АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА И НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОПЕРАТОРОВ

О.И.Рейнов

Abstract. Among others, we consider in detail some questions around the properties of operators with p-nuclear adjoints. For $p = 1, \infty$, we give also new examples of operators, which can not be factored through L_p-spaces, but whose adjoints factor compactly through $l_{p'}$-spaces. We show that, for any $p \in [1, \infty]$, all Banach spaces have the (new) so called approximation property $AP(l_p)$, connected with the compact factorizatons of operators through l_p, if and only if every operator, whose adjoint factors compacly through $l_{p'}$, can be factored (compactly) through the space l_p.
Bibliography: 32 titles.

Введение

В теории аппроксимации операторов в квазинормированных операторных идеалах важную роль играют как различные так называемые аппроксимационные свойства нормированных пространств, так и квазинормированные тензорные произведения, рассматриваемые наряду с порождаемыми ими (либо порождающими их) квазинормированными операторными идеалами. Пусть, к примеру, α — некоторая тензорная норма на классе всех тензорных произведений банаховых пространств, так что сопряженное к любому тензорному произведению вида $X^* \otimes_\alpha Y$, где X, Y — банаховы пространства, есть некоторое пространство операторов $A(Y, X^{**})$ (двойственность задается стандартным способом при помощи следа суперпозиции тензорного элемента и оператора, порождающего соответствующий функционал). Пусть, далее, $A_0(Y, X)$ — замыкание в $A(Y, X^{**})$ множества всех конечномерных линейных непрерывных отображений (операторов) из Y в X. Предположим, что существует ненулевой тензорный элемент z из пополнения $X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y$ тензорного произведения $X^* \otimes_\alpha Y$, который порождает нулевой оператор $\widetilde{z}$. Тогда мы получаем, что след $\operatorname{tr} R \circ z$ суперпозиции любого одномерного (а, значит, и конечномерного) оператора R с тензором z равен нулю, тогда как, в силу нетривиальности z, для некоторого оператора $T \in A(Y, X^{**})$ мы должны иметь: $\operatorname{tr} T \circ z = 1$. Упростив ситуацию (например, предположив, что пространство X

Работа выполнена при частичной поддержке Федеральной целевой программой “Интеграция” (грант № 326.53) и Шведской Королевской Академии наук.

рефлексивно), мы находим оператор $T \in A(Y,X)$, не лежащий в замыкании множества $A_0(Y,X)$ всех конечномерных операторов в топологии $\sigma(A(Y,X), X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y)$. Тем самым, мы получаем и оператор $T \in A(Y,X)$, не аппроксимируемый конечномерными по норме пространства $A(Y,X)$. Можно пройтись и в обратную сторону.

Конечно, в каждом конкретном случае весьма неочевидно, что существует тензорный элемент z с описанными выше свойствами. Впервые существование подобного рода тензоров установил в 1972 г. шведский математик П.Энфло [6], решив отрицательно знаменитые проблемы базиса С.Банаха и аппроксимации А.Гротендика: он показал, что тензоры указанного характера существуют, если в качестве α взять проективную норму А.Гротендика [9] (определение см. ниже в §1, $\otimes_p$ при $p = 1$). В этом случае соответствующая *-слабая топология на сопряженном к проективному тензорному произведению $X^*\widehat{\otimes}Y$ пространстве $\mathrm{L}(Y,X^{**})$ — пространстве всех операторов из Y в X^{**} — тесно связана с топологией компактной сходимости, и П.Энфло установил существование сепарабельного рефлексивного банахова пространства, для которого тождественный оператор id_X в X не аппроксимируется в топологии компактной сходимости конечномерными, — по определению из [9] это означает, что пространство X не обладает так называемым свойством аппроксимации AP . В [9], по существу, введено и понятие условия ограниченной аппроксимации: банахово пространство X удовлетворяет условию ограниченной аппроксимации BAP, если тождественное отображение id_X лежит в замыкании, в топологии компактной сходимости, шара радиуса C пространства $\mathrm{L}_0(X,X)$ всех конечномерных отображений (с обычной операторной нормой) для некоторой постоянной $C > 0$. Весьма не очевидно, что свойства AP и BAP различаются между собой, и соответствующая проблема А.Гротендика [9] была отрицательно решена в работе [7]: BAP $\neq$ AP .

Конструкция П.Энфло экстремальна в том смысле, что в ней указан пример ненулевого тензорного элемента, порождающего нулевой оператор и являющегося s-ядерным при любом $s > 2/3$; отметим, что при $s = 2/3$ подобная конструкция невозможна, и это еще в 1955 г. установил А.Гротендик [9]. Мы, не объясняя подробно только что сказанное, сформулируем одно утверждение, в котором содержатся и упомянутые факты.

Предложение. *1) Если X, Y — банаховы пространства и z — элемент проективного тензорного произведения $X^*\widehat{\otimes}Y$, представимый в виде*

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x'_k \otimes y_k, \ \textit{где} \ \ \mu_k \searrow 0, \, \mu_k = o\Big(\frac{1}{k^{3/2}}\Big), \, \|x'_k\| \, \|y_k\| = 1,$$

то оператор $\widetilde{z}$, ассоциированный с z, нулевой тогда и только тогда, когда сам элемент z равен нулю.

2) Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство X и ненулевой тензорный элемент $z \in X^*\widehat{\otimes}X$, порождающий нулевой оператор и допус-

кающий разложение в ряд

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x'_k \otimes x_k,$$

где $(x'_k) \subset X^*$, $(x_k) \subset X$ *— ограниченные последовательности, а числовая последовательность* (μ_k) *такова, что* $\mu_k = O(\frac{\sqrt{\ln k}}{k^{3/2}})$.

Первая часть предложения — это обобщение соответствующей теоремы А. Гротендика, полученное автором в [31], вторая — пример П.Энфло (см. [18], [19], [13]), и эту конструкцию мы интенсивно используем ниже.

Примеры Энфло и Фигеля-Джонсона привели к многочисленным вопросам, связанным как с аппроксимацией операторов в некоторых конкретных операторных идеалах конечномерными, так и с так называемой регулярностью ставших теперь классических операторных идеалов, таких как идеалы p-ядерных операторов, $p > 0$. Вот только два вопроса, взятых из монографии А.Пича [18], [19] (первый из них мы приводим в терминах настоящей работы, определение см. в §1; относительно второго мы отсылаем читателя к первоисточнику).

1) [18, п. 19.2.6] Верно ли, что для $p \neq 2$ существует квази-p-ядерный оператор, не аппроксимируемый по квази-p-ядерной норме конечномерными отображениями?

2) [18, п. 18.1.7] Описать все показатели p, r, q, для которых идеал (p, r, q)-ядерных операторов регулярен.

Первый вопрос имеет положительный ответ [28], [25]. Второй, весьма красивый, вопрос поставлен в очень общей форме и до нынешнего времени далек от своего окончательного решения (часть положительных результатов можно найти в монографии А.Пича). Поэтому мы приведем переформулировку второго вопроса для трех частных случаев, в которых между показателями p, r, q имеются определенные соотношения (за деталями и определениями мы, однако, отсылаем читателя к книге [18] и к параграфам 1, 4, 5 и 7 настоящей статьи). Пусть $p \neq 2$, p' — сопряженный показатель и $T : X \to Y$ — ограниченный оператор в банаховых пространствах.

(i) Верно ли, что если второй сопряженный T^{**} является p-ядерным, то таким же свойством обладает и сам оператор T?

(ii) Верно ли, что если сопряженный к T оператор T^* является p-ядерным, что сам оператор T является дуально p-ядерным, т.е. допускает факторизацию через некоторый диагональный оператор $l_{p'} \to l_1$?

(iii) Верно ли, что если сопряженный к T оператор T^* факторизуется компактно через пространство l_p, то сам оператор T допускает (строгую) факторизацию через пространство $l_{p'}$?

Ответы на вопросы (i)-(ii) отрицательны при любом $p \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ (см. [7], [25], [26], [28], [29], [31] и §§4-5 настоящей работы). Ответ на вопрос (iii) — отрицателен, если $p = 1$ или $p = \infty$ (см. [25], [28], [30] и §§4-5, 7 настоящей работы). Ответ на вопрос (iii) до сих пор неизвестен при других значениях показателя p, т.е. при $1 < p \neq 2 < \infty$.

Остановимся немного на ситуации, поясняющей (если принять во внимание результаты §7 данной статьи, и, особенно, самую последнюю теорему в нашей работе) сложности при решении задачи (iii). Определения и детали, связанные с приводимыми ниже рассуждениями, можно найти в §7.

Рассмотрим банахово тензорное произведение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, ассоциированное с идеалом K_p компактно l_p-факторизуемых операторов в банаховых пространствах (в частности, всякий тензор в рассматриваемой ситуации порождает оператор, факторизуемый через пространство l_p компактным образом). Каждый тензор $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, как и всякий оператор $S \in \mathrm{K}_p(X, Y)$, допускает представление вида

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \, x'_j \otimes y_j, \qquad \alpha_j \to 0, \tag{0.1}$$

причем для заранее заданного числа $\varepsilon > 0$ это представление для z может быть выбрано так, что

$$\sup_j |a_j| \sup_{\|x\| \le 1} \left(\sum_j |\langle x'_j, x \rangle|^p \right)^{1/p} \sup_{\|y'\| \le 1} \left(\sum_j |\langle y_j, y' \rangle|^{p'} \right)^{1/p'} \le k_p^0(z) + \varepsilon, \tag{0.2}$$

где $k_p^0(z)$ — норма элемента z в его тензорном произведении. Каждый оператор S, как говорилось только что, также допускает подобного рода разложение в ряд одномерных операторов, но с оценкой справа через его K_p-норму: $\cdots \le k_p(S) + \varepsilon$. При этом нормы k_p^0 и k_p на конечномерных операторах вида

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_j \, x'_j \otimes y_j. \tag{0.3}$$

определяются весьма схожим способом (см. начало §7).

На первый взгляд, различия между тензором $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ и соответствующим ему оператором $S = \widetilde{z}$ не видно, особенно, если посмотреть на их разложения в ряды вида (0.1). Однако, существенная разница в их определении прослеживается при рассмотрении конечномерных операторов (или тензоров): для конечномерного оператора S из (0.3) (пусть ему соответствует тензор z) его норма в пространстве $\mathrm{K}_p(X, Y)$ вычисляется как инфимум левой части соотношения (0.2) *по всем* соответствующим представлениям вида (0.1) оператора S, тогда как норма ассоциированного тензорного элемента z — как инфимум левой части соотношения (0.2) по всем разложениям оператора S *в конечную сумму одномерных отображений.* Эта разница оказывается весьма существенной, и нам известно, что, по-крайней мере для $p = 1, p = \infty$, рассматриваемые две нормы, вообще говоря, не совпадают между собой даже на конечномерных операторах (относительно случая $p=\infty$ см. [25, следствие 3.4 и предшествующие этому следствию доказательства]; случай $p=1$ рассмотрен в настоящей работе (следствие 4.25), но без подробного доказательства соответствующее утверждение появилось уже в статье [25, следствие 4.2]).

В этой работе мы как раз и будем иметь дело с ситуацией, связанной с кругом вопросов, возникающих в связи с проблемами (i)-(iii), и, естественно, затронем некоторые области как их приложений, так и близких по тематике проблем. Мы не станем описывать основные результаты, получаемые в процессе нашего дальнейшего изложения, — круг рассматриваемых вопросов очерчен как в названиях соответствующих параграфов, так и в необходимых комментариях, которые появляются по мере прохождения нами цепочек новых фактов, устанавливаемых в настоящей статье.

Автор искренне признателен Макарову Б.М. за внимание к работе и за ряд весьма полезных замечаний после, видимо, нелегкого прочтения этой статьи.

§1. Обозначения и определения. Предварительные сведения.

Рассматриваемые пространства X, Y, Z, $E, \dots$ — банаховы. Элементы этих пространств мы обычно обозначаем соответствующими строчными буквами: $x\in X$, $y\in Y,\dots$, $x'\in X^*$, $y''\in Y^{**},\dots$. Функционалы будут также обозначаться и через f и т.п., а значения их, например, функционала x' или f, на элементе x — либо через $\langle x', x\rangle$, $\langle x, x'\rangle$, либо через $x'(x)$, $f(x)$. Если надо указать пространство, в котором рассматривается норма $\|\cdot\|$ элемента $x\in X$, то мы обычно пишем $\|x\|_X$. Обозначения для последовательности элементов некоторого множества: $(f_k), (f_k)_k$ и т.д., для замкнутой линейной оболочки B — $[B]$; значение отображения на некотором элементе — $Ax, A(x)$; для образа отображения используем как обозначение типа φ^*X^*, так и типа $\varphi(E)$. Единичный (замкнутый) шар банахова пространства X обычно обозначается через B_X. Через $W(K)$ мы обозначаем множество всех вероятностных мер Радона на топологическом пространстве K; если K — единичный шар B_{X^*}, снабженный *-слабой топологией, то для вероятности Радона μ на нем пишем $\mu\in W(B_{X^*}, w^*)$.

Обозначения l_p, c_0 стандартны; квазинормы в этих пространствах (как и пространствах типа $L_p(\mu)$) мы также обозначаем через $\|\alpha\|_p=\|\alpha\|_{l_p}$ для $\alpha=(\alpha_k)\in l_p$, $p\in[18],\infty]$, и $\|\alpha\|_\infty=\|\alpha\|_{c_0}$ в случае пространства c_0; l_p^N — конечномерные аналоги l_p-пространств; r' - сопряженный с $r\in[1,\infty]$ показатель. Следует заметить, что в некоторых случаях (например, при рассмотрении ряда норм на тензорных произведениях банаховых пространств) символом типа $\|\cdot\|_p$ мы будем обозначать и нормы в других пространствах, отличных от пространств L_p, но это ни в коем случае не приведет к недоразумению.

Если X — банахово пространство и μ — некоторая мера, то через $L_p(\mu;X)$, $0<p\leqslant\infty$ обозначается L_p-пространство всех (классов эквивалентности) сильно μ-измеримых интегрируемых в p-й степени (по Бохнеру) функций. В случае дискретных мер мы также используем обозначения типа $l_p(X)$, $l_p(\Gamma;X)$, $c_0(X)$, и

т.п.. Для квазинормы последовательности $(x_k)_k$, лежащей в пространстве $l_p(X)$, мы будем использовать обозначение $\alpha_p(x_k) := \left(\sum_k \|x_k\|^p\right)^{1/p}$ (при $p = \infty$ необходима соответствующая модификация). Напомним, что для конечных $p \geqslant 1$ $l_p(\Gamma; X)^* = l_{p'}(\Gamma; X^*)$ и $c_0(\Gamma; X)^* = l_1(\Gamma; X)$. Семейство $(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$, для которого конечна величина $\alpha_p(x_k)$, называется *абсолютно p-суммируемым.* Семейство $(x_k)_{k=1}^\infty$, называется *слабо p-суммируемым,* если $(\langle x_k, x'\rangle) \in l_p$ для всех $x' \in X^*$. Полагаем

$$\varepsilon_p(x_j) := \sup_{\|x'\| \le 1} \left(\sum_j |\langle x_j,\, x'\rangle|^p \right)^{1/p}$$

Это квазинорма (норма при $p \geqslant 1$) в пространстве $l_p\{X\}$ всех слабо p-суммируемых последовательностей элементов из X.

Мы говорим, что банахово пространство *вполне сепарабельно,* если как оно само, так и все его сопряженные пространства сепарабельны.

Через π_Y обозначается каноническое изометрическое вложение пространства Y в его второе сопряженное Y^{**}; часто мы будем опускать индекс, указывающий на то, какое пространство вкладывается в свое второе сопряженное, — из контекста будет понятно, где действует оператор π (иногда в одном и том же доказательстве символ π будет использоваться для обозначений вложений разных пространств в их вторые сопряженные). Кроме того, если это не приводит к недоразумению, мы часто будем считать, что рассматриваемое банахово пространство является подпространством своего второго сопряженного, — это удобно, в частности, для упрощений некоторых формул.

Напомним, что каждое банахово пространство X изометрично факторпространству некоторого пространства $l_1(\Gamma)$ (в качестве Γ можно взять B_X; тогда оператор, определяемый соотношением $Q(\alpha_x) := \sum_{x \in B_X} \alpha_x x$, будет факторотображением из $l_1(B_X)$ на X). Каждое банахово пространство изометрично подпространству некоторого $l_\infty(\Gamma)$, например, пространства $l_\infty(B_{X^*})$.

Через $\mathrm{L}(X, Y)$ обозначается пространство всех (линейных непрерывных) операторов из X в Y со стандартной нормой, $\mathrm{App}(X, Y)$ — замыкание множества всех конечномерных операторов (операторов конечного ранга) в пространстве $\mathrm{L}(X, Y)$.

Оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ называется *оператором типа* RN (*оператором Радона-Никодима,* RN-*оператором*) [27, 20, 21, 18], если T переводит векторные меры m ограниченной вариации в меры, представимые интегралом Бохнера по вариации меры m.

Банахово пространство X *обладает свойством Радона–Никодима*(см., например,[18, п. 24.2.6, 24.2.9; 4]), $X \in \mathrm{RN}$, если тождественное отображение в X есть оператор типа RN . Каждое рефлексивное пространство, а также сепарабельное сопряженное пространство обладает свойством RN (см. [9, 5, 4, 21]). В частности, вполне сепарабельное банахово пространство, как и все его сопряженные, имеет свойство Радона-Никодима. Пространство со свойством RN не может содержать изоморфную копию пространства c_0, или копию пространства $L_1[0, 1]$.

Оператор $T : X \to Y$ называется *условно слабо компактным*, если из всякой ограниченной последовательности $(x_n) \subset X$ можно извлечь такую подпоследовательность (x_{n_k}), что $\{Tx_{n_k}\}$ — последовательность Коши в $(Y, \sigma(Y, Y^*))$. T является условно слабо компактным оператором тогда и только тогда, когда не существует такого изоморфного пространству l_1 подпространства Z в X, что сужение $T|_Z$ является изоморфизмом (см., например, [22]). Если $T^* \in \mathrm{RN}$, то оператор T условно слабо компактен.

Напомним, что оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ является слабо компактным тогда и только тогда, когда $T(X^{**}) \subset \pi_Y Y$. Для слабо компактного оператора $T : X \to Y$ через T^π обозначается его сильно бидуальный оператор [18, п. 1.5.5], т.е. оператор из X^{**} в Y, определяемый соотношением $T^\pi x'' := (\pi_Y|_{\pi_Y Y})^{-1}(T^{**}x'')$.

Лемма 1.1 (см. [15],[32],[4, теорема VI.2.15]). *Если оператор $T : C(K) \to Z$ не является слабо компактным, то в $C(K)$ найдется изометричная копия пространства c_0, на которой оператор T действует как изоморфизм.*

Следующие два утверждения взяты из статьи [12] (второе приводится в удобной для нас формулировке, существование базиса в пространстве Z^{**} в лемме 1.3 вытекает из определения пространства Z в доказательстве следствия 1 в [12]). Подробные сведения о базисах Шаудера в банаховых пространствах можно найти в монографии [13, раздел 1.b]).

Лемма 1.2 ([12], теорема 1). *Для всякого сепарабельного банахова пространства E существуют сепарабельное банахово пространство W с монотонным натягивающим базисом и фактороотображение $\Psi : W^* \to E$ такие, что W^* имеет базис и $W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W$.*

Лемма 1.3 ([12], следствие 1). *Для всякого сепарабельного банахова пространства E существуют сепарабельное банахово пространство Z с базисом и линейный гомоморфизм $\Phi : Z^{**} \to E$ такие, что Z^{**} имеет базис (и, следовательно, сепарабельно), подпространство $\Phi^* E^*$ дополняемо в Z^{***} и ядро гомоморфизма Φ есть $\pi_Z Z$.*

Модифицируя определение пространства Y из доказательства основной теоремы 1 из [12], нам удалось получить некоторое обобщение этой теоремы Линденштраусса, — доказательство соответствующего утверждения готовится к печати в Записках научных семинаров ПОМИ, 2001. Приведем необходимые нам следствия из этого обобщения. Ниже в леммах 1.4 и 1.5 под l_∞ понимается пространство c_0.

Лемма 1.4. *В условиях леммы 1.2, банахово пространство W и фактороотображение $\Psi : W^* \to E$, помимо прочего, могут быть выбраны еще и так, чтобы выполнялось условие*

$\varepsilon_r^{(1)}$ *для всякого $\varepsilon > 0$, любого $r \in [1, \infty)$ и для каждой слабо r-суммируемой последовательности (x_k) в E существует такая слабо r-суммируемая последовательность (w_k^*) в W^*, что $\Psi w_n^* = x_n, n = 1, 2, \ldots,$ и $\varepsilon_r(w_n^*) \leqslant \varepsilon_r(x_n) + \varepsilon$,*

или, что то же самое, условие

$l_r^{(1)}$ *для всякого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $r \in [1, +\infty]$ *каждый оператор* $T : l_r \to E$ *может быть поднят (относительно фактормотображения* Ψ*) до непрерывного линейного оператора* $\widetilde{T} : l_r \to W^*$ *так, что* $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\| + \varepsilon$.

Лемма 1.5. *В условиях леммы 1.3, банахово пространство* Z *и фактормотображение* $\Phi : Z^{**} \to E$*, помимо прочего, могут быть выбраны еще и так, чтобы выполнялось условие*

$\varepsilon_r^{(2)}$ *для всякого* $\varepsilon > 0$*, любого* $r \in [1, \infty)$ *и для каждой слабо* r*-суммируемой последовательности* (x_k) *в* E *существует такая слабо* r*-суммируемая последовательность* (z_k^{**}) *в* Z^{**}*, что* $\Phi z_k^{**} = x_k, k = 1, 2, \ldots,$ *и* $\varepsilon_r(z_k^{**}) \leqslant (2 + \varepsilon)\, \varepsilon_r(x_k)$.

или, что то же самое, условие

$l_r^{(2)}$ *для всякого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $r \in [1, +\infty]$ *каждый оператор* $T : l_r \to E$ *может быть поднят (относительно фактормотображения* Ψ*) до непрерывного линейного оператора* $\widetilde{T} : l_r \to Z^{**}$ *так, что* $\|\widetilde{T}\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|T\|$.

Мы используем следующие обозначения для классических операторных идеалов (основную информацию из теории операторных идеалов можно найти в [18], но мы придерживаемся несколько других обозначений и терминологии; см. [17, 16, 8]):

$[\Pi_p, \pi_p]$ — идеал абсолютно p-суммирующих операторов;

$[\mathrm{N}_p, \nu_p]$ — идеал p-ядерных операторов;

$[\mathrm{I}_p, i_p]$ — идеал (строго) p-интегральных операторов;

$[\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}, i_p^{\mathrm{Gr}}]$ — идеал p-интегральных по Гротендику операторов;

$[\mathrm{QN}_p, \pi_p]$ — идеал квази-p-ядерных операторов.

Напомним определения (нужные нам в дальнейшем переформулировки, которыми мы также будем пользоваться, можно найти, например, в [18, 17, 16, 8]). Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$.

Для $0 < p \leqslant \infty$ оператор T называется *абсолютно* p*-суммирующим,* если существуют такая постоянная $C > 0$, что для любого конечного набора $\{x_n\}_{n=1}^M \subset X$ выполняется соотношение $\alpha_p(Tx_n) \leq C\, \varepsilon_p(x_n)$; соответствующая (квази)норма ($\inf C$) обозначается через $\pi_p(T)$. Отметим, что $[\Pi_\infty, \pi_\infty]$ есть не что иное, как $[\mathrm{L}, \|\cdot\|]$.

Для $p \in [1, \infty]$ оператор T называется p*-ядерным*, если его можно представить в следующем виде:

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x\rangle\, y_k \qquad \text{для } x \in X, \tag{1.1}$$

где последовательности $(x'_n)_{n=1}^\infty \subset X^*$ и $(y_n)_{n=1}^\infty \subset Y$ таковы, что конечна величина

$$\nu_p := \alpha_p(x'_n)\, \varepsilon(y_n);$$

соответствующая норма ($\inf \nu_p$) обозначается через $\nu_p(T)$. Для $0 < p \leqslant 1$ оператор T p-ядерен, если он допускает представление вида (1.1), в котором $\nu_p :=$

$\left(\sum\left(\|x'_n\|\,\|y_n\|\right)^p\right)^{1/p} < \infty$; соответствующая квазинорма ($\inf \nu_p$) обозначается также через $\nu_p(T)$. Во всех случаях мы будем называть разложения оператора T в ряд вида (1.1) *подходящим разложением*.

Для $p \in [1, \infty]$ оператор $T : X \to Y$ называется (*строго*) *p-интегральным*, если он допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{\ A\ } C(K) \xrightarrow{\ j\ } L_p(K, \mu) \xrightarrow{\ B\ } Y,$$

где K — некоторый компакт, μ — вероятностная мера Радона на нем, j — оператор "тождественного вложения" и A, B — непрерывные операторы. Норма в пространстве $\mathrm{I}_p\,(X, Y)$ вводится следующим образом: $i_p(T) = \inf\,\|A\|\,\|B\|$.

Если $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ и $\pi_Y T \in \mathrm{I}_p(X, Y^{**})$, то мы говорим, что оператор T является *p-интегральным по Гротендику*; норма $i_p^{\mathrm{Gr}}(T)$ индуцируется из $\mathrm{I}_p(X, Y^{**})$.

Для $0 < p \leqslant \infty$ оператор $T : X \to Y$ является *квази-p-ядерным*, $T \in \mathrm{QN}_p(X, Y)$, если для некоторого изометрического вложения $i : Y \to L_\infty(\mu)$ суперпозиция iT принадлежит пространству $\mathrm{N}_p(X, L_\infty(\nu))$. Квазинорма (норма при $p \geq 1$) в $\mathrm{QN}_{\,p}(X, Y)$ индуцируется из пространства $\Pi_p(X, L_\infty(\nu))$.

В монографии [18] идеал квази-p-ядерных операторов явно не упоминается, — о нем лишь немного говорится в разделе 19.2.6 из [18], как об инъективной оболочке идеала p-ядерных операторов. Приведем две соответствующие фразы из [18], поскольку мы хотим их прокомментировать (мы сохраним полностью обозначения монографии [18]: $\mathfrak{I}_r, \mathfrak{N}_r, \mathfrak{G}$ — соответственно идеалы r-интегральных (по Гротендику), r-ядерных и аппроксимируемых операторов): "... Ясно, что $[\mathfrak{I}_r, \mathbb{I}_r]^{\mathrm{inj}}$ служит максимальной оболочкой для $[\mathfrak{N}_r, \mathbb{N}_r]^{\mathrm{inj}}$. Но представляется весьма маловероятным, чтобы $[\mathfrak{N}_r, \mathbb{N}_r]^{\mathrm{inj}}$ совпадало с минимальным ядром идеала $[\mathfrak{I}_r, \mathbb{I}_r]^{\mathrm{inj}}$, иными словами, мы не знаем, справедливо ли равенство $[\mathfrak{N}_r, \mathbb{N}_r]^{\mathrm{inj}} = [\mathfrak{G}, \|\cdot\|] \circ [\mathfrak{I}_r, \mathbb{I}_r]^{\mathrm{inj}} \circ [\mathfrak{G}, \|\cdot\|]$." Действительно, инъективная оболочка идеала r-ядерных операторов (т.е. идеал всех квази-r-ядерных операторов) не совпадает с минимальным ядром идеала r-интегральных операторов ни при каком $r \in [1, \infty]$; это, например, следует из теоремы 4.2,3) и следствия 4.12 ниже; см. также [25].

Если A — операторный идеал, то оператор, лежащий в A, мы часто будем называть A-*оператором*.

Если $[\mathrm{A}, a]$ — некоторый квазинормированный операторный идеал, то $\mathrm{A}^{\mathrm{reg}}(X, Y)$ есть пространство всех операторов $T : X \to Y$, для которых $\pi_Y\,T \in \mathrm{A}(X, Y^{**})$. С квазинормой $a^{\mathrm{reg}}(T) := a(\pi_Y\,T)$ идеал $\mathrm{A}^{\mathrm{reg}}$ становится квазинормированным операторным идеалом. Так, например, $\mathrm{I}_p^{\mathrm{reg}}$ — нормированный идеал таких операторов T, что второй сопряженный к T оператор лежит в I_p, или, другими словами, не что иное, как идеал $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}$.

Через $\mathrm{A}^{\mathrm{dual}}$ мы обозначаем дуальный к A идеал: $T \in \mathrm{A}^{\mathrm{dual}}$ тогда и только тогда, когда $T^* \in \mathrm{A}$. Идеал $\mathrm{A}^{\mathrm{dual}}$ превращается в квазинормированный операторный идеал, если на нем ввести квазинорму $a^{\mathrm{dual}}(T) := a(T^*)$.

И еще обозначение: a^* — норма в сопряженном операторном идеале $[\mathrm{A}, a]^* = [\mathrm{A}^*, a^*]$ [18, п. 9.1, с. 135]

Приведем наиболее важные для нас примеры.

Пусть $p \in [1, \infty]$.

Мы говорим, что оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ *принадлежит идеалу* N^p, если он представим в виде

$$T := \sum_{n=1}^{\infty} x'_n \otimes y_n,$$

где последовательности (x'_n) и (y_n) таковы, что $\varepsilon_{p'}(x'_n) < \infty$, $\alpha_p(y_n) < \infty$. С нормой $\nu^p(T) := \inf \varepsilon_{p'}(x'_n)\alpha_p(y_n)$ класс N^p становится нормированным операторным идеалом. Это — почти дуальный к N_p идеал; дуальный к N_p операторный идеал есть на самом деле идеал $(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}$, и оператор $T \in \mathrm{N}_p^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $\pi_Y T \in \mathrm{N}^p(X, Y^{**})$. Вот иная характеристика операторов T, лежащих в $\mathrm{N}^p(X, Y)$. Оператор T является N^p-оператором в том и только том случае, если он факторизуется следующим образом:

$$X \xrightarrow{A} l_{p'} \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{B} Y,$$

где Δ — диагональный оператор с диагональю из l_p, A, B — операторы единичной нормы; при этом $\nu^p(T)$ есть норма диагонали в l_p.

Далее, мы говорим, что оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ принадлежит идеалу I^p, если он допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{A} L_{p'}(\mu) \overset{j}{\hookrightarrow} L_1(\mu) \xrightarrow{B} Y,$$

где μ — вероятностная мера, j — тождественное вложение, A и B — непрерывные операторы; при этом полагаем : $i^p(T) = \inf \|A\| \, \|B\|$, где inf берется по всевозможным факторизациям оператора T указанным образом. В этом месте нам удобно ввести еще одно определение: будем говорить, что оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ *лежит в идеале* $\mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}$, если $\pi_Y T \in \mathrm{I}^p(X, Y^{**})$; при этом мы полагаем $i^p_{\mathrm{Gr}}(T) := i^p(\pi_Y T)$. Класс $[\mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}, i^p_{\mathrm{Gr}}]$ действительно является нормированным операторным идеалом. Имеют место равенства

$$[\mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}, i^p_{\mathrm{Gr}}] = [\mathrm{I}_p^{\mathrm{dual}}, i_p^{\mathrm{dual}}], \quad [\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}, i_p^{\mathrm{Gr}}] = [(\mathrm{I}^p)^{\mathrm{dual}}, (i^p)^{\mathrm{dual}}].$$

В монографии А.Пича [18] некоторые из рассмотренных только что идеалов являются частными случаями идеалов так называемых (r, p, q)-ядерных и (r, p, q)-интегральных операторов.

Другие примеры (такие, как p-компактные операторы) будут рассмотрены позже.

Для банаховых пространств X, Y алгебраическое тензорное произведение $X^* \otimes Y^*$ их банаховых сопряженных пространств определяет естественным образом линейное подпространство в алгебраически сопряженном к тензорному произведению $X \otimes Y$ пространстве: если $(x'_k)_{k=1}^n \subset X^*$, $(y')_{k=1}^n \subset Y^*$, то значение тензорного элемента $f := \sum_{k=1}^n x'_k \otimes y'_k$ на элементарном тензоре $x \otimes y \, (x \in X, y \in Y)$ есть

$f(x \otimes y) := \sum_{k=1}^n \langle x'_k, x\rangle \langle y'_k, y\rangle$ (на все пространство $X \otimes Y$ f продолжается по линейности). Более общо, для операторов $A \in \mathrm{L}(X, E)$ и $B \in \mathrm{L}(Y, F)$, действующих в банаховых пространствах, их алгебраическое тензорное произведение $A \otimes B$ определяется на элементарных тензорах вида $x \otimes y$ соотношением $(A \otimes B)(x \otimes y) := Ax \otimes By$ и далее продолжается на все тензорное произведение $X \otimes Y$ по линейности.

Пусть $\mathfrak{T}$ обозначает класс всех алгебраических тензорных произведений произвольных банаховых пространств. Отображение $\alpha : \mathfrak{T} \to [0, \infty)$ называется *тензорной нормой,* если для любых банаховых пространств X, Y α есть норма на $X \otimes Y$ и выполняются следующие условия:

T_1) $\alpha(x \otimes y) = \|x\| \, \|y\|$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, и

T_2) если $z \in X \otimes Y$, то для любых банаховых пространств E, F и операторов $A : X \to E$, $B : Y \to F$ имеет место неравенство $\alpha((A \otimes B)z) \leqslant \|A\| \, \|B\| \alpha(z)$.

Каждая тензорная норма является допустимой кросснормой в смысле определения 1 в [4, стр. 221], в котором выполнение условия T_2) требуется только для случая скалярнозначных операторов, т.е. функционалов на X и Y соответственно. Для тензорной нормы α нормированное пространство $(X \otimes Y, \alpha)$ обычно обозначается через $X \otimes_\alpha Y$, а его пополнение — через $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ (мы, однако, в большинстве случаев не будем придерживаться этой традиции).

Замечание 1.6. На самом деле, для выполнения условия T_1) (при выполнении T_2)) достаточно требовать, чтобы норма α удовлетворяла формально более слабому условию, а именно, условию, которое получается из T_1) заменой равенства норм рассматриваемых там тензорных элементов на неравенство $\leqslant$ (см. [4, с. 222, предложение 2]).

В этой работе мы будем рассматривать, в основном, тензорные нормы на тензорных произведениях вида $X^* \otimes Y$; в этом случае тензорное произведение $X^* \otimes Y$ естественным образом отождествляется с линейным пространством всех конечномерных операторов из X в Y. В общем случае тензорное произведение $X \otimes Y$ можно представлять себе как линейное пространство всех *weak*-to-weak* непрерывных конечномерных линейных отображений из X^* в Y.

На классе $\mathfrak{T}$ имеются наибольшая (сильнейшая) и наименьшая (слабейшая) тензорные нормы [9] (см. также [4, с. 222 и далее]). Сильнейшая тензорная норма ν_1^0 на $X^* \otimes Y$ порождает (после пополнения по этой норме)*проективное тензорное произведение* Гротендика $X^* \widehat{\otimes} Y$ [9], а слабейшая $\| \cdot \|$ — *инъективное тензорное произведение* $X^* \widehat{\widehat{\otimes}} Y$, которое можно отождествить с пополнением линейного пространства всех конечномерных непрерывных отображений из X в Y, снабженного обычной операторной нормой $\|\cdot\|$, так что $X^* \widehat{\widehat{\otimes}} Y$ можно рассматривать как замкнутое линейное подпространство в $\mathrm{L}(X, Y)$, что мы и будем делать ниже. Из только что сказанного вытекает, что для всякой тензорной нормы α естественное отображение $X^* \otimes_\alpha Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ продолжается по непрерывности до *канонического отображения* из $X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y$ в $\mathrm{L}(X, Y)$. Аналогично, в общем случае произведений вида $X \otimes Y$ естественное отображение $X \otimes_\alpha Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ продолжается по непрерывности до канонического отображения из $X \widehat{\otimes}_\alpha Y$ в $\mathrm{L}(X^*, Y)$, причем образ этого отображения лежит в подпространстве всех *weak*-to-weak*-непрерывных операторов из X^* в Y.

Если $X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y$, — пополнение тензорного произведения по тензорной норме α и $z \in X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y$, то ассоциированный с этим тензорным элементом оператор мы будем обозначать через $\widetilde{z}$ (аналогичное обозначение будем использовать и в случае $z \in X\widehat{\otimes}_\alpha Y$). Кроме того, в случае произвольной тензорной нормы α договоримся обозначать через $\mathrm{N}_{[\alpha]}(X, Y)$ образ (банахова) тензорного произведения $X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y$ при каноническом отображении $j_\alpha : X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y \to \mathrm{L}(X, Y)$, так что изометрически

$$\mathrm{N}_{[\alpha]}(X, Y) = X^*\widehat{\otimes}_\alpha Y/\operatorname{Ker} j_\alpha;$$

норму на $\mathrm{N}_{[\alpha]}(X, Y)$, индуцированную соответствующим факторотображением, мы обозначим через $\nu_{[\alpha]}$ (в конкретных ситуациях обозначения будут отличаться от введенных выше; это же замечание можно сделать и по поводу обозначений для различных аппроксимационных свойств, определения которых в общем виде приводятся ниже).

Пусть B, L обозначают, соответственно, классы всех банаховых пространств и всех (линейных непрерывных) операторов в банаховых пространствах, и пусть α — некоторая тензорная норма на $\mathfrak{T}$. Рассмотрим подкласс $\mathrm{N}_{[\alpha]}$ в L, компонентами которого являются банаховы операторные пространства $\mathrm{N}_{[\alpha]}(X, Y)$. Нетрудно видеть, что условия T_1) и T_2) гарантируют выполнение аксиом из определения нормированного идеала в [18, определения 1.1.1., 6.1.1, 6.2.2.], и поэтому пара $\left[\mathrm{N}_{[\alpha]}, \alpha\right]$ представляет собой (полный) нормированный операторный идеал.

Определим теперь *тензорную норму, дуальную к заданной тензорной норме* α. Мы полагаем, для $x \in X$ и $y \in Y$, $\alpha^{\mathrm{dual}}(x \otimes y) := \alpha(y \otimes x)$, или, более общо, $\alpha^{\mathrm{dual}}(\sum_{n=1}^N x_n \otimes y_n) := \alpha(\sum_{n=1}^N y_n \otimes x_n)$. Появляется естественная изометрия из $X \otimes_\alpha Y$ на $Y \otimes_{\alpha^{\mathrm{dual}}} X$, которая продолжается до изометрического оператора из $X\widehat{\otimes}_\alpha Y$ на $Y\widehat{\otimes}_{\alpha^{\mathrm{dual}}} X$. Ясно, что $(\alpha^{\mathrm{dual}})^{\mathrm{dual}} = \alpha$.

И еще обозначение: если $[\mathrm{A}, a]$ — квазинормированный операторный идеал, то $Z^*\widehat{\widehat{\otimes}}_a W$ замыкание множества конечномерных операторов в пространстве $\mathrm{A}(Z, W)$.

Приведем основные примеры тензорных норм и произведений, с которыми мы будем иметь дело в данной работе (некоторые тензорные нормы будут также определены в других параграфах).

Конечная p-ядерная тензорная норма $||\cdot||_p$ для $p \in [1, +\infty]$ определяется на произведении $X \otimes Y$ следующим образом: если $z \in X \otimes Y$, то

$$(1.2) \qquad ||z||_p := \inf \quad \left(\sum_{k=1}^N \|x_k\|^p\right)^{1/p} \sup_{\|y'\|\le 1} \left\{ \left(\sum_{k=1}^N |< y_k, y' >|^{p'}\right)^{1/p'} \right\},$$

где $1/p + 1/p' = 1$ и infimum берется по всевозможным представлениям тензорного элемента z в пространстве $X \otimes Y$ в виде $z = \sum_{k=1}^N x_k \otimes y_k$ (формально, формула (1.2) имеет смысл лишь при конечном показателе $p > 1$; в случаях $p = 1$ и $p = +\infty$

в этом определении нужно произвести соответствующие тривиальные изменения, на которых мы не останавливаемся). Для $0 < p \leqslant 1$ мы определяем p-проективную квазинорму $||\cdot||_p$ на произведении $X \otimes Y$ так: если $z \in X \otimes Y$, то

$$||z||_p := \inf \left(\sum_{k=1}^{N} (\|x_k\| \|y_k\|)^p \right)^{1/p},$$

где infimum берется по представлениям тензорного элемента z в виде $z = \sum_{k=1}^{N} x_k \otimes y_k$. Пополнение тензорного произведение $X \otimes Y$ по квазинорме $\|\cdot\|_p$, $0 < p \leqslant \infty$, обозначается через $X \widehat{\otimes}_p Y$. В случае, когда $p \in [1, \infty]$, пополнение тензорного произведения $X \otimes Y$ по дуальной к $\|\cdot\|_p$ норме обозначается через $X \widehat{\otimes}^p Y$.

Если $p \in [1, \infty]$, то сопряженное к тензорному произведению $X \widehat{\otimes}_p Y$ пространство есть $\Pi_{p'}(Y, X^{**})$, а сопряженное к тензорному произведению $X \widehat{\otimes}^p Y$ пространство отождествляется с $\Pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(Y, X^{**})$ (двойственность задается стандартным образом при помощи следа суперпозиции тензорного элемента и оператора, порождающего функционал).

Замечание 1.7. Выбранный нами термин "p-проективная" обусловлен тем, что если $p \in (0, 1)$, то, как и в случае $p = 1$ (см. [4, с. 229, предложение 12]), для подпространства Z некоторого банахова пространства X тензорное произведение $(X/Z) \widehat{\otimes}_p Y$ есть факторпространство пространства $X \widehat{\otimes}_p Y$ и $Y \widehat{\otimes}_p (X/Z)$ — факторпространство пространства $Y \widehat{\otimes}_p X$, каково бы не было Y. При $p > 1$ соответствующий факт для тензорных произведений $\widehat{\otimes}_p$, вообще говоря, не верен (но есть так называемая "p-проективность слева"; подробности автор предполагает привести в одной из последующих работ).

Для любого $p \in (0, \infty]$ дуальная норма к тензорной норме $\|\cdot\|_p$ порождает новое банахово тензорное произведение, которое мы обозначим через $\widehat{\otimes}^p$. Рассмотренные тензорные произведения, очевидно, тесно связаны с соответствующими операторными идеалами. Так, для любых банаховых пространств X, Y пространство $\mathrm{N}_p(X, Y)$ есть факторпространство тензорного произведения $X^* \widehat{\otimes}_p Y$, каково бы ни было $p > 0$; $\mathrm{N}^p(X, Y)$ — факторпространство тензорного произведения $X^* \widehat{\otimes}^p Y$.

Примеры других тензорных норм и произведений будут появляться ниже по мере необходимости.

Определение 1.8. Пусть α — тензорная норма на $\mathfrak{T}$. Мы говорим, что банахово пространство Y *обладает свойством аппроксимации относительно нормы* α, или *удовлетворяет условию* α*-аппроксимации*, если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}_\alpha Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ взаимно однозначно.

Тот факт, что банахово пространство Y обладает свойством α-аппроксимации коротко будет записываться так: $Y \in \mathrm{AP}[\alpha]$. Очевидно, банахово пространство Y удовлетворяет условию α-аппроксимации тогда и только тогда, когда для всякого X каноническое отображение из $Y \widehat{\otimes}_{\alpha^{\mathrm{dual}}} X$ в $\mathrm{L}(Y^*, X)$ взаимно однозначно.

Нетрудно показать, что если банахово пространство обладает свойством аппроксимации Гротендика (т.е. свойством $\mathrm{AP}[\nu_1^0]$), то оно обладает и любым аппроксимационным свойством $\mathrm{AP}[\alpha]$. Ясно также, что если $Y^{**} \in \mathrm{AP}[\alpha]$, то и $Y \in \mathrm{AP}[\alpha]$, и если $Y^* \in \mathrm{AP}[\alpha^{\mathrm{dual}}]$, то каноническое отображение $Y^* \widehat{\otimes}_\alpha X \to \mathrm{L}(Y, X)$ взаимно однозначно для любого банахова пространства X.

Замечание 1.9. Наши определения не покрывают такие важные случаи, как случай квазинормированных тензорных произведений и соответствующих им квазинормированных пространств операторов (например, гротендиковские p-проективные тензорные произведения при $0 < p < 1$ вместе с соответствующими аппроксимационными свойствами [31] в наши рассмотрения сейчас не входят.) Когда нам понадобятся определения, связанные с этими случаями, мы приведем их в соответствующем месте.

Замечание 1.10. Можно определить понятие свойства ограниченной и свойства метрической аппроксимации для произвольной тензорной нормы на классе тензорных произведений банаховых пространств. В этой статье мы предпочитаем вводить соответствующие определения в тех местах и для тех тензорных норм, для которых это потребуется по существу изложения. Видимо, общая ситуация будет рассмотрена автором в другой работе.

§2. Аппроксимация операторов и свойство Радона-Никодима

Будем говорить, что оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ факторизуется через оператор $V \in \mathrm{L}(Z, W)$, если $T = U_1 V U_2$, где $U_1 \in \mathrm{L}(W, Y)$, $U_2 \in \mathrm{L}(X, Z)$.

Пусть X банахово пространство, E — некоторая банахова решетка. Обозначим через $S(E, X)$ линейное пространство всех таких операторов $U : E \to X$, что существует положительный функционал $e' = e'(U) \in E^*$, для которого $\|Ue\| \leqslant \langle e', |e| \rangle$ при всех $e \in E$; с нормой $s(U) := \inf\{\|e'\| : \ \|Ue\| \leqslant \langle e', |e| \rangle\}$ пространство $S(E, X)$ превращается в банахово пространство. Простейшими *примерами S-операторов являются тождественные вложения $J_{p1} : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$, где мера μ конечна и $p \in [1, \infty]$.*

Напомним, что оператор, действующий между двумя банаховыми решетками, называется *регулярным,* если он представим в виде разности двух положительных операторов. Всякий оператор, действующий в пространствах типа $L_1(\mu)$, является регулярным [9, с. 66, предложение 10].

Лемма 2.1 [23, теорема 1 и следствие 1]**.** *Оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$ является оператором Радона-Никодима тогда и только тогда, когда для всякой банаховой решетки E и любого отображения $U \in S(E, X)$ оператор TU факторизуется через некоторое отображение $V \in S(E, l_1(\Gamma))$.*

Напомним, что банахова решетка F называется *решеткой минимального типа,* если всякий порядковый интервал $[-f, f] \subset F$ слабо компактен. Примерами таких решеток могут служить пространства $L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Лемма 2.2. *Пусть E — банахова решетка, для которой E^* — решетка минимального типа, X, Y — банаховы пространства и $T \in \mathrm{RN}(X, Y)$. Для всякого отображения $U \in S(E, X)$ оператор TU допускает представление вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} e'_k \otimes y_k, \quad \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \, |e'_k| \right\| < \infty, \tag{2.1}$$

где $(e'_k)_k \subset E^*$, $(y_k)_k \subset Y$. При этом, если

$$s_0(TU) := \inf \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| \, |e'_k| \right\|,$$

инфимум берется по всем представлениям (2.1), то $s_0(TU) \leqslant s(U)\|T\|$.

Доказательство. По лемме 2.1, оператор TU факторизуется через некоторое отображение $V \in S(E, l_1(\Gamma))$. Пусть $e'_0 > 0$ — такой линейный функционал на E, что $\|Ve\| \leqslant \langle e'_0, |e| \rangle$ для всех $e \in E$ Если $e' \in E^*$, $e \in E_+$, то $\langle |e'|, e \rangle = \sup\{ |\langle e', \widetilde{e} \rangle| : \ |\widetilde{e}| \leqslant e\}$. Поэтому для $\alpha \in l_\infty(\Gamma)$ и $e \in E_+$

$$\langle |V^* \alpha|, e \rangle = \sup\{ |\langle \alpha, V\widetilde{e} \rangle| : \ |\widetilde{e}| \leqslant e\} \leqslant \|\alpha\| \, \|Ve\| \leqslant \|\alpha\| \, \langle e'_0, e \rangle,$$

т.е. $|V^* \alpha| \leqslant \|\alpha\| \, e'_0$ для всех α и, следовательно, оператор V^*, а, значит, и V, слабо компактен. Далее, если определить полунорму p на E следующим соотношением: $p(e) := \langle e'_0, |e| \rangle$, то ассоциированное с парой (E, p) банахово пространство $\widehat{E}_p$ будет AL-пространством (т.е. банаховой решеткой с нормой, аддитивной на конусе положительных элементов). Это пространство изоморфно некоторому пространству $L_1(\mu)$ [11], и оператор V факторизуется через него каноническим образом: $V : E \to \widehat{E}_p \to l_1(\Gamma)$ Поскольку всякий оператор в L_1-пространствах регулярен, то V — регулярный слабо компактный оператор, а так как $l_1(\Gamma)$ обладает свойством Шура, то, с одной стороны, этот оператор компактен, и, с другой стороны, можно считать, что $\Gamma = \mathbb{N}$. Ниже для $\alpha \in l_1$ через $\alpha(k)$ мы обозначаем k-ю координату элемента α, через h_k — k-й "орт" как в l_1, так и в l_∞. Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} V^* h_k \otimes h_k. \tag{2.2}$$

Для $e \in E_+$ имеем:

$$\sum_{k=m}^{n} \langle |V^* h_k|, e \rangle \leqslant \sum_{k=m}^{n} \langle |V|^* h_k, e \rangle = \sum_{k=m}^{n} \langle h_k, |V|e \rangle = \langle \sum_{k=m}^{n} h_k, |V|e \rangle = \sum_{k=m}^{n} (|V|e)(k).$$

Если $\varepsilon > 0$, то, в силу компактности оператора V, правая часть последних соотношений будет меньше, чем ε при всех $m, n > N(\varepsilon)$ для всех нормированных векторов

$e \in E$. Таким образом, наш формальный ряд (2.2) сходится в $\mathrm{L}(E, l_1)$ и, более того, в E^* сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |V^* h_k| \|h_k\|$. Так как $(Ve)(k) = \langle Ve, h_k \rangle = \langle V^* h_k, e \rangle$, то ряд (2.2) сходится также и по норме s_0, причем к оператору V. Ясно, что отсюда вытекает утверждение нашей леммы. $\square$

Следующее утверждение, возможно, известно (по крайней мере, в математическом фольклоре). Мы не нашли его в литературе, поэтому приводим доказательство.

Лемма 2.3. *Всякий оператор $S : L_p(\mu) \to Y$ вида* (2.1)*, где $1 < p < \infty$, а Y — банахово пространство, является $\mathrm{N}^{p'}$-оператором.*

Доказательство. Пусть (2.1) — некоторое представление оператора S, в котором $(e'_k)_k \subset L_{p'}(\mu)$, $(y_k)_k \subset Y$. Функция $\overline{f}(\cdot) := \sum_{k=1}^{\infty} e'_k(\cdot) y_k$, принадлежит пространству $L_{p'}(\mu; Y)$, причем $Sf = \int f \overline{f}\, d\mu$ для $f \in L_p(\mu)$ и $\|\overline{f}\|_{L_{p'}} \leqslant s_0(S)$. Нетрудно понять, что оператор S, каково бы ни было его представление в виде (2.1), определяет функцию $\overline{f}$ (п.в.) однозначно (другое подобное представление S порождает ту же функцию). Таким образом, нормированное пространство всех операторов вида (2.1) непрерывно отображается на некоторое подмножество $\widetilde{S}$ пространства $L_{p'}(\mu; Y)$, и норма этого отображения не превосходит 1. Очевидно, что $\widetilde{S}$ содержит все простые функции, при этом, если $\overline{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\, y_k^0$ — простая функция (множества A_k попарно не пересекаются), то

$$\|\overline{\varphi}\|_{L_{p'}(\mu;Y)} = \left(\int \left\| \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\, y_k^0 \right\|^{p'} \right)^{1/p'} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}\, \|y_k^0\| \right\|_{L_{p'}}.$$

Поэтому на множестве простых функций операторная норма s_0 индуцирует в точности оригинальную норму $\|\cdot\|_{L_{p'}(\mu;Y)}$, и, следовательно, описанное выше отображение $S \mapsto \overline{f}$ является изометрическим изоморфизмом "на". Вернемся к нашему оператору S из (2.1). Если этому оператору при указанном изоморфизме соответствует функция $\overline{f} \in L_{p'}(\mu; Y)$, то сопряженный оператор действует по формуле $S^* y' = \langle y', \overline{f}(\cdot) \rangle$, что гарантирует его принадлежность пространству p'-ядерных отображений $\mathrm{N}_{p'}(Y^*, L_{p'}(\mu))$ [69Pers, теорема 1]. Так как все пространства вида $L_r(\mu)$ обладают свойством метрической аппроксимации, то из p'-ядерности оператора S^* вытекает принадлежность оператора S пространству $N^{p'}(L_p(\mu), Y)$ [29, теорема 1]. $\square$

Следствие 2.4. *Для любого $q \in [1, \infty)$ суперпозиция $TS : Z \xrightarrow{S} X \xrightarrow{T} Y$ I^q-оператора S и оператора T типа RN принадлежит идеалу N^q; при этом, $\nu^q(TS) \leqslant \|T\| i^q(S)$.*

Доказательство. Если $1 < q < \infty$, то применимы леммы 2.3 и 2.2, так как тождественное вложение $J_{p1} : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$, где мера μ конечна, является S-оператором для любого $p \in (1,\infty)$. Справедливость утверждения при $q=1$ вытекает из [27, теорема 4] или [21, теорема 1]. $\square$

Замечание 2.5. Случай $q=\infty$ рассмотрен в следствии 2.13. Здесь мы отметим лишь, что тождественное отображение $l_1 \to l_1$ является I^∞-оператором, но не принадлежит идеалу N^∞, хотя l_1 — сопряженное пространство со свойством Радона-Никодима. Это же замечание можно отнести и следствию 2.6 ниже.

Следствие 2.6. *Для любого $q \in [1,\infty)$ суперпозиция $TS: Z \xrightarrow{S} X \xrightarrow{T} Y$ Π_q^{dual}-оператора S и оператора T типа RN принадлежит идеалу $\mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}$.*

Доказательство. Пусть $\Phi : l_1(\Gamma) \to Z$ — какое-нибудь факторотображение. Сопряженный оператор Φ^* является изометрическим вложением пространства Z^* в $l_\infty(\Gamma)$ и поэтому $\Phi^* S^* \in \mathrm{I}_q(X^*, l_\infty(\Gamma))$. По следствию 2.4, $\Phi^* S^* T^* \in \mathrm{N}_q(Y^*, l_\infty(\Gamma))$ и, значит, оператор S^*T^* — q-квазиядерный, т.е. $TS \in \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}$. $\square$

Перед тем, как пойти дальше, введем ряд определений и обозначений. Свойства AP_p, C-MAP_p и BAP_p определены, например, в [28, 25, 26, 31], а свойства $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$, C-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$ и $\mathrm{BAP}_p^{\mathrm{dual}}$ появляются впервые в данной работе. Пусть $C \geq 1$, $p \in [1,+\infty]$.

Говорят, что банахово пространство Y *обладает свойством* AP_p (коротко — $Y \in \mathrm{AP}_p$), если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно (и, следовательно, $X^* \widehat{\otimes}_p Y = \mathrm{N}_p(X,Y)$). Пространство Y *обладает свойством* C-MAP_p, $Y \in C$-MAP_p, если для любого X естественное отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}(X,Y)$ есть C-изометрическое вложение (в данном случае это означает, что существует непрерывное обратное с нормой не больше C. Наконец, Y *имеет свойство* BAP_p (соответственно, *свойство* MAP_p), если оно обладает свойством C-MAP_p для некоторого числа $C \geq 1$ (соответственно, свойством 1-MAP_p).

Говорят, что банахово пространство Y *обладает свойством* $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ (коротко — $Y \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$), если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}^p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$ взаимно однозначно (и, следовательно, $X^* \widehat{\otimes}^p Y = \mathrm{N}^p(X,Y)$). Пространство Y *обладает свойством* C-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$, $Y \in C$-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$, если для любого X естественное отображение $X^* \widehat{\otimes}^p Y \to \mathrm{I}_{\mathrm{Gr}}^p(X,Y)$ есть C-изометрическое вложение (в данном случае это означает, что существует непрерывное обратное с нормой не больше C. Наконец, Y *имеет свойство* $\mathrm{BAP}_p^{\mathrm{dual}}$ (соответственно, *свойство* $\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$), если оно обладает свойством C-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$ для некоторого числа $C \geq 1$ (соответственно, свойством 1-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$).

Если $p=1$, то $\mathrm{AP}_1 = \mathrm{AP}_1^{\mathrm{dual}}$, и мы используем общепринятые в этом случае аббревиатуры AP, C-MAP, BAP, MAP; — это обычные аппроксимационные условия Гротендика.

Следующая теорема имеет "страшнейшую" формулировку, в которой появляется четвертое сопряженное пространство. Но упростить предположения, появляющиеся в этой теореме, используя только рассмотренные выше аппроксимационные свойства, нельзя. По поводу альтернативной формулировки этой теоремы, более простой, чем предлагаемая ниже, и в которой появляются *новые аппроксимационные условия*, см. замечание сразу после доказательства теоремы.

Теорема 2.7. *Пусть* $p \in [1, \infty]$ *и* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. *Если* $T \in \mathrm{N}^p(X, Y^{**})$ *и либо* $X^* \in \mathrm{AP}_p$, *либо* $Y^{****} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$, *либо* $Y^{***} \in \mathrm{AP}$, *то* $T \in \mathrm{N}^p(X, Y)$. *Иначе говоря, в этих условиях из p-ядерности сопряженного оператора* T^* *вытекает принадлежность оператора* T *пространству* $\mathrm{N}^p(X, Y)$. *При этом* $\|T\|_{\mathrm{N}^p(X,Y)} = \|T\|_{\mathrm{N}^p(X,Y^{**})}$

Доказательство. Предположим, что существует такой оператор $T \in \mathrm{L}(X, Y)$, что $T \notin \mathrm{N}^p(X, Y)$, но $\pi_Y T \in \mathrm{N}^p(X, Y^{**})$. Так как либо $X^* \in \mathrm{AP}_p$, либо $Y^{**} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ (последнее верно, если $Y^{****} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$) то $\mathrm{N}^p(X, Y^{**}) = X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}$ (стоит отметить, что из последнего равенства вытекает, в частности, изометричность естественного вложения пространства $\mathrm{N}^p(X, Y)$ в $\mathrm{N}^p(X, Y^{**})$). Следовательно, оператор $\pi_Y T$ можно отождествить с тензорным элементом $t \in X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}$; при этом $t \notin X^* \widehat{\otimes}^p Y$ (пространство $X^* \widehat{\otimes}^p Y$ рассматривается как подпространство пространства $X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}$). Следовательно, существует такой оператор $U \in \Pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(Y^{**}, X^{**}) = \left(X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}\right)^*$, что $\mathrm{trace}\ U \circ t = \mathrm{trace}\ (T^* \circ (U^*|_{X^*})) = 1$ и $\mathrm{trace}\ U \circ \pi_Y \circ z = 0$ для любого $z \in X^* \widehat{\otimes}^p Y$. Из последнего вытекает, в частности, что $U \pi_Y = 0$ и $\pi_Y^* U^*|_{X^*} = 0$. Действительно, если $x' \in X^*$ и $y \in Y$, то

$$\langle U \pi_Y\, y, x' \rangle = \langle y, \pi_Y^*\, U^*|_{X^*} x' \rangle = \mathrm{trace}\ U \circ (x' \otimes \pi_Y(y)) = 0.$$

Очевидно, что тензорный элемент $U \circ t$ порождает оператор $U \pi_Y T$, который тождественно равен нулю.

Если $X^* \in \mathrm{AP}_p$, то $X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**} = N^p(X, Y^{**})$ и, значит, этот тензорный элемент нулевой, что противоречит равенству $\mathrm{trace}\ U \circ t = 1$.

Случай, когда $Y^{***} \in \mathrm{AP}$, рассмотрен в работе [29]. Пусть теперь $Y^{****} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$. В этом случае оператор

$$V := T^* \circ \pi_Y^* :\ Y^{***} \to Y^* \to X^*$$

однозначно определяет некоторый тензорный элемент t_0 из тензорного произведения $Y^{****} \widehat{\otimes}_p X^*$. Возьмем какое-либо представление $t = \sum x_n' \otimes y_n''$ для t как элемента пространства $X^* \widehat{\otimes}^p Y^{**}$.

$$\begin{aligned} V y''' = T^* \pi_Y^*\, y''' = (T^* \pi_Y^* \pi_{Y^*})\, \pi_Y^*\, y''' = (\pi_Y T)^*\, \pi_{Y^*}\, \pi_Y^*\, y''' = \\ = \left(\sum y_n'' \otimes x_n'\right)\ \pi_{Y^*}\ \pi_Y^*\, y''' = \sum \langle y_n'', \pi_Y^*\, y''' \rangle\, x_n' = \\ = \sum \langle \pi_Y^{**} y_n'', y''' \rangle\, x_n'. \end{aligned}$$

Итак, оператор V имеет в пространстве $Y^{****} \widehat{\otimes}_p X^*$ представление

$$V = \sum \pi_Y^{**}(y_n'') \otimes x_n',$$

т.е. $t_0 = \pi_Y^{**} \circ t$.

Обозначив для краткости оператор $U^*|_{X^*}$ через U_*, получаем:

$$U_* V y''' \sum \langle \pi_Y^{**} y_n'', y''' \rangle \, U_* x_n'.$$

Следовательно (определение тензорного элемента $t_0 \in Y^{****} \widehat{\otimes}_p X^*$ см. выше),

$$\text{trace } U_* \circ t_0 = \text{trace } U_* \circ V = \sum \langle \pi_Y^{**}(y_n''), U_* x_n' \rangle = \sum \langle y_n'', \pi_Y^* \, U_* x_n' \rangle = \sum 0 = 0.$$

С другой стороны,

$$V y''' = (\pi_Y T)^* \, y''' = t^*(y''') = \sum \langle y_n'', y''' \rangle \, x_n',$$

откуда $V = \sum y_n'' \otimes x_n'$. Поэтому

$$\text{trace } U_* t_0 = \text{trace } U_* V = \sum \langle y_n'', U_* x_n' \rangle = \sum \langle U y_n'', x_n' \rangle = \text{trace } U \circ t = 1.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 2.8. Пусть $p \in [1, \infty]$. Будем говорить, что пространство Z обладает свойством $\mathrm{AP}_{p,d}$, если для всякого банахова пространства W каноническое отображение $j : Z \widehat{\otimes}_p W \to \mathrm{L}(Z^*, W)$ взаимно однозначно. Из доказательства теоремы видно, что в ее формулировке можно заменить условие $Y^{****} \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ на более простое условие $Y^{***} \in \mathrm{AP}_{p,d}$. От каких-либо аппроксимационных условий типа $Y^{***} \in \mathrm{AP}$ из теоремы, отказаться, вообще говоря, нельзя. Недостаточно, например, предполагать лишь, что либо $x \in \mathrm{AP}$, либо $Y^{**} \in \mathrm{AP}$, что покажут ниже соответствующие примеры (см., в частности, следствие 5.2).

Замечание 2.9. На самом деле, как видно из доказательства теоремы 2.7, для справедливости заключения в утверждении этой теоремы достаточно предполагать, что каноническое отображение $Y^{****} \widehat{\otimes}_p X^* \to \mathrm{L}(Y^{***}, X^*)$ (или, что то же, каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}^p Y^{****} \to \mathrm{L}(X, Y^{****})$) взаимно однозначно.

Следствие 2.10. *Пусть $p \in [1, \infty)$, и пусть X, Y — такие банаховы пространства, что Y C-дополняемо в своем втором сопряженном, обладает свойством Радона –Никодима и одно из пространств X^* или Y^{***} удовлетворяет условию аппроксимации Гротендика. Тогда $\mathrm{N}^p(X, Y) = \mathrm{I}^p(X, Y) \overset{C}{=} \mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$. Более общо, если $U : Y \to Z$ — оператор Радона–Никодима из Y в некоторое банахово пространство Z, дополняемое в своем втором сопряженном, и либо $X^* \in \mathrm{AP}$, либо $Z^{***} \in \mathrm{AP}$, то для любых $p \in [1, \infty)$ и $T \in \mathrm{I}^p_{\mathrm{Gr}}(X, Y)$ имеет место включение $UT \in \mathrm{N}^p(X, Z)$.* $\square$

Замечание 2.11. Аппроксимационные условия (так же как и дополняемость пространств в своих вторых сопряженных) , накладываемые на рассматриваемые в последних двух утверждениях пространства существенны и не могут быть заменены на аналогичные условия для пространств X, либо Y^{**} (см. ниже пример 2.14).

Следствие 2.12. *Если пространство X не содержит изоморфно l_1, то всякий оператор из X в $l_1(\Gamma)$ является N^∞-оператором, т.е. компактно факторизуется через пространство l_1. Более общо, любой условно слабо компактный оператор со значениями в пространстве $l_1(\Gamma)$ является N^∞-оператором, причем N^∞-норма такого оператора совпадает с его обычной нормой.*

Доказательство. Так как $l_1(\Gamma)$ обладает свойством Шура, так же как и свойством аппроксимации, то любой условно слабо компактный оператор со значениями в этом пространстве аппроксимируется по обычной операторной норме конечномерными операторами. Сопряженный к нему оператор задан на пространстве $l_\infty(\Gamma)$ и является аппроксимируемым, а всякий такой оператор из $l_\infty(\Gamma)$ в любое банахово пространство есть ∞-ядерный оператор с равенством соответствующих норм (см., например, [17]). Остается применить теорему 2.7 при $p = \infty$. $\square$

Следствие 2.13. *Произведение UT условно слабо компактного оператора $T : X \to L_1(\mu)$ и оператора Радона-Никодима $U : L_1(\mu) \to Y$ компактно факторизуется через пространство l_1, т.е. лежит в пространстве $N^\infty(X, Y)$; при этом, $\nu^\infty(UT) \leqslant \|U\|\,\|T\|$. В частности, если банахово пространство Y обладает свойством Радона-Никодима, а пространство X не содержит изоморфную копию пространства l_1, то имеет место равенство (вместе с совпадением соответствующих норм)* $\mathrm{I}^\infty(X, Y) = \mathrm{N}^\infty(X, Y)$.

Доказательство. Если $U \in \mathrm{RN}(L_1(\mu), Y)$, то (см., например, [24 , теорема 1]) он факторизуется и через некоторое пространство $l_1(\Gamma)$, причем $\gamma_1(U) = \|U\|$. Остается применить следствие 2.12. $\square$

Пример 2.14. Следующий результат из работы [29] показывает, что следствие 2.13 перестает быть верным, если в его заключении заменить строго интегральные операторы на интегральные по Гротендику: для каждого $r \in [1, \infty], r \neq 2$, существуют такие вполне сепарабельное пространство W и оператор $T \in L(W^{**}, W)$, что W^{**} имеет базис, $T \in N^r(W^{**}, W^{**})$, но $T \notin N^r(W^{**}, W)$.

Следствие 2.15. *Пусть $T \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}(X, C(K))$ и $S \in \mathrm{L}(C(K), Y)$. Если оператор S не является изоморфизмом ни на каком подпространстве в $C(K)$, изометричном пространству c_0, то суперпозиция ST компактно факторизуется через c_0, т.е. $ST \in \mathrm{N}_\infty(X, Y)$; при этом $\nu_\infty(ST) \leqslant \|S\|\,\|T\|$. В частности* (ср. [14, теорема 1.2]), *если X^* обладает свойством Радона–Никодима и $Y \not\supset c_0$, то $\mathrm{I}_\infty(X, Y) = \mathrm{N}_\infty(X, Y)$.*

Доказательство. По лемме 1.1, оператор S слабо компактен; следовательно, слабо компактен и S^*. Как и при доказательстве предыдущего следствия, получаем, что оператор T^* допускает факторизацию вида $T^* = \alpha\beta$:

$$\begin{array}{ccccccc} X^* & \xleftarrow[\alpha]{} & l_1(\Gamma) & \xleftarrow[\beta]{} & C^*(K) & \xleftarrow[S^*]{} & Y^* \\ X^{**} & \xrightarrow[\alpha^*]{} & l_\infty(\Gamma) & \xrightarrow[\beta^*]{} & C^{**}(K) & \xrightarrow[S^\pi]{} & Y \subset Y^{**}, \end{array}$$

Диагр. 2.1

где $S * \pi$ — сильно бидуальный к S оператор. Напомним, что в нашей ситуации $\|T^*\| = \gamma_1(T^*) = \inf \|\alpha\| \, \|\beta\|$, где инфимум берется по всем указанным факторизациям оператора T^*. Оператор βS^*, а, значит, и $S^\pi \beta^* : l_\infty \to Y$, компактен. Следовательно, $S^\pi \beta^* \in \mathrm{N}_\infty(l_\infty, Y)$ и $\|S^\pi \beta^*\| = \nu_\infty(S^\pi \beta^*)$ (см. доказательство следствия 2.12). Таким образом, $(ST)^\pi = S^\pi T^{**} \in \mathrm{N}_\infty(X^{**}, Y)$. Далее, для $x \in X$ и $y' \in Y^*$ имеем:

$$\begin{aligned}\langle y', (ST)^\pi \pi_X x\rangle = \langle \pi_Y (ST)^\pi \pi_X x, y'\rangle = \\ = \langle S^{**} T^{**} \pi_X x, y'\rangle = \langle T^* S^* y', \pi_X x\rangle = \langle T^* S^* y', x\rangle = \langle y', STx\rangle,\end{aligned}$$

т.е. $(ST)^\pi \pi_X = ST$ и, следовательно, $ST \in \mathrm{N}_\infty(X, Y)$; при этом,

$$\begin{aligned}\nu_\infty(ST) = \nu_\infty((ST)^\pi \pi_X) = \nu_\infty(S^\pi T^{**} \pi_X) = \nu_\infty(S^\pi \beta^* \alpha^* \pi_X) \leqslant \\ \leqslant \nu_\infty(S^\pi \beta^*) \|\alpha^*\| = \|S^* \beta^*\| \, \|\alpha^*\| \leqslant \|S\| \, \|\alpha\| \, \|\beta\|.\end{aligned}$$

Так как у нас $\|T^*\| = \gamma_1(T^*)$, то окончательно получаем: $\nu_\infty(ST) \leqslant \|S\| \, \|T\|$. □

Для операторов, ∞-интегральных по Гротендику, мы получаем из предыдущего утверждения такой (точный, — см. пример 2.17 ниже) результат. Это небольшое обобщение теоремы 1.2 из [14].

Следствие 2.16. *Пусть $V \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}(X, C(K))$, $S \in \mathrm{L}(C(K), Y^{**})$ и $SV \in \mathrm{L}(X, Y)$. Предположим, что пространство Y c-дополняемо в своем втором сопряженном Y^{**}, где $c \geqslant 1$. Если оператор S не является изоморфизмом ни на каком подпространстве в $C(K)$, изометричном пространству c_0, то суперпозиция SV компактно факторизуется через c_0, т.е. $SV \in \mathrm{N}_\infty(X, Y)$; при этом $\nu_\infty(SV) \leqslant c \|S\| \, \|V\|$. В частности* (ср. [14, теорема 1.2])*, если X^* обладает свойством Радона–Никодима, $Y \not\supset c_0$ и Y c-дополняемо в Y^{**}, то $\mathrm{I}_\infty^{\mathrm{Gr}}(X, Y) \overset{c}{=} \mathrm{N}_\infty(X, Y)$.* □

Пример 2.17. Следующий результат [25, MNach, следствие 3.4] показывает, что следствие 2.15 перестает быть верным, если в его заключении заменить строго интегральные операторы на интегральные по Гротендику: существует оператор, не факторизуемый ни через какое пространство $C(K)$, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство c_0. В этом утверждении в [25] не указаны явно свойства пространства, в котором действует оператор, но из доказательства соответствующих фактов в [25] видно, что в качестве указанного оператора можно взять оператор, действующий во вполне сепарабельном пространстве. Этот же пример показывает, что в следствии 2.16 отказаться от дополняемости пространства Y в его втором сопряженном, вообще говоря, нельзя.

Нам пригодится одна факторизационная лемма для операторов из Π_q^{dual}. Напомним, что $\Pi_\infty^{\mathrm{dual}} = \mathrm{L}$.

Лемма 2.18. *Пусть $q \in [1, \infty)$. Оператор $S : E \to F$ является Π_q^{dual}-оператором в том и только в том случае, если для всякого $\varepsilon > 0$ оператор $\pi_F S$ допускает факторизацию следующего вида:*

$$\pi_F S : \; E \xrightarrow{A} E_{q'} \xrightarrow{j} E_1 \xrightarrow{B} F^{**},$$

где $E_{q'}$ и E_1 — факторпространства некоторых пространств $L_{q'}(\mu)$ и $L_1(\nu)$ соответственно, $\|A\| = 1$, $\|B\| = 1$ и $\pi_q^{\mathrm{dual}}(j) \leqslant (1+\varepsilon)\pi_q^{\mathrm{dual}}(S)$.

Доказательство. Если $\pi_F S$ факторизуется указанным образом, то сопряженный к нему оператор $S^*(\pi_F)^* : F^{***} \to F^* \to E^*$ является абсолютно q-суммирующим, причем $\pi_q(S^*\pi_F^*) \leqslant (1+\varepsilon)\pi_q^{\mathrm{dual}}(S)$. Следовательно, таков и оператор $S^* = S^*\pi_F^*\pi_{F^*}$.

Обратно, предположим, что $S \in \Pi_q^{\mathrm{dual}}(E, F)$. В этом случае сопряженный к нему оператор S^* допускает факторизацию Пича через часть оператора тождественного вложения $i : L_\infty(\mu) \to L_q(\mu)$, где μ — конечная мера:

$$S^* : \ F^* \xrightarrow{B_0} F_\infty^* \xrightarrow{i_0} F_q^* \xrightarrow{A_0} E^*.$$

Здесь F_∞^* и F_q^* — подпространства в $L_\infty(\mu)$ и $L_q(\mu)$ соответственно, $\|A_0\| = 1$, $\|B_0\| = 1$ и i_0 — оператор, индуцированный вложением i. Переходя к сопряженной диаграмме и вспоминая теорему Какутани о реализации абстрактных L-пространств в виде пространств типа $L_1(\nu)$, мы получаем желаемый результат. $\square$

Предложение 2.19. *Предположим, что банахово пространство Y таково, что существует непрерывный проектор $P : Y^{**} \to Y$. Тогда для всякого $p \in (1,\infty)$ из соотношения $Y \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ вытекает условие $Y \in \|P\|$-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$. В частности, если пространство Y сопряжено, то условия $Y \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ и $Y \in \mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$ эквивалентны между собой.*

Доказательство. Предположим, что $Y \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$, и рассмотрим элемент $z = \tilde{z} \in X^*\widehat{\otimes}^p Y = \mathrm{N}^p(X,Y)$. Мы зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$ и покажем, что

$$\nu^p(z) \le \|P\|\, i_{\mathrm{Gr}}^p(z) + \varepsilon \tag{2.3}$$

(ясно, что из соотношения (2.3) вытекает утверждение нашей леммы).

Пусть U — такой $\Pi_{p'}^{\mathrm{dual}}$-оператор из Y в X^{**}, что $\pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(U) < 1$ и $\operatorname{trace} Uz \ge \nu^p(z) - \varepsilon$. Если $z = \sum x_n' \otimes y_n$ — какое-либо N^p-представление оператора z, то последнее неравенство означает, что $\operatorname{trace} U \circ z = \sum \langle x_n', Uy_n\rangle \ge \nu^p(z) - \varepsilon$.

По лемме 2.18, суперпозиция операторов U и z допускает следующую факторизацию:

$$X \xrightarrow{\ z\ } Y \xrightarrow{\ A\ } Y_p \xrightarrow{\ j\ } Y_1 \xrightarrow{\ B\ } X^{**} \tag{2.4}$$

где все операторы непрерывны, причем $\|A\| \le 1$, $\|B\| \le 1$, $\pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(j) \le 1$ и Y_p — фактор-пространство некоторого *рефлексивного* пространства $\mathrm{L}_p(\mu)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} U \circ z &= \sum \langle x_n', BjAy_n\rangle = \\ &= \sum \langle j^*B^*x_n', Ay_n\rangle \qquad \text{(мы отождествляем } x_n' \text{ с элементами из } X^{***}\text{)} \\ &= \operatorname{trace}(Bj)\circ w, \end{aligned}$$

где $w = A \circ z$, т.е. $w = \sum x'_n \otimes Ay_n \in X^* \widehat{\otimes}^p Y_p$.

Так как пространство Y_p рефлексивно, то $\mathrm{I}^p(X, Y_p) = \mathrm{N}^p(X, Y_p)$ (вместе с равенством норм; см. следствие 2.4). Поэтому

$$
(2.5) \quad \nu^p(z) - \varepsilon \le \operatorname{trace} U \circ z = \operatorname{trace}(Bj) \circ w \leqslant \nu^p(w)\, \pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(Bj) \leqslant
\\ \le i^p(w) = i^p(AP\pi_Y \circ z) \leqslant \|A\|\,\|P\|\, i^p_{\mathrm{Gr}}(z) \le \|P\|\, i^p_{\mathrm{Gr}}(z),
$$

что и дает нам неравенство (2.3). $\square$

Замечание 2.20. Вопрос о том, справедливо ли утверждение леммы в случае $p = 1$, открыт. Неясно также, что будет в случае $p = \infty$.

§3. Дополняемые операторы, операторы RN и операторы с аппроксимационными свойствами.

Определения 3.1. 1) Оператор $U \in \mathrm{L}(Z, W)$ *обладает свойством аппроксимации,* $U \in \mathrm{AP}(Z, W)$, если равномерно на каждом компакте из Z он приближается конечномерными отображениями; если существует такая константа $C \geqslant 1$, что равномерно на каждом компакте оператор U приближается конечномерными, нормы которых не превосходят C, то мы говорим, что U обладает свойством C-метрической аппроксимации, $U \in C\text{-}\mathrm{MAP}(Z, W)$. Гротендиковские свойства аппроксимации — частный случай (при $Z = W$, $U = \mathrm{id}_Z$).

2) Мы говорим, что оператор $T \in \mathrm{L}(Y, E)$ *дополняем в своем втором сопряженном,* если существует такой оператор $S \in \mathrm{L}(Y^{**}, E)$, что $T = S\pi_Y$. Для удобства мы будем называть в этом случае S *проекцией оператора* T^{**} *на подпространство* $\mathrm{L}(Y^{**}, E)$ пространства $\mathrm{L}(Y^{**}, E^{**})$ (точнее было бы говорить о проекции на подпространство $\mathrm{L}(Y^{**}, \pi_E E)$).

Очевидно, что проекция, если существует, определяется, вообще говоря, не единственным образом, но по проекции своего второго сопряженного оператор восстанавливается однозначно. Совокупность всех дополняемых в своих вторых сопряженных операторов образует линейное пространство, совокупность же всех проекций для таких операторов является даже замкнутым линейным подпространством в $\mathrm{L}(Y^{**}, E)$. Ясно также, что если оператор T дополняем в T^{**} и S — одна из возможных его проекций, то $(S\pi_Y)^{**} = T^{**}$ и $\|T\| \leqslant \|S\|$.

Примеры 3.2. 1) Если Y или E дополняемо соответственно в Y^{**} или E^{**} (например, если одно из пространств Y или E сопряжено), то всякий оператор $T \in \mathrm{L}(Y, E)$ дополняем в своем втором сопряженном.

2) Всякий слабо компактный оператор T дополняем в своем втором сопряженном. Его проекцией может служить оператор T^π.

2') Если оператор T факторизуется через пространство, дополняемое в своем втором сопряженном (например, через сопряженное пространство, — всякий слабо компактный таков), то T дополняем в своем втором сопряженном.

2") Наконец, если некоторый оператор факторизуется через дополняемый во втором сопряженном оператор, то он сам является дополняемым в своем втором сопряженном.

Таким образом, класс Dpl всех дополняемых в своих вторых сопряженных операторов образует операторный идеал, содержащий идеал всех слабо компактных линейных отображений. Для $T \in \mathrm{Dpl}$ обозначим через $\|T\|_{\mathrm{Dpl}}$ величину

$$\|T\|_{\mathrm{Dpl}} := \inf\{\|S\| : \ S \text{ — проекция } T^{**}\}.$$

Замечание 3.3. Можно ввести общее понятие дополняемости одного оператора T в другом операторе U. Вот одно из подобных определений, относящееся к специфической ситуации, когда рассматриваемые операторы весьма тесно связаны между собой. Пусть наши операторы таковы, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{rcccc} T: & X_0 & \longrightarrow & Y_0 \\ & \cap & & \cap \\ U: & X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Диагр. 3.1

Здесь X_0, Y_0 подпространства в X, Y соответственно и отображение U таково, что $U|_{X_0} = T$. Будем говорить, что оператор T дополняем в U, если найдется такой оператор $U_0 : X \to Y_0$, что $U_0|_{X_0} = T$. Например, в обозначениях этого определения, всякий конечномерный T $\sqrt{\dim T}$-дополняем в любом операторе U (мы не станем обсуждать сейчас, что означает последняя фраза, думается, что это должно быть понятно). Рассмотрение различных фактов и свойств, связанных с понятием дополняемости операторов увело бы нас далеко от тематики настоящей работы, поэтому мы отложим это рассмотрение до лучших времен.

Ниже, как обычно, когда мы говорим о сопряженных к тензорным произведениям пространствах, мы всегда имеем в виду двойственность, определяемую с помощью следа суперпозиции соответствующих тензорных элементов и операторов. Напомним также, что мы часто отождествляем банахово пространство с его каноническим образом во втором сопряженном пространстве (в тех случаях, когда это не приводит к недоразумению).

Теорема 3.4. *Если X, Y, Z, W — банаховы пространства, $S \in \mathrm{Dpl}(X, Y)$, $T \in \mathrm{RN}(Y, Z)$ и $U \in \mathrm{AP}(Z, W)$, то $UTS \in C$-MAP, где $C = \|U\|\,\|T\|\,\|S\|_{\mathrm{Dpl}}$.*

Доказательство. Вот диаграмма, которую надо иметь в виду в приводимом ниже доказательстве:

$$\begin{array}{ccccccccc} W & \xrightarrow{\widetilde{v}} & X & \xrightarrow{S} & Y & \xrightarrow{T} & Z & \xrightarrow{U} & W. \\ & & & \searrow^{\pi_X} & \nearrow^{S_0} & & & & \\ & & & & X^{**} & & & & \end{array}$$

Диагр. 3.2

Сопряженное к $W^*\widehat{\otimes}_1 Z$ пространство есть $\mathrm{L}(Z, W^{**})$. Если $\Phi: W^*\widehat{\otimes}_1 Z \to \mathrm{N}_1(W, Z)$ — каноническое факторотображение, то его ядро $\operatorname{Ker}\Phi$ состоит из тех тензоров в $W^*\widehat{\otimes}_1 Z$, которые обращаются в нуль на конечномерных операторах из $\mathrm{L}(Z, W^{**})$. Сопряженное к $\mathrm{N}_1(W, Z)$ пространство поэтому есть подпространство $\mathrm{L}_0(W, Z^{**})$ в $\mathrm{L}(W, Z^{**})$, состоящее из операторов, приближающихся в *-слабой топологии конечномерными (оператор U как раз таков, так как каждый элемент $u \in W^*\widehat{\otimes}_1 Z$ представим в виде ряда $\sum w'_k \otimes z_k$, где $(w'_k) \in l_1(W^*)$ и $(z_k) \in c_0(Z)$). Поскольку U аннулируется на $\operatorname{Ker}\Phi$, то след $\operatorname{trace} U \circ \widetilde{u}$ корректно определен для любого $\widetilde{u} \in \mathrm{N}_1(W, Z)$, порожденного тензором $u \in W^*\widehat{\otimes}_1 Z$, причем $|\operatorname{trace} U \circ u| \leqslant \|U\|\, \nu_1(\widetilde{u})$. В частности, если $v \in W^*\widehat{\otimes}_1 X$, то $(\mathbb{1} \otimes TS)v \in W^*\widehat{\otimes}_1 Z$ и имеет смысл след $\operatorname{trace} U \circ (\widetilde{\mathbb{1} \otimes TS})v = \operatorname{trace} U \circ ((TS) \circ v)$. Если S_0 — дополнение оператора S в его втором сопряженном S^{**}, то $\operatorname{trace} U \circ ((TS) \circ v) = \operatorname{trace} U \circ ((TS_0\pi_X) \circ v)$.

Пусть $v = \sum w'_k \otimes x_k$ — какое-либо представление v в пространстве $W^*\widehat{\otimes}_1 X$. Тогда

$$
|\operatorname{trace} U \circ ((TS) \circ v)| = \left|\sum \langle w'_k, UTSx_k\rangle\right| \leqslant \\
\|U\|\, \nu_1\left(\sum w'_k \otimes TSx_k\right) = \|U\|\, \nu_1\left((TS)\widetilde{v}\right) = \|U\|\, \nu_1\left(T(S_0\pi_X\widetilde{v})\right).
$$

Теперь пора использовать принадлежность оператора T идеалу RN. Произведение AB оператора A типа RN и (строго) 1-интегрального оператора B является ядерным оператором, причем норма произведения не превосходит произведения соответствующих норм: $\nu_1(AB) \leqslant \|A\| i_1(B)$ [27, теорема 4; 21, теорема 1]. Поэтому мы можем продолжить цепочку наших соотношений, получая следующее:

$$
\operatorname{trace} U \circ (\widetilde{\mathbb{1} \otimes TS})v \leqslant \|U\|\, \|T\|\, i_1(S_0\pi_X\widetilde{v}) \leqslant \\
\|U\|\, \|T\|\, \|S_0\|\, i_1(\pi_X\widetilde{v}) = \|U\|\, \|T\|\, \|S_0\|\, i_1^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{v}).
$$

Из приведенных выкладок видно, что отображение $\mathbb{1} \otimes TS$ индуцирует оператор R из $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$ в $\mathrm{N}_1(W, Z)$, норма которого не превосходит $\|T\|\, \|S_0\|$ и такое, что для $\widetilde{v} \in \mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$

$$
|\langle < R^*U, \widetilde{v}\rangle| = |\langle U, R\widetilde{v}\rangle| = |\operatorname{trace} U \circ (TS_0\pi_X\widetilde{v})| \leqslant \|U\|\, \|T\|\, \|S_0\|\, i_1^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{v}).
$$

Оператор U лежит в шаре радиуса $\|U\|$ пространства $\mathrm{L}_0(Z, W^{**}) \subset \mathrm{L}(Z, W^{**})$. Следовательно, отображение R^* переносит U в шар радиуса $\|U\|\, \|T\|\, \|S_0\|$ пространства $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)^*$. Так как $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$ канонически изометрично подпространству $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, \pi_X X)$ пространства $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X^{**})$, то R^*U продолжается до функционала U_0 на $\mathrm{I}_1(W, X^{**})$ без увеличения нормы. Пространство $\mathrm{I}_1(W, X^{**})$ сопряжено к инъективному тензорному произведению $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}_\infty W$, и, следовательно, U_0 лежит в *-слабом замыкании шара радиуса $\|T\|\, \|S_0\|\, \|U\|$ пространства $X^* \otimes_\infty W$, что гарантирует равномерную на каждом компакте аппроксимацию оператора $UTS = UTS_0\pi_X$ конечномерными операторами, нормы которых не превосходят $\|T\|\, \|S_0\|\, \|U\|$. $\square$

Теорема 3.5. *Если X, Y, Z, W — банаховы пространства, $S \in \mathrm{Dpl}(X, Y)$, $T \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}(Z, W)$ и $U \in \mathrm{AP}(Y, Z)$, то $TUS \in C$-MAP, где $C = \|T\|\,\|U\|\,\|S\|_{\mathrm{Dpl}}$.*

Доказательство. Вот диаграмма, которая соответствует приводимому ниже доказательству:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "U"] & Z \arrow[r, "T"] & W \arrow[r, "\widetilde{v}"] & X \arrow[dr, "\pi_X"'] & & Y \\
& & & & X^{**} \arrow[ur, "S_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

Диагр. 3.3

Мы будем следовать схеме доказательства предыдущей теоремы. Сейчас у нас $U \in \mathrm{AP}$ и, следовательно, U принадлежит подпространству $\mathrm{L}_0(Y, Z) \subset \mathrm{L}(Y, Z^{**})$ (мы сейчас отождествляем Z с $\pi_Z Z$), состоящему из операторов, приближающихся в топологии $\sigma\left(\mathrm{L}(Y, Z^{**}), Z^*\widehat{\otimes}_1 Y\right)$ конечномерными отображениями. Как и в доказательстве теоремы 3.4, мы получаем, что след trace $U \circ \widetilde{u}$ корректно определен для всякого оператора $\widetilde{u} \in \mathrm{N}_1(Z, Y)$, порожденного элементом $u \in Z^*\widehat{\otimes}_1 Y$, и при этом $|\operatorname{trace} U \circ \widetilde{u}| \leqslant \|U\|\nu_1(\widetilde{u})$. В частности, если $v \in W^*\widehat{\otimes}_1 X$, то $T^* \otimes S)v \in Z^*\widehat{\otimes}_1 Y$ и имеет смысл след trace $U \circ (\widetilde{T^* \otimes S})v = \operatorname{trace} U \circ (T^* \otimes (S_0\pi_X) \circ v)$, где S_0 — дополнение оператора S в его втором сопряженном S^{**}.

Пусть $v = \sum w'_k \otimes x_k$ — представление v в пространстве $W^*\widehat{\otimes}_1 X$. Тогда

$$
\begin{aligned}
\operatorname{trace} U \circ (\widetilde{T^* \otimes S})v = \left|\sum \langle T^* w'_k, U S_0 \pi_X x_k\rangle\right| \leqslant \\
\|U\|\,\nu_1\left(\sum T^* w'_k \otimes S_0\pi_X x_k\right) = \|U\|\,\nu_1\left(S_0\pi_X\widetilde{v}T\right) = \|U\|\,\nu_1\left((S_0\pi_X\widetilde{v})T\right).
\end{aligned}
$$

Произведение BA оператора A типа $\mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$ и (строго) 1-интегрального оператора B является ядерным оператором, причем норма произведения не превосходит произведения соответствующих норм: $\nu_1(BA) \leqslant \|A\| i_1(B)$ [27, теорема 5; 21, теорема 2]. Поэтому

$$
\begin{aligned}
\operatorname{trace} U \circ (\widetilde{T^* \otimes S})v \leqslant \|U\|\,\|T\|\,i_1(S_0\pi_X\widetilde{v}) \leqslant \\
\|U\|\,\|T\|\,\|S_0\|\,i_1(\pi_X\widetilde{v}) = \|U\|\,\|T\|\,\|S_0\|\,i_1^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{v}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, отображение $T^*\otimes S$ индуцирует оператор R из $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$ в $\mathrm{N}_1(Z, Y)$, норма которого не превосходит $\|T\|\,\|S_0\|$ и такое, что для $\widetilde{v} \in \mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W, X)$

$$
|\langle R^*U, \widetilde{v}\rangle| = |\langle U, R\widetilde{v}\rangle| = |\operatorname{trace} U \circ (S_0\pi_X\widetilde{v}T)| \leqslant \|U\|\,\|T\|\,\|S_0\|\,i_1^{\mathrm{Gr}}(\widetilde{v}).
$$

Оператор U лежит в шаре радиуса $\|U\|$ пространства $\mathrm{L}_0(Y, Z^{**}) \subset \mathrm{L}(Y, Z^{**})$. Следовательно, образ U при отображении R^* лежит в шаре радиуса $\|U\|\,\|T\|\,\|S_0\|$

пространства $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W,X)^*$. Так как $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W,X)$ канонически изометрично подпространству $\mathrm{I}_1^{\mathrm{Gr}}(W,\pi_X X)$ пространства $\mathrm{I}_1(W,X^{**})$, то R^*U продолжается до функционала U_0 на $\mathrm{I}_1(W,X^{**})$ без увеличения нормы. Пространство $\mathrm{I}_1(W,X^{**})$ сопряжено к инъективному тензорному произведению $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}_\infty W$, и, следовательно, U_0 лежит в *-слабом замыкании шара радиуса $\|T\|\,\|S_0\|\,\|U\|$ пространства $X^*\otimes_\infty W$, что гарантирует равномерную на каждом компакте аппроксимацию оператора $TUS = TUS_0\pi_X$ конечномерными операторами, нормы которых не превосходят $\|T\|\,\|U\|\,\|S_0\|$. $\square$

§4. Неизоморфные инъективные вложения $\mathrm{N}^p(Y,X)$ в $(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}(Y,X)$

Перед тем как сформулировать одну из важных теорем настоящего параграфа, введем еще одно обозначение, а именно, для пары банаховых пространств X,Y договоримся обозначать через s-$\bigcap_{r\in\mathcal{R}} X\widehat{\otimes}_r Y$ множество всех тензорных элементов, допускающих представления $\sum_{k=1}^\infty x'_k\otimes y_k$, для которых ряд сходится в каждом из тензорных произведений $X\widehat{\otimes}_r Y$, $r\in\mathcal{R}$ (т.е. это представление является подходящим разложением рассматриваемого элемента в каждом из указанных тензорных произведений). Аналогичный смысл ниже будет иметь и обозначение s-$\bigcap_{r\in\mathcal{R}} X\widehat{\otimes}^r Y$. Напомним также, что идеал QN_∞ состоит из всех компактно факторизуемых через рефлексивные пространства операторов в банаховых пространствах и совпадает (по теореме У.Б. Джонсона [10]) с идеалом всех компактных отображений.

Замечание 4.1. Можно определить пересечение указанных тензорных произведений, как совокупность тензоров, лежащих в каждом из произведений $X\widehat{\otimes}_r Y$, $r\in\mathcal{R}$. Но в этом, наиболее естественном определении, естественно, будет требоваться лишь, чтобы соответствующий тензор допускал нужное разложение в каждом из тензорных произведений $X\widehat{\otimes}_r Y$, $r\in\mathcal{R}$, но не обязательно одно разложение, сходящееся одновременно во всех этих тензорных произведениях. Это — одна из причин, почему мы используем в обозначениях символ s-$\cap$.

Теперь обратимся к формулировке и доказательству нашей следующей теоремы. Утверждения 1) и 4) этой теоремы, по существу, новые; относительно 3) см. замечание 4.3 ниже. Что касается утверждения 2), мы приводим его не только (и не столько) для полноты изложения; стоит отметить, что пространство G_v^*, сопряженное к G_v из этого утверждения, имеет нетривиальный радемахеровский тип. В доказательстве теоремы идейно мы следуем схеме рассуждений из [25], однако в деталях есть существенные отличия.

Теорема 4.2. *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, обладающее следующими свойствами.*

1) *Существуют такие рефлексивное сепарабельное банахово пространство F, оператор $U\in\mathrm{QN}_\infty(F,E)$ и тензорные элементы $z_0\in s$-$\bigcap_{v>2} E^*\widehat{\otimes}_v c_0$ и $z_1\in c_0^*\widehat{\otimes}_1 F$, что если $w:=z_1\circ z_0$, то* $\mathrm{trace}\, U\circ w = 1$ *и $\widetilde{w}=0$ (т.е. w порождает нулевой*

оператор). При этом, если $r > 2$ и $1/r + 1/s \leqslant 1$, то

$$w = z_1 \circ z_0 \in (c_0^* \widehat{\otimes}_s F) \circ (E^* \widehat{\otimes}_r c_0).$$

2) *Для каждого $v \in (2, \infty)$ существуют такие подпространство G_v пространства l_v, оператор $U_v \in \mathrm{QN}_v(E, G_v)$ и элемент $w_v \in G_v^* \widehat{\otimes}_1 E$, что* $\mathrm{trace}\, U_v \circ w_v = 1$ *и* $\widetilde{w}_v = 0$.

3) *Существуют такие рефлексивное сепарабельное банахово пространство G, оператор $U_0 \in \bigcap_{v>2} \mathrm{QN}_v(E, G)$ и элемент $w_0 \in G^* \widehat{\otimes}_1 E$, что* $\mathrm{trace}\, U_0 \circ w_0 = 1$ *и* $\widetilde{w}_0 = 0$.

4) *Пусть $2 < v < s < \infty$ и $1/\alpha = 3/2 - 1/v = 1/2 + 1/v'$. Существуют такие подпространство F_s пространства l_s, оператор $V_v \in \mathrm{QN}_s(E, F_s)$ и элемент $z_v \in F_s^* \widehat{\otimes}_\alpha E$, что* $\mathrm{trace}\, V_v \circ z_v = 1$ *и* $\widetilde{z}_v = 0$.

Доказательство. Пусть X — такое сепарабельное банахово пространство, что существует элемент $z \in X^* \widehat{\otimes}_1 X$ с единичным следом, порождающий нулевой оператор $\widetilde{z}$ и представимый в виде

$$z = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{1/2} 2^{-3N/2} x'_{nN} \otimes x_{nN}, \quad z \in \text{s-} \bigcap_{p>2/3} X^* \widehat{\otimes}_p X \setminus (X^* \widehat{\otimes}_{2/3} X), \tag{4.1}$$

где последовательности (x'_{nN}) и (x_{nN}) ограничены (см. [18, п. 10.4.5]). Далее в этом доказательстве через (e_{nN}), также как и через (e'_{nN}), обозначается последовательность единичных ортов в любом из пространств $l_{(v)} := \left(\sum_{N=1}^{\infty} l_v^{3\cdot 2^N}\right)_{l_v}$ или $c_{(0)} := \left(\sum_{N=1}^{\infty} l_\infty^{3\cdot 2^N}\right)_{c_0}$ (недоразумения возникнуть не должно, — в каждом случае будет ясно, о каком конкретно пространстве идет речь). Положим

$$A := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-1/2} x'_{nN} \otimes e_{nN} : \ X \to c_{(0)},$$

$$B := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-1/2} e'_{nN} \otimes x_{nN} : \ l_{(1)} \to X,$$

$$\Delta_0 := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{7/2} 2^{-N/2} e'_{nN} \otimes e_{nN} : \ c_{(0)} \to c_{(0)},$$

$$\Delta_1 := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} e'_{nN} \otimes e_{nN} : \ c_{(0)} \to l_{(1)}.$$

Эти операторы действуют непрерывно согласно следующей диаграмме, показывающей также, какую факторизацию, связанную с указанным выше представлением тензора z, допускает нулевой оператор $\widetilde{z}$.

$$\widetilde{z} : \ X \xrightarrow{A} c_{(0)} \xrightarrow{\Delta_0} c_{(0)} \xrightarrow{\Delta_1} l_{(1)} \xrightarrow{B} X;$$

Диагр. 4.1

операторы A, B компактны (и даже лежат в идеале App), Δ_1 — 1-ядерный оператор, Δ_0 — v-ядерный оператор для любого $v \in (2, \infty]$.

Пусть

$$A = jA_1A_2 : X \xrightarrow{A_2} E \xrightarrow{A_1} \overline{A(X)} \overset{j}{\hookrightarrow} c_{(0)},$$
$$B = B_1B_2 : l_{(1)} \xrightarrow{B_2} F \xrightarrow{B_1} X$$

— компактные факторизации отображений A и B через рефлексивные пространства E и F соответственно [10, 2] (важно отметить, что из построений в указанных работах вытекает равенство $\overline{A(X)} = \overline{A_1(E)}$; кроме того, мы будем считать, что отображение $A_2 : X \to E$ действует на плотное множество, а отображение $B_1 : F \to X$ взаимно однозначно, поскольку всегда можно перейти в указанных факторизациях к образу оператора A_2 и к факторпространству $F/\operatorname{Ker} B_1$, сохранив рефлексивность получаемых пространств). Положим

$$(z_0) \qquad z_0 := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{7/2} 2^{-N/2} A_1^* j^* e'_{nN} \otimes e_{nN},\ z_0 \in E^* \widehat{\otimes}_v c_{(0)} \quad (\forall\, v > 2),$$

$$(z_1) \qquad z_1 := \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} e'_{nN} \otimes B_2 e_{nN},\ z_1 \in c_{(0)}^* \widehat{\otimes}_1 F.$$

Тензорный элемент z_0 можно также рассматривать как элемент тензорного произведения $E^* \widehat{\otimes}_v l_{(v)}$, $v \in (2, \infty]$, точнее, как суперпозицию $i_v \circ z'_v$, где $i_v : l_{(v)} \hookrightarrow c_{(0)}$ — тождественное вложение, а $z'_v \in E^* \widehat{\otimes} l_{(v)}$ индуцируется тензором z_0 (соотношение, определяющее z_v, то же, что и в (z_0) для z_0).

1). Если положить $w := z_1 \circ z_0$, $U := A_2 \circ B_1$, то $w \in E^* \widehat{\otimes}_1 F$, $U \in \mathrm{QN}_\infty(F, E)$, причем

$$w = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-3N/2} A_1^* j^* e'_{nN} \otimes B_2 e_{nN}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} U \circ w &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-3N/2} \langle A_1^* j^* e'_{nN}, A_2 B_1 B_2 e_{nN} \rangle = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-3N/2} \langle A^* e'_{nN}, B e_{nN} \rangle = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{1/2} 2^{-3N/2} \langle x'_{nN}, x_{nN} \rangle = \operatorname{trace} z \neq 0. \end{aligned}$$

Ясно, что $z_0 \in E^*\widehat{\otimes}_r c_{(0)}$ для всякого $r > 2$, а $z_1 \in c^*_{(0)}\widehat{\otimes}_1 F \subset c^*_{(0)}\widehat{\otimes}_s F$ для любого $s \geqslant 1$. Поэтому, если $r > 2$ и $1/r + 1/s \leqslant 1$, то

$$w = z_1 \circ z_0 \in (c^*_{(0)}\widehat{\otimes}_s F) \circ (E^*\widehat{\otimes}_r c_{(0)}).$$

То, что тензор w порождает нулевой оператор, вытекает из наших предположениях об операторах A_2 и B_1 и того, что $\widetilde{z} = 0$.

2) Пусть для $v > 2, v \neq \infty$, $\Delta_v : c_{(0)} \to l_{(v)}$ — v-ядерный оператор, ассоциированный с диагональным оператором Δ_0, так что $\Delta_0 = i_v\Delta_v$. Положим $G_v := \overline{\Delta_v j A_1(E)}$, $\widetilde{\Delta}_v = \Delta_v|_{jA_1(E)} j|_{\overline{A_1(E)}}$, и пусть $j_v : G_v \hookrightarrow l_{(v)}$ — тождественное вложение.

$$X \xrightarrow{A_2} E \xrightarrow{A_1} \overline{A(X)} = \overline{A_1(E)} \xrightarrow{\widetilde{\Delta}_v} G_v \overset{j_v}{\hookrightarrow} l_{(v)} \overset{i_v}{\hookrightarrow} c_{(0)} \xrightarrow{\widetilde{z}_1} F \xrightarrow{B_1} X \xrightarrow{A_2} E.$$

Диагр. 4.2

Тогда (см. диагр. 4.2)

$$\begin{aligned} w_v &:= (i_v j_v)^* \otimes (A_2 B_1)(z_1) \in G_v^*\widehat{\otimes}_1 E \quad \text{и} \\ U_v &:= \widetilde{\Delta}_v A_1 \in \mathrm{QN}_v(E, G_v) \end{aligned}$$

(мы определяем U_v как оператор, чей образ лежит в подпространстве $G_v \subset l_{(v)}$, так что $j_v U_v A_2 = \Delta_v A$).

Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} U_v \circ w_v &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} \langle (i_v j_v)^* e'_{nN}, U A_2 B_1 B_2 e_{nN} \rangle = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2} 2^{-N} \langle i_v^* e'_{nN}, \Delta_v A B e_{nN} \rangle = \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2} 2^{-N} \langle e'_{nN}, A B e_{nN} \rangle = \operatorname{trace} z \neq 0. \end{aligned}$$

3). Разложим диагональный оператор Δ_0 (см. его определение выше) в произведение

$$\Delta_0 = \Delta_{02}\Delta_{01} : c_{(0)} \xrightarrow{\Delta_{01}} c_{(0)} \xrightarrow{\Delta_{02}} c_{(0)}$$

двух диагональных операторов, — операторов умножения

$$\text{на } \ \delta_{01} = \left((N^4 2^{-N/2})_{n=1}^{3\cdot 2^N} \right)_{N=1}^{\infty} \quad \text{и на } \ \delta_{02} = \left((N^{-1/2})_{n=1}^{3\cdot 2^N} \right)_{N=1}^{\infty}$$

соответственно. Пусть G_0 — рефлексивное сепарабельное пространство, через которое компактно факторизуется компактный оператор Δ_{02},

$$\Delta_{02} : c_{(0)} \xrightarrow{A_3} G_0 \xrightarrow{A_4} c_{(0)}.$$

Если положить $G := \overline{A_3\Delta_{01}A_1(E)} \subset G_0$ и

$$w_0 := A_4^* \otimes (A_2B_1)(z_1) \in G^* \widehat{\otimes}_1 E \quad \text{и}$$
$$U_0 := \widetilde{\Delta}_{01}A_1 \in \mathrm{QN}_v(E, G)\ (\forall\, v > 2),$$

где $\widetilde{\Delta}_{01}$ — отображение из $\overline{A_1(E)}$ в G, индуцированное оператором $A_3\Delta_{01}$, то

$$\operatorname{trace} U_0 \circ w_0 = \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2}2^{-N}\langle e'_{nN}, \Delta_0 ABe_{nN}\rangle =$$
$$= \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{3/2}2^{-N}\langle A^*e'_{nN}, Be_{nN}\rangle = \operatorname{trace} z \neq 0.$$

4). Фиксируем $s, v > 2$, $v < s$. Ясно, что $\alpha := 2v/(3v-2) > 1/2$. Рассмотрим оператор Δ_{0v}, "отщепленный" от диагонального оператора Δ_0 (другой "множитель" из Δ_0 сейчас войдет в Δ_1):

$$\Delta_{0v} := \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{7/2}2^{-N/v}e'_{nN}\otimes e_{nN} :\ c_{(0)} \to l_{(s)}.$$

Этот оператор является s-ядерным. Пусть

$$\Delta_{1v} := \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{3\cdot 2^N} N^{-2}2^{-N[3/2-1/v]}e'_{nN}\otimes e_{nN} :\ c_{(0)} \to l_{(1)}.$$

Так как $3/2 - 1/v = 1/\alpha$ и $2\alpha > 1$, то $\Delta_{1v} \in \mathrm{N}_\alpha(c_{(0)}, l_{(1)})$. Обозначим через $\widetilde{\Delta}_{0v}$ оператор из $\overline{A_1(E)}$ в $F_s := \overline{\Delta_{0v}A_1(E)}$, индуцированный оператором $\Delta_0 v$, и через k_s — естественное вложение F_s в пространство $c_{(0)}$ (см. диагр. 4.3).

$$X \xrightarrow{A_2} E \xrightarrow{A_1} \overline{A(X)} = \overline{A_1(E)} \xrightarrow{\widetilde{\Delta}_{0v}} F_s \overset{k_s}{\hookrightarrow} c_{(0)} \xrightarrow{\Delta_{1v}} l_{(1)} \xrightarrow{B} X \xrightarrow{A_2} E.$$

Диагр. 4.3

Положив $z_v := (k_s^* \otimes A_2 B)(\Delta_{1v})$ и $V_v := \widetilde{\Delta}_{0v} A_1$, мы получим искомые тензор $z_v \in F_s^* \widehat{\otimes}_\alpha E$ и оператор $V_v \in \mathrm{QN}_s(E, F_s)$. $\square$

Замечание 4.3. 1) Утверждение 3) теоремы 4.2 — это утверждение из замечания 1.1 в работе [25], приведенное там без какого-либо эскиза доказательства. Мы выше, в доказательстве теоремы 4.2, использовали один из наиболее сильных контрпримеров к проблеме аппроксимации, и только это позволило нам получить утверждение 3). Непосредственный перенос рассуждений из [25, доказательство леммы 1.1,1)] затруднителен, так как в этих рассуждениях пример Энфло использовался в его достаточно грубой форме. Заметим также, что одновременно мы наконец привели (учитывая результаты работы [25])и доказательство утверждений, сформулированных в замечаниях 1.2.1) и 3.1 из [25].

2) Утверждение 4) (так же как и 3)) точно и не может быть улучшено: если $v > 2$ и $\alpha := 2v/(3v-2)$, и $\varphi_{\alpha,v'} : F^* \widehat{\otimes}_\alpha E \to F^* \widehat{\otimes}_{v'} E$ — естественное отображение (оно вполне может не быть инъективным), то *сужение канонического отображения* $F^* \widehat{\otimes}_{v'} E \to \mathrm{L}(F, E)$ *на линейное подпространство* $\varphi_{\alpha,v'}\left(F^* \widehat{\otimes}_\alpha E\right)$ *взаимно однозначно* каковы бы не были банаховы пространства E и F (см. [26, теорема 2.1,A)]). Вместе с 3) утверждение 4) дает полную картину совместного поведения тензорных элементов из $\widehat{\otimes}_\alpha$, $\alpha \in (2/3, 1]$), и из $\widehat{\otimes}_{v'}$, $2 < v \leqslant \infty$. Отметим, что такая же картина возникает и при исследовании вопроса о том, при каких значениях параметров α, v из α-ядерности сопряженного (соответственно, второго сопряженного) оператора следует принадлежность классу N^v (соответственно, классу N_v) самого оператора (см. [26] и теорему 5.1 в настоящей статье).

Следствие 4.4. *Для каждого $v > 2$ существуют такие сепарабельные рефлексивные банаховы пространства E, F и W, что естественное отображение*

$$(W^* \widehat{\otimes}_1 F) \circ (E^* \widehat{\otimes}_v W) \to \mathrm{L}(E, F)$$

не взаимно однозначно.

Доказательство. Изменим немного диаграмму 4.1, поместив в центре ее компактный оператор в c_0, не испортив основных свойств операторов слева и справа (так, чтобы доказательство утверждения 1) прошло и с этим новым оператором). После этого профакторизуем его через сепарабельное рефлексивное пространство; последнее обозначим через W. $\square$

Перед тем как перейти к рассмотрению дуальных утверждений относительно N^p-операторов, приведем еще два следствия из предыдущей теоремы, уточняющие и дополняющие один результат из [31], а также некоторые факты из [26].

Напомним, определение тензорных произведений $\widehat{\otimes}_{s,\infty}$ и свойств $\mathrm{AP}_{s,\infty}$, впервые введенных и исследованных в [31].

Для банаховых пространств X, Y и числа $s \in (0,1)$ обозначим через $Y^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X$ линейное подпространство в проективном тензорном произведении $Y^* \widehat{\otimes}_1 X$, состоящее из тензоров, допускающих представления вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, y_k' \otimes x_k, \quad \text{где} \quad \lambda_k \searrow 0, \ \lambda_k^s = o(1/k), \ \|y_k'\| \, \|x_k\| = 1,$$

а через $\mathrm{N}_{s,\infty}$ — соответствующее операторное (фактор)пространство. Банахово пространство X *обладает свойством* $\mathrm{AP}_{\mathrm{s},\infty}$, где $s \in (0,1)$, если для любого банахова пространства Y каноническое отображение $Y^* \widehat{\otimes}_{s,\infty} X \to \mathrm{L}(Y,X)$ взаимно однозначно. Каждое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{2/3,\infty}$ [31].

Следствие 4.5. *Пусть* $2 < v < s < \infty$, $1/\alpha = 1/2 + 1/v'$ *и* $1/\alpha_0 = 1/2 + 1/s'$. *Существуют такие вполне сепарабельные банаховы пространства* Z, W *и операторы* $T \in \mathrm{N}_{v'}(W,Z)$ *и* $U \in \mathrm{QN}_s(Z^{**},W)$, *что*

(1) W *и* Z^{**} *имеют базисы;*

(2) *как* W, *так и все сопряженные к нему пространства* $W^*, W^{**}, \dots$ *обладают свойством* $\mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$*;*

(3) W^* *не обладает свойством* AP_β *ни при каком* $\beta \in [\alpha, 1]$*;*

(4) $T \in \mathrm{N}_\alpha^{\mathrm{reg}}(W,Z)$, *но* $T \notin \mathrm{N}_q(W,Z)$ *ни при каком* $q < s'$.

(5) $U|_Z = 0$ и trace $U \circ \pi_Z T = 1$.

Доказательство. Пусть $E, F_s \subset l_s$, $V_v \in \mathrm{QN}_s(E,F_s)$ и $z_v \in F_s^* \widehat{\otimes}_\alpha E$ — из теоремы 4.2,4)), так что trace $V_v \circ z_v = 1$ и $\widetilde{z}_v = 0$. Пусть, далее,

$$z_v = \sum \lambda_j f_j' \otimes e_j, \quad (\lambda_j) \in l_\alpha,\ (f_j') \in l_\infty(F_s^*),\ (e_j) \in l_\infty(E)$$

— некоторое представление z_v в тензорном произведении $F^* \widehat{\otimes}_\alpha E$. Воспользуемся леммой 1.3 и найдем такие вполне сепарабельное банахово пространство Z и ограниченную последовательность $(z_j'') \subset Z^{**}$, что для гомоморфизма $\Phi : Z^{**} \to E$ из леммы 1.3 $\Phi z_j'' = e_j, j = 1, 2, \dots$. Положим

$$T_v := \sum \lambda_j f_j' \otimes z_j'' \in F_s^* \widehat{\otimes}_\alpha Z^{**}, \quad U_v := V_v \Phi \in \mathrm{QN}_s(Z^{**}, F_s). \tag{4.2}$$

Так как $\operatorname{Ker} \Phi = Z$ и $\Phi T_v = \widetilde{z} = 0$, то $T_v(F_s) \subset Z$, поэтому из (4.2) вытекает, что $T_v \in \mathrm{N}_v(F_s, Z)$ [26, теорема 3.1,A)].

$$\begin{tikzcd} F_s \arrow[r, "\widetilde{z}_v"] \arrow[dr, "T_v"'] & E \arrow[r, "V_v"] & F_s \\ & Z^{**} \arrow[u, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Диагр. 4.4

Заметим также, что, так как $F_s \subset l_s$ и $1/\alpha_0 = 3/2 - 1/s$, то $F_s \in \mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$ (всякое конечномерное подпространство G в F_s является $C \dim G^{1/2-1/s}$-дополняемым подпространством, поэтому применимо предложение 1) из [31], которое говорит о том, что каждое такое пространство обладает свойством $\mathrm{AP}_{(1+(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}))^{-1},\infty}$).

Далее, если $\beta \in [\alpha, 1]$ то $z_v \in F_s^* \widehat{\otimes}_\beta E$, $V_v \in \mathrm{L}(F_s, E)$, trace $V_v \circ z_v = 1$ и $\widetilde{z} = 0$; поэтому как E, так и F_v^* не обладают свойством AP_β .

Пусть теперь $W = Y^*$ и $\Psi : W \to F_s$ — вполне сепарабельное пространство и факторотображение из леммы 1.2, построенные для пространства F_s, так что $W^* = \pi_Y Y \oplus \Psi^* F_s^*$. Пара пространств W, Z^{**} удовлетворяет условиям 1)–3). Нам осталось определить операторы U и T и проверить выполнения условия 4).

Если $w'_j = \Psi^* f'_j \in W^*$, $j = 1, 2, \dots,$ и $T := \sum \lambda_j w'_j \otimes z''_j$, то $T \in \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_\alpha(W, Z)$: для $w \in W$

$$Tw = \sum \lambda_j \langle \Psi^* f'_j, w\rangle z''_j = \sum \lambda_j \langle f_j, \Psi w\rangle z''_j = T_v \Psi w \in Z,$$

и $(\lambda_j) \in l_\alpha$.

Обозначим через P проектор из пространства W^* на $\Psi^* F_s^*$ и через $\Psi_0^* : F_s^* \to \Psi^* F_s^*$ — приведение оператора Ψ^*. Наконец, положим $U := [(\Psi_0^*)^{-1} P]^* V_v \Phi$:

$$\begin{array}{ccc} W \xrightarrow{T} \; Z^{**} \xrightarrow{\Phi} & E \xrightarrow{V_v} F_s \xrightarrow{[(\Psi_0^*)^{-1}P]^*} W^{**} \\ \searrow^{T_v\Psi} \nearrow^{\pi_Z} & F_s^* \xleftarrow{(\Psi_0^*)^{-1}} \Psi^* F_s^* \xleftarrow{P} W^* = \Psi^* F_s^* \oplus Y \\ Z & \end{array}$$

Диагр. 4.5

С одной стороны, мы имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle w'_j, U z''_j\rangle = \sum \langle w'_j, [(\Psi_0^*)^{-1} P]^* V_v \Phi z''_j\rangle = \\ = \sum \langle (\Psi_0^*)^{-1} P w'_j, V_v \Phi z''_j\rangle = \sum \langle f_j, V_v e_j\rangle = \operatorname{trace} V_v \circ z = 1. \end{aligned}$$

С другой стороны, если разложение T в ряд вида $T = \sum \overline{w}'_j \otimes \overline{z}_j$ было бы представлением этого оператора в $\mathrm{N}_q(W, Z)$, $q < s'$, то, так как $Z = \mathrm{Ker}\Phi$, мы имели бы:

$$\operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle \overline{w}'_j, U \overline{z}_j\rangle.$$

Но $V_v \Phi|_Z = 0$, а, значит, и сужение U на Z равно нулю. Отсюда, $\operatorname{trace} U \circ T = 0$. □

Следствие 4.6. *Пусть $2 < v < s < \infty$, $1/\alpha = 1/2 + 1/v'$ и $1/\alpha_0 = 1/2 + 1/s'$. Существуют такие вполне сепарабельные банаховы пространства Z и W , что*

(1) W и Z^{**} имеют базисы;

(2) как W, так и все сопряженные к нему пространства обладают свойством $\mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$;

(3) W^* не обладает свойством AP_β ни при каком $\beta \in [\alpha, 1]$;

(4) для любого банахова пространства E $\quad \mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_{\alpha_0,\infty}(W, E) \subset \mathrm{N}_1(W, E)$;

(5) $\mathrm{N}^{\mathrm{reg}}_\alpha(W, Z) \not\subset \mathrm{N}_q(W, Z)$, каково бы не было $q < v'$.

Доказательство. Утверждения (1)–(3) и (5) вытекают непосредственно из предыдущего следствия. Что касается (4), то оно получается так. В доказательстве следствия 4.5 рефлексивное пространство F_s есть подпространство l_s и, следовательно, как оно, так и F^* обладает свойством $\mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$ [31, предложение 1]; пространства Y и $W = Y^*$ удовлетворяют условию метрической аппроксимации. Таким образом, пространство $W^* = F^* \oplus Y$, также как и все остальные сопряженные к W пространства $W^{**}, \ldots$, имеют свойство $\mathrm{AP}_{\alpha_0,\infty}$. Поэтому утверждение (4) вытекает из [31, теорема 2,1)]. $\square$

Двойственная теорема, получающаяся из теореме 4.2 переходом к дуальной ситуации, выглядит так (при ее формулировке мы не следуем обозначениям из теоремы 4.2; напомним, что $\mathrm{N}_1 = \mathrm{N}^1$ и $\widehat{\otimes}_1 = \widehat{\otimes}^1$ и что тензорное произведение вида $Z\widehat{\otimes}_\alpha W$ можно интерпретировать, в хороших случаях, как пространство соответствующих *-слабо непрерывных операторов из Z^* в W).

Теорема 4.7. *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство F, обладающее следующими свойствами.*

1) *Существуют такие рефлексивное сепарабельное банахово пространство H, оператор $U \in \mathrm{QN}^\infty(F,H)$ и тензорные элементы $z_0 \in s\text{-}\bigcap_{v>2} c_0\widehat{\otimes}^v F$ и $z_1 \in H^*\widehat{\otimes}_1 l_1$, что если $w := z_0 \circ z_1$, то* $\operatorname{trace} U \circ w = 1$ *и $\widetilde{w} = 0$ (т.е. w порождает нулевой оператор). При этом, если $q < 2, r > 2$ и $1/r + 1/s = 1/q \leqslant 1$, то*

$$w = z_0 \circ z_1 \in (c_0\widehat{\otimes}^r F) \circ (H\widehat{\otimes}^s l_1).$$

2) *Для каждого $v \in (2,\infty)$ существуют такие факторпространство $E_{v'}$ пространства $l_{v'}$, оператор $U_v \in \mathrm{QN}_v^{\mathrm{dual}}(E_{v'},F)$ и элемент $w_v \in F^*\widehat{\otimes}_1 E_{v'}$, что* $\operatorname{trace} U_v \circ w_v = 1$ *и $\widetilde{w}_v = 0$.*

3) *Существуют такие рефлексивное сепарабельное банахово пространство G, оператор $U_0 \in \bigcap_{v>2} \mathrm{QN}_v^{\mathrm{dual}}(G,F)$ и элемент $w_0 \in F^*\widehat{\otimes}_1 G$, что* $\operatorname{trace} U_0 \circ w_0 = 1$ *и $\widetilde{w}_0 = 0$.*

4) Пусть $1 < p < 2$ и $1/\alpha = 1/2 + 1/p = 3/2 - 1/p'$. Существуют такие факторпространство E пространства l_p, оператор $\overline{V} \in \bigcap_{s>p'} \mathrm{QN}_s^{\mathrm{dual}}(E,F)$ и элемент $z \in F^*\widehat{\otimes}_\alpha E$, что $\operatorname{trace} \overline{V} \circ z = 1$ и $\widetilde{z} = 0$. $\square$

Из утверждения 1), используя факторизационную теорему для компактных операторов [10, 2], получаем:

Следствие 4.8. *Для каждого $v > 2$ существуют такие сепарабельные рефлексивные банаховы пространства F, H и W, что естественное отображение*

$$(W^*\widehat{\otimes}^v F) \circ (H^*\widehat{\otimes}_1 W) \to \mathrm{L}(E,F)$$

не взаимно однозначно. $\square$

Ниже нам понадобится также дуальный вариант леммы 1.1.2) из [25] с некоторыми уточнениями. Сформулируем предварительно такой вспомогательный факт.

Лемма 4.9. *Пусть $p > 0$. Если $S \in \bigcap_{v>p} \mathrm{N}_v(X,Y)$, то существует разложение оператора S в ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} x'_k \otimes y_k,$$

которое является подходящим разложением для любого $v > p$. Таким образом, если одно из пространств X^* или Y удовлетворяют условию аппроксимации Гротендика, то

$$\bigcap_{v>p} X^* \widehat{\otimes}_v Y = s\text{-}\bigcap_{v>p} X^* \widehat{\otimes}_v Y.$$

Аналогичное утверждение справедливо для идеалов N^q-операторов.

Доказательство. Лемма сформулирована таким образом, что ее доказательство почти очевидно, надо лишь вспомнить, что для $v > 1$ как нормы ν_v, так и нормы ν^v с ростом показателя v убывают (случай $p < 1$ еще проще), и рассмотреть последовательность $v_n \searrow p$. Далее надо хорошо аппроксимировать S конечномерными операторами по каждой из ν_{v_n}-норм и сложить получившиеся пачки. Переход к тензорным произведениям возможен в силу того, что при выполнении условий, наложенных на пару X^*, Y, соответствующие тензорные произведения и операторные пространства совпадают между собой. $\square$

Лемма 4.10. *Для любого $q \in (2,\infty)$ существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство F, факторпространство E пространства l_q, оператор $\overline{U} \in \mathrm{QN}_1(E,F)$ и элемент $z \in s\text{-}\bigcap_{v>q} F^* \widehat{\otimes}_v E$ такие, что* trace $z \circ \overline{U} = 1$ *и* trace $z \circ \varphi = 0$ *для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$.*

Доказательство. Вот в точности то, что было получено в процессе доказательства леммы 1.1,2) в [25]: если $v > 2$, $2 < q < v$ и E^* — подпространство пространства $l_{p'}$, которое не имеет свойства аппроксимации Гротендика, то найдутся такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство F, оператор $\overline{U} \in \mathrm{QN}_1(E,F)$ и тензорный элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}_v E$, что что trace $z \circ \overline{U} = 1$ и trace $z \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$. Тензорный элемент z строился *независимо от параметра v* как суперпозиция $R\varphi\Delta_0$ строго l_q-факторизуемого оператора $R : C(K) \to E$, некоторого компактного оператора $\varphi\Delta_0 : l_1 \to C(K)$ и некоторого взаимно однозначного оператора из F в l_1. Так как $\mathrm{L}(C(K), l_q) = \mathrm{I}_r(C(K), l_q)$ *для любого* $r > q$, то оператор $R\varphi\Delta_0 \in \bigcap_{r>q} l_\infty \widehat{\otimes}_r E$. Остается применить лемму 4.9 к $S := R\varphi\Delta_0$, перейдя затем в тензорные произведения $F^* \widehat{\otimes}_r E$. $\square$

Переходя к двойственной ситуации, из леммы 4.10 получаем

Следствие 4.11. *Для любого $q \in (2,\infty)$ существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, подпространство F пространства $l_{q'}$, оператор $\overline{V} \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E,F)$ и элемент $z \in s\text{-}\bigcap_{v>q} F^* \widehat{\otimes}^v E$ такие, что* trace $z \circ \overline{V} = 1$ *и* trace $z \circ \Phi = 0$ *для каждого $\Phi \in E^* \otimes F$.* $\square$

Следствие 4.12. *Для каждого $r \neq 2$ существует $\mathrm{QN}_r^{\mathrm{dual}}$-оператор, не принадлежащий замыканию конечномерных отображений по π_r^{dual}-норме. Более того,*

1) существует оператор из $\bigcap_{r>2} \mathrm{QN}_r^{\mathrm{dual}}$, не принадлежащий замыканию конечномерных относительно обычной операторной нормы (и даже в топологии компактной сходимости!);

2) существует оператор из $\mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}$ (и, таким образом, из $\mathrm{QN}_r^{\mathrm{dual}}, 1 \leqslant r < 2$), который не лежит в замыкании множества конечномерных операторов по норме π_a^{dual}, каково бы ни было $a \in [1, 2)$.

Доказательство. 1) есть непосредственное следствие теоремы 4.7,3).

2). По следствию 4.11, для каждого $a < 2$ существуют такие сепарабельные рефлексивные пространства E, F и оператор $\overline{V} \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E, F)$, что $\overline{V} \notin \overline{E^* \otimes F}^{\pi_a^{\mathrm{dual}}}$. Пусть $a_n \nearrow 2$ и $E_n, F_n, \overline{V}_n$ таковы, что $\overline{V}_n \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E_n, F_n)$, $\overline{V}_n \notin \overline{E_n^* \otimes F_n}^{\pi_{a_n}^{\mathrm{dual}}}$ и $\pi_1^{\mathrm{dual}}(\overline{V}_n) \leqslant 1/2^n$. Положим $X = (\sum E_n)_{l_2}$, $Y = (\sum F_n)_{l_2}$, $T = \oplus \overline{V}_n$. Тогда $T \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}$, но $T \notin \overline{X^* \otimes Y}^{\pi_a^{\mathrm{dual}}}$, каково бы ни было $a < 2$. □

Следствие 4.13. *Существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство Z такое, что для каждого $r \neq 2$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ естественное отображение $Z^* \widehat{\otimes}^r Z \to \mathrm{N}^r(Z, Z)$ не взаимно однозначно. В частности, для каждого $r \neq 2$ пространство Z не обладает свойством $\mathrm{AP}_r^{\mathrm{dual}}$.*

Доказательство. Для $v'_n \nearrow 2$, E_n^1 и F_n^1 из теоремы 4.7,2) и для $q_n \searrow 2$, E_n^2 и F_n^2 из следствия 4.11 положим $Z = \left((\sum E_n^1)_{l_2} + (\sum F_n^1)_{l_2} + (\sum E_n^2)_{l_2} + (\sum F_n^2)_{l_2} \right)_{l_2}$.
□

Лемма 4.14. *Пусть для $p < 2$ (соответственно, для $v > 2$) пространства E, F и оператор $\overline{V} \in \mathrm{QN}_{p'}^{\mathrm{dual}}(E, F)$ (соответственно, $\overline{V} \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E, F)$) — из теоремы 4.7,4) (соответственно, из следствия 4.11).*

1) Если $p < 2$, то существует вполне сепарабельное банахово пространство W и тензорный элемент $u \in F^* \widehat{\otimes}^1 W^{***}$ такие, что W^* имеет базис, $W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W$, где $\Psi : W^* \to E$ — некоторое фактороотображение, $\operatorname{trace} u \circ \varphi = 0$ для любого $\varphi \in W^{**} \otimes F$ и $\operatorname{trace} u \circ (\overline{V} \Psi) = 1$.

2) Если $v > 2$, то существует вполне сепарабельное банахово пространство W и тензорный элемент $u \in F^* \widehat{\otimes}^v W^{***}$ такие, что W^* имеет базис, $W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W$, где $\Psi : W^* \to E$ — некоторое фактороотображение, $\operatorname{trace} u \circ \varphi = 0$ для любого $\varphi \in W^{**} \otimes F$ и $\operatorname{trace} u \circ (\overline{V} \Psi) = 1$.

Доказательство. Пусть $z \in F^* \widehat{\otimes}^a E$ (где $a = 1$ в утверждении 1) и $a = v$ в утверждении 2)) — тензорный элемент, соответствующий в теореме 4.7,4) (соответственно, в следствии 4.11) тройке $E, F, \overline{V}$. Пусть, далее, W — пространство из леммы 1.2, примененной к нашему пространству E, и P — естественный проектор из $W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W$ на $\Psi^* E^*$. Положим $j = [(\Psi^*)^{-1} P]^*$, $j : E \to W^{***}$ и $u = j \circ z \in F^* \widehat{\otimes}^a W^{***}$. Мы должны лишь проверить, что $\operatorname{trace} u \circ (\overline{V} \Psi) = 1$. Пусть

$z = \sum f'_n \otimes e_n$ — некоторое тензорное представление для z в $F^* \widehat{\otimes}^a E$ ($f'_n \in F^*, e_n \in E$). Имеем:

$$\operatorname{trace} u \circ (\overline{V}\Psi) = \operatorname{trace} (j \circ z) \circ (\overline{V}\Psi) = \sum \langle \Psi^* \overline{V}^* f'_n, j e_n \rangle =$$
$$= \sum \langle (\Psi^*)^{-1} P \Psi^* \overline{V}^* f'_n, e_n \rangle = \sum \langle (\Psi^*)^{-1} \Psi^* \overline{V}^* f'_n, e_n \rangle =$$
$$= \sum \langle \overline{V}^* f'_n, e_n \rangle = \operatorname{trace} z \circ \overline{V} = 1. \qquad \square$$

Замечание 4.15. В лемме 4.14 W^* обладает свойством MAP, а W^{***} не обладает свойством $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ в случае 1) и свойством $\mathrm{AP}_v^{\mathrm{dual}}$ в случае 2).

Теперь мы готовы привести дуальный вариант основной теоремы из работы [25]. В доказательстве предлагаемой теоремы мы следуем схеме рассуждений из [25], однако непосредственно (без каких-либо существенных изменений) доказательство теоремы 2.1 [25] на случай N^p-операторов не переносится, и, скорее всего, некорректно было бы предлагать читателю доказать теорему 4.16 (а с нею и все анонсированные в §4 работы [25] результаты) в качестве нетрудного упражнения.

Теорема 4.16. *Пусть* E, $X := W^*$, $Y := F$, $\overline{V}, \Psi$ *— из леммы* 4.14, *и* $V := \overline{V}\Psi$. *Пусть, далее,* $0 < \gamma < 1/5$,

1) *Для любого* $\delta > 0$ *и для каждого* $p < 2$ *существуют такие конечномерный оператор* $T_0 \in Y^* \otimes X$ *и эквивалентная норма на* X, *скажем* $|||\cdot|||$, *что если* $X_\delta := (X, |||\cdot|||)$, *то*

(i_1) $X_\delta \in \mathrm{BAP}$;

(ii_1) $\|V\|_{\Pi_{p'}^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$;

(iii_1) V *не лежит в замыкании шара радиуса* $4/(5\delta)$ *пространства* $X^* \otimes_{\pi_\infty^{\mathrm{dual}}} Y$ *в пространстве* $\mathrm{L}(X_\delta, Y)$ *в топологии компактной (или поточечной) сходимости;*

(iv_1) $\|T_0\|_{Y^* \widehat{\otimes}^p X_\delta} \geqslant 1 - \gamma$;

(v_1) $\|T_0\|_{\mathrm{I}^1(Y, X^{**})} < \delta$.

2) *Для любого* $\delta > 0$ *и для каждого* $v > 2$ *существуют такие конечномерный оператор* $T_0 \in Y^* \otimes X$ *и эквивалентная норма на* X, *скажем* $|||\cdot|||$, *что если* $X_\delta := (X, |||\cdot|||)$, *то*

(i_2) $X_\delta \in \mathrm{BAP}$;

(ii_2) $\|V\|_{\Pi_1^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$;

(iii_2) V *не лежит в замыкании шара радиуса* $4/(5\delta)$ *пространства* $X^* \otimes_{\pi_{v'}^{\mathrm{dual}}} Y$ *в пространстве* $\Pi_{v'}^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)$ *в топологии компактной (или поточечной) сходимости;*

(iv_2) $\|T_0\|_{Y^* \widehat{\otimes}^\infty X_\delta)} \geqslant 1 - \gamma$;

(v_2) $\|T_0\|_{\mathrm{I}^v(Y, X^{**})} < \delta$.

Более того, как в случае 1), *так и в случае* 2) *норма* $|||\cdot|||$, *дуальная к которой определяется соотношением* $|||x'||| := \max\{\|x'\|; A \operatorname{dist}(x', \Psi^* E^*)\}$, *удовлетворяет всем указанным выше условиям при подходящем выборе числа* A.

Доказательство. Удобно рассматривать оба случая, указанных в лемме 4.14, одновременно, поэтому мы введем два символа a и b следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= p', \qquad b = \infty, \qquad \text{в случае 1)}; \\ a &= 1, \qquad b = v', \qquad \text{в случае 2)}. \end{aligned}$$

Отметим, что в любом случае $a \leqslant b$ и $b' \leqslant a'$.

Итак, пусть E, $X := W^*$, $Y := F$, $\overline{V}$, Ψ, а также u — из леммы 4.14, и $V := \overline{V}\Psi$.

$$\begin{array}{ccccccc} X = W^* & \xrightarrow{\Psi} & E & \xrightarrow{\overline{V}} & Y = F & \xrightarrow{\widetilde{u}} & X^{**} = W^{***} \\ X^* = W^{**} = \Psi^* E^* \oplus \pi_W W & \xleftarrow{\Psi^*} & E^* & \xleftarrow{\overline{V}^*} & Y^* = F^* & & \end{array}$$

Диагр. 4.6

Без ограничения общности, мы можем считать, что $\pi_a^{\mathrm{dual}}(V) < 1$. Пусть $u = \sum y'_n \otimes x''_n$, где $y'_n \in Y^*$, $x''_n \in X^{**} = W^{***}$, $\alpha_{b'}(x''_n) \leqslant 1$, $\varepsilon := \varepsilon_b(y'_n) < \infty$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и введем следующие обозначения.

1) Пусть элементы $y''_k \in Y^{**}$, $k = 1, 2, \ldots$, таковы, что $\|V^* y'\|^a \leqslant \sum |\langle y''_k, y' \rangle|^a$ для всех $y' \in Y^*$ и $\sum \|y_k\|^a \leqslant 1$.

2) Пусть $A > 1$ — такое число, что

$$\frac{3\varepsilon}{A} < \frac{1}{2}\delta.$$

3) Пусть ν — такое число, что

$$\nu A < \frac{1}{2}\delta.$$

4) Выберем такое натуральное N, что для

$$T = \sum_{n=1}^{N} y'_n \otimes x''_n$$

выполняются неравенства

$$\operatorname{trace} T \circ V > 1 - \gamma; \qquad |\operatorname{trace} T \circ \varphi| < \nu \pi_b^{\mathrm{dual}}(\varphi),\ \forall \varphi \in X^* \otimes Y.$$

5) Пусть $(x_n)_1^N$ — такой набор векторов в X, что

5a) $\alpha_{b'}(x_n)_1^N \leqslant 2$ и

5b) $x''_n|_{\Psi^* E^*} = x_n|_{\Psi^* E^*}$.

Такой набор существует по следующим причинам. Пусть $\lambda > 0$. Для $x'' \in X^{**} = W^{***}$ рассмотрим функционал $e := x'' \circ \Psi^*$ на E^* :

$$E^* \xrightarrow[\Psi^*]{} X^* = W^{**} = \pi_W W \oplus \Psi^* E^* \xrightarrow[x'']{} \mathbb{R}.$$

Так как $\|e\| \leqslant \|x''\|$ и $\Psi : W^* \to E$ есть факторотображение, то найдется $x \in X$, для которого будут выполняться соотношения $\|x\| \leqslant (1+\lambda)\|e\| \leqslant (1+\lambda)\|x''\|$ и $\Psi x = e = x'' \circ \Psi^*$. Далее, для $e' \in E^*$

$$\langle \Psi^* e', x\rangle = \langle e', \Psi x\rangle = \langle e', e\rangle = (x'' \circ \Psi^*)(e') = \langle x'', \Psi^* e'\rangle.$$

Таким образом, $\|x\| \leqslant (1+\lambda)\|x''\|$ и $x|_{\Psi^* E^*} = x''|_{\Psi^* E^*}$.

6) Положим $T_0 = \sum_{n=1}^N y'_n \otimes x_n \in Y^* \otimes X$.

7) Пусть, наконец, $L_0 = [x_n]_1^N$.

Определим новую (эквивалентную) норму $|||\cdot|||$ на $X^* = W^{**}$ следующим образом: для $x' \in X^*$

$$|||x'||| = \max\{\|x'\|, A\, d(x', \Psi^* E^*)\},$$

где $d(x', \Psi^* E^*) = \inf\{\|x' - \Psi^* e'\| :\ e' \in E^*\}$. Заметим, что для любого $y' \in Y^*$ мы имеем: $|||V^* y'||| = |||\Psi^* \overline{V}^* y'||| = \|V^* y'\|$. В силу *-слабой замкнутости подпространства $\Psi^* E^*$ в W^{**}, это — дуальная норма к некоторой норме на X, которую мы обозначим тем же символом $|||\cdot|||$. Полезно отметить, что $\|\cdot\| \leqslant |||\cdot||| \leqslant A\|\cdot\|$. Мы утверждаем, что пространство $X_\delta = (X, |||\cdot|||)$ удовлетворяет всем условиям нашей теоремы.

(i) В X есть базис, поэтому X обладает свойством ограниченной аппроксимации.

(ii) Оценка для квази-a-ядерной нормы оператора V^* получается из соотношений $|||V^* y'|||^a = \|V^* y'\|^a \leqslant \sum_{k=1}^\infty |\langle y''_k, y'\rangle|^a$ и $\sum_k \|y''_k\|^a \leqslant 1$; так что $\|V\|_{\Pi_a^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$.

(iv) Имеем:

$$\text{trace } T_0 \circ V = \sum_{n=1}^N \langle x_n, V^* y'_n\rangle = \sum_{n=1}^N \langle x''_n, V^* y'_n\rangle = \text{trace } T \circ V > 1 - \gamma.$$

Так как $\|V\|_{\Pi_a^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$, то $\|T_0\|_{Y^* \widehat{\otimes}^{a'} X} \geqslant 1 - \gamma$.

(v) Так как $(X_\delta^* \otimes_{\pi_b^{\mathrm{dual}}} Y)^* = \mathrm{I}^{b'}(Y, X_\delta^{**})$, то

$$\|T_0\|_{\mathrm{I}^{b'}(Y, X_\delta^{**})} = \sup\{|\text{trace } T_0 \circ \varphi| :\ \varphi \in X_\delta^* \otimes Y, \pi_b^{\mathrm{dual}}(\varphi) \leqslant 1\}.$$

Пусть $\varphi \in X_\delta^* \otimes Y$ и $\|\varphi\|_{\Pi_b^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 1$. Тогда

$$\begin{aligned} |\text{trace } T_0 \circ \varphi\| &= \left|\sum_{n=1}^N \langle x_n, \varphi^* y'_n\rangle\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^N \langle x_n - x''_n, \varphi^* y'_n\rangle\right| + \left|\sum_{n=1}^N \langle x''_n, \varphi^* y'_n\rangle\right| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{n=1}^N |||x_n - x''_n|||^{b'}\right)^{1/b'} \left(\sum_{n=1}^N |||\varphi^* y'_n|||^b\right)^{1/b} + |\text{trace } T \circ \varphi| \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi\|_{\Pi_b^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \varepsilon_b(y'_n)_1^\infty \widetilde{\alpha}_{b'} + \nu \|\varphi\|_{\Pi_b^{\mathrm{dual}}(X, Y)}, \end{aligned}$$

где $\widetilde{\alpha}_{b'}$ — $\alpha_{b'}$-норма последовательности $(x_n - x''_n)_1^N$ относительно нормы $|||\cdot|||$.

Оценим сверху $\widetilde{\alpha}_{b'}$, используя равенство $l_r(Z)^* = l_{r'}(Z^*)$ $(1 < r < \infty)$. Если $(x'_n)_1^N$ — такой набор векторов из X^*, что $\sum_{n=1}^N |||x'_n|||^b \leqslant 1$, то для $(l_n)_1^N \subset \Psi^* E^*$, $\|l_n - x'_n\| = d(x'_n, \Psi^* E^*)$, имеем:

$$\sum_{n=1}^N |\langle x''_n - x_n, x'_n\rangle| = \sum_{n=1}^N |\langle x''_n - x_n, x'_n - l_n\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^N \|x'_n - l_n\|^b\right)^{1/b} \alpha_{b'}(x''_n - x_n)_1^N \leqslant 3\left(\sum_{n=1}^N d(x'_n, \Psi^* E^*)^b\right)^{1/b} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{A}\left(\sum_{n=1}^N |||x'_n|||^b\right)^{1/b} \leqslant \frac{3}{A}.$$

В этих соотношениях через $\alpha_{b'}(x''_n - x_n)_1^N$ обозначается $\alpha_{b'}$-норма последовательности $(x''_n - x_n)_1^N$ относительно первоначальной нормы $\|\cdot\|$.

Таким образом,

$$|\operatorname{trace} T_0 \circ \varphi\| \leqslant \varepsilon\frac{3}{A} + \nu A\|\varphi\|_{\Pi_b^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta.$$

Следовательно, $\|T_0\|_{\mathrm{I}^{b'}(Y, X_\delta^{**})} \leqslant \delta$.

(iii) Если это утверждение неверно, то найдется такой оператор $\varphi \in X_\delta^* \otimes Y$, что $\|\varphi\|_{\Pi_b^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant 4/(5\delta)$ и $\varphi|_{L_0} = V|_{L_0}$. Имеем:

$$|\operatorname{trace} T_0 \circ \varphi| = \left|\sum_{n=1}^N \langle \varphi x_n, y'_n\rangle\right| = \left|\sum_{n=1}^N \langle V x_n, y'_n\rangle\right| = |\operatorname{trace} T_0 \circ V| > 1 - \gamma > 4/5$$

(см. доказательство утверждений (iv)). С другой стороны,

$$|\operatorname{trace} T_0 \circ \varphi| \leqslant \|T_0\|_{\mathrm{I}_{b'}(Y, X_\delta^{**})}\|\varphi\|_{\Pi_b^{\mathrm{dual}}(X_\delta, Y)} \leqslant \delta[4/(5\delta)] = 4/5. \qquad \square$$

Следствие 4.17. 1) *Для каждого $C > 0$ и любого $q > 2$ существует вполне сепарабельное пространство X и сепарабельное рефлексивное пространство Y, оператор $U \in \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\pi_q^{dual}(U) = 1$ *и U не является пределом конечномерных операторов Φ, с нормами $\|\Phi\| \leqslant C$, в топологии компактной сходимости.*

2) *Для каждого $C > 0$ и любого $q < 2$ существует вполне сепарабельное пространство X и сепарабельное рефлексивное пространство Y, оператор $U \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(X, Y)$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\pi_1^{\mathrm{dual}}(U) = 1$ *и U не является пределом конечномерных операторов Φ, с нормами $\pi_q^{\mathrm{dual}}(\Phi) \leqslant C$, в топологии компактной сходимости.*

Следствие 4.18. 1) *Для каждого $\delta > 0$ и любого $p < 2$ существует вполне сепарабельное пространство X, сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in Y^* \otimes X$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\|T\|_{\mathrm{N}^p(Y,X)} = 1$ *и* $\|T\|_{\mathrm{I}^1(Y,X^{**})} < \delta$.

2) *Для каждого $\delta > 0$ и любого $p > 2$ существует вполне сепарабельное пространство X, сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T \in Y^* \otimes X$ такие, что X обладает свойством* BAP, $\|T\|_{\mathrm{N}^\infty(Y,X)} = 1$ *и* $\|T\|_{\mathrm{I}^p(Y,X^{**})} < \delta$.

Следствие 4.19. *Для каждого $C > 0$ и для любого $p \geqslant 1, p \neq 2$ существует вполне сепарабельное банахово пространство X со свойством C-$\mathrm{MAP}_p^{\mathrm{dual}}$ такое, что X не обладает свойством C_0-$\mathrm{MAP}^{\mathrm{dual}}$, если $C_0 < C$.*

Применим теперь теорему 4.16 для доказательства некоторых фактов из [25, §4], а также для получения дополнительной информации о возможности аппроксимации Π_r^{dual}-операторов в некоторых топологиях.

Теорема 4.20. 1) *Для каждого $q > 2$ существуют вполне сепарабельное пространство X со свойством* AP, *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $U \in \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X,Y)$ такие, что*

(*i*) *U лежит в замыкании множества $X^* \otimes Y$ в $\mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X,Y)$ в топологии $\sigma\left(\mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X,Y), Y^*\widehat{\otimes}^{q'} X\right)$ (следовательно, и в топологии компактной сходимости), но*

(*ii*) *для всякого $C < \infty$ U не является пределом, в топологии компактной сходимости, конечномерных операторов Φ, нормы которых $\|\Phi\| \leqslant C$.*

2) *Существуют вполне сепарабельное пространство X со свойством* AP, *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $U \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(X,Y)$ такие, что*

(*i*) *$U \in X^*\widehat{\otimes}^2 Y$ (очевидно), но*

(*ii*) *если $q < 2$, то для всякого $C > 0$ U не является пределом, в топологии компактной сходимости, конечномерных операторов Φ, для которых $\pi_q^{\mathrm{dual}}(\Phi) \leqslant C$.*

Доказательство. 1) Используя следствие 4.17,1), построим для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие банаховы пространства X_n, Y_n и оператор $U_n \in \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X_n, Y_n)$, что $X_n \in$ BAP, $\pi_q^{\mathrm{dual}}(U_n) < 2^{-n}$ и U не лежит в замыкании множества конечномерных операторов φ с нормами $\|\varphi\| \leqslant n$ в топологии компактной сходимости. Положим $X := \left(\sum X_n\right)_{l_2}$, $Y := \left(\sum Y_n\right)_{l_2}$, $U := \oplus U_n$. Ясно, что тройка (X, Y, U) удовлетворяет условию (ii) и X обладает свойством аппроксимации. Из последнего вытекает, что каноническое отображение $Y^*\widehat{\otimes}^{q'} X \to \mathrm{N}^{q'}(Y,X)$ имеет тривиальное ядро. Следовательно, множество $X^* \otimes Y$ плотно в сопряженном к $Y^*\widehat{\otimes}^{q'} X$ пространстве[1] $\mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(X,Y)$ в *-слабой топологии (в противном случае, по теореме

[1] Пространство Y рефлексивно, поэтому $\Pi_q(Y^*, X^*) = \mathrm{QN}_q(Y^*, X^*)$.

Хана-Банаха, найдется ненулевой тензорный элемент из $Y^*\widehat{\otimes}^{q'}X$, порождающий нулевой оператор).

2) Аналогично, используя часть 2) следствия 4.17, найдем для какой-либо последовательности $q_n<2$, $q_n\nearrow 2$, банаховы пространства X_n, Y_n и операторы $U_n\in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(X_n,Y_n)$, обладающие следующими свойствами: $X_n\in \mathrm{BAP}$, $\pi_1^{\mathrm{dual}}(U_n)<2^{-n}$ и U_n лежит в замыкании множества конечномерных операторов φ с нормами $\pi_{q_n}^{\mathrm{dual}}(\varphi)\leqslant n$ в топологии компактной сходимости. Полагая $X:=(\sum X_n)_{l_2}$, $Y:=(\sum Y_n)_{l_2}$ и $U:=\oplus U_n$, мы получаем нужную нам тройку (X,Y,U). $\square$

Теорема 4.21. 1) *Существуют вполне сепарабельное пространство X со свойством* AP, *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T\in L(Y,X)$ такие, что для каждого $p\in[1,2)$ $T\notin \mathrm{N}^p(Y,X)$, но $\pi_X T\in \mathrm{N}_1(Y,X^{**})$; более того, существует такая последовательность (T_n) конечномерных операторов в $Y^*\otimes X$, что $T_n\to T$ по норме, индуцированной из $\mathrm{N}_1(Y,X^{**})$.*

2) *Существуют вполне сепарабельное пространство X со свойством* AP, *сепарабельное рефлексивное пространство Y и оператор $T\in \mathrm{L}(Y,X)$ такие, что T не факторизуется ни через какое пространство $L_1(\mu)$ (следовательно, не лежит в N^r, если $r\in[1,\infty]$), но для каждого $p\in(2,\infty]$ $\pi_X T\in \mathrm{N}^p(Y,X^{**})$; более того, существует такая последовательность $\{T_n\}$ конечномерных операторов в $Y^*\otimes X$, что $T_n\to T$ по любой из норм ν^p, $p>2$, индуцированных из $\mathrm{N}^p(Y,X^{**})$.*

Доказательство. 1) Пусть $p_n<2$, $n=1,2,\dots$, и $p_n\nearrow 2$. Используя следствие 4.18,1), найдем такие банаховы пространства X_n, Y_n и конечномерный оператор $T_n\in Y_n^*\otimes X_n$, что $X_n\in \mathrm{BAP}$, $\|T_n\|_{\mathrm{N}^{p_n}(Y_n,X_n)}\geqslant n$ и $\|T_n\|_{\mathrm{I}^1(Y_n,X_n^{**})}\leqslant 2^{-n}$. Полагая $X:=(\sum X_n)_{l_2}$, $Y:=(\sum Y_n)_{l_2}$ и $T:=\oplus T_n$, мы получаем нужную нам тройку (X,Y,T).

2) Пусть $p_n>2$, $n=1,2,\dots$, и $p_n\searrow 2$. Используя следствие 4.18,2), найдем такие банаховы пространства X_n, Y_n и конечномерный оператор $T_n\in Y_n^*\otimes X_n$, что $X_n\in \mathrm{BAP}$, $\|T_n\|_{\mathrm{N}^\infty(Y_n,X_n)}\geqslant n$ и $\|T_n\|_{\mathrm{I}^{p_n}(Y_n,X_n^{**})}\leqslant 2^{-n}$. Если мы положим $X:=(\sum X_n)_{l_2}$, $Y:=(\sum Y_n)_{l_2}$ и $T:=\oplus T_n$, то получим оператор T, не факторизуемый ни через какое пространство $L_1(\mu)$, но второй сопряженный к которому лежит в N^p для каждого $p>2$, так как $p_n\to 2$. $\square$

Следствие 4.22. *Существует банахово пространство со свойством* AP *(следовательно, со свойством $\mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$ для каждого $p\in[1,\infty]$), не обладающее свойством $\mathrm{BAP}_p^{\mathrm{dual}}$ ни для какого $p, p\neq 2$.* $\square$

Так как $\mathrm{I}^p(Y,Z)=\mathrm{N}^p(Y,Z)$, если пространство Z вполне сепарабельно (см. следствие 2.4), то из теоремы 4.21 мы, в частности, получаем:

Следствие 4.23. *Для каждого $p\neq 2$ существует $\mathrm{I}_p^{\mathrm{dual}}$-оператор, не лежащий в идеале I^p.* $\square$

Следствие 4.24. *Для каждого $p\neq 2$ существует не N^p-оператор с p-ядерным сопряженным, аппроксимируемый конечномерными по N_p^{dual}-норме.* $\square$

Следствие 4.25. *Существует оператор, не факторизуемый ни через какое пространство $L_1(\mu)$, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l_1 и который аппроксимируется конечномерными по $\mathrm{N}_\infty^{\mathrm{dual}}$-норме.* $\square$

§5. Изометрические несюръективные вложения $\mathrm{N}^p(X,Y)$ в $(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}(X,Y)$

В этом параграфе мы приведем, в некотором смысле, альтернативу части результатов предыдущего раздела. Мы установим, в частности, что существуют достаточно хорошие пространства X, Y (например, Y^{**} с базисом), для которых естественные вложения $\mathrm{N}^p(X,Y)$ в $(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}(X,Y)$ не являются отображениями "на" (эти вложения изометрические, поскольку $Y^{**} \in \mathrm{MAP}$).

Теорема 5.1. 1) *Существуют такие сепарабельное рефлексивное пространство F, вполне сепарабельное пространство Z и операторы*

$$T \in \mathrm{L}(F,Z), \quad U \in \bigcap_{q>2} \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(Z^{**},F)$$

что Z^{**} имеет базис, $U|Z = 0$, $\operatorname{trace} UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(F,Z)$ и $T \notin \mathrm{N}^p(F,Z)$, если $p < 2$.

2) *Для каждого $s > 2$ существуют такие сепарабельное рефлексивное пространство F, вполне сепарабельное пространство Z, операторы $T \in \mathrm{L}(F,Z)$ и $U \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(Z^{**},F)$, что Z^{**} имеет базис, $U|Z = 0$, $\operatorname{trace} UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_s^{\mathrm{dual}}(F,Z)$ и $T \notin \mathrm{N}^\infty(F,Z)$.*

3) *Пусть $1 < p < 2$ и $1/\alpha = 1/2 + 1/p$. Существуют факторпространство E пространства l_p, сепарабельное рефлексивное пространство F, вполне сепарабельное пространство Z, операторы $T \in \mathrm{L}(F,Z)$, $U \in \bigcap_{s>p'} \mathrm{QN}_s^{\mathrm{dual}}(Z^{**},F)$ и факторотображение $\Phi : Z^{**} \to E$, обладающие следующими свойствами:*

(i) *Z^{**} имеет базис, подпространство $\Phi^*(E^*)$ дополняемо в Z^{***},* $\operatorname{Ker}\Phi = Z$;

(ii) $\operatorname{trace} UT^{**} = 1$, $U|Z = 0$;

(iii) *$T \in \mathrm{N}_\alpha(F,Z^{**})$, но $T \notin \mathrm{N}^q(F,Z)$, каково бы не было $q < p$; с другой стороны, $T \in \mathrm{N}^p(F,Z)$.*

Доказательство. 1). По теореме 4.7,3), существуют два сепарабельных рефлексивных банаховых пространства F, G, оператор $U_0 \in \bigcap_{q>2} \mathrm{QN}_q^{\mathrm{dual}}(G,F)$ и элемент $w_0 \in F^* \widehat{\otimes}_1 G$ такие, что $\operatorname{trace} w_0 \circ U_0 = 1$ и $\operatorname{trace} w_0 \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$ (т.е. $\widetilde{w}_0 = 0$). Пусть Z и $\Phi : Z^{**} \to E$ — из леммы 1.3, примененной к пространству $E = G$. Положим $U = U_0 \Phi$, и пусть $T \in \mathrm{N}_1(F, Z^{**})$ — такой оператор, что $\Phi \circ T = w_0$ (так как $Z^{**} \in \mathrm{AP}$, то $\mathrm{N}_1(F,Z^{**}) = F^* \widehat{\otimes}_1 Z^{**}$). Ясно, что $\operatorname{trace} U \circ T = 1$ (при доказательстве утверждения 2) мы распишем это место подробнее). Так как $\operatorname{Ker}\Phi = \pi Z$, то $T(F) \subset \operatorname{Ker}\Phi = \pi Z$, т.е. $T \in \mathrm{L}(F,Z)$. Наконец, если $T \in \mathrm{N}^p(F,Z)$ при $p < 2$, то для произвольного N^p-представления T в виде $\sum f_n' \otimes z_n$ имеем:

$$1 = \operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle f_n', U z_n \rangle = \sum \langle U^* f_n', z_n \rangle = 0.$$

Поэтому $T \notin \mathrm{N}^p(F,Z)$.

2). Воспользовавшись следствием 4.11, найдем такие сепарабельные рефлексивные банаховы пространства E, F, оператор $U_0 \in \mathrm{QN}_1^{\mathrm{dual}}(E,F)$ и элемент $z \in F^*\widehat{\otimes}^s E$, что $\operatorname{trace} z \circ U_0 = 1$ и $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$. Пусть $z = \sum f_n^* \otimes e_n$ — представление z в пространстве $F^*\widehat{\otimes}^s E$. Как и выше, рассмотрим пространство Z и гомоморфизм $\Phi : Z^{**} \to E$ из леммы 1.3 и положим $U = U_0\Phi$. Определим оператор $T \in \mathrm{N}^s(F, Z^{**})$, $T := \sum f_n' \otimes z_n''$, таким образом, чтобы было верно равенство $\Phi T = z$. Очевидно, $U|_Z = 0$ и $T(F) \subset \pi Z$. Кроме того,

$$\operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle f_n', U z_n'' \rangle = \sum \langle f_n', U_0 e_n \rangle = \operatorname{trace} z \circ U_0 = 1.$$

Тот факт, что $T \notin \mathrm{N}^\infty(F,Z)$, проверяется так же, как и в случае 1) (используем то, что $U \in \mathrm{QN}^1(Z^{**}, F)$).

3). Пусть E, F, $z \in F^*\widehat{\otimes}_\alpha E$, $\overline{V} \in \bigcap_{s>p'} \mathrm{QN}_s^{\mathrm{dual}}$ — из теоремы 4.7,4), так что $\operatorname{trace} V \circ z = 1$ и $\widetilde{z} = 0$. Пусть, далее, Z и $\Phi : Z^{**} \to E$ — вполне сепарабельное пространство и факторотображение, построенные для пространства E согласно лемме 1.3. Положим $U := \overline{V}\Phi : Z^{**} \to E \to F$. Если $z = \sum \lambda_j f_j' \otimes e_j$ — представление для z в пространстве $F^*\widehat{\otimes}_\alpha E$, где положительная последовательность (λ_j) лежит в l_α, а последовательности (f_j') и (e_j) ограничены, возьмем такую ограниченную в Z^{**} последовательность (z_j''), что $\Phi z_j'' = e_j$ для каждого j. Поскольку $\Phi T = \widetilde{z} = 0$, то $T(F) \subset \pi_Z Z = Z$. Кроме того, так как $\operatorname{Ker}\Phi = Z$, то $U|Z = 0$. Далее, $\operatorname{trace} U \circ T = \sum \lambda_j \langle f_j', U z_j'' \rangle = \sum \lambda_j \langle f_j', \overline{V} e_j \rangle = \operatorname{trace} \overline{V} \circ z = 1$. С другой стороны, если бы оператор T принадлежал пространству $\mathrm{N}^q(F,Z)$ для некоторого $q < p$, то, в силу равенства $U|Z = 0$, след $\operatorname{trace} U \circ T$ равнялся бы нулю. Таким образом, очевидно, $T^{**} \in \mathrm{N}_\alpha(F, Z^{**})$, но $T \notin \mathrm{N}^q(F,Z)$ ни для какого $q < p$. Тот факт, что оператор $T : F \to Z$ лежит в идеале N^p вытекает из общих соображений (надо надлежащим образом разложить последовательность (λ_j) на множители, используя соотношение $1/\alpha = 1/p + 1/2$). $\square$

Следствие 5.2. 1) *Существуют такие вполне сепарабельные пространства W, Z и оператор $T \in \mathrm{L}(W,Z)$, что W и Z^{**} имеют базисы, $T^* \in \mathrm{N}_1(Z^*, W^*)$, но $T \notin \mathrm{N}^p(W,Z)$, если $p < 2$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют такие вполне сепарабельные пространства W и Z, и оператор $T \in \mathrm{L}(W,Z)$, что W и Z^{**} имеют базисы, $T^* \in \mathrm{N}_s(Z^*, W^*)$, но T не факторизуется ни через какое пространство $L^1(\mu)$.*

Для *доказательства* достаточно применить к пространству F из предыдущей теоремы лемму Линденштраусса 1.2 и воспользоваться (для установления самого последнего утверждения следствия) тем фактом, что пространство Z обладает свойством Радона-Никодима: если оператор T представим в виде произведения AB, где $A \in \mathrm{L}(L_1(\mu), Z)$ и $B \in \mathrm{L}(W, L_1(\mu))$, то оператор A факторизуется через пространство l_1 как всякий оператор, действующий из $L_1(\mu)$ в пространство со свойством Радона-Никодима. Наконец, оператор B будет слабо компактным в силу рефлексивности пространства F и того, что в конструкции из леммы 1.2 сопряженное к соответствующему факторотображению дополняемо вкладывает F^* в пространство W^*. Пространство l_1 обладает свойством Шура, и поэтому оператор AB будет N^∞-оператором вопреки утверждению 2) теоремы 5.1. $\square$

Следствие 5.3. *Существует сепарабельное пространство V, имеющее базис и такое, что для каждого $p \geqslant 1, p \neq 2$, существует оператор $T \in \mathrm{L}(V,V)$, для которого $T^* \in \mathrm{N}_p(V^*, V^*)$, но $T \notin \mathrm{N}^p(V,V)$.*

Для *доказательства*надо сложить по типу l_2 последовательности подходящих пространств и операторов, предоставляемых предыдущим следствием. $\square$

Из следствия 5.2 мы также получаем:

Следствие 5.4. *Идеал конечномерных операторов вкладывается в каждый из идеалов $(\mathrm{N}^r)^{\mathrm{reg}}$, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$ не плотно. Таким образом, ни один из идеалов N^r, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$ не только не является регулярным, но и не минимален.*

Доказательство. Справедливость утверждения для $r \in [1, \infty] \setminus \{2\}$ вытекает непосредственно из теоремы 5.1, пп. 1) и 2) (все дело в том, что второе сопряженное Z^{**} имеет свойство метрической аппроксимации). Что касается случая, когда $2/3 < r < 1$ (в теореме 5.1, п. 3), этому соответствует изменение параметра α от $2/3$ до 1), то здесь надо поступать так.

Пусть мы находимся в условиях утверждения 3) из теоремы 5.1 3. Если оператор T, лежащий в идеале $\mathrm{N}_\alpha^{\mathrm{reg}}$, приближался бы операторами из пространства $F^* \otimes Z$ по $\nu_\alpha^{\mathrm{reg}}$-норме, то тем более он приближался бы соответствующими конечномерными операторами по норме ν_1^{reg}. Но естественное вложение пространства $F^* \widehat{\otimes}_1 Z$ в пространство $F^* \widehat{\otimes}_1 Z^{**}$ изометрично, а поскольку в Z^{**} имеется свойство метрической аппроксимации, то изометрично и естественное вложение пространства $\mathrm{N}_1((F, Z)$ в операторное пространство $\mathrm{N}_1(F, Z^{**})$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации замыкание множества $F^* \otimes Z \subset \mathrm{N}_1(F, Z)$ содержало бы оператор T, и он был бы ядерным; но он не является даже $(p - \varepsilon)$-ядерным, если $1/\alpha = 1/2 + 1/p$ и $1 < p - \varepsilon < p$. $\square$

Из приведенных только что рассуждений, следует, между прочим, что *идеал конечномерных операторов не плотен в $\mathrm{N}_\alpha^{\mathrm{reg}}$, $2/3 < \alpha < 1$, даже по ν^q- и ν_q-нормам, если только $1/\alpha < 1/q + 1/2$.*

Замечание 5.5. Нерегулярность идеала N_1 впервые установлена в [7]. Нерегулярность идеала N_r при $1 \leqslant r \neq 2 \leqslant \infty$ была доказана в [28, 25]. В работе [26] этот факт был распространен на все идеалы N_r, $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$. В [31] было показано, что все идеалы N_p при $2/3 < r \neq 2 \leqslant \infty$ не минимальны, и что конечномерные операторы не плотны в них. В [29] получена нерегулярность идеалов N^p, $1 \leqslant r \neq 2 \leqslant \infty$. Данная работа ставит некоторую точку (или точку с запятой?) в рассмотрении соответствующих вопросов в шкалах r-ядерных и дуально r-ядерных операторов. Однако, остается открытым еще вопрос (хотя бы) о регулярности идеалов компактно p-факторизуемых операторов, к рассмотрению которого мы перейдем через несколько страниц (см. также [30]).

В монографии [18], среди большого числа так называемых теорем умножения операторных идеалов можно найти ряд результатов, в которых участвует регулярная оболочка того или иного нормированного идеала. Это вполне естественно, поскольку не каждый, даже минимальный, операторный идеал регулярен; и потому не всегда удается показать, что перемножая два оператора из классических (даже взаимно сопряженных друг к другу) операторных идеалов, мы получим оператор, который вроде бы должен лежать в таком-то идеале, а не только в его регулярной оболочке. Один из нетривиальных примеров — [18], теорема 24.6.4, соотношение (3), которая утверждает, например, что для $p \in (1, \infty)$ всегда имеет место включение $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}} \circ \Pi_{p'} \subset \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}$.

В этой работе один из основных объектов исследования, — идеал дуально p-ядерных операторов N^p. Поэтому именно для него, мы приведем нетрудный аналог упомянутой теоремы из [18]. Напомним, что включение $[\mathrm{A}_1, a_1] \subset [\mathrm{A}_2, a_2]$ для двух квазинормированных идеалов означает теоретико-множественное включение с неравенством $a_2 \leqslant a_1$ для соответствующих квазинорм.

Предложение 5.6. *Пусть* $1 < r, s < \infty$ *и* $1/r + 1/s = 1/p \leqslant 1$. *Тогда*

$$[\Pi_r^{\mathrm{dual}}, \pi_r^{\mathrm{dual}}] \circ [\Pi_s^{\mathrm{dual}}, \pi_s^{\mathrm{dual}}] \subset [(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{sur}}, (\nu^p)^{\mathrm{sur}}] \tag{1}$$

$$[\mathrm{I}_{\mathrm{Gr}}^r, i_{\mathrm{Gr}}^r] \circ [\Pi_s^{\mathrm{dual}}, \pi_s^{\mathrm{dual}}] \subset [(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}, (\nu^p)^{\mathrm{reg}}], \tag{2}$$

$$[\Pi_r^{\mathrm{dual}}, \pi_r^{\mathrm{dual}}] \circ [\mathrm{I}_{\mathrm{Gr}}^s, i_{\mathrm{Gr}}^s] \subset [\mathrm{N}^p, \nu^p]. \tag{3}$$

Доказательство. Идеалы Π_q инъективны, поэтому идеалы Π_q^{dual} сюръективны. Переходя к сюръективным оболочкам в (3), мы видим, что (1) есть следствие (3).

Для доказательства (2) мы сначала приведем правильную формулу для [18, теорема 24.6.4, (2)], — это одно из двух соотношений, указанных *в формулировке* теоремы 24.6.4 в [18] с опечаткой! Надо надеяться, что в оригинале [19] этих двух опечаток (см. формулы (2) и (3) в теореме 24.6.4) нет. Доказательства в [18] тех формул, которые имелись в виду автором монографии, однако, совершенно точны. Вот доказанное в [18] соотношение (2):

$$[\Pi_r, \pi_r] \circ [\mathrm{I}_s^{\mathrm{Gr}}, i_s^{\mathrm{Gr}}] \subset [\mathrm{N}_p, \nu_p].$$

Из него вытекает включение

$$[\mathrm{I}_{\mathrm{Gr}}^r, i_{\mathrm{Gr}}^r] \circ [\Pi_s^{\mathrm{dual}}, \pi_s^{\mathrm{dual}}] \subset [\mathrm{N}_p^{\mathrm{dual}}, \nu_p^{\mathrm{dual}}] \subset [(\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}, (\nu^p)^{\mathrm{reg}}].$$

Теперь — правильная формула для соотношения (3) из [18]:

$$[\mathrm{I}_r^{\mathrm{Gr}}, i_r^{\mathrm{Gr}}] \circ [\Pi_s, \pi_s] \subset [\mathrm{N}_p, \nu_p]^{\mathrm{reg}}. \tag{3'}$$

Мы готовы доказать (3).

Пусть $S \in \mathrm{I}^s_{\mathrm{Gr}}(Z,X)$, $T \in \Pi^{\mathrm{dual}}_r(X,Y)$. Так как $T^* \in \Pi_r(Y^*,X^*)$, то, по факторизационной теореме Пича для таких операторов, для каждого $\varepsilon > 0$ оператор T^* представим как произведение A^*B^* операторов A^* и B^*, где, для некоторого рефлексивного пространства F, $A \in \mathrm{L}(X,F)$ с нормой $\|A\| = 1$ и $B \in \Pi^{\mathrm{dual}}_r(F,Y)$ с нормой $\pi^{\mathrm{dual}}_r(B) < (1+\varepsilon)\pi_r(T^*) = (1+\varepsilon)\pi^{\mathrm{dual}}_r(T)$ (сначала мы получаем оператор $B_0 \in \Pi^{\mathrm{dual}}_r(F,Y^{**})$, а затем, сужая его на замыкание образа оператора A, и оператор B). По следствию 2.4, оператор AS принадлежит идеалу N^s и, значит, допускает факторизацию вида $B_1\Delta A_1$ (см. диаграмму 5.1), в которой $\|B_1\| = 1$, $\|A_1\| = 1$ и $\nu^s(\Delta) < (1+\varepsilon)\nu^s(AS) \leqslant (1+\varepsilon)i^s_{\mathrm{Gr}}(S)$.

$$Z \xrightarrow{A_1} l_{s'} \xrightarrow{\Delta} l_1 \xrightarrow{B_1} F \xrightarrow{B} Y$$

Диагр. 5.1

Оператор $B_1\Delta$ лежит в пространстве $\mathrm{N}^s(l_{s'},F)$, а оператор B — в $\Pi^{\mathrm{dual}}_r(F,Y)$, поэтому сопряженный к суперпозиции этих операторов попадает в пространство $\mathrm{N}_s \circ \Pi_r(Y^*,l_s)$ и, по формуле $(3')$, в пространство $\mathrm{N}_p(Y^*,l_s)$. Отсюда следует, что $BB_1\Delta \in (\mathrm{N}^p)^{\mathrm{reg}}(l_{s'},Y)$. Остается применить теорему 2.7, — так как рефлексивное пространство $l_{s'}$ удовлетворяет условию метрической аппроксимации, то согласно этой теореме оператор $BB_1\Delta$, а, значит, и TS является N^p-оператором. $\square$

§6. Одно применение в теории операторных идеалов: полунепрерывность операторных норм

Напомним, что *слабая операторная топология* в $\mathrm{L}(X,Y)$ — это топология, базис окрестностей которой составляют множества

$$N(T;A,B,\varepsilon) := \{U:\ U \in \mathrm{L}(X,Y), |\langle y',(T-U)x\rangle| < \varepsilon, y' \in B, x \in A\},$$

где A и B — произвольные конечные подмножества соответственно в X и Y^*, $\varepsilon > 0$ — произвольно [1, с. 512-513], [18, п. A.3.3]. Таким образом, в слабой операторной топологии сеть $(T_\nu)_\nu$ сходится к T тогда и только тогда, когда сеть $(\langle y',T_\nu x\rangle)$ сходится к $\langle y',Tx\rangle$ для всех $x \in X$ и $y' \in Y^*$.

Рассмотрим простейший пример, в котором естественным образом возникает сходимость в слабой операторной топологии (он нам пригодится ниже). Пусть α — некоторая тензорная норма на классе $\mathfrak{T}$ всех тензорных произведений банаховых пространств. Она не сильнее проективной и не слабее инъективной тензорных норм. Следовательно, для данной пары банаховых пространств X,Y сопряженное к тензорному произведению $Y^* \otimes_\alpha X$ пространство отождествляется с некоторым пространством операторов $\mathrm{G}(X,Y^{**})$, снабженным соответствующей нормой. Поэтому **-слабая сходимость некоторой сети в этом операторном пространстве влечет сходимость этой сети в слабой операторной топологии.*

Пусть a — квазинорма на операторном идеале A. Говорят, что *a слабо полунепрерывна снизу* [18, п. 8.6.16], если для любых банаховых пространств X,Y и для каждой сети $(S_\nu)_\nu$ операторов из пространства $\mathrm{A}(X,Y)$, сходящейся к $S\in \mathrm{A}(X,Y)$ в слабой операторной топологии, выполняется неравенство

$$a(S)\leqslant \varliminf_{\nu} a(S_\nu).$$

В качестве примера приведем предложение из [18, п. 8.7.17]: если $[\mathrm{A},a]$ — максимальный p-нормированный (для квазинормы выполняется p-неравенство треугольника [18, 6.2.1]) операторный идеал, то квазинорма a слабо полунепрерывна снизу. Таковы, например, идеалы Π_p, $\mathrm{I}_p^{\mathrm{Gr}}$ [18, пп. 17.1.3, 19.2.2].

В [18, п. 8.7.18] отмечается, что "используя контрпример Энфло, можно показать, что ядерная норма $\mathbb{N}$ не является слабо полунепрерывной снизу." Кстати, в формулировке предложения из того же пункта в [18], приведенного без доказательства, содержится очевидная опечатка (*это перевод монографии А.Пича [19], а не ее оригинал*). Поэтому формально, по крайней мере, в русскоязычной литературе, соответствующий пример с подробным рассмотрением не появлялся. Сейчас мы дополним картину и обобщим приведенное утверждение А.Пича, приведя большое количество примеров не слабо полунепрерывных снизу идеальных норм.

Теорема 6.1. *Никакая из норм ν_p или ν^p при $p\in[1,\infty]$, $p\neq 2$, не является слабо полунепрерывной снизу.*

Доказательство. Пусть a обозначает одну из норм на соответствующем идеале операторов: ν_p или ν^p $(p\in[1,\infty])$, и $[\mathrm{A},a]$ — соответствующий операторный идеал.

Сужая идеальную норму a на операторный идеал всех конечномерных операторов, мы автоматически переносим ее на класс всех тензорных произведений вида $Z^*\otimes W$, пополнения которых по этой норме мы будем обозначать *в этом доказательстве* через $Z^*\widetilde{\otimes}_a W$ (так нам удобнее, и это обозначение согласуется со всеми аналогичными обозначениями в этой работе для рассматриваемых ниже пространств X,Y).

Рассмотрим следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} Y^*\widetilde{\otimes}_a X & \xrightarrow[1-1]{J} & \mathrm{A}^{**}(Y,X^{**}) \\ \mathrm{A}^*(X,Y) & \xleftarrow{J^*} & (\mathrm{A}^{**}(Y,X^{**}))^* \overset{\pi}{\hookleftarrow} X^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{a^*} Y. \end{array}$$

Диагр. 6.1

Здесь в качестве банаховых пространств X,Y мы берем *рефлексивное* сепарабельное пространство Y и *вполне сепарабельное* пространство X, $X\in AP$, из [25, теорема 3.2], либо из [25, теорема 4.1] — в зависимости от того какую норму обозначает a; см. также теорему 4.21 выше для случая ν^p-норм (то, что пространство X в [25,теорема 3.2] вполне сепарабельно, вытекает из доказательства этой и предшествующих ей теорем). Эти пространства обладают тем свойством, что каноническое отображение вложения J, появившееся в диаграмме 6.1, взаимно однозначно, но не является изоморфным вложением.

Обозначим через B_a замкнутый единичный шар пространства $Y^*\widetilde{\otimes}_a X$, а через w^* — *-слабую топологию в пространстве $\mathrm{A}^{**}(Y, X^{**})$ (это пространство сопряжено к $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{a^*} Y$)

Пусть $\varepsilon > 0$. Если U — такой оператор из $\mathrm{A}(Y, X)$, что $J(U) \notin \overline{J(B_a)}^{w^*}$, то найдется элемент $\varphi \in X^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{a^*} Y$, для которого

$$\sup_{z\in B_a} |\langle \varphi, J(z)\rangle| \leqslant 1, \quad \langle \varphi, J(U)\rangle > 1+\varepsilon.$$

Отображение $J^*\pi : X^*\widehat{\widehat{\otimes}}_{a^*} Y \to \mathrm{A}^*(X, Y)$ есть изометрическое вложение, поэтому норма φ как функционала на $Y^*\widetilde{\otimes}_a X$ — та же, что и его норма как элемента пространства $(\mathrm{A}^{**}(Y, X^{**}))^*$, т.е. равна 1. Поэтому $a^{**}(J(U)) \geqslant \langle \varphi, J(U)\rangle > 1+\varepsilon$. Таким образом, если $J(U)$ не лежит в $\overline{J(B_a)}^{w^*}$, то его a^{**}-норма строго больше, чем $1+\varepsilon$.

Предположим теперь, что никакой элемент U из $Y^*\widetilde{\otimes}_a X$, не принадлежащий шару B_a, не попадает при отображении J во множество $\overline{J(B_a)}^{w^*}$. Тогда, как было только что установлено, для любого такого элемента $a^{**}(J(U)) > 1+\varepsilon$, и это ведет к противоречию с тем фактом, что вложение J не является изоморфным.

Итак, мы окончательно получили, что существует по крайней мере один оператор $U_0 \in \mathrm{A}(Y, X)$, для которого $a(U_0) > 1+\varepsilon$, и образ $J(U_0)$ которого принадлежит *-слабому замыканию множества $J(B_a)$. Но *-слабая сходимость в $\mathrm{A}^{**}(Y, X^{**})$ влечет сходимость в слабой операторной топологии, откуда вытекает, что найдется такая сеть $(U_\nu)_\nu \subset Y^*\widetilde{\otimes}_a X$, что $a(U_\nu) \leqslant 1$, (U_ν) сходится к U_0 в слабой операторной топологии, но $a(U_0) > 1+\varepsilon$. В заключение доказательства отметим, что в качестве ε можно взять сколь угодно большое число. $\square$

§7 Свойства $\mathrm{AP}(l_p)$ и l_p-факторизация операторов

Если $1 \le p \le \infty$ и S — конечномерный оператор из X в Y, то его K_p^0-норма есть величина

$$k_p^0(S) := \inf \left\{ (\sup_{1\leqslant i\leqslant} |a_i|)\, \varepsilon_p(x_j')\, \varepsilon_{p'}(y_j) \right\}, \tag{7.1}$$

где точная нижняя грань берется по всем *конечным* представлениям оператора S в виде

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_j\, x_j' \otimes y_j. \tag{7.2}$$

Пополнение алгебраического тензорного произведения $X^*\otimes Y$ (которое рассматривается нами как линейное пространство всех конечномерных операторов) по этой норме k_p^0 мы будем обозначать через $X^*\tilde{\tilde{\otimes}}_p Y$, оставляя за нормой в этом пополнении все то же обозначение k_p^0. Каждый тензорный элемент $z \in X^*\tilde{\tilde{\otimes}}_p Y$ представим в виде сходящегося ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j\, x_j' \otimes y_j, \qquad \alpha_j \to 0, \tag{7.3}$$

причем для заранее заданного числа $\varepsilon > 0$ это представление может быть выбрано так, что

$$(\sup_{1\leqslant i<\infty} |a_i|)\, \varepsilon_p(x_j')\, \varepsilon_{p'}(y_j) \leq k_p^0(z) + \varepsilon \tag{7.4}$$

Тензорное произведение $X^*\tilde{\tilde{\otimes}}_p Y$ естественным образом порождает в $\mathrm{L}(X,Y)$ линейное подпространство операторов $\mathrm{K}_p(X,Y)$; это есть факторпространство рассматриваемого тензорного произведения по ядру естественного отображения $X^*\tilde{\tilde{\otimes}}_p Y \to \mathrm{L}(X,Y)$. соответствующая норма на этом пространстве операторов обозначается нами через k_p. $[\mathrm{K}_p, k_p]$ есть банахов операторный идеал, и он является частным случаем так называемых идеалов (r,p,q)-ядерных операторов — $\left[\mathrm{N}_{(r,p,q)}, \nu_{(r,p,q)}\right]$: $[\mathrm{K}_p, k_p] = \left[\mathrm{N}_{(\infty,p,p')}, \nu_{(\infty,p,p')}\right]$ (подробности можно найти в книге [18, с. 280-291]). Каждый оператор $S \in \mathrm{K}_p(X,Y)$ представим в виде сходящегося в $\mathrm{K}_p(X,Y)$ ряда (7.3), и для заранее заданного числа $\varepsilon > 0$ это представление может быть выбрано так, что

$$(\sup_{1\leqslant i<\infty} |a_i|)\, \varepsilon_p(x_j')\, \varepsilon_{p'}(y_j) \leq k_p(S) + \varepsilon. \tag{7.5}$$

Теперь мы посмотрим на обсуждаемый сейчас операторный идеал с другой стороны. Будем говорить, что оператор $S : X \to Y$ *компактно факторизуется через пространство* l_p, (в терминологии А.Пича [18], является *p-компактным*), если существуют два компактных оператора $A : X \to l_p$ и $B : l_p \to Y$, для которых $S = BA$. В качестве нормы такого компактно l_p-факторизуемого оператора мы берем величину $\inf \|A\|\,\|B\|$, где точная нижняя грань берется по всевозможным факторизациям оператора S указанного вида.

Одна из основных теорем, относящаяся к теории компактно l_p-факторизуемых операторов, формулируется так:

$$k_p(S) = \inf\{\|A\|\,\|B\| : \, S = BA : X \to l_p \to Y;\, A, B \text{ — компактны}\}$$

и *идеал* K_p *совпадает с идеалом всех операторов, компактно факторизуемых через* l_p; в случае $p = \infty$ компактная факторизуемость через l_∞ — то же самое, что и компактная факторизуемость через c_0 (см. [18], теоремы 18.3.2, 18.1.3). Сопряженный к $[\mathrm{K}_p, k_p]$ идеал $[\mathrm{D}_{p'}, d_{p'}]$ описывается при помощи следующей теоремы. [18, пп. 17.4.2, 17.4.3, 17.4.7]; в этих утверждениях $q \in [1,\infty)$.

Оператор $S \in \mathrm{L}(X,Y)$ принадлежит пространству $\mathrm{D}_q(Y,X)$ тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $C > 0$ и такие вероятностные меры $\mu \in W(B_{X^*}, w^*)$ и $\nu \in W(B_{Y^{**}}, w^*)$, что

$$|\langle Sx, y'\rangle| \leqslant C \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, x'\rangle|^q \, d\mu(x')\right)^{1/q} \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y'', x'\rangle|^{q'} \, d\nu(y'')\right)^{1/q'}$$

для всех $X \in X$ и $y' \in Y^*$; при этом норма оператора S в D_q есть $d_q(S) := \inf C$ и с этой нормой

$$[\mathrm{D}_q, d_q] = [\Pi_{q'}^{\mathrm{dual}}, \pi_{q'}^{\mathrm{dual}}]. \circ [\Pi_q, \pi_q]$$

Далее мы более подробно рассмотрим некоторые факты, связанные с наличием, либо отсутствием у банаховых пространств аппроксимационных свойств относительно тензорных норм k_p^0, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Договоримся коротко обозначать свойство аппроксимации относительно k_p^0 через $\mathrm{AP}(l_p)$ (это расходится с обозначениями для аппроксимационных свойств в общей абстрактной ситуации, но о подобного рода расхождениях мы предупреждали ранее, и кроме всего прочего, вводимое нами обозначение $\mathrm{AP}(l_p)$ более компактно, чем $\mathrm{AP}(k_p^0)$, и сразу напоминает основную вещь, — то, что эти свойства непосредственно связаны с возможностью факторизации непрерывных линейных отображений через банаховы пространства типа l_p.) Мы пишем $X \in \mathrm{AP}(l_p)$, если пространство X обладает свойством $\mathrm{AP}(l_p.)$ Стоит напомнить, что $X \in \mathrm{AP}(l_p)$, *если для любого банахова пространства Y каноническое отображение из $Y^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X$ в $\mathrm{L}(Y,X)$ взаимно однозначно.* Это эквивалентно тому, что для любого Y имеет место каноническая изометрия $Y^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X = \mathrm{K}_p(Y,X)$ (как отмечалось выше, в подобного рода определениях можно рассматривать, если несколько модифицировать их, и произвольные тензорные произведения типа $Y\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X$).

Свойства $\mathrm{AP}(l_r)$ "сепарабельно определены", т.е. банахово пространство удовлетворяет условию k_r^0-аппроксимации в том и только том случае, если все его сепарабельные подпространства удовлетворяют этому условию.

Автору неизвестно, *существуют ли банаховы пространства без свойства* $\mathrm{AP}(l_p)$ *для какого-нибудь p, отличного от единицы, двойки или бесконечности.* Нетрудно показать, что каждое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}(l_2)$. С другой стороны, автором показано, что *существуют сепарабельные банаховы пространства без свойств* $\mathrm{AP}(l_1)$ *и* $\mathrm{AP}(l_\infty)$ (см. [30], [25], [28] и следствие 4.22 данной работы).

Лемма 7.1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если существует банахово пространство без свойства $\mathrm{AP}(l_p)$, то существует и сепарабельное рефлексивное пространство, не обладающее свойством $\mathrm{AP}(l_{p'})$. Более того, если $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y \neq \mathrm{K}_p(X,Y)$, то существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство W_0 и ненулевой тензор $z_0 \in W_0^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, что оператор $\widetilde{z}_0$ равен нулю.*

Доказательство. Пусть $z := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x'_k \otimes y_k$ — такой ненулевой элемент некоторого тензорного произведения $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, что $\widetilde{z} = 0$; Здесь (μ_k) — положительная последовательность из c_0, $(x'_k) \in l_p\{X^*\}$ и $(y_k) \in l_{p'}(Y)$. Факторизуем компактный диагональный оператор $\Delta := (\mu_k) : l_p \to l_p$ компактно через некоторое сепарабельное рефлексивное пространство W таким образом, чтобы имела место следующая диаграмма: $\Delta = A_3 A_1 A_2 : l_p \xrightarrow{A_3} l_p \xrightarrow{A_2} W \xrightarrow{A_1} l_p$, в которой все операторы компактны и взаимно однозначны, и положим

$$z_1 := \sum_{k=1}^{\infty} A_1^* e_k \otimes y_k \in W^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y,$$

$$z_2 := \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes A_3 e_k \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p W,$$

где через (e_k) обозначается последовательность ортов в любом из пространств l_r. Отметим, что

$$A_1 A_2 \widetilde{z}_2 = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes A_1 A_2 A_3 e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes \Delta e_k == \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k x'_k \otimes e_k.$$

Поэтому

$$(A_1 A_2 \widetilde{z}_2)^* e_k = \mu_k x'_k. \tag{7.6}$$

Пусть $U \in \mathrm{D}_{p'}(Y, X^{**})$ — такой оператор из сопряженного к $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ пространства, что trace $U \circ z = 1$. Так как оператор A_3, а следовательно, и оператор $\widetilde{z}_2$ компактны, то имеет смысл рассматривать сильный бидуальный оператор $\widetilde{z}_2^{\pi} : X^{**} \to \widetilde{z}_2(X) \subset l_p$. Пусть $W_0 := \overline{A_2 \widetilde{z}_2^{\pi}(X^{**})} = \overline{A_2 \widetilde{z}_2^{\pi}(X)} \subset W$ и $A_4 : X^{**} \to A_2{-}1W_0$ — приведение оператора $\widetilde{z}_2^{\pi}$. В силу идеальных свойств класса $\mathrm{D}_{p'}$, оператор $A_2 A_4 U$ лежит в пространстве $\mathrm{D}_{p'}(Y, W_0)$.

Положим

$$z_0 := \sum_{k=1}^{\infty} j^* A_1^* e_k \otimes y_k \in W_0^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y = j^* \otimes \mathbb{1}(z_1),$$

где $j : W_0 \to W$ — тождественное вложение, и пусть $U_0 := A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 U \in \mathrm{D}_{p'}(Y, W_0)$ (оператор $A_2|_{A_2^{-1}W}$ рассматривается как оператор со значениями в пространстве W_0). Ясно, что $z_0 \in W_0^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, и при этом (см. (7.6))

$$\begin{aligned}
\text{trace } U_0 \circ z_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle j * A_1^* e_k, A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 U y_k \rangle = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle A_1^* e_k, j A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 U y_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, A_1 A_2 \widetilde{z}_2 U y_k \rangle = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (A_1 A_2 \widetilde{z}_2)^* e_k, U y_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mu_k x'_k, U y_k \rangle = \text{trace } U \circ z \neq 0.
\end{aligned}$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что $\widetilde{z}_0 = 0$, так как таков элемент z :

$$0 = \widetilde{z} = \widetilde{z}_1 \widetilde{z}_2 = \widetilde{z}_1 j A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 \pi_X,$$

и так как $\widetilde{z}_0 = \widetilde{z}_1 j$ и множество $A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 \pi_X$ плотно в W_0, то $\widetilde{z}_0 = 0$ на всем W_0.

Поэтому рефлексивное сепарабельное пространство W_0^* не имеет свойства аппроксимации относительно тензорной нормы $k_{p'}^0$. $\square$

Следствие 7.2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Если существует банахово пространство без свойства* $\mathrm{AP}(l_p)$, *то существует и рефлексивное сепарабельное пространство, не обладающее свойствами* $\mathrm{AP}(l_p)$ *и* $\mathrm{AP}(l_{p'})$.

Доказательство. По лемме 7.1, существует рефлексивное сепарабельное W_1 без свойства $\mathrm{AP}(l_{p'})$. По той же лемме, примененной к двойственной ситуации ("существует X без свойства $\mathrm{AP}(l_{p'})$"), найдем рефлексивное сепарабельное банахово пространство W_2 без свойства $\mathrm{AP}(l_p)$. Пространство $W := W_1 \oplus W_2$ рефлексивно, сепарабельно и обладает как свойством $\mathrm{AP}(l_p)$, так и свойством $\mathrm{AP}(l_{p'})$. $\square$

Следствие 7.3. *Если существует банахово пространство без свойства* $\mathrm{AP}(l_p)$, *то существуют такие сепарабельное рефлексивное пространство* E *и ненулевой тензорный элемент* $z \in E^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p E$, *что* $\widetilde{z} = 0$.

Доказательство. Пусть, в условиях нашего утверждения, W_0^* — сепарабельное рефлексивное пространство без свойства $\mathrm{AP}(l_{p'})$ из леммы 7.1. Применим снова ту же лемму (для показателя p'), взяв в качестве пространства Y в ней это банахово пространство W_0^*. Мы получим, что для некоторого сепарабельного рефлексивного пространства W_1 найдется ненулевой тензорный элемент $v_0 \in W_1^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_{p'} W_0^*$, порождающий нелевой оператор. Сепарабельное рефлексивное пространство $E := W_1^* \oplus W_0$ удовлетворяет нашим требованиям, так как $W_0^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p W_1^* \neq \mathrm{K}_p(W_0, W_1^*)$. $\square$

Сейчас мы собираемся привести теорему, несколько обобщающую теорему 1 из [30]. Насколько важно для нас это обобщение будет видно ниже (см., следствие 7.6, теорему 7.10).

Перед тем как сформулировать наш результат, посмотрим, что мы на самом деле получили, доказывая теорему 1 в [30]. В этой теореме (и ее доказательстве) рассматривались фиксированные банаховы пространства X и Y, и изучались свойства K_p-операторов, действующих из X в Y^{**}. В доказательстве (которое проходило методом от противного) использовалось только два следующих предположения (мы придерживаемся обозначений настоящей работы):

1_{K_p}) каноническое отображение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y^{**} \to \mathrm{K}_p(X, Y^{**})$ биективно, и

2_{K_p}) биективно либо каноническое отображение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X^{**} \to \mathrm{K}_p(X, X^{**})$, либо каноническое отображение $Y^{****} \widetilde{\widetilde{\otimes}}_{p'} Y^{***} \to \mathrm{K}_{p'}(Y^{***}, Y^{***})$.

Таким образом в заметке [30] была, по существу, доказана

Теорема 7.4. *Пусть $p \in [1, \infty]$. Если пара банаховых пространств X, Y удовлетворяет условиям 1_{K_p}) и 2_{K_p}), то всякий оператор из X в Y, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l_p (эквивалентно, сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство $l_{p'}$), сам компактно факторизуется через l_p. Таким образом, в этом случае $\mathrm{K}_p^{\mathrm{reg}}(X, Y) = \mathrm{K}_p(X, Y)$.*

Доказательство. Как отмечалось, случай $1 < p < \infty$ рассматривается в точности так же, как и в [30]. Нам надо лишь пояснить, почему возможность факторизации сопряженного оператора T^* через $l_{p'}$ равносильна возможности факторизации T^{**} через пространство l_p при $p = 1, \infty$. Это следует из дополняемости пространств l_1 и l_∞, как и произвольных сопряженных пространств, в их вторых сопряженных. Что касается факторизации через c_0, то напомним, что идеал $\mathrm{N}_\infty = K_\infty$ состоит из операторов, компактно факторизуемых через c_0. $\square$

Следствие 7.5. *Пусть $p \in [1, \infty]$ и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если либо $X^* \in \mathrm{AP}(l_{p'})$, либо $Y^{****} \in \mathrm{AP}(l_p)$, либо $Y^{***} \in \mathrm{AP}(l_{p'})$, то всякий оператор из X в Y, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l_p, сам компактно факторизуется через l_p. Таким образом, в этом случае $\mathrm{K}_p^{\mathrm{reg}}(X, Y) = \mathrm{K}_p(X, Y)$.*

Доказательство. Вспомним, что для произвольной тензорной нормы α банахово пространство Z^* удовлетворяет условию α-аппроксимации тогда и только тогда, когда для всякого банахова пространства W каноническое отображение из $Z^* \widehat{\otimes}_{\alpha^{\mathrm{dual}}} W$ в $\mathrm{L}(Z, W)$ взаимно однозначно, и что если $Z^{**} \in \mathrm{AP}[\alpha]$, то и $Z \in \mathrm{AP}[\alpha]$. Осталось заметить, что при любом $p \in [1, \infty]$ имеет место равенство $(k_p^0)^{\mathrm{dual}} = k_{p'}^0$. $\square$

Следствие 7.6. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если существует не K_p-оператор, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l_p, то существует и сепарабельное рефлексивное банахово пространство, не удовлетворяющее как условию k_p^0-аппроксимации, так и условию $k_{p'}^0$-аппроксимации. А тогда существует и вполне сепарабельное банахово пространство с базисом, сопряженное к которому не имеет как свойства $\mathrm{AP}(l_p)$, так и свойства $\mathrm{AP}(l_{p'})$.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и следствия 7.2. Второе утверждение получается, если к сепарабельному рефлексивному пространству E без свойств $\mathrm{AP}(l_p)$ и $\mathrm{AP}(l_{p'})$ применить теорему Линденштраусса (лемма 1.2). Именно, пользуясь леммой 1.2, построим сепарабельное сопряженное пространство W^* с базисом, для которого W^{**} изоморфно прямой сумме $E^* \oplus \pi_W W$. Это и есть искомое вполне сепарабельное пространство. $\square$

Теорема 7.7. *Пусть $P \in [1, \infty]$. Предположим, что существует банахово пространство, не удовлетворяющее условию аппроксимации относительно тензорной нормы k_p^0. Тогда существуют сепарабельное рефлексивное банахово простран-*

ство X, вполне сепарабельное банахово пространство Z и операторы V, w, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $X \notin \mathrm{AP}(l_p), Z^{**}$ *имеет базис;*

2) $V \in \mathrm{D}_{p'}(Z^{**}, X), w \in \mathrm{K}_p(X, Z^{**}) = X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Z^{**}$;

3) $w(X) \subset \pi_Z Z, w \notin \mathrm{K}_p(X, \pi_Z Z)$;

4) $V|_{\pi_Z Z} = 0, \mathrm{trace}\, V \circ w = 1$.

Доказательство. Если существует банахово пространство, не обладающее свойством $\mathrm{AP}(l_p)$, то, по следствию 7.2, существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство без свойства $\mathrm{AP}(l_p)$, и это пространство мы обозначим через X. По следствию 7.3, без ограничения общности, мы можем считать, что найдется ненулевой тензорный элемент $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X$, порождающий нулевой оператор. Пусть $U \in \mathrm{D}_{p'}(X, X)$ — такой оператор, что $\mathrm{trace}\, U \circ z = 1$, и $z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes x_k$ — некоторое представление элемента z в тензорном произведении $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X$, так что $(x'_k) \in l_p\{X^*\}$ и $(x_k) \in l_{p'}\{X\}$. Воспользуемся теперь леммой 2LR, согласно которой мы можем найти такие вполне сепарабельное банахово пространство Z и факторотображение $\Phi : Z^{**} \to X$, что Z^{**} имеет базис, $\mathrm{Ker}\, \Phi = \pi_Z Z$ и слабо p'-суммируемую последовательность (x_k) можно поднять до снова слабо p'-суммируемой последовательности $(z''_k) \subset Z^{**}$, так что $\Phi z''_k = x_k, k = 1, 2, \ldots$. Поскольку в Z^{**} есть базис, тензорное произведение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Z^{**}$ можно канонически отождествить с пространством $\mathrm{K}_p(X, Z^{**})$. Определим оператор (или, что сейчас то же самое, тензорный элемент) $w \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Z^{**}$ равенством $w := \sum x'_k \otimes z''_k$ и положим $V := U\Phi \in \mathrm{L}(Z^{**}, X)$. Так как $\pi_Z Z = \mathrm{Ker}\, U$, то $V|_{\pi_Z Z} = 0$; далее,

$$\mathrm{trace}\, V \circ w = \mathrm{trace}\, (U\Phi) \circ w = \sum \langle x'_k, U\Phi z''_k \rangle = \sum \langle x'_k, U x_k \rangle = \mathrm{trace}\, U \circ z = 1.$$

Заметим, что $z = \Phi \circ w$, и поскольку оператор $\widetilde{z} = 0$, то w отображает пространство X в ядро оператора Φ, которое, по построению, есть $\pi_Z Z$. Осталось показать, что $w \notin \mathrm{K}_p(X, \pi_Z Z)$.

Предположим противное, т.е. что оператор w, как оператор из X в $\pi_Z Z$, компактно факторизуется через пространство l_p. Рассмотрим какое-либо его разложение в ряд в пространстве $\mathrm{K}_p(X, \pi_Z Z)$, обозначив приведение оператора $w : X \to \pi_Z Z \subset Z^{**}$ через $w_1, w_1 : X \to \pi_Z Z$:

$$w = \sum \widetilde{x}'_k \otimes z_k,\ (\widetilde{x}'_k) \in l_p\{X^*,\} \, (z_k) \in l_{p'}\{\pi_Z Z\}.$$

С одной стороны, имеем:

$$\mathrm{trace}\, V \circ w_1 = \mathrm{trace}\, (U\Phi) \circ (\pi_Z Z \circ w_1) = \mathrm{trace}\, U\Phi \circ w = 1.$$

Мы воспользовались тем фактом, что тензорное произведение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p \pi_Z Z$ канонически изометрично подпространству пространства $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Z^{**}$.

С другой стороны,

$$\operatorname{trace} V \circ w_1 = \operatorname{trace}(U\Phi) \circ \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{x}'_k \otimes z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \widetilde{x}'_k, U(\Phi z_k)\rangle = 0,$$

так как $(z_k) \subset \pi_Z Z = \operatorname{Ker}\Phi$. $\square$

Следствие 7.8. *Если существует банахово пространство, не обладающее свойством* $\mathrm{AP}(l_p)$, *то существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство* X, *вполне сепарабельное банахово пространство* Z *и оператор* $T \in \mathrm{L}(X, Z)$, *что* Z^{**} *имеет базис,* $X \notin \mathrm{AP}(l_p)$, $T^{**} \in \mathrm{K}_p(X, Z^{**})$, *но* $T \notin \mathrm{K}_p(X, Z)$.

Доказательство. Достаточно, отождествив пространство Z с его каноническим образом $\pi_Z Z$ в Z^{**}, положить $T := w : X \to Z$ (в обозначениях предыдущего доказательства, $T = (\pi_Z)^{-1} w_1$, где $(\pi_Z)^{-1}$ отображает $\pi_Z Z$ в Z). $\square$

Следствие 7.9. *Если существует банахово пространство, не обладающее свойством* $\mathrm{AP}(l_p)$, *то существуют такие вполне сепарабельное банахово пространство* Z *и оператор* $V \in \mathrm{L}(Z^{**}, Z)$, *что* Z^{**} *имеет базис,* $\pi_Z V \in \mathrm{K}_p(Z^{**}, Z^{**})$, *но* $V \notin \mathrm{K}_p(Z^{**}, Z)$.

Доказательство. В обозначениях доказательства теоремы 7.7, пусть P — ограниченный проектор из пространства Z^{***} на его подпространство $\Phi^* X^*$ (вспомним, что одним из основных свойств пространства Z и факторотображения Φ в лемме 1.5 была дополняемость подпространства $\Phi^* X^*$ в третьем сопряженном к Z пространстве). Положим $V := w_1 \Phi : Z^{**} \to X \to Z$, т.е. возьмем в качестве V приведение оператора $w\Phi$, отождествляя пространства Z и $\pi_Z Z$. Оператор $\pi_z V$, очевидно, лежит в пространстве $\mathrm{K}_p(Z^{**}, Z^{**})$. Если бы он, как оператор из Z^{**} в Z, допускал бы K_p-разложение в ряд, $V = \sum z'''_k \otimes z_k$, то мы имели бы для $z' \in Z^*$:
(7.7)

$$w_1^* z' = (\Phi^*)^{-1} P \Phi^* w_1^* z' = (\Phi^*)^{-1} P V^* z' = (\Phi^*)^{-1} P \sum \langle z', z_k\rangle z'''_k = \sum \langle z', z_k\rangle x_k^*,$$

где $x_k^* := (\Phi^*)^{-1} P z'''_k \in X^*$. Соотношения (7.7) означают, что $w_1 : X \to Z$ разлагается в K_p-сходящийся ряд $\sum x_k^* \otimes z_k$, что, как мы знаем, невозможно. $\square$

Соберем некоторые из полученных выше фактов о пространствах со свойствами $\mathrm{AP}(l_p)$ в одну самую общую теорему.

Теорема 7.10. *Для любого* $p \in [1, \infty]$ *следующие утверждения равносильны.*

1) *Каждое банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}(l_p)$;

1′) *Каждое сепарабельное рефлексивное банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}(l_p)$;

2) *Каждое банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}(l_{p'})$;

2′) *Каждое сепарабельное рефлексивное банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}(l_{p'})$;

3) *Не существует оператора, действующего в банаховых пространствах, который не был бы* K_p*-оператором, но второй сопряженный к которому лежал бы в идеале* K_p;

3$'$) *Не существует оператора, действующего во вполне сепарабельных банаховых пространствах с базисами, который не был бы* K_p*-оператором, но второй сопряженный к которому лежал бы в идеале* K_p;

4) *идеал* K_p *является регулярным;*

5) *идеал* $\mathrm{K}_{p'}$ *является регулярным;*

6) *идеал* $\mathrm{K}_p^{\mathrm{reg}}$ *является минимальным;*

7) *идеал* $\mathrm{K}_{p'}^{\mathrm{reg}}$ *является минимальным;*

8) *идеал конечномерных операторов плотен в идеале* $\mathrm{K}_p^{\mathrm{reg}}$;

9) *идеал конечномерных операторов плотен в идеале* $\mathrm{K}_{p'}^{\mathrm{reg}}$;

10) *для каждого сепарабельного рефлексивного банахова пространства* X *каноническое вложение* $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X \to \mathrm{L}(X,X)$ *взаимно однозначно;*

11) *для каждого банахова пространства* X *каноническое вложение* $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X \to \mathrm{L}(X,X)$ *взаимно однозначно.* $\square$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Данфорд, Дж.Е.Шварц, *Линейные операторы (общая теория), I* Москва: Иностранная литература, 1962, 895 с.
2. W.J.Davis, T.Figiel, W.B.Johnson, A.Pelczynski, *Factoring weakly compact operators*, J. Functional Analysis **17** (1974), 311-327.
3. J.Diestel, *Geometry of Banach spaces*, Lecture Notes in Math., 485 Berlin-Hiedelberg-New York, 1975. 282 pp..
4. Diestel J. and Uhl J.J., *Vector measures*, Math. Survey 15, Amer. Math. Soc., Providence RI. **15** (1977).
5. Dunford N., Pettis B.J., *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 323–392.
6. Enflo P., *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317.
7. Figiel T., Johnson W.B., *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197–200.
8. Gordon Y., Lewis D. R., Retherford H. R., *Banach ideals of operators with applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), no. 1, 85-129.
9. Grothendieck A., *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), pp. 196+140.
10. Johnson W.B., *Factoring compact operators*, Israel J. Math. **9** (1971), 337-345.
11. Kakutani S., *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, Ann. of Math. **42** (1941), no. 2, 523–537.
12. Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279–284.
13. Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces I: Sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlin – Heldelberg – New York, 1977.
14. Макаров Б. М., Самарский В. Г., *Слабая секвенциальная полнота и близкие к ней свойства некоторых пространств операторов*, в кн. "Теория операторов и теория функций". Л.: ЛГУ (1983), 122-144.
15. A.Pelczynski, *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astro. Phys. **10** (1962), 641-648.
16. Persson A., *On some properties of p-nuclear and p-integral operators*, Studia Math. **33** (1969), 213–232.
17. Persson A. and Pietsch A., *p-nucleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, Studia Math. **33** (1969), 19-62.
18. Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир, 1982, 536 с.
19. Pietsch A., *Operator ideals*, North-Holland, Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1978. 451 p..
20. Рейнов О.И., *Операторы типа RN и аналитические представления линейных операторов*, В кн. Теория операторов в функциональных пространствах, Наука, Новосибирск, 1977, 283–295
21. Рейнов О.И., *Операторы типа RN в банаховых пространствах*, Сиб. матем. журн. **19** (1978), 4 857-865.
22. Рейнов О.И., *О некоторых классах линейных непрерывных отображений*, Матем. заметки **23** (1978), no. 2, 285-286.
23. Рейнов О.И., *О некоторых векторно-решеточных характеристиках операторов типа RN*, Матем. заметки **27** (1980), вып. 4 607-620.
24. Рейнов О.И., *Об интегральных представлениях линейных операторов, действующих из пространства* L^1, Матем. заметки **27** (1980), вып. 2 283-290.
25. Reinov O.I., *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. **109** (1982), 125-134.
26. Рейнов О. И., *Исчезновение тензорных элементов в шкале p-ядерных операторов*, в кн. "Теория операторов и теория функций". Л.: ЛГУ (1983), 145-165.

27. Рейнов О.И., *Операторы типа RN в банаховых пространствах*, ДАН СССР **220** (1975), No 3 528-531.
28. Рейнов О. И., *Свойства аппроксимации порядка p и существование не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными*, ДАН СССР **256** (1981), no. 1, 43-47.
29. Рейнов О. И., *О линейных операторах с p-ядерными сопряженными*, Вестник СПбГУ, Сер. 1 (2000), вып. 4
30. Рейнов О. И., *О факторизации операторов через пространства l^p*, Вестник СПб ГУ. Сер.1 **2** (2000), вып. 2 (No 8), 27-32.
31. Рейнов О. И., *Аппроксимационные свойства* $\mathrm{AP_s}$ *и p-ядерные операторы (случай $0 < s \leqslant 1$)*, Записки научн. сем. ПОМИ **270** (2000), 277-291.
32. H.Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. **37** (1971), 13-36.

Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет

E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru