ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УНИВЕРСАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

О.И.Рейнов

Изучается вопрос, при каких условиях универсально измеримые отображения из отделимого топологического пространства S в метрическое пространство R (с метрикой ρ) принадлежат классу $\mathcal{D}$ следующих отображений $f : S \to R$:

для любого компакта $K \subset S$ и всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое открытое (в индуцированной топологии) множество $V \subset K$, что колебание $\omega(f;V)$ R-значной функции f на V меньше, чем ε (здесь $\omega(f;V) = \sup_{s,t\in V} \rho(f(s), f(t))$).

В этой небольшой заметке мы хотим еще раз отметить связь универсально измеримых отображений в топологических пространствах с их геометрическо-топологическими свойствами в духе работ [1], [2]. В частности, мы возвращаемся к рассмотрению отображений из класса $\mathcal{D}$, введенного в заметке [1].

Напомним основное определение из [1]. Пусть S — отделимое топологическое пространство, R — метрическое пространство (с метрикой ρ). Отображение f из S в R *принадлежит классу* $\mathcal{D}$ (запись: $f \in \mathcal{D}(S,R)$, либо просто $f \in \mathcal{D}$, когда не возникает недоразумений), если оно обладает следующим свойством:

(ω) для любого компакта $K \subset S$ и всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое открытое (в индуцированной топологии) множество $V \subset K$, что колебание $\omega(f;V)$ R-значной функции f на V меньше, чем ε (здесь $\omega(f;V) = \sup_{s,t\in V} \rho(f(s), f(t))$).

Согласно теореме 1 из [1] всякое отображение $f \in \mathcal{D}$ универсально измеримо (т.е. измеримо по Лузину относительно каждой конечной положительной меры Радона на S). В этой заметке нас, в частности, будет интересовать вопрос о том, когда верна обратная импликация, т.е. при каких условиях универсально измеримое отображение из S в R принадлежит классу $\mathcal{D}$ (иными словами, в каких случаях универсальная измеримость данного отображения является его чисто топологическим свойством.) Более конкретно этот вопрос формулируется так. Для каких семейств $\mathcal{A}$ отображений из S в R верно следующее утверждение: отображение f из $\mathcal{A}$ универсально измеримо тогда и только тогда, когда оно принадлежит классу $\mathcal{D}$. Заметим, что уже в простейшем случае $S = R = [0,1]$ в качестве $\mathcal{A}$ нельзя взять

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства общего и профессионального образования России (грант №97-0-1.7-36) и Федеральной целевой программой "Интеграция" (грант № 326.53).

семейство всех отображений (так как $\mathcal{D}(S,R)$ здесь состоит из функций I класса Бэра). Поэтому какие-то условия на семейство $\mathcal{A}$ придется накладывать.

Один частный случай указанного вопроса уже рассматривался нами (неявно) в [1, следствие 4]: мы установили, что если T — линейный непрерывный оператор в банаховых пространствах X и Y, то отображение T^* универсально измеримо из (Y^*, w^*), где $w^* = \sigma(Y^*, Y)$, в $(X^*, \|\cdot\|)$ тогда и только тогда, когда $T^* \in \mathcal{D}((Y, w^*), X^*)$. Одно из любопытных следствий настоящей работы показывает, что здесь совершенно не играет роли то, что отображение T^* является линейным оператором, сопряженным к некоторому линейному непрерывному отображению T; оказывается, например, что если S и R — *-слабо компактные подмножества в Y^* и X^* соответственно, то для всякого *-слабо непрерывного отображения из S в R его универсальная измеримость как отображения из (S, w^*) в $(R, \|\cdot\|)$ эквивалентна принадлежности этого отображения пространству $\mathcal{D}\left((S, w^*), (R, \|\cdot\|)\right)$.

Центральным результатом работы является довольно простая теорема 2.1, в которой получена новая характеризация универсально измеримых отображений (одна из "псевдотопологических" характеристик универсально измеримых отображений в терминах "μ-колебаний" содержится в теореме 2 из [1]). То, что этот результат достаточно интересен (несмотря на простоту доказательства), показывают некоторые его нетривиальные следствия (см., например, [2]). Нестрого говоря, теорема 1.1 утверждает, что всякое универсально измеримое отображение f является отображением почти входящим в класс $\mathcal{D}$. Это и позволяет нам затем найти некоторые условия на f, при которых из универсальной измеримости этого отображения вытекает его принадлежность классу $\mathcal{D}$.

Перед тем, как перейти к изложению основного материала, нам удобно сделать некоторые замечания.

Замечание 0.1. Если S — бэровское пространство[1] то для всякого отображения f из S в R равносильны утверждения:

1) $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(S,R)$, т.е. если K — замкнутое подмножество в S и $\varepsilon > 0$, то найдется такое открытое множество V в S, что колебание отображения f на $V \cap K$ меньше, чем ε;

2) если K — замкнутое подмножество в S, то существует плотное в K подмножество $G \subset K$, которое является G_δ-множеством в K и такое, что отображение $f|_K : K \to R$ непрерывно в каждой точке из G.

Всякое локально компактное пространство, так же как и всякое польское[2] пространство — бэровские.

Аналогичная характеризация (т.е. равносильность последних двух утверждений) имеет место и для отображений из класса $\mathcal{D}$ (с заменой замкнутых подмножеств K на компактные; см. определение класса $\mathcal{D}$). Мы опускаем простое доказа-

[1] Топологическое пространство T называется пространством Бэра, если каждое непустое открытое множество в X является множеством второй категории, или, что эквивалентно, если дополнение к каждому множеству первой категории является плотным, или если пересечение счетного семейства всюду плотных открытых множеств в T также всюду плотно.

[2] Польское пространство — это метризуемое пространство счетного типа, на котором существует полная метрика.

тельство этих фактов, отметив лишь, что оно почти идентично с доказательством приводимого ниже предложения 1.2.

Замечание 0.2. Классическая терема Бэра утверждает, что всякая вещественная функция на польском пространстве, удовлетворяющая условию 1) из замечания 0.1, является функцией I класса Бэра (т.е. пределом последовательности непрерывных функций в топологии поточечной сходимости); более того, как установил бельгийский математик Ж.Бургейн, всякая вещественная функция из класса $\mathcal{D}$ также является функцией I класса Бэра. Ниже нам потребуется бесконечномерный аналог теоремы Бэра. Мы приведем его формулировку (см. [2]).

Отступление: теорема Бэра.

Пусть M и R — два топологических пространства, f — произвольное отображение из M в R. Мы будем говорить, что f есть бэровская функция I класса из M в R, если существует последовательность непрерывных функций из M в R, сходящаяся поточечно к f. Функцию f мы будем называть квазибэровской функцией I класса, если для всякого замкнутого подмножества K в M сужение $f|_K$ функции f на K имеет по крайней одну точку непрерывности.

Хорошо известная теорема Бэра утверждает, что вещественнозначная функция, заданная на польском пространстве, является бэровской функцией I класса тогда и только тогда, когда она является квазибэровской функцией I класса (теорема верна даже для более широкого класса топологических пространств M; см., например, [3], замечание на стр. 376–377).

Лемма 0.1. *Пусть M — нормальное топологическое пространство*[3]*, R — топологическое векторное пространство, f — счетно-значное отображение из M в R, множество значений которого есть множество $\{r_j\}_{j=1}^{\infty} \subset R$. Если для каждого j $f^{-1}(j)$ — множество типа F_σ, то f — бэровская R-значная функция I класса.*

Доказательство предоставляется читателю (применить теорему Титце–Урысона, "уплывая по взрастающей цепочке замкнутых множеств в бесконечность"). $\square$

Следующее вспомогательное утверждение является, по–видимому, известным фактом и доказывается методом ab absurdum с использованием трансфинитной индукции.

Лемма 0.2. *Пусть M — нормальное топологическое пространство, обладающее свойством:*

(σ) *всякая строго убывающая вполне упорядоченная система замкнутых множеств в M не более чем счетна (свойство Бэра)*[4]*.*

---

[3] Пространство T называется нормальным, если любые два непересекающиеся его замкнутых множества можно отделить открытыми окрестностями. Характеристическое для нормальных пространств свойство: любую непрерывную на замкнутом подмножестве $A \subset T$ функцию можно продолжить до непрерывной функции на всем T, причем с сохранением супремума функции (теорема Титце–Урысона). Как следствие: аналогичное утверждение справедливо для функций со значениями в конечномерном пространстве; см. [5], с. 90–92.

[4] Это свойство для любого топологического пространства равносильно свойству Линделефа: из

Тогда пространство M совершенно нормально, т. е. всякое замкнутое его подмножество есть множество типа G_δ. $\square$

Замечание 0.3. Обращение леммы 0.2 верно, по крайней мере, для компактных топологических пространств (см. [4], стр. 58), т. е. в классе компактов свойство (σ) характеризует совершенно нормальные пространства[5].

Предложение 0.1. *Пусть M — нормальное топологическое пространство, обладающее свойством (σ), R — метризуемое топологическое векторное пространство. Пусть, далее, f — отображение, для которого выполнено условие*

(d) для любого замкнутого подмножества K в M и для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое множество V в M, что колебание $\omega(f; V \cap K)$ функции f на множестве $V \cap K$ меньше ε (здесь $\omega(f; A) = \sup\{\rho(f(s), f(t)) \,|\, s, t \in A\}$, где ρ — метрика на R).

Тогда f — R-значная функция I класса Бэра.

Доказательство предложения 0.1. Пусть $\varepsilon > 0, \omega_1$ первый несчетный ординал и $S_1 = M$. Используя условие d, построим по трансфинитной индукции (стандартным образом) такое семейство $\{S_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ замкнутых подмножеств в M, что $S_\alpha \supsetneq S_\beta$ и $\omega(f; S_l \setminus S_{\alpha+1}) < \varepsilon$, если $\alpha < \beta < \omega_1$ и $S_\alpha \neq \emptyset$. Так как пространство M обладает свойством (σ), то существует такой счетный ординал $\gamma < \omega_1$, что $S_\gamma = \emptyset$, но $S_\alpha \neq \emptyset$ при $\alpha < \gamma$. По лемме 0.2 каждое из множеств $S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$ есть множество типа F_σ. Выберем в каждом таком множестве по точке $s_\alpha \in S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$ и положим $\varphi(s) = f(s_\alpha)$, если $s \in S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$. Так как $M = \cup_{\alpha<\gamma} S_\alpha \setminus S_{\alpha+1}$, то φ — R-значная функция I класса Бэра из M в К (лемма 0.1). При этом, очевидно, $\sup \rho(\varphi(t), f(t)) < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что отображение f есть равномерный предел последовательности R-значных функций I класса Бэра из M в R и, значит, само принадлежит этому классу. $\square$

Из предложения 0.1 и классической теоремы Бэра мы получаем:

Следствие 0.1. *Если M — польское пространство, то всякая вещественнозначная функция на M, удовлетворяющая условию (d) (в котором R — вещественная прямая), является функцией I класса Бэра и, тем самым, имеет точки непрерывности на всяком замкнутом подмножестве пространства M.* $\square$

Следствие 0.2. *Если M — совершенно нормальный компакт и R — метризуемое топологическое векторное пространство, то любое отображение из M в R, удовлетворяющее условию (d) (в частности, всякое квазибэровское отображение I класса), имеет сепарабельный образ* $\square$

Замечание 0.4. Условие (d) является аналогом в случае абстрактных отображений f понятия наследственно заостренного (*dentable*) множества в банаховом пространстве (множество B в банаховом пространстве называется наследственно

всякого открытого покрытия пространства M можно выделить не более чем счетное подпокрытие; см. [4], с. 58 и с. 124-125.

[5] Под компактным пространством мы понимаем отделимое топологическое пространство, всякое открытое покрытие которого содержит конечное подпокрытие.

заостренным, если для любого его подмножества B_0 и всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $x \in B_0$, не принадлежащая множеству $\overline{\text{co}}(B_0 \setminus D_\varepsilon(x))$, где $D_\varepsilon(x)$ — шар радиуса ε с центром в x, а $\overline{\text{co}}$ — операция взятия замкнутой выпуклой оболочки). Из теоремы Хана–Банаха легко вытекает, что если B — наследственно заостренное множество множество в банаховом пространстве X, то тождественное отображение $(B, \sigma(X, X^*)) \to X$ удовлетворяет условию (d).

Лемма 0.3 (см. [5], стр. 125, упр. 22а). *Пусть M — бэровское пространство, R — метрическое пространство, f — отображение из M в R. Если f является бэровской функцией I класса, то f непрерывно везде на M за исключением быть может множества точек I категории в M.* □

Из предложения 0.1 и леммы 0.3 вытекает

Предложение 0.2. *Пусть M — нормальное топологическое пространство, всякое замкнутое подмножество которого бэровское и которое обладает свойством (σ) (например, M — польское пространство, либо совершенно нормальный компакт). Для отображения f из M в любое метризуемое топологическое векторное пространство R равносильны утверждения:*

1) *f принадлежит I классу Бэра;*

2) *для любого замкнутого подмножества K в M сужение $f|_K$ непрерывно везде на K за исключением быть может множества точек I категории в K;*

3) *для любого замкнутого подмножества K в M сужение $f|_K$ имеет на K хотя бы одну точку непрерывности;*

4) *f удовлетворяет условию (d).* □

§1. Классы $\mathcal{D}_c$ и $\mathcal{D}_{cl}$ отображений. В этом параграфе мы определим основные объекты изучения в работе и приведем некоторые их свойства. Несмотря на элементарность результатов (все они есть непосредственные следствия определений), уже в этом разделе мы сможем вывести из них ряд любопытных фактов о топологических свойствах подмножеств пространств Фреше (метризуемых локально выпуклых векторных пространств). В частности, мы покажем, что одно из интереснейших свойств компактов Эберлейна, установленное в [6] с использованием топологической характеризации этих компактов, найденной Розенталем, на самом деле есть совсем простой факт, получающийся почти "голыми руками".

Везде далее через S мы обозначаем произвольное отделимое топологическое пространство, а через R – метрическое пространство с метрикой ρ (если на S или R будут накладываться какие–либо ограничения, то мы особо отметим это). Следующее определение является основным в работе.

Определение 1.1. Отображение f из S в R принадлежит классу $\mathcal{D}_c$ (классу $\mathcal{D}_{cl}$), если для любого компакта (замкнутого множества) K в S и всякого числа $\varepsilon > 0$ существует открытое в K подмножество $V \subset K$, обладающее следующим свойством: каковы бы ни были открытые в K множества V_1 и V_2, содержащиеся в V, $\rho(f(V_1), f(V_2)) \leqslant \varepsilon$.

Соответствующие множества отображений мы будем обозначать через $\mathcal{D}_c(S, R)$ и $\mathcal{D}_{cl}$. Ясно, что $\mathcal{D}(S, R) \subset \mathcal{D}_c(S, R)$ и $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}_{cl}(S, R)$. Основная цель нашей работы — показать, что класс $\mathcal{M}$ универсально измеримых отображений является промежуточным для классов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_c$ (см. §2; то, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ установлено в [1]).

Интересен (и важен) вопрос, при каких условиях отображение f из $\mathcal{D}_c$ (из $\mathcal{D}_{cl}$) лежит в классе $\mathcal{D}$ (в $\widetilde{\mathcal{D}}$). Для частичного ответа на этот вопрос нам удобно ввести

Определение 1.2. Пусть g — вещественная функция на подмножествах множества $S \times S$. Функция g называется c-полунепрерывной сверху (cl-полунепрерывной сверху), если для любого компакта (замкнутого множества) $K \subset S$ и всякого числа a множества $\{s \in S : g(\{s\} \times K) \leqslant a\}$ и $\{s \in S : g(K \times \{s\}) \leqslant a\}$ замкнуты в S.

Пример 1.1. Пусть E — $(\mathcal{DF})$-пространство (см. [7]), r — метрика на E', превращающая E' в сопряженное к E пространство Фреше. Если f — непрерывное отображение из S в $(E', \sigma(E', E))$, то функция $g(A, B) = r(f(A), f(B))$ c-полунепрерывна сверху.

Доказательство. Достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $S = (E', \sigma(E', E))$ и $f = \mathrm{id}$. Пусть $a \geqslant 0$ и K — компактное множество в $(E', \sigma(E', E))$. Тогда $G := \{x' \in E' : g(\{x'\}, K) \leqslant a\} = \{x' \in E' : g(K, \{x'\}) \leqslant a\} = \{x' \in E' : r(x', K) \leqslant a\} \supset K + D_a(0)$ (через $D_a(z)$ мы обозначаем замкнутый шар[6] радиусом a с центром в точке z). Так как множество $K + D_a(0)$ *-слабо замкнуто в E', то достаточно установить, что $G \subset K + D_a(0)$. Пусть $x' \in G$. Тогда для любого натурального n найдется такой элемент $z_n \in K$, что $r(x', z_n) \leqslant a + 1/n$, т.е. $K_n := K \cap D_{a+1/n}(x') \neq \emptyset$ для всякого n. Так как $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ и K_n — компакты в $(E', \sigma(E', E))$, то $\cap_n K_n \neq \emptyset$. Если теперь $z \in \cap_n K_n$, то $r(z, x') \leqslant a$ и, следовательно, $x' \in D_a(z) \subset K + D_a(0)$. □

Введение в рассмотрение определения 1.2 оправдывается следующим фактом.

Предложение 1.1. 1) *Если $f \in \mathcal{D}_c$ и функция $\rho(f \times f)$ c-полунепрерывна сверху, то $f \in \mathcal{D}(S, R)$.*

2) *Если $f \in \mathcal{D}_{cl}$ и функция $\rho(f \times f)$ cl-полунепрерывна сверху, то $f \in \widetilde{\mathcal{D}}(S, R)$.*

Доказательства обоих утверждений совершенно аналогичны, поэтому мы докажем лишь одно из них, например, первое. Пусть K — компакт в S и $\varepsilon > 0$. По условию найдется такое открытое в K множество $V, V \subset K$, что $\rho(f(V_1), f(V_2)) < \varepsilon/4$ для любых открытых подмножеств V_1 и V_2 в V. Зафиксируем точки $x, y \in V$. Пусть $\{U_\alpha\}$ — стягивающаяся к точке x система окрестностей этой точки в V, V_2 — компактная окрестность точки y. Возьмем в каждом множестве U_α точку z_α, для которой $\rho(f(z_a l), f(V_2)) \leqslant \rho(f(U_\alpha), f(V_2)) + \varepsilon/4$. Так как $z_\alpha \to x$, $\rho(f(U_\alpha), f(V_2)) < \varepsilon/4$ и функция $\rho(f \times f)$ c-полунепрерывна сверху, то $\rho(f(x), f(V_2)) \leqslant \varepsilon/2$. Теперь пусть $\{W_\alpha\}$ — система компактных окрестностей в V точки y, стягивающаяся к y, и $w_\alpha \in W_\alpha$ — такие элементы, что $\rho(f(x), f(w_\alpha)) \leqslant \rho(f(x), f(W_\alpha)) + \varepsilon/2$. Так как $w_\alpha \to y, \rho(f(x), f(W_\alpha)) \leqslant \varepsilon/2$ и функция $\rho(f \times f)$ c-полунепрерывна сверху, то $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$. □

[6] Так как замыкание выпуклого множества является одним и тем же для всех (локально выпуклых) топологий на E', согласованных с двойственностью (E', E), то этот шар будет и *-слабо замкнутым; см. [7], с. 166, предложение 3.1.

Для дальнейшего нам удобно обозначить через $\mathcal{G}_\delta$ совокупность всех топологических пространств T, обладающих следующим свойством:

$(*)$ в T содержится плотное G_δ-множество, состоящее из G_δ-точек (т.е. точек, которые являются пересечениями счетного числа открытых множеств).

Предложение 1.2. *Пусть (K,τ) — бэровское топологическое пространство. Предположим, что на множестве K можно задать метрику r со следующим свойством:*

(s) если $s,t \in K$ и $t \neq s$, то найдутся окрестности V_1 и V_2 в (K,τ) точек t и s, для которых $r(V_1,V_2) > 0$.

Если тождественное отображение $j:(K,\tau) \to (K,r)$ принадлежит классу $\mathcal{D}_c$, то для любого компакта M в (K,τ) выполняется включение $(M,\tau) \in \mathcal{G}_\delta$. Если $j \in \mathcal{D}_{cl}$, то $(K,\tau) \in \mathcal{G}_\delta$.

Пример 1.2. Пусть E — пространство Фреше, F — подпространство в E', разделяющее точки E, K — подмножество в E, $\tau = \sigma(E,F)$. Тогда метрика r на K, порожденная метрикой пространства E, обладает свойством (s).

Доказательство предложения 1.2. Мы покажем, что если $j \in \mathcal{D}_{cl}$, то $(K,\tau) \in \mathcal{G}_\delta$ (ясно, что тогда все будет доказано). Итак, пусть $j \in \mathcal{D}_{cl}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество V в (K,τ), что $r(U_1,U_2) < \varepsilon$, если U_1 и U_2 — открытые подмножества в V. Пусть A_ε — объединение всех таких открытых множеств V. Положим $A = \cap_n A_{1/n}$. Множество A — это совокупность всех точек s из K, обладающих следующим свойством: для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытая окрестность $V_\varepsilon = V_\varepsilon(s)$ точки s такая, что $r(U_1,U_2) < \varepsilon$, если U_1 и U_2 — открытые подмножества V_ε. Зафиксируем точку $s \in A$ и для каждого $\varepsilon > 0$ возьмем в K открытое подмножество $V_\varepsilon = V_\varepsilon(s)$, обладающее указанным свойством. Положим $B = \cap_n V_{1/n}$. Покажем, что $B = \{s\}$. Если $t \in B$, то $t, s \in V_{1/n}$ для любого n. Предположим, что $t \neq s$. Тогда, по условию, в K найдутся такие окрестности W_1 и W_2 точек t и s соответственно, что $r(W_1,W_2) > 0$. С другой стороны, для любого n по определению множества $V_{1/n}$ мы имеем:

$$\frac{1}{n} > r(W_1 \cap V_{1/n}, W_2 \cap V_{2/1}) = \inf_{\substack{y \in W_2 \cap V_{1/n} \\ z \in W_1 \cap V_{1/n}}} r(z,y) \geqslant \inf_{\substack{y \in W_2 \\ z \in W_1}} r(z,y) = r(W_1,W_2).$$

Полученное противоречие показывает, что $\cap_n V_{1/n} = \{s\}$ и, следовательно, всякая точка из A есть G_δ-точка в (K,τ). Нам осталось лишь установить, что каждое из открытых множеств A_ε плотно в K. Если это не так и A_ε не плотно в K для некоторого $\varepsilon > 0$, то в дополнении замыкания множества A_ε в (K,τ) найдется открытое подмножество V такое, что $r(U_1,U_2) < \varepsilon$, если U_1 и U_2 — открыты и лежат в V. Это противоречит определению множества A_ε. $\square$

Замечание 1.1. Если тождественное отображение $(K,r) \to (K,\tau)$ непрерывно, то в вышеприведенном доказательстве каждое из множеств V_ε представляет собой открытое множество в топологии $\widetilde{r}$, порожденной метрикой r, причем, как видно из доказательства, диаметр $\operatorname{diam} V_\varepsilon$ открытого в обеих топологиях множества V_ε

не больше ε. Поэтому в каждой точке s множества A (из доказательства предложения) базы окрестностей в топологиях τ и $\widetilde{r}$ совпадают и, следовательно, тождественное отображение $(K, \tau) \to (K, \widetilde{r})$ непрерывно в каждой точке множества A. Таким образом, как *следствие из доказательства*предложение 1.2 мы получаем такой любопытный факт:

Предложение 1.2а. *Пусть (K, τ) — бэровское топологическое пространство. Предположим, что на множестве K можно задать метрику r, порождающую топологию $\widetilde{r}$, которая не слабее топологии τ, и которая обладает следующим свойством:*

(s) если $s, t \in K$ и $t \neq s$, то найдутся окрестности V_1 и V_2 в (K, τ) точек t и s, для которых $r(V_1, V_2) > 0$.

Если тождественное отображение $j : (K, \tau) \to (K, r)$ принадлежит классу $\mathcal{D}_c$, то для любого компакта M в (K, τ) в M содержится плотное метризуемое в τ G_δ-множество A, состоящее из G_δ-точек, такое, что тождественное отображение $(K, \tau) \to (K, \widetilde{r})$ непрерывно в каждой точке множества A. Аналогичное заключение можно сделать в случае, когда $j \in \mathcal{D}_{cl}$ (только вместо компактов M рассматривается все пространство K.) $\square$

§2. Основная теорема и следствия.

Определение 2.1. Пусть Δ — канторов дисконтинуум, Q — отделимый компакт. Мы говорим, что Q есть *компакт канторовского типа со слоями* $\{A_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, если $A_\delta \subset Q$ при $\delta \in \Delta$ и существует такое непрерывное отображение $\varphi : Q \to \Delta$, что $(i)\, \varphi(Q) = \Delta$, и $(ii)\, A_\delta = \varphi^{-1}(\delta)$ для всех $\delta \in \Delta$.

Теорема 2.1. *Пусть f — отображение из отделимого топологического пространства S в метрическое пространство $R = (R, \rho)$. Если $f \notin \mathcal{D}_c(S, R)$, то существуют такие число $\varepsilon > 0$ и компакт канторовского типа $Q \subset S$ со слоями $\{A_\delta\}_{\delta \in \Delta}$, что $\rho\left(f(A_{\delta_1}), f(A_{\delta_2})\right) > \varepsilon$ для любых δ_1, δ_2, $\delta_1 \neq \delta_2$. Обратно, если существуют число $\varepsilon > 0$ и компакт $Q \subset S$, обладающие указанными свойствами, и если ни один из слоев A_δ, $\delta \in \Delta$, не является открытым в Q множеством, то $f \notin \mathcal{D}_c$.*

Доказательство. Пусть $f \notin \mathcal{D}_c$. По определению это означает,что найдутся такие компакт K в S и число $\varepsilon > 0$, что каково-бы ни было относительно открытое множество V в K, в V содержатся два (относительно) открытых множества V_1 и V_2, расстояние между образами которых больше ε. Используя это обстоятельство, построим по индукции (аналогично тому как строится канторово множество) последовательность открытых в компакте K его подмножеств $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ со следующими свойствами:

(1) $V_1 = K$;
(2) если $k = 0, 1, 2, \ldots,\ j = 2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1$, то $\overline{V}_{2j} \cup \overline{V}_{2j+1} \subset V_j$;
(3) $\rho\left(f(\overline{V}_{2j}), f(\overline{V}_{2j+1})\right) > \varepsilon$, если $j \geqslant 1$.

Из (2) и (3) вытекает, что если $1 \leqslant i \leqslant j$ и $V_i \not\supset V_j$, то $\rho\left(f(\overline{V}_j), f(\overline{V}_j)\right) > \varepsilon$.

Положим

$$Q := \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} V_j = \bigcup_{\{n_i\}} \left\{ \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{V}_{n_l} : 0 < n_1 < n_2 < \dots \right\}$$

(мы опускаем совсем простую проверку правого равенства).

Если $1 < n_1 < n_2 < \dots$ и $1 < n'_1 < n'_2 < \dots$, то множества $\cap_l V_{n_l}$ и $\cap_l V_{n'_l}$ либо не пересекаются, либо совпадают. Действительно, пусть, например, $z \in \cap_l V_{n_l} \setminus \cap_l V_{n'_l}$, т.е. $z \in V_{n_l}$ для любого l и существует l_0, для которого $z \notin V_{n_{l_0}}$. Поэтому $V_{n_l} \not\subset V_{n_{l_0}}$ для всякого l и, следовательно, при $n_l > n_{l_0}$ $\rho\left(f(\overline{V}_{n_l}), f(V_{n'_{l_0}})\right) > \varepsilon$; в частности, $\overline{V}_{n_l} \cap V_{n'_{l_0}} = \emptyset$.

Рассмотрим теперь систему $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ отрезков, лежащих в $[0,1]$, получающуюся в процессе стандартного построения канторова дисконтинуума (т.е. $\Delta_1 = [0,1]$, $\Delta_2 = [0,1/3], \Delta_3 = [1/3,1]$ и т.д.). Для любой последовательности натуральных чисел положим $\varphi(z) := \cap_l \Delta_{n_l}$, если $z \in \cap_l \Delta_{n_l} \neq \emptyset$. Из приведенных рассуждений и построения семейства $\{V_j\}$ следует, что эта формула определяет отображение φ из компакта Q на все канторово множество Δ, причем для каждой точки $\delta \in \Delta$ $\varphi^{-1}(\{\delta\})$ есть множество вида $\cap_l V_{n_l}$. Кроме того, по построению, для любых двух различных множеств $\cap_l V_{n_l}$ и $\cap_l V_{n'_l}$ имеет место равенство $\rho\left(f(\cap_l V_{n_l}), f(\cap_l V_{n'_{l_0}})\right) > \varepsilon$. Таким образом, нам осталось проверить лишь непрерывность отображения φ, а она вытекает из равенства

$$\varphi^{-1}(\Delta \cap \Delta_k) = \bigcup_{\{n_l\}} \left\{ \bigcap_{l} V_{n_l} :\ 0 < n_1 < n_2 < \dots;\ \exists l,\ V_{n_l = V_k} \right\} = Q \cap V_k,$$

так как множество V_k открыто в K.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим произвольное непустое открытое подмножество V компакта Q. Существуют по крайней мере два различных слоя A_{δ_1} и A_{δ_2} в Q, с которым множество V пересекается (так как никакой слой A_δ не является открытым). Это означает, что $\delta_1, \delta_2 \in \varphi(V)$. Пусть W_1 и W_2 — дизъюнктные окрестности в Δ точек δ_1, δ_2, и пусть $V_1 = \varphi^{-1}(W_1) \cap V, V_2 = \varphi^{-1}(W_2) \cap V$. Множества V_1 и V_2 открыты в Q и содержатся в V, причем ни для какого слоя A_δ не могут одновременно выполняться соотношения $V_1 \cap A_\delta = \neq \emptyset$ и $V_2 \cap A_\delta = \neq \emptyset$. Поэтому любые две точки $t \in V_1$ и $s \in V_2$ лежат в разных слоях компакта Q и, следовательно, для них $\rho(f(t), f(s)) > \varepsilon$; отсюда вытекает, что $\rho\left(f(v_1), f(V_2)\right) > \varepsilon$, что и завершает доказательство. □

Следствие 2.1. *Предположим, что все сепарабельные подмножества в S метризуемы. Отображение $f : S \to R$ не принадлежит классу $\mathcal{D}_c$ тогда и только тогда, когда существует гомеоморфное канторову дисконтинууму подмножество P в S и число $\varepsilon > 0$, обладающие тем свойством, что $\rho(f(s), f(t)) > \varepsilon$ для любых двух различных точек s и t из P.*

Доказательство. Пусть $f \notin \mathcal{D}_c, Q$ — компакт канторовского типа в S, указанный в заключении теоремы, и φ — непрерывное отображение из Q на Δ, удовлетворяющее условиям (i) и (ii) определения 2.1. Так как компакт Δ метризуем, то найдется такое сепарабельное компактное подмножество Q_1 (которое по условию. метризуемо) компакта Q, что $\varphi(Q_1) = \Delta$. Хорошо известный топологический результат Куратовского утверждает, что в этом случае в Q_1 содержится компактное подмножество P, гомеоморфное канторову дисконтинууму, такое, что отображение $\varphi|_P : P \to \varphi(P)$ взаимно однозначно. Ясно, что этот компакт P удовлетворяет заключению следствия 2.1. Обратно, пусть P — компакт в S и $\varepsilon > 0$, причем $\rho(f(s), f(t)) > \varepsilon$ для $s, t \in P$, $s \neq t$. Если V — открытое в P множество, то для любых непересекающихся множеств V_1 и V_2 в V $\rho(f(V_1), f(V_2)) > \varepsilon$, т.е. Поэтому f не принадлежит классу $\mathcal{D}_c$. □

Следствие 2.2. 1) *Если метрическое пространство R сепарабельно, то всякое отображение из любого топологического пространства в R принадлежит классу $\mathcal{D}_c$.*

2) *Если никакой компакт в S не есть компакт канторовского типа, то всякое отображение из S в любое метрическое пространство принадлежит классу $\mathcal{D}_c$; в частности, это имеет место, когда мощность S меньше мощности континуума.* □

Обозначим через $\mathcal{M}(S, R)$ совокупность всех универсально измеримых отображений из S в R. Одним из основных следствий теоремы 2.1 является

Следствие 2.3. $\mathcal{D}(S, R) \subset \mathcal{M}(S, R) \subset \mathcal{D}_c(S, R)$.

Доказательство. Левое включение доказано в работе [1]. Для доказательства второго включения рассмотрим отображение f из S в R, не принадлежащее классу $\mathcal{D}_c$. Пусть Q — компакт канторовского типа со слоями $\{A_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ из теоремы 2.1 и $\varphi : Q \to \Delta$ — такое непрерывное отображение из Q на Δ, что $\varphi^{-1}(\{\delta\}) = A_\delta$. Пусть $\widetilde{\mu}$ — неатомическая вероятность на Δ. Существует вероятность μ на Q, образ которой при отображении φ есть мера $\widetilde{\mu}$. Покажем, что f не является μ-измеримым отображением. Действительно, в противном случае для любого натурального n найдется такой компакт $K_n \subset Q$, что $\mu(K_n) > 1 - 1/n$ и сужение f на K_n непрерывно; следовательно $f(K_n)$ — компакт в R. Так как $\widetilde{\mu}$ — неатомическая мера и $\mu(K_n) \leqslant \widetilde{\mu}(\varphi(K_n))$, то при любом $n > 0$ компакт K_n пересекается с несчетным числом слоев A_δ. Поэтому множество $f(K_n)$ не может быть сепарабельным и, тем более, компактным в R (ввиду того, что $\rho(f(A_{\delta_1}), f(A_{\delta_2})) > \varepsilon$ при $\delta_1 \neq \delta_2$). □

Как показывают простейшие примеры, оба включения в следствии 2.3 могут быть строгими (так, в случае $S = R = [0, 1]$ пространство $\mathcal{D}(S, R)$ состоит из функций I-го класса Бэра, а $\mathcal{D}(S, R) = [0, 1]^{[0,1]}$ по следствию 2.2). Однако, предложение 1.1,1) дает нам возможность выделить в пространстве R^S подмножество, состоящее из отображений, для которых вхождение в один из указанных классов $\mathcal{D}$ или $\mathcal{D}_c$ обеспечивает и их принадлежность двум другим классам. Обозначим через $\mathcal{A}(S, R)$ совокупность всех таких отображений из S в R, что функция $\rho(f \times f)$ c-полунепрерывна сверху на $S \times S$.

Следствие 2.4. *Для отображения $f \in \mathcal{A}(S,R)$ эквивалентны условия:*

1) $f \in \mathcal{D}$,

2) $f \in \mathcal{M}$,

3) $f \in \mathcal{D}_c$. □

Следствие 2.5. *Для отображения $f \in \mathcal{A}(S,R)$ эквивалентны условия:*

1) *f универсально измеримо,*

2) *для всякого компакта K в S отображение $f|_K$ непрерывно в каждой точке некоторого плотного в K подмножества G, которое является G_δ-множеством II категории в K.* □

Следствие 2.6. *Пусть K — совершенно нормальный компакт (например, метрический), R — метризуемое топологическое векторное пространство. Для отображения $f \in \mathcal{A}(K,R)$ эквивалентны условия:*

1) *f универсально измеримо,*

2) *f — R-значная функция I класса Бэра.*

Доказательство. Согласно замечаниям 1 и 2 утверждение 2) равносильно тому, что f принадлежит классу $\mathcal{D}$; следовательно, 2) $\iff$ 1) по следствию 2.4. □

Из следствия 2.6 мы немедленно получаем такой важный результат:

Следствие 2.7. *Если K — совершенно нормальный компакт и R — метризуемое ТВП, то любое отображение $f \in \mathcal{A}(K,R) \cap \mathcal{M}(K,R)$ имеет сепарабельный образ.* □

Из следствий 2.2 и 2.4 вытекает

Следствие 2.8. *Если либо R — сепарабельное метрическое пространство, либо никакой компакт в S не есть компакт канторовского типа, то имеет место включение $\mathcal{A}(S,R) \subset \mathcal{D}(S,R)$ и, следовательно, всякое отображение $f \in \mathcal{A}(S,R)$ универсально измеримо.* □

Из следствий 2.1 и 2.4 вытекает

Следствие 2.9. *Предположим, что сепарабельные компакты в S метризуемы и $f \in \mathcal{A}(S,R)$. Если f не является универсально измеримым, то в S найдется такой компакт Q, гомеоморфный канторову множеству, что $\rho(f(s), f(t)) > \varepsilon$ для всех $s, t \in Q$ $(s \neq t)$, где ε — некоторое фиксированное положительное число.* □

Следствие 2.10. *Пусть (K, τ) — отделимый компакт. Если на множестве K существует метрика r, обладающая свойством (s) из предложения 1.2, и такая, что тождественное отображение $(K,\tau) \to (K,r)$ универсально измеримо, то множество G_δ-точек пространства (K,τ) является множеством II категории.* □

§**3. Некоторые обобщения.** Сделаем ряд замечаний по поводу простых обобщений приведенных выше утверждений и их доказательств. В определении класса

$\mathcal{D}_c$ и далее в §2 мы сознательно ограничивали себя рассмотрением тех свойств отображений, которые полностью определяются свойствами сужений этих отображений на компактные подмножества их области задания. Нетрудно видеть, что все основные доказательства из §2 пройдут, если в определениях классов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_c$ вместо компактных подмножеств брать любые замкнутые подмножества (т.е. рассматривать классы $\widetilde{\mathcal{D}}$ и $\mathcal{D}_{cl}$; см. замечание 1 и определение 1.2) и дополнительно требовать выполнение следующих условий:

а) замкнутые подпространства пространства S регулярны и в любом замкнутом подпространстве пространства S пересечение любой убывающей последовательности замкнутых окрестностей имеет непустое пересечение;

б) для пары (S, R) верна теорема Бэра (см. замечание 2).

Условие а) необходимо при доказательстве теоремы 2.1; б) используется в следствии 2.6. Примером пространства S с условием а) может служить произвольное регулярное топологическое пространство, всякое замкнутое подмножество которого является непрерывным образом полного метрического пространства. Примеры пространств с условием б) — польские пространства (а также совершенно нормальные компакты).

Приведем ряд утверждений, которые легко получить, соответствующим образом модифицировав изложенные выше доказательства (отступая от принятых правил, мы будем нумеровать эти утверждения в соответствии с нумерацией их аналогов из §2).

Следствие 3.1. *Пусть S — суслинское[7] пространство, удовлетворяющее условию а). Для отображения f из S в метрическое пространство R эквивалентны утверждения:*

1) *существуют такие число $\varepsilon > 0$ и замкнутое подмножество K в S, что для любого (относительно) открытого множества V в K найдутся два относительно открытых множества $V_1, V_2 \subset V$ такие, что $\rho\left(f(V_1), f(V_2)\right) > \varepsilon$;*

2) *существует гомеоморфное канторову дисконтинууму подмножество P в S число $\varepsilon > 0$, обладающие тем свойством, что $\rho(f(s), f(t)) > \varepsilon$ для любых двух различных точек s и t из P.* □

Следствие 3.3. *Если S удовлетворяет условию а) и f — универсально измеримое отображение из S в R, то f не может обладать свойством* 1), *сформулированным в предыдущем следствии.* □

Заменяя в определении класса $\mathcal{A}$ c-полунепрерывность на cl-полунепрерывность (см. определение 1.2), мы рассмотрим совокупность $\widetilde{\mathcal{A}}(S, R)$ тех отображений $f : S \to R$, что функция $\rho(f \times f)$ cl-полунепрерывна сверху на $S \times S$. Отметим, что по предложению 1.1,2) $\mathcal{D}_{cl} \cap \widetilde{\mathcal{A}} \subset \widetilde{\mathcal{D}}$. Следствие 3.1 показывает, что для пространств с условием а) $\mathcal{D}_{cl}(S, R) = \mathcal{D}_c$. Используя следствие 2.4 и то, что $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, мы получаем отсюда:

[7] Пространство называется *суслинским*, если оно метризуемо и является непрерывным образом польского пространства.

Следствие 3.4. *Пусть S удовлетворяет условию a). Для $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(S,R)$ эквивалентны утверждения:*

1) $f \in \mathcal{D}_{cl}$; 2) $f \in \widetilde{\mathcal{D}}$; 3) $f \in \mathcal{D}$; 4) $f \in \mathcal{M}$; 5) $f \in \mathcal{D}_c$. $\square$

Из следствия 3.4 и замечания 1) вытекает

Следствие 3.5. *Если S — польское пространство и $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(S,R)$, то эквивалентны утверждения:*

1) *f универсально измеримо;*

2), *для всякого замкнутого подмножества K в S отображение $f|_K$ непрерывно в каждой точке некоторого плотного в K подмножества G, которое является G_δ-множеством II категории в K.* $\square$

Следствие 3.6. *Пусть S — польское пространство, R — метризуемое ТВП. Для отображения $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(S,R)$ эквивалентны условия.*

1) $f \in \mathcal{M}$;

2) *f — R-значная функция I класса Бэра.* $\square$

Следствие 3.7. *Если S — суслинское пространство, и R — метризуемое ТВП, то любое отображение $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(S,R) \cap \mathcal{M}(S,R)$ имеет сепарабельный образ.* $\square$

Следствие 3.9. *Предположим, что сепарабельные компакты в S метризуемы. Пусть S удовлетворяет условию a) и $f \in \widetilde{\mathcal{A}}(S,R)$. Если $f \notin \mathcal{M}$, то в S найдется такой компакт Q, гомеоморфный канторову множеству, что $\rho(f(s), f(t)) > \varepsilon$ для всех $s,t \in Q\,(s \neq t)$, где ε — некоторое фиксированное положительное число.* $\square$

Чтобы показать, в каких конкретных ситуациях могут быть применены последние результаты, приведем лишь один пример. Основные применения доказанных в данной работе утверждений (их приложения в геометрической теории линейных операторов) мы намерены изложить в последующей статье.

Пример 3.1. Пусть E — $(\mathcal{DF})$-пространство, r — метрика на E', превращающая E' в сопряженное к E пространство Фреше. Если f — непрерывное отображение из отделимого топологического пространства S в $(E', \sigma(E',E))$, то f принадлежит множеству $\widetilde{\mathcal{A}}\,(S, (E', r))$.

Это, по существу, установлено при рассмотрении примера 1.1. $\square$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнов О.И., *Об одном классе универсально измеримых отображений*, Матем. заметки **26** (1979), вып. 6, 949-954.
2. Рейнов О.И., *Функции I класса Бэра со значениями в метрических пространствах и их применения*, Записки научн. сем. ЛОМИ. **135** (1984), 135-149.
3. E.Odell, H.P.Rosenthal, *A double dual characterization of separable Banach spaces containing l_1,*, Israel J. Math. **20** (1975), no. 3-4, 375-384.
4. Александров П.С., Урысон П.С., *Мемуар о компактных топологических пространствах*, М.: Наука, 1971.
5. Бурбаки Н., *Общая топология*, вып. 3 М.: Наука, 1975.

6. Y.Beniamini, M.E.Rudin, M.Wage, *Continuous images of weakly compact subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **70** (1977), no. 2, 309-324.
7. Х.Шеффер, *Топологические векторные пространства*, Москва: Мир (1971), 360 с.

С.-Петербургский госуниверситет

E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru