*УДК 519.72*

# БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА НА ОСНОВЕ ФАКТОРИЗАЦИИ ГУДА[1)]

© **С. М. Машарский**

*(198504 С.-Петербург, Библиотечная пл., 2, СПбГУ, матем.-механ. ф-т)*

E-mail: smash@scientist.com

На основе подхода Гуда к факторизации кронекеровой степени матрицы построены две рекуррентные последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных периодических сигналов. С помощью этих базисов построены два алгоритма быстрого преобразования Виленкина–Крестенсона.

## ВВЕДЕНИЕ

В цифровой обработке сигналов значительную роль играют быстрые ортогональные преобразования. Одним из таких преобразований является быстрое преобразование Виленкина–Крестенсона (БПВК) [1, 2]. Имеется несколько вариантов реализации БПВК, которые основаны на факторизации матрицы преобразования [2, 3]. В данной статье построены два алгоритма БПВК, основанные на факторизации Гуда [4], когда кронекерова степень матрицы Фурье представляется в виде обычной степени большой разреженной матрицы. При этом используется новый подход к построению быстрых ортогональных преобразований, впервые предложенный в [5]. Этот подход основан на построении рекуррентной последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных периодических сигналов. Данная статья является дополнением к работе [3], где указанный подход был реализован в случае факторизации матрицы преобразования на попарно различные множители.

Прокомментируем содержание статьи по разделам. В разд. 1 приведены предварительные сведения. В разд. 2 представлен результат Гуда в уточненной формулировке и дано его строгое доказательство. Предложен двойственный вариант факторизации, не нашедший отражения в работе [4] (и, как следствие, в [1–3]). В разд. 3 и 4 построены две последовательности ортогональных базисов, соответствующие в устоявшейся терминологии прореживанию по частоте и прореживанию по времени. Для базисных сигналов указан явный вид и приведены рекуррентные формулы пересчета. В разд. 5 на основе предложенных базисов построены два алгоритма БПВК. Выведены формулы декомпозиции и реконструкции сигналов.

---

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 99-01-00747).

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных $N$-периодических последовательностей $x = \{x(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами.* В $\mathbb{C}_N$ обычным способом вводятся скалярное произведение и норма

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}\,, \qquad \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Единичным $N$-периодическим импульсом называется сигнал $\delta_N(j)$, равный 1, когда $j$ делится на $N$, и равный 0 при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Система сдвигов $\delta_N(j)$, $\delta_N(j-1)$, $\ldots$, $\delta_N(j-N+1)$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$, так что любой сигнал $x$ допускает представление

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\delta_N(j-k) \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

В дальнейшем считаем, что $N = n^s$, где $n$ и $s$ — натуральные числа, отличные от единицы. Пусть $k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $k = k_{s-1}n^{s-1} + k_{s-2}n^{s-2} + \ldots + k_0$, $j = j_{s-1}n^{s-1} + j_{s-2}n^{s-2} + \ldots + j_0$. Здесь $k_\nu, j_\nu \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$. Положим

$$\{k, j\}_s = \sum_{\nu=0}^{s-1} k_\nu\, j_\nu.$$

Обозначим через $\omega_n$ первообразный корень степени $n$ из единицы. Сигналы

$$v_k(j) = \omega_n^{\{k,j\}_s}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.2}$$

называются *дискретными функциями Виленкина–Крестенсона.* Формулой (1.2) сигналы $v_k(j)$ определены на основном периоде $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Далее они продолжаются $N$-периодически на все $j \in \mathbb{Z}$.

Известно [1], что сигналы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$. При этом $\|v_k\|^2 = N$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Этот факт можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \omega_n^{\{k,j\}_s - \{k',j\}_s} = N\delta_N(k-k'), \quad k, k' = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.3}$$

Введем квадратную матрицу $V_N$ с элементами

$$V_N[k, j] = v_k(j), \qquad k, j = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{1.4}$$

Отметим, что здесь и далее индексы строк и столбцов квадратной матрицы порядка $N$ изменяются от 0 до $N-1$.

Обозначим через $F_n$ матрицу Фурье $n$-го порядка с элементами $F_n[k, j] = \omega_n^{kj}$, $k, j = 0, 1, \ldots, n-1$, и через $F_n^{[s]}$ — ее $s$-ю кронекерову степень (см., например, [6, с. 80–82]). Нетрудно показать, что $V_N = F_n^{[s]}$, — это следует из структуры кронекеровой степени и формулы (1.2). Нашей ближайшей целью является факторизация матрицы $V_N$.

## 2. ФАКТОРИЗАЦИЯ ГУДА

Существует несколько способов факторизации кронекеровой степени матрицы. Мы остановимся на способе, предложенном И. Дж. Гудом в работе [4], когда кронекерова степень представляется в виде обычной степени большой разреженной матрицы.

Введем обозначения $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$, $N_\nu = N/n^\nu$. Напомним, что $N = n^s$. Результат Гуда в уточненной формулировке записывается следующим образом.

**Теорема 1.** *Пусть $A$ — произвольная матрица размером $n \times n$, $A^{[s]}$ — ее $s$-я кронекерова степень. Тогда*

$$A^{[s]} = D^s, \tag{2.1}$$

*где $D$ — матрица размером $N \times N$, определяемая равенствами*

$$\begin{gathered} D[pN_1 + l, ln + q] = A[p, q], \quad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad p,\, q = 0, 1, \ldots, n-1; \\ D[k, j] = 0 \text{ при остальных } k,\, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

**Доказательство.** Два равенства (2.2) можно объединить в одно следующим образом:

$$D[pN_1 + l, mn + q] = A[p, q]\, E_{N_1}[l, m], \tag{2.3}$$

$$l,\, m = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad p,\, q = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Здесь и далее $E_t$ означает единичную матрицу порядка $t$.

Покажем, что соотношение (2.3) допускает обобщение:

$$D^\nu[pN_\nu + l, m\Delta_{\nu+1} + q] = A^{[\nu]}[p, q]\, E_{N_\nu}[l, m], \tag{2.4}$$

$$l,\, m = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad p,\, q = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Докажем справедливость равенства (2.4) индукцией по $\nu$. Базой индукции служит случай $\nu = 1$ — в этом случае (2.4) совпадает с (2.3). Проделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к $\nu$. Для $l,\, m = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, $p,\, q = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1$ имеем

$$D^\nu[pN_\nu + l, m\Delta_{\nu+1} + q] = \sum_{r=0}^{N-1} D[pN_\nu + l, r]\, D^{\nu-1}[r, m\Delta_{\nu+1} + q].$$

Представим индексы $p$, $q$, $r$ в следующем виде:

$$p = p'\Delta_\nu + p'', \qquad q = q'\Delta_\nu + q'', \qquad r = r''N_{\nu-1} + r'''n + r',$$

где $p',\, q',\, r' \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $p'',\, q'',\, r'' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $r''' \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. Тогда в силу (2.3) и индукционного предположения получим

$$D^\nu[pN_\nu + l, m\Delta_{\nu+1} + q] =$$

$$= \sum_{r'=0}^{n-1} \sum_{r''=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{r'''=0}^{N_\nu - 1} D[p'N_1 + (p''N_\nu + l), (r''N_\nu + r''')n + r'] \times$$

$$\times D^{\nu-1}[r''N_{\nu-1} + (r'''n + r'), (mn + q')\Delta_\nu + q''] =$$

$$= \sum_{r'=0}^{n-1} \sum_{r''=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{r'''=0}^{N_\nu - 1} A[p', r']\, E_{N_1}[p'' N_\nu + l, r'' N_\nu + r'''] \times$$

$$\times\, A^{[\nu-1]}[r'', q'']\, E_{N_{\nu-1}}[r''' n + r', mn + q'] =$$

$$= A[p', q']\, A^{[\nu-1]}[p'', q'']\, E_{N_\nu}[l, m] = A^{[\nu]}[p, q]\, E_{N_\nu}[l, m].$$

Итак, справедливость равенства (2.4) установлена. При $\nu = s$ получаем

$$D^s[p, q] = A^{[s]}[p, q], \qquad p,\ q = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Теорема доказана.

Как видно из теоремы, строки матрицы $D$ разбиты на $n$ блоков по $n^{s-1}$ строк в каждом. При этом начальной строкой в $p$-м блоке является $p$-я строка матрицы $A$, дополненная $(N-n)$ нулями, а каждая следующая строка этого блока получается из предыдущей с помощью циклического сдвига на $n$ позиций вправо.

Аналогичные манипуляции можно произвести и со столбцами матрицы $A$. Именно, имеет место следующий результат.

**Теорема 2.** *В условиях предыдущей теоремы справедливо равенство*

$$A^{[s]} = C^s, \tag{2.5}$$

*где $C$ — матрица размером $N \times N$ следующего вида:*

$$\begin{gathered} C[ln + p, qN_1 + l] = A[p, q], \quad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad p,\ q = 0, 1, \ldots, n-1; \\ C[k, j] = 0 \ \text{при остальных}\ k,\ j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Действительно, для матрицы $\widetilde{A} := A^\top$ имеем $\widetilde{A}^{[s]} = \widetilde{D}^s$, где $\widetilde{D}[pN_1 + l, ln + q] = \widetilde{A}[p, q] = A[q, p]$ при $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$, $p,\ q = 0, 1, \ldots, n-1$, и $\widetilde{D}[k, j] = 0$ при остальных $k,\ j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Отсюда получаем

$$A^{[s]} = (\widetilde{A}^\top)^{[s]} = (\widetilde{A}^{[s]})^\top = (\widetilde{D}^s)^\top = (\widetilde{D}^\top)^s =: C^s,$$

где $C = \widetilde{D}^\top$,

$$\begin{gathered} C[ln + q, pN_1 + l] = A[q, p], \quad l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad p,\ q = 0, 1, \ldots, n-1; \\ C[j, k] = 0 \ \text{при остальных}\ j,\ k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \end{gathered}$$

Эти равенства совпадают с (2.6), если поменять местами $p$ и $q$.

## 3. ПЕРВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ БАЗИСОВ

Поскольку $V_N = F_n^{[s]}$, теорема 1 позволяет нам записать представление

$$V_N = D^s, \tag{3.1}$$

где

$$D[pN_1+l, mn+q] = \omega_n^{pq}\, E_{N_1}[l,m], \tag{3.2}$$

$$l,\, m = 0,1,\dots,N_1-1, \quad p,\, q = 0,1,\dots,n-1.$$

На основе разложения (3.1) построим в $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ последовательность ортогональных базисов $\{f_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0,1,\dots,s$, так, чтобы $f_0(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $f_s(k;j) = v_k(j)$. Сигналы $f_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $f_\nu(k)$; $\nu$-й базис запишем в виде вектор-сигнала $f_\nu = \big(f_\nu(0), f_\nu(1), \dots, f_\nu(N-1)\big)^\top$ и определим его формулой

$$f_\nu = D^\nu f_0, \quad \nu = 1,\dots,s. \tag{3.3}$$

Согласно (3.1), $f_s = V_N f_0$. Пользуясь (1.4) и (1.1), перепишем последнее равенство в развернутом виде:

$$f_s(k;j) = \sum_{l=0}^{N-1} V_N[k,l]\,\delta_N(j-l) = \sum_{l=0}^{N-1} v_k(l)\,\delta_N(j-l) = v_k(j).$$

Разберемся с промежуточными базисами $f_1, \dots, f_{s-1}$. Прежде чем показать, что это действительно базисы, получим явное представление для базисных сигналов.

**Теорема 3.** *Справедливо равенство*

$$f_\nu(pN_\nu+l) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{p,q\}_\nu}\, f_0(l\Delta_{\nu+1}+q), \tag{3.4}$$

$$l = 0,1,\dots,N_\nu-1, \quad p = 0,1,\dots,\Delta_{\nu+1}-1, \quad \nu = 1,\dots,s.$$

**Доказательство.** Из (3.3) и (2.4) при $A = F_n$ получаем

$$f_\nu(pN_\nu+l) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \sum_{m=0}^{N_\nu-1} D^\nu[pN_\nu+l, m\Delta_{\nu+1}+q]\, f_0(m\Delta_{\nu+1}+q) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} F_n^{[\nu]}[p,q]\, f_0(l\Delta_{\nu+1}+q),$$

$$l = 0,1,\dots,N_\nu-1, \quad p = 0,1,\dots,\Delta_{\nu+1}-1, \quad \nu = 1,\dots,s.$$

Остается отметить, что $F_n^{[\nu]}[p,q] = \omega_n^{\{p,q\}_\nu}$. Теорема доказана.

**Теорема 4.** *При каждом $\nu = 1,\dots,s-1$ система сигналов $f_\nu(0)$, $f_\nu(1)$, $\dots$, $f_\nu(N-1)$ образует ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$. При этом $\|f_\nu(k)\|^2 = n^\nu$ при всех $k = 0,1,\dots,N-1$.*

**Доказательство.** Пусть $l,\, l' \in \{0,1,\dots,N_\nu-1\}$, $p,\, p' \in \{0,1,\dots,\Delta_{\nu+1}-1\}$. Покажем, что если $l \neq l'$ или $p \neq p'$, то

$$\langle f_\nu(pN_\nu+l),\, f_\nu(p'N_\nu+l')\rangle = 0. \tag{3.5}$$

При $l \neq l'$ (3.5) непосредственно следует из (3.4), поскольку в этом случае носители указанных сигналов не пересекаются.

Пусть $l = l'$, тогда в силу (3.4) и (1.3) имеем

$$\langle f_\nu(pN_\nu + l),\, f_\nu(p'N_\nu + l)\rangle = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{p,q\}_\nu - \{p',q\}_\nu} = \Delta_{\nu+1}\delta_{\Delta_{\nu+1}}(p-p').$$

При $p \neq p'$ приходим к (3.5). При $p = p'$ получаем $\|f_\nu(pN_\nu + l)\|^2 = \Delta_{\nu+1} = n^\nu$.

Теорема доказана.

Из (3.1) следует, что $f_\nu = Df_{\nu-1}$, $\nu = 1, \ldots, s$. Эта формула и формула (3.2) позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $f_{\nu-1}$ к базису $f_\nu$:

$$f_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$f_\nu(pN_1 + l) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{pq}\, f_{\nu-1}(ln + q), \tag{3.6}$$

$$l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Схема (3.6) позволяет строить последовательность ортогональных базисов $f_\nu$ рекуррентно, не пользуясь представлением (3.4).

## 4. ВТОРАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ БАЗИСОВ

На этот раз воспользуемся теоремой 2. Она позволяет нам записать представление

$$V_N = C^s, \tag{4.1}$$

где

$$C[ln + p, qN_1 + m] = \omega_n^{pq}\, E_{N_1}[l, m], \tag{4.2}$$

$$l,\, m = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad p,\, q = 0, 1, \ldots, n-1.$$

На основе разложения (4.1) построим в $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ последовательность ортогональных базисов $\{g_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, так, чтобы $g_0(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $g_s(k;j) = v_k(j)$. Сигналы $g_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $g_\nu(k)$; $\nu$-й базис запишем в виде вектор-сигнала $g_\nu = \big(g_\nu(0), g_\nu(1), \ldots, g_\nu(N-1)\big)^\top$ и определим его формулой

$$g_\nu = C^\nu g_0, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{4.3}$$

Как и в предыдущем разделе, покажем, что построенные таким образом сигналы образуют ортогональные базисы, предварительно получив для них явное представление.

**Теорема 5.** *Справедливо равенство*

$$g_\nu(l\Delta_{\nu+1} + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{p,q\}_\nu}\, g_0(qN_\nu + l), \tag{4.4}$$

$$l=0,1,\dots,N_\nu-1,\quad p=0,1,\dots,\Delta_{\nu+1}-1,\quad \nu=1,\dots,s.$$

**Доказательство.** Из (4.2) и (3.2) следует, что $C=D^\top$. Отсюда, воспользовавшись (2.4) при $A=F_n$, получим

$$C^\nu[l\Delta_{\nu+1}+p,qN_\nu+m]=D^\nu[qN_\nu+m,l\Delta_{\nu+1}+p]=F^{[\nu]}[q,p]\,E_{N_\nu}[m,l],$$

$$l,m=0,1,\dots,N_\nu-1,\quad p,q=0,1,\dots,\Delta_{\nu+1}-1.$$

Подставив это в (4.3) и приняв к сведению равенство $F^{[\nu]}[q,p]=\omega_n^{\{q,p\}_\nu}=\omega_n^{\{p,q\}_\nu}$, придем к (4.4). Теорема доказана.

**Теорема 6.** *При каждом $\nu=1,\dots,s-1$ система сигналов $g_\nu(0)$, $g_\nu(1)$, …, $g_\nu(N-1)$ образует ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$. При этом $\|g_\nu(k)\|^2=n^\nu$ при всех $k=0,1,\dots,N-1$.*

**Доказательство.** В силу (4.3) утверждение теоремы равносильно тому, что строки матрицы $C^\nu$ попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен $n^\nu$. Это условие коротко записывается так: $C^\nu(C^\nu)^*=n^\nu E_N$, где $(C^\nu)^*$ — сопряженная к $C^\nu$ матрица.

Из теоремы 4 и формулы (3.3) следует, что $D^\nu(D^\nu)^*=n^\nu E_N$. А поскольку, как было отмечено ранее, $C=D^\top$, то

$$C^\nu(C^\nu)^*=(D^\nu)^\top\big((D^\nu)^*\big)^\top=\big[(D^\nu)^*D^\nu\big]^\top=n^\nu E_N.$$

Теорема доказана.

Из (4.1) следует, что $g_\nu=Cg_{\nu-1}$, $\nu=1,\dots,s$. Эта формула в совокупности с (4.2) позволяет записать развернутую схему перехода от базиса $g_{\nu-1}$ к базису $g_\nu$:

$$g_0(k)=\delta_N(\cdot-k),\quad k=0,1,\dots,N-1;$$

$$g_\nu(ln+p)=\sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{pq}\,g_{\nu-1}(qN_1+l), \tag{4.5}$$

$$l=0,1,\dots,N_1-1,\quad p=0,1,\dots,n-1,\quad \nu=1,\dots,s.$$

Схема (4.5) позволяет строить последовательность ортогональных базисов $g_\nu$ рекуррентно, не пользуясь представлением (4.4).

## 5. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА

Любой сигнал $x\in\mathbb{C}_N$ можно разложить по ортогональному базису $f_\nu(0)$, $f_\nu(1)$, …, $f_\nu(N-1)$ при каждом $\nu=0,1,\dots,s$:

$$x=\sum_{k=0}^{N-1}x_\nu(k)\,f_\nu(k). \tag{5.1}$$

Здесь $x_\nu(k)=n^{-\nu}\langle x,f_\nu(k)\rangle$. В частности,

$$x_0(k)=\sum_{j=0}^{N-1}x(j)\,\delta_N(j-k)=x(k),\quad k=0,1,\dots,N-1.$$

Согласно (3.6)

$$x_\nu(pN_1+l) = n^{-\nu}\sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{-pq}\langle x, f_{\nu-1}(ln+q)\rangle =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{-pq}\, x_{\nu-1}(ln+q).$$

Приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (5.1):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0,1,\ldots,N-1;$$

$$x_\nu(pN_1+l) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{-pq}\, x_{\nu-1}(ln+q), \tag{5.2}$$

$$l = 0,1,\ldots,N_1-1, \quad p = 0,1,\ldots,n-1, \quad \nu = 1,\ldots,s.$$

При $\nu = s$ получаем разложение сигнала $x$ по базису Виленкина–Крестенсона (1.2):

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\, v_k(j). \tag{5.3}$$

Попутно вычисляются коэффициенты разложений по всем промежуточным базисам.

Формула (5.2) допускает обращение:

$$x_{\nu-1}(ln+q) = \sum_{p=0}^{n-1}\omega_n^{pq}\, x_\nu(pN_1+l), \tag{5.4}$$

$$l = 0,1,\ldots,N_1-1, \quad q = 0,1,\ldots,n-1, \quad \nu = s, s-1,\ldots,1.$$

Основная роль формулы (5.4) заключается в том, что с ее помощью вычисляются значения сигнала $x$, заданного в виде (5.3), на основном периоде, а именно $x(k) = x_0(k)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$.

Аналогично сигнал $x$ можно разложить по ортогональному базису $g_\nu(0)$, $g_\nu(1)$, $\ldots$, $g_\nu(N-1)$ при каждом $\nu = 0,1,\ldots,s$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu(k)\, g_\nu(k). \tag{5.5}$$

Здесь $y_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, g_\nu(k)\rangle$. Коэффициенты разложений (5.5) в силу (4.5) вычисляются по рекуррентной схеме

$$y_0(k) = x(k), \quad k = 0,1,\ldots,N-1;$$

$$y_\nu(ln+p) = \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\omega_n^{-pq}\, y_{\nu-1}(qN_1+l), \tag{5.6}$$

$$l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ получаем

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} y_s(k)\, v_k(j),$$

т. е. $y_s(k) = x_s(k)$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Попутно вычисляются коэффициенты разложений по каждому промежуточному базису $g_\nu$, которые, конечно, отличны от коэффициентов разложений по промежуточным базисам $f_\nu$.

Формула (5.6) допускает обращение:

$$y_{\nu-1}(qN_1 + l) = \sum_{p=0}^{n-1} \omega_n^{pq}\, y_\nu(ln + p), \tag{5.7}$$

$$l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

С помощью (5.7) можно вычислить значения сигнала $x$, заданного в виде (5.5) при некотором $\nu \in \{1, \ldots, s\}$, на основном периоде.

Вычислительные схемы (5.2) и (5.6) назовем *быстрыми преобразованиями Виленкина–Крестенсона по методу Гуда*, связанными соответственно *с прореживанием по частоте* и *прореживанием по времени*.

В работах [1, 3] установлено, что частота дискретной функции Виленкина–Крестенсона $v_k$ равна $\mathrm{rev}_s(k)$, где перестановка $\mathrm{rev}_s(k)$ определяется следующим образом: пусть $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $k = k_{s-1}n^{s-1} + k_{s-2}n^{s-2} + \ldots + k_0$, где $k_\nu \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$, тогда $\mathrm{rev}_s(k) = k_0 n^{s-1} + k_1 n^{s-2} + \ldots + k_{s-1}$. Переупорядочим функции ортогональной системы $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1}$, положив

$$\mathrm{Pal}_k(j) := v_{\mathrm{rev}_s(k)}(j), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Легко видеть, что частота функции $\mathrm{Pal}_k(j)$ равна $k$. Формула (5.3) принимает вид

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s\big(\mathrm{rev}_s(k)\big)\, \mathrm{Pal}_k(j). \tag{5.8}$$

Для цифровой обработки сигналов следует использовать именно разложение (5.8), поскольку базисные функции Виленкина–Крестенсона в этом разложении упорядочены по возрастанию частоты.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.

2. *Дагман Э. Е., Кухарев Г. А.* Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск: Наука, 1983.

3. *Малозёмов В. Н., Машарский С. М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. № 1. С. 111–157.

4. *Good I. J.* The interaction algorithm and practical Fourier analysis // J. Royal Stat. Soc. (London). 1958. Vol. B-20. No. 2. P. 361–372.

5. *Малоземов В. Н., Третьяков А. А.* Новый подход к алгоритму Кули–Тьюки // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 3 (№ 15). С. 57–60.

6. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

**S. M. Masharsky**
**Fast Vilenkin–Chrestenson transform based on Good factorization**