)$ и $U \in \mathrm{QN}_q(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $U|Z = 0$, $\operatorname{trace} UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(F, Z)$ и $T \notin \mathrm{N}_p(F, Z)$, если $p < 2$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство F, вполне сепарабельное пространство Z, $T \in \mathrm{L}(F, Z)$ и $U \in \mathrm{QN}_1(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $U|Z = 0$, $\operatorname{trace} UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(F, Z)$ и $T \notin \mathrm{N}_\infty(F, Z)$.*

Доказательство. 1). По лемме 1.1,1) из [ReiMN] существуют два сепарабельных рефлексивных банаховых пространства E, F, оператор $U_0 \in \mathrm{QN}_q(E, F)$ и элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}_1 E$ такие, что $\operatorname{trace} z \circ U_0 = 1$ и $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$ (т.е. $\widetilde{z} = 0$). Пусть Z и $\psi : Z^{**} \to E$ — из следствия 1.6, примененного к пространству $X = E$. Положим $U = U_0\psi$, и пусть $T \in \mathrm{N}_1(F, Z^{**})$ — такой оператор, что $\psi \circ T = z$ (так как $Z^{**} \in \mathrm{AP}$, то $\mathrm{N}_1(F, Z^{**}) = F^* \widehat{\otimes}_1 Z^{**}$). Ясно, что $\operatorname{trace} U \circ T = 1$ (при доказательстве утверждения 2) мы распишем это место подробнее). Так как $\operatorname{Ker} \psi = \pi Z$, то $T(F) \subset \operatorname{Ker} \psi = \pi Z$, т.е. $T \in \mathrm{L}\,(F, Z)$. Наконец, если $T \in \mathrm{N}_p(F, Z)$ при $p < 2$, то для произвольного p-ядерного представления T в виде $\sum f_n^* \otimes z_n$ имеем:

$$1 = \operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle f_n^*, U z_n \rangle = 0.$$

Поэтому $T \notin \mathrm{N}_p(F, Z)$.

2). Воспользовавшись пунктом 2) леммы 1.1 из [ReiMN], найдем такие сепарабельные рефлексивные банаховы пространства E, F, оператор $U_0 \in \mathrm{QN}_1(E, F)$ и элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}_s E$, что $\operatorname{trace} z \circ U_0 = 1$ и $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$. Пусть $z = \sum f_n^* \otimes e_n$ — представление z в пространстве $F^* \widehat{\otimes}_s E$. Как и выше, рассмотрим пространство Z и гомоморфизм $\psi : Z^{**} \to E$ из следствия 1.6 (для $X = E$) и положим $U = U_0\psi$. В силу утверждения (iii) следствия 1.6, существует слабо s'-суммируемая последовательность (z_n^{**}) в Z, для которой $\psi(z_n^{**}) = e_n$. Определим оператор $T \in \mathrm{N}_s(F, Z^{**})$ следующим образом: $T := \sum f_n^* \otimes z_n^{**}$. Очевидно, $U|_Z = 0$ и $T(F) \subset \pi Z$. Кроме того,

$$\operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle f_n^*, U z_n^{**} \rangle = \sum \langle f_n^*, U_0 e_n \rangle = \operatorname{trace} z \circ U_0 = 1.$$

Тот факт, что $T \notin \mathrm{N}_\infty(F, Z)$, проверяется так же, как и в случае 1) (используем то, что $U \in \mathrm{QN}_1$). $\square$

Применяя теорему 1.1 к пространству F (ср. с завершением доказательства теоремы 5 в [ReiPMI]), получаем, в частности:

Следствие 2.4. 1) *Существуют два вполне сепарабельных банаховых пространства W и Z такие, что W и Z^{**} имеют базисы, и такие, что $\mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(W, Z) \not\subset \mathrm{N}_p(W, Z)$ для $p < 2$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют два вполне сепарабельных пространства W и Z такие, что W и Z^{**} имеют базисы, и такие, что $\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(W, Z) \not\subset \mathrm{N}_\infty(W, Z)$.*

Следствие 2.5. *Существует такое вполне сепарабельное сепарабельное банахово пространство V с базисом что для каждого $p \geqslant 1, p \neq 2$, найдется оператор $T \in \mathrm{L}(V,V)$, $T \notin \mathrm{N}_p(V,V)$, для которого T^{**} является p-ядерным;*

Следствие 2.6. *Существует такое вполне сепарабельное сепарабельное банахово пространство V с базисом, что найдется оператор $T \in \mathrm{L}(V,V)$, который не факторизуется ни через какое пространство $C(K)$, но второй сопряженный к которому T^{**} факторизуется компактно через пространство c_0.*

Пространство V в последних двух следствиях строится из пространств W и Z, указанных в следствии 2.4, стандартным образом — сложением счетного их числа (для $s_n \searrow 2$ и $p_n \nearrow 2$) по типу l_2. Нам надо лишь проверить (для доказательства следствия 2.6), что если T факторизуется через некоторое пространство $C(K)$, то он является ∞-ядерным. А это вытекает из теоремы 1.2 [МакСам]. В этой теореме рассматриваются ∞-интегральные по Гротендику операторы; мы приводим ее формулировку для случая операторов, ∞-интегральных по Пичу, т.е. $C(K)$-факторизуемых операторов в смысле приведенного выше определения (доказательство почти дословно повторяет рассуждения из [МакСам]):

Лемма 2.7. *Пусть X^* обладает свойством Радона–Никодима* (см., например, [МакСам], [ReiDAN], [Ptch, п. 24.2.6, 24.2.9]), *$Y \not\supset c_0$ и $T \in \mathrm{L}(X,Y)$. Если T факторизуется через $C(K)$, то $T \in \mathrm{N}_\infty(X,Y)$.* $\square$

Замечание 2.8. Три последних следствия значительно усиливает основную теорему из [ReiOja], а также, например, теорему 3.2 из [ReiMN]: в последней соответствующие пространства не обладали свойством BAP (одно из них даже не обладало свойством аппроксимации). С другой стороны, в теореме 3.2 [ReiMN] операторы из $\mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{N}_p$ и из $\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{N}_\infty$ приближались конечномерными операторами по соответствующим reg-нормам. В последних наших следствиях это в принципе невозможно, в силу того, что $Z^{**} \in \mathrm{MAP}$ и тождественное вложение $W^* \widehat{\otimes}_r Z \to W^* \widehat{\otimes}_r Z^{**}$ изометрично. В следствиях 2.4–2.6 операторы из $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{N}_p$ и $\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{N}_s$ лежат весьма "далеко" от множества конечномерных операторов из W в Z (соответственно, из V в V). Следствие 2.6 связано с вопросом о возможности "строгой" l_p-факторизации операторов, вторые сопряженные к которым такую факторизацию допускают. *Автору неизвестна* литература, в которой можно было бы найти ответ на этот вопрос для случая показателей p, отличных от единицы, двойки и бесконечности. Последний случай (наиболее сильный контрпример) — это как раз следствие 2.6 (более слабый вариант подобного утверждения можно найти, например, в [ReiMN]). По поводу случая $p = 1$ см., в частности, работу [ReiVst].

Замечание 2.9. Следствие 2.4 показывает, что избавиться от аппроксимационных условий типа $Y^{***} \in \mathrm{AP}_1$ и $X^* \in \mathrm{AP}_s^{\mathrm{dual}}$ в теореме 2.1 нельзя. Более того, заметим, что в лемме 1.1,2) из [ReiMN], которую мы использовали при доказательстве второй части предыдущей теоремы, пространство E есть фактор–пространство пространства l_q, где $q > s > 2$, и, следовательно, E^* имеет котип 2 (все это видно из доказательства леммы). Поэтому E^* обладает свойствами AP_r для всех $r \geqslant 2$ (см.

[ReiИсч], введение). Следовательно, в теореме 2.3 и в следствии 2.4 $Z^{***} \in \mathrm{AP_r}$ для каждого $r \geqslant 2$ (так как $Z^{***} \simeq Z^* \oplus E^*$). Это показывает, что *заменить условие "$Y^{***} \in \mathrm{AP}_1$" в теореме* 2.1 *на более слабое "$Y^{***} \in \mathrm{AP}_s$" нельзя.*

Отметим еще ряд применений теоремы 2.3. Хорошо известно, что произведение двух абсолютно 2-суммирующих операторов является ядерным оператором. Естественно было бы ожидать, что и $\Pi_p \circ \Pi_{p'} \subset \mathrm{N}_1$, где $1/p + 1p' = 1$. Последнее включение, вообще говоря, не верно (что, видимо, хорошо известно, но автор не может привести ссылку на соответствующую литературу, — наверное, надо отнести этот результат к математическому фольклору). Сейчас мы приведем более сильный (контр)пример к этому включению. Если $1/r + 1/s = 1/q \leqslant 1$ и $1 < r, s < \infty$, то $\mathrm{I}_s \circ \Pi_r \subset \mathrm{N}_q^{\mathrm{reg}}$ (см. [Ptch, теорема 24.6.4]). Нижеследующий факт показывает, что здесь, вообще говоря, справа нельзя заменить $\mathrm{N}_q^{\mathrm{reg}}$ на N_q .

Предложение 2.10. 1) *Для любого $q \in (2, \infty)$ Существуют два пространства F и Z и операторы $T \in \mathrm{QN}_0(F, Z), U \in \mathrm{QN}_q(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $TU \notin \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, но $\pi TU \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z^{**})$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют два пространства F и Z и операторы $T \in \mathrm{QN}_s(F, Z)$, $U \in \mathrm{QN}_0(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $TU \notin \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, но $\pi TU \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z^{**})$.*

3) *Для каждого $r > 2$ существуют пространства F, G и Z с базисами и операторы $T_1 \in \mathrm{N}_r(F, G)$ и $T_2 \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(G, Z)$ такие, что Z^{**} имеет базис и $T_2 T_1 \notin \mathrm{N}_p(F, Z)$ ни для какого $p < 2$. В частности, для $r > 2$*

$$\mathrm{I}_1 \circ \mathrm{I}_r \notin \bigcup_{p<2} \mathrm{N}_p$$

и для $q < 2, r > 2$ и $1/r + 1/s = 1/q \leqslant 1$

$$\mathrm{I}_s \circ \Pi_r \notin \mathrm{N}_q \, .$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 2.3 были использованы пространства E и F, построенные в лемме 1.1 из [ReiMN]. Из доказательства первой части этой леммы (см. диаграмму 1 в [ReiMN]) вытекает, что пространство F может быть выбрано так, что оно рефлексивно и имеет тип 2 и котип q. Во второй части этой леммы (см. ее доказательство, диаграмму 2 в [ReiMN]) пространство E есть фактор–пространство пространства l_t при некотором $t \in (2, \infty)$. В частности, в утверждении 1) теоремы 2.3 при $2 < q < \infty$ пространство F^* имеет тип q', где $1 < q' < 2$. Аналогично, в утверждении 2) этой теоремы пространство E^* имеет тип t', где $1 < t' < 2$. Поэтому всякий абсолютно 1-суммирующий оператор, действующий из пространства F (соответственно из E), является абсолютно 0-суммирующим (см. [Ptch], теоремы 20.2.1 и 21.2.5). Таким образом, в утверждении 1) теоремы 2.3 $T \in \mathrm{QN}_0(F, Z)$, а в утверждении 2) — $U \in \mathrm{QN}_0(Z^{**}, F)$ (так как $U = U_0 \circ \psi$; см. доказательство). После этих предварительных замечаний приступим к доказательству утверждений 1) и 2) нашего предложения.

Рассмотрим пространства F, Z и операторы T, U из теоремы 2.6:

$$Z \xrightarrow{\pi} Z^{**} \xrightarrow{U} F \xrightarrow{T} Z \xrightarrow{\pi} Z^{**}.$$

Нам надо показать, что $TU \notin \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$. Если $TU \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, то

$$TU = \sum z^{***} \otimes z_n \in Z^{***} \widehat{\otimes}_1 Z$$

и

$$\operatorname{trace} \pi \circ (TU) = \sum \langle z^{***}, \pi z \rangle = \sum \langle \pi^* z^{***}, z_n \rangle = \operatorname{trace} (TU) \circ \pi = 0,$$

так как $TU\pi$ — нулевой оператор. С другой стороны,

$$\operatorname{trace} (\pi T) \circ U = \operatorname{trace} U \circ (\pi T) = 1.$$

При доказательстве утверждения 3) мы снова воспользуемся небольшой модификацией леммы 1.1,1) из [ReiMN]: согласно этой лемме, существуют такие пространства E, F и операторы $U \in \mathrm{QN}_{q'}(E, F)$ и $z \in F^* \widehat{\otimes}_1 E$, что $\operatorname{trace} z \circ U = 1$ и $\widetilde{z} = 0$. Анализируя доказательство, приведенное в [ReiMN] (см. диаграмму 1 в этой работе), нетрудно увидеть, что z есть суперпозиция двух тензоров $z_1 \in F^* \widehat{\otimes}_r G$ и $z_2 \in G^* \widehat{\otimes}_1 E, z = z_2 \circ z_1$ (именно в этом месте используются ограничения, наложенные нами на r, q и s). Поэтому можно считать, что в теореме 2.3,1) оператор T представим в виде произведения $T = T_2 \circ T_1$, где $T_1 \in \mathrm{N}_r(F, G)$ и $T_2 \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(G, Z)$. Более того, применяя следствие 1.6 к пространству G и тензорному элементу (порождающему оператор T_1), мы можем поднять этот элемент до r-ядерного оператора, действующего из F в пространство с базисом; иначе говоря, не умаляя общности, можно считать, что в G есть базис.

Резюмируя сказанное, получаем, что существуют пространства F, G, Z, операторы $T_1 \in \mathrm{N}_r(F, G)$, и $T_2 \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(G, Z)$ такие, что в G и Z^{**} есть базисы и $T_2 T_1 \notin \mathrm{N}_p(F, Z)$ для любого $p < 2$. Очевидно, что $T_2 T_1 \in \mathrm{I}_1 \circ \mathrm{I}_r \subset \mathrm{I}_s \circ \Pi_r$. Наконец, снова имея ввиду следствие 1.6, можно считать, что в F есть базис. $\square$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[Enflo] Enflo P., *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.

[FJ] Figiel T., Johnson W.B., *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197–200, *MR*49#5782..

[James] James R. C., *Separable Conjugate Spaces*, Pacific J. Math. **10** (1960), 563–571.

[Lind] Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279-284.

[LiTz] Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces I: Sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlin – Heldelberg – New York, 1977.

[МакСам] Макаров Б.М., Самарский В.Г., *Слабая секвенциальная полнота и близкие к ней свойства некоторых пространств операторов*, в кн. "Теория операторов и теория функций". Л.: ЛГУ (1983), 122-144.

[Pers] Persson A., *On some properties of p-nuclear and p-integral operators*, Studia Math. **33** (1969), 213–232.

[Ptch] Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир, 1982, 536 с.

[ReiDAN] Рейнов О.И., *Операторы типа RN в банаховых пространствах*, ДАН СССР **220** (1975), 3, 528-531.

[ReiDN2] Рейнов О.И., *Свойства аппроксимации порядка p и существование не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными*, ДАН СССР **256** (1981), no. 1, 43-47.

[ReiИсч] Рейнов О.И., *Исчезновение тензорных элементов в шкале p-ядерных операторов*, в кн. "Теория операторов и теория функций". Л.: ЛГУ (1983), 145-165.

[ReiMN] Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. **109** (1982), 125-134.

[ReiOja] Oja E., Reinov O.I., *Un contre-exemple à une affirmation de A.Grothendieck*, C. R. Acad. Sc. Paris. — Serie I **305** (1987), 121-122.

[ReiPMI] Рейнов О.И., *Аппроксимационные свойства* AP_s *и p-ядерные операторы (случай* $0 < s \leq 1$*)*, Записки научн. сем. ПОМИ **000** (2000), 000–000.

[ReiVst] Рейнов О.И., *О факторизации операторов через пространства* l^p, Вестник СПб ГУ. Сер.1б **00** (2000), вып. 0, 00–00.

[Saph] Saphar P., *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications lineaires*, Studia Math. **38** (1970), 71-100.

[PersPi] Persson A. and Pietsch A., *p-nucleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, Studia Math. **33** (1969), 19-62, *MR*39#4645..

[GLR] Y.Gordon, D.R.Lewis, H.R.Retherford, *Banach ideals of operators with applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), no. 1, 85-129.

Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru