РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В.А.СТЕКЛОВА
Санкт-Петербургское отделение

На правах рукописи

КЕРОВ Сергей Васильевич

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ В АНАЛИЗЕ

01.01.01 – математический анализ

Диссертация
на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
1994

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Глава I
ГРАНИЦЫ И ГРУППЫ РАЗМЕРНОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ ВЕТВЛЕНИЯ

Глава II
ГРАНИЦА ГРАФА ЮНГА И ПОЛИНОМЫ МАКДОНАЛЬДА

Глава III
МЕРА ПЛАНШЕРЕЛЯ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Глава IV

ДИАГРАММЫ ЮНГА В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА

* * *

Список рисунков

ВВЕДЕНИЕ

План диссертации.

Первой основной темой данной работы является описание асимптотических свойств характеров конечных симметрических групп и связанное с этим построение характеров бесконечной симметрической группы.

В более общем плане, разработанная здесь комбинаторная техника приложима к широкому классу алгебр, допускающих аппроксимацию конечномерными полупростыми алгебрами, и в частности, к групповым алгебрам локально - конечных групп. Задача о вычислении характеров подобных групп и алгебр сводится к типовой проблеме теории потенциала на счетных графах – к описанию неотрицательных гармонических функций на них. Как и в классической ситуации с единичным кругом, неотрицательные гармонические функции строятся при помощи (обобщенного) интеграла Пуассона, взятого по идеальной границе графа. Вычисление этой границы, родственной классической границе Мартина, является, как правило, трудоемкой задачей. Оно проведено в диссертации для ряда примеров комбинаторного и алгебраического происхождения, связанных с решеткой диаграмм Юнга.

Из всех характеров бесконечной симметрической группы особое внимание уделяется характеру ее регулярного представления. Мы даем детальное описание формы больших диаграмм Юнга, типичных по мере Планшереля конечной симметрической группы, а также изучаем вероятностные свойства отклонений случайных диаграмм от предельной кривой. В других терминах, речь идет о пределах совместных распределений характеров неприводимых представлений симметрической группы степени n по отношению к ее мере Планшереля. Асимптотический анализ меры Планшереля – вторая важная составляющая диссертации.

Третья основная тема связана с переходом к континуальному пределу для нетривиальных комбинаторных конструкций и алгоритмов, которыми так богата теория перестановок и их представлений. Мы устанавливаем прямую связь между переходными распределениями меры Планшереля бесконечной симметрической группы и разложениями на простейшие дроби для рациональных функций с перемежающимися нулями и полюсами. Используя эту связь, удается получить континуальный аналог известного в комбинаторике диаграмм Юнга алгоритма блуждания по крюкам (hook walk). В свою очередь, эта конструкция доставляет совершенно новое описание связи между классическими проблемами моментов Хаусдорфа и Маркова. В вероятностных терминах, предельный алгоритм (мы называем его алгоритмом *усадки отрезка*) позволяет строить распределения интегралов по случайным мерам Дирихле.

Динамический процесс случайного роста диаграмм Юнга, рассматриваемый нами как мера Планшереля бесконечной симметрической группы, естественно приводит нас к континуальной модели, эквивалентной дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка $R_t + R\,R_x = 0$.

Характерная предельная форма больших случайных диаграмм Юнга (мы условно называем ее *законом арксинуса*) неожиданно часто возникает в казалось бы не связанных между собой задачах. Мы приводим два примера такой ситуации: асимптотическое поведение перемежающихся нулей ортогональных полиномов и возмущение спектров типичных больших случайных матриц при наложении линейной связи.

В рамках трех перечисленных направлений (асимптотическая теория характеров бесконечной симметрической группы, предельные свойства ее меры Планшереля и приложения теории представлений симметрической группы в анализе) в диссертации обсуждается q-аналог алгоритма блуждания по крюкам, подробно изучаются свойства симметрических полиномов Макдональда и вычисляются границы для связанных с ними деформаций графа Юнга – центрального объекта всех наших рассмотрений.

* * *

Диссертация содержит подробное введение и четыре главы, разбитых на параграфы.

Начнем с предварительного перечня полученных результатов по главам и необходимых литературных указаний. Более подробно содержание диссертации формулируется ниже в основной части введения.

В первой главе излагаются общие методы работы с алгебрами, допускающими аппроксимацию конечномерными полупростыми подалгебрами (мы называем их локально - полупростыми, или, короче, LS-алгебрами). Идейно теория таких алгебр восходит к трудам фон Неймана, а простейшие примеры рассматривались в 60-х годах Глиммом и Диксмье. Систематическое их изучение началось с работы О.Браттели [74], заложившей основы комбинаторного подхода к LS-алгебрам, за которой последовала серия его статей [75, 76, 77]. Несколько позже фундаментальный вклад в развитие теории был сделан Дж.Эллиоттом [88], который показал, что группа Гротендика K_0, снабженная естественной структурой порядка, является полным инвариантом LS-алгебры. Другой ключевой факт обнаружен Эффросом, Хандельманом и Шеном в статье [87], где найдена абстрактная характеризация класса всех упорядоченных абелевых групп, возникающих как $K_0(A)$

для некоторой LS-алгебры A. Итоги первого десятилетия теории LS-алгебр подведены в обзоре [86].

Новый импульс к изучению LS-алгебр был дан рассмотрением бесконечномерных аналогов классических групп, подобных унитарной группе $U(\infty) = \varinjlim U(n)$ (см. [160]) и бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty = \varinjlim \mathfrak{S}_n$. Эти примеры, заметно более сложные, чем изучавшиеся на начальном этапе теории, оказали заметное влияние на развитие ее общих методов.

В центре внимания оказалась проблема вычисления характеров групп, допускающих аппроксимацию конечными или компактными подгруппами. Существенно новой при анализе этой проблемы явилась трактовка LS-алгебр, как скрещенных произведений, связанных с динамическими системами. Основанный на ней *эргодический метод* построения характеров, предложенный в [13], развивает идеи А.М.Вершика, примененные им ранее в работе [10].

Отметим также два других новых результата из общей теории LS-алгебр, обнаруженных в [13], [126] при работе с группой $\mathfrak{S}_\infty$. Первый из них устанавливает определяющую роль введенного в [13] понятия *полуконечных* характеров LS-алгебр в описании положительных элементов группы Гротендика K_0. Второй состоит в выделении класса *мультипликативных* диаграмм Браттели и разработке связанной с ними теории упорядоченных *колец Рисса*. Обзорное изложение этих результатов можно найти в статьях А.М.Вершика и автора [16], [17], [128]. Континуальные аналоги графов ветвления и связанных с ними задач рассмотрены в статье [42].

Центральной задачей второй главы диссертации является аппроксимативное вычисление характеров бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$.

Для конечных симметрических групп характеры и представления были найдены в начале века в работах Г.Фробениуса [61] и И.Шура [155]. Необходимая для их описания комбинаторная техника развита в длинной серии статей А.Юнга, список которых можно найти в последней в этом ряду работе [168]. В широко известной книге Г.Вейля [8] представления симметрических групп тесно переплетены с представлениями классических матричных групп. Среди большого числа учебников и монографий, излагающих теорию характеров и представлений группы $\mathfrak{S}_n$, можно отметить книги [26, 29, 50, 62], [113, 136, 152]. Вероятностным задачам на группе подстановок посвящена монография [81].

Комбинаторную основу теории представлений симметрической группы составляет техника диаграмм и таблиц Юнга. Мы заимствуем соответствующую терминологию, а также необходимые факты об алгебре симметрических многочленов, из замечательной монографии И.Макдональда [49]. Стоит заметить, что несмотря на столетний возраст, комбинаторика подстановок и их представлений продолжает активно развиваться. Не претендуя на полноту, отметим комбинаторный вариант преобразования Фурье для группы $\mathfrak{S}_n$, найденный в [152], [157], [133]; формулу крюков [92] для размерностей ее неприводимых представлений; разнообразные описания правила Литтлвуда – Ричардсона для разложений тензорных произведений представлений унитарных групп; алгоритм блуждания по крюкам [102], [103]; связь с анзацем Бете [41]. Не менее впечатляющей оказалась роль симметрических групп и алгебр Гекке в недавнем построении Джоунсом новых топологических инвариантов узлов и зацеплений, см. [114], [19].

Характеры бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ впервые найдены Э. Тома [161], причем его результат удивительным образом эквивалентен чисто аналитической проблеме характеризации вполне положительных последовательностей и рядов, решенной независимо И.Шенбергом и его коллегами [64].

Совершенно иное описание характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$, полученное в [13], является частью более широкой программы А.М.Вершика по изучению аппроксимационных задач. Другие реализации аппроксимативного подхода Вершика представлены, например, в его работах [20], [119], [10].

Задача о характерах группы $\mathfrak{S}_\infty$ эквивалентна задаче о неотрицательных гармонических функциях на решетке (графе) диаграмм Юнга. Во второй главе мы подробно изучаем аналогичную задачу для специальных двухпараметрических деформаций графа Юнга, которые отражают ветвление симметрических полиномов Макдональда, введенных в [139], [140]. При подходящих значениях параметров деформации получаются результаты Кингмана [129], [130] и Назарова [51], а также графы Jack'а, с помощью которых мы вычислим в третьей главе многомерные интегралы Сельберга. Эта часть диссертации базируется на статьях автора [34], [35], [119].

Одним из первых примеров описания гармонических функций на графах можно считать классическую теорему де Финетти о случайных последовательностях, инвариантных при финитных подстановках. Другой важный источник дискретных задач о положительных гармонических функциях доставляет теория случайных блужданий по группам, с которой можно познакомиться по обзору Каймановича и Вершика [115].

В третьей главе диссертации детально изучается наиболее интересный характер бесконечной симметрической группы – характер ее регулярного представления. Прежде всего, мы вводим удобное при работе с любыми локально-конечными группами общее понятие о мере Планшереля, как марковской цепи на графе ветвления неприводимых представлений аппроксимирующих конечных групп. Затем воспроизводится старая теорема А.М.Вершика и автора [12], [18] об асимптотике формы больших случайных диаграмм Юнга (аналогичный факт был независимо получен в [138]). Эта теорема служит мотивировкой для большинства дальнейших результатов, обсуждаемых в диссертации.

Среди новых результатов третьей главы отметим описание типичных симметрий тензоров высокой степени, полученное в [31], аналог центральной предельной теоремы для характеров симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, найденный в [40], и q-аналог алгоритма блуждания по крюкам, построенный в статье [36]. Мы приводим также новый вывод многомерных интегралов Сельберга (см. [156], [69], [151], [142]), основанный на результатах [46].

В четвертой, заключительной главе диссертации, собраны результаты автора, относящиеся к приложениям асимптотической теории характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$ в задачах математического анализа. Хотя формально они не зависят от материала первых трех глав и имеют самостоятельную ценность, с содержательной точки зрения вся идеология и постановки задач в четвертой главе продиктованы результатами первой части диссертации о мере Планшереля группы $\mathfrak{S}_\infty$ и предельной форме больших диаграмм Юнга. По-видимому, между симметрической группой и теорией функций существует глубинная связь, различными проявлениями которой служат приводимые нами факты, а также эквивалентность теоремы Эдреи – Шенберга и теоремы о характерах группы $\mathfrak{S}_\infty$. Косвенным свидетельством в пользу этого тезиса может служить творчество Исайи Шура, получившего замечательные теоремы в обеих областях.

Наш первый результат в четвертой главе основан на изображении пар перемежающихся конечных последовательностей вещественных чисел посредством "прямоугольных диаграмм", обобщающих диаграммы Юнга. Этот несложный прием придает смысл вопросу об асимптотическом поведении подобных пар. Основываясь на статье [38] мы доказываем, что для перемежающихся корней классических ортогональных многочленов предельная форма диаграмм такая же, как и для больших случайных диаграмм Юнга.

Второй основной результат, опубликованный в [37], устанавливает биекцию между диаграммами и вероятностными мерами. Фактически то же самое соответствие, но из совершенно иных соображений, появляется в книге М.Г.Крейна и А.А.Нудельмана [47] для решения проблемы моментов Маркова, а в статье [82] оно же применяется в задаче о распределениях интегралов по случайным мерам Дирихле. Связь соответствия Крейна и меры Планшереля симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$, обнаруженная в [37], открывает заманчивую возможность применить в проблеме моментов и других аналитических задачах разнообразную комбинаторную технику теории подстановок и их представлений. Используя эту идею и совершая должный предельный переход в алгоритме блуждания по крюкам, мы получаем новое вероятностное описание соответствия Крейна — процесс усадки отрезка.

Третий существенный результат (см. [122], [40]) состоит в построении дифференциальной модели роста диаграмм Юнга, которая оказывается эквивалентной хорошо изученному уравнению Бюргерса. Мы доказываем, что асимптотическое поведение, установленное ранее для случайных диаграмм Юнга, имеет место и для этой модели. Заслуживает внимания и дальнейшего изучения связь последней с полукруговой диффузией в свободной теории вероятностей, разработанной Д.Войкулеску и его учениками [166], [167], [71].

После этих кратких пояснений перейдем к более детальному изложению результатов диссертации.

§1. Общая теория локально - полупростых алгебр

Основным объектом, изучаемым в диссертации, является бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty$. По определению, это дискретная счетная группа, состоящая из финитных подстановок натурального ряда (т. е. подстановок, для которых почти все переставляемые предметы неподвижны). Обозначим через $\mathfrak{S}_n$ конечную подгруппу подстановок из $\mathfrak{S}_\infty$, оставляющих неподвижными числа $n+1, n+2, \ldots$; тогда группа $\mathfrak{S}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n$ есть объединение возрастающей цепочки конечных подгрупп. Бесконечные группы, обладающие этим свойством, называются локально - конечными.

Начиная с 70-х годов в трудах О.Браттели, Дж.Эллиотта и других математиков была развита мощная комбинаторная техника для работы с групповыми алгебрами локально конечных групп. Напомним основные положения их теории.

1.1. Комбинаторная теория LS-алгебр.

Локально - полупростой алгеброй (короче: LS-алгеброй) называют индуктивный предел

$$\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \mathfrak{A}_n,$$

для индуктивного семейства

$$\mathbb{C} \simeq \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{A}_1 \to \ldots \to \mathfrak{A}_n \to \ldots \tag{1.1}$$

конечномерных полупростых алгебр $\mathfrak{A}_n$. Мы будем предполагать, что все гомоморфизмы сохраняют единицу.

Согласно теореме Веддербарна, каждая конечномерная полупростая алгебра изоморфна прямой сумме полных матричных алгебр:

$$\mathfrak{A}_n \simeq \bigoplus_{\lambda \in \Gamma_n} M_{d(\lambda)}\mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Здесь Γ_n – конечное множество, параметризующее классы эквивалентности комплексных неприводимых представлений π_λ алгебры $\mathfrak{A}_n$, а через $d(\lambda) = \dim \pi_\lambda$ обозначается размерность неприводимого представления, соответствующего точке $\lambda \in \Gamma_n$. Конечномерная полупростая алгебра $\mathfrak{A}_n$ определяется, с точностью до изоморфизма, списком размерностей $\{d(\lambda)\}_{\lambda \in \Gamma_n}$ своих неприводимых представлений.

Вложение конечномерных полупростых алгебр

$$i_n \colon \mathfrak{A}_{n-1} \to \mathfrak{A}_n$$

можно адекватно описать при помощи двудольного графа с множеством вершин $\Gamma_{n-1} \bigcup \Gamma_n$. По определению, вершины $\lambda \in \Gamma_{n-1}$, $\Lambda \in \Gamma_n$ связаны дугой кратности $\varkappa(\lambda, \Lambda)$, где через $\varkappa(\lambda, \Lambda)$ обозначена кратность в разложении ограничения

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{A}_n}_{\mathfrak{A}_{n-1}} \pi_\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma_{n-1}} \varkappa(\lambda, \Lambda)\, \pi_\lambda. \tag{1.3}$$

Через π_Λ мы обозначаем неприводимое представление алгебры $\mathfrak{A}_n$, отвечающее точке $\Lambda \in \Gamma_n$. В силу теоремы взаимности Фробениуса, те же кратности возникают в разложении индуцированного представления:

$$\mathrm{Ind}^{\mathfrak{A}_n}_{\mathfrak{A}_{n-1}} \pi_\lambda = \bigoplus_{\Lambda \in \Gamma_n} \varkappa(\lambda, \Lambda)\, \pi_\Lambda. \tag{1.4}$$

Если для двух гомоморфизмов $i_n, j_n \colon \mathfrak{A}_{n-1} \to \mathfrak{A}_n$ их двудольные графы совпадают, то существует обратимый элемент $b \in \mathfrak{A}_n$, для которого $j_n(a) = b\, i_n(a)\, b^{-1}$ при всех $a \in \mathfrak{A}_{n-1}$.

Согласно сказанному, индуктивное семейство (1.1) конечномерных полупростых алгебр порождает бесконечный граф, называемый *графом ветвления* (= *диаграммой Браттели*) этого семейства. По определению, граф Γ является объединением двудольных графов, задающих вложения $i_n \colon \mathfrak{A}_{n-1} \to \mathfrak{A}_n$. Его вершинами служат точки множества $\Gamma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$.

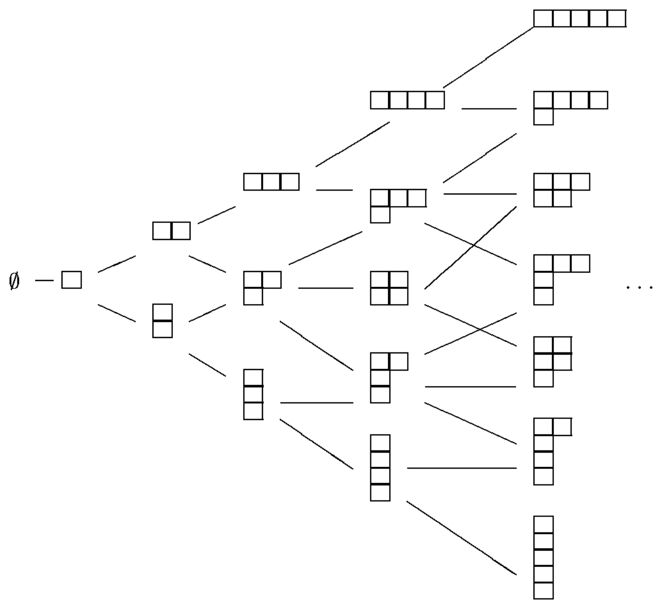


Рис.1 Граф Юнга.

Важнейший для нас пример связан с индуктивным семейством

$$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_0] \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_1] \to \ldots \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \to \ldots \tag{1.5}$$

групповых алгебр конечных симметрических групп $\mathfrak{S}_n$. Здесь алгебра несуществующей группы $\mathfrak{S}_0$, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_0] \simeq \mathbb{C}$, вводится для удобства; она отождествляется с алгеброй $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_1]$. Графом ветвления этого семейства служит граф Юнга (рис.1). Его вершинами являются диаграммы Юнга, а дуги связывают пары диаграмм, отличающихся ровно одной клеткой.*) Граф Юнга описывает ветвление неприводимых представлений симметрических групп при операциях ограничения на подгруппу и индуцирования:

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi_\Lambda = \bigoplus_{\lambda\colon \lambda \nearrow \Lambda} \pi_\lambda, \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi_\lambda = \bigoplus_{\Lambda\colon \lambda \nearrow \Lambda} \pi_\Lambda. \tag{1.7}$$

Отметим, что все дуги графа Юнга – простые.

1.2. Характеры LS-алгебр и гармонические функции на графах.

Граф ветвления содержит исчерпывающую информацию об индуктивном семействе конечномерных полупростых алгебр и тем более об LS-алгебре $\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \mathfrak{A}_n$, которая является индуктивным пределом этого семейства. В частности, характеры алгебры $\mathfrak{A}_\infty$ можно описать в терминах графа ветвления.
Характером LS-алгебры $\mathfrak{A}_\infty$ называется любой линейный функционал

$$\psi\colon \mathfrak{A}_\infty \to \mathbb{C},$$

обладающий тремя свойствами:

(a) (положительная определенность) $\psi(aa^*) \geq 0$ для всех $a \in \mathfrak{A}_\infty$;**)
(b) (центральность) $\psi(ab) = \psi(ba)$ для любых $a, b \in \mathfrak{A}_\infty$;
(c) (нормировка) $\psi(1) = 1$.

В частности, ограничение характера ψ алгебры $\mathfrak{A}_\infty$ на подалгебру $\mathfrak{A}_n$ можно записать в виде:

$$\chi_n = \mathrm{Res}^{\mathfrak{A}_\infty}_{\mathfrak{A}_n} \psi = \sum_{\Lambda \in \Gamma_n} \varphi(\Lambda)\, \chi^\Lambda. \tag{2.1}$$

Сравнивая это с разложением

$$\chi_{n-1} = \mathrm{Res}^{\mathfrak{A}_\infty}_{\mathfrak{A}_{n-1}} \psi = \sum_{\lambda \in \Gamma_{n-1}} \varphi(\lambda)\, \chi^\lambda$$

*) Мы пишем $\lambda \nearrow \Lambda$, если диаграмма Юнга Λ получается из диаграммы λ добавлением одной клетки.

**) Здесь операция $a \mapsto a^*$ означает любую инволюцию в алгебре $\mathfrak{A}_\infty$, согласованную со стандартными инволюциями на матричных подалгебрах $\mathfrak{A}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Хотя выбор такой инволюции не однозначен, условие (a) от него не зависит.

заключаем, что коэффициенты разложений $\varphi(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\Lambda\in\Gamma_n} \varkappa(\lambda,\Lambda)\,\varphi(\Lambda) \tag{2.2}$$

при всех $\lambda \in \Gamma_{n-1}$.

Определение. Условимся называть функцию $\varphi\colon \Gamma \to \mathbb{C}$, заданную на множестве вершин графа ветвления Γ, *гармонической*, если при всех $n = 1, 2, \dots$ выполняется условие (2.2).

Формула (2.2) играет в наших рассмотрениях роль теоремы о среднем для обыкновенных гармонических функций.

Следующий несложный результат устанавливает биекцию между характерами LS-алгебры и гармоническими функциями на ее графе ветвления.

Теорема 1 ([17], §9, теорема 5). Для любой неотрицательной гармонической функции $\varphi\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$, нормированной условием*) $\varphi(\emptyset) = 1$, существует единственный характер $\psi\colon \mathfrak{A}_\infty \to \mathbb{C}$ соответствующей LS-алгебры, для которого

$$\psi(a) = \sum_{\Lambda\in\Gamma_n} \varphi(\Lambda)\,\chi^{\Lambda}(a); \quad a \in \mathfrak{A}_n \tag{2.3}$$

при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Формула (2.1) устанавливает биективный гомеоморфизм между пространством характеров LS-алгебры $\mathrm{Char}(\mathfrak{A}_\infty)$ и пространством $\mathrm{Harm}(\Gamma)$ нормированных неотрицательных гармонических функций ее графа ветвления.

1.3. Граница графа ветвления.

Пространство гармонических функций $\mathrm{Harm}(\Gamma)$, снабженное топологией поточечной сходимости, выпукло, компактно и метризуемо. По теореме Шоке (см. [59], стр. 25) любая функция $\varphi \in \mathrm{Harm}(\Gamma)$ представима интегралом

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathcal{E}} \chi(\lambda)\,dM(\chi), \tag{3.1}$$

в котором вероятностная мера M сосредоточена на множестве крайних точек $\mathcal{E}(\Gamma) = \mathrm{ex}\,\mathrm{Harm}(\Gamma)$.

Фактически разложение (3.1) с этим свойством единственно, т.е. выпуклый компакт $\mathrm{Harm}(\Gamma)$ является *симплексом*. Это следует, например, из результатов Эффроса [86], лемма 4.3.

Во всех примерах, рассмотренных в этой работе, множество крайних точек $\mathcal{E}(\Gamma)$ замкнуто в симплексе $\mathrm{Harm}(\Gamma)$. Мы называем его *границей* графа ветвления Γ.

*) Через $\emptyset$ мы обозначаем единственную точку множества Γ_0.

Формула (3.1) позволяет отождествить симплекс неотрицательных гармонических функций $\mathrm{Harm}(\Gamma)$ с множеством всех вероятностных борелевских мер на границе графа ветвления $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Согласно классической теореме (см., например, [24], гл.1, теорема 3.5) неотрицательная гармоническая функция в круге однозначно представима интегралом Пуассона

$$\varphi(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\,\theta}|^2}\,\mu(d\theta), \tag{3.2}$$

причем представляющая мера μ может быть получена как радиальный предел

$$\mu(d\theta) = \lim_{r\to 1} \varphi(re^{i\theta})\,\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{3.3}$$

В первой главе диссертации мы устанавливаем аналогичные факты для графов ветвления. Для этого определяются обобщенное *ядро Пуассона* $\Phi(\lambda,\delta)$, где $\lambda\in\Gamma$, $\delta\in\mathcal{E}(\Gamma)$ и *радиальное вложение* i: $\Gamma\to\mathcal{E}(\Gamma)$, обладающие следующими свойствами:

(a) при фиксированном $\delta\in\mathcal{E}(\Gamma)$ функция $\varphi(\cdot)=\Phi(\cdot,\delta)$ принадлежит симплексу $\mathrm{Harm}(\Gamma)$;

(b) функции $\Phi_\lambda(\cdot)=\Phi(\lambda,\cdot)$ непрерывны на границе $\mathcal{E}(\Gamma)$ и разделяют ее точки;

(c) для любого $\delta\in\mathcal{E}$ обозначим через M_n вероятностное распределение на n-ом этаже Γ_n графа ветвления Γ, заданное нагрузками

$$M_n(\lambda) = \varphi(\lambda)\,d(\lambda); \quad \lambda\in\Gamma_n, \tag{3.4}$$

где через $d(\lambda)$ обозначено число ориентированных путей, соединяющих точки $\emptyset$ и λ. Тогда распределения $i(M_n)$ слабо сходятся в $\mathcal{E}$ к единичной нагрузке в точке $\delta\in\mathcal{E}$.

При выполнении этих требований справедлива

Теорема 2 [123]. Из условий (a) – (c) следует, что

(1) каждая гармоническая функция $\varphi\in\mathrm{Harm}(\Gamma)$ однозначно представима интегралом Пуассона

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathcal{E}} \Phi(\lambda,\delta)\,d\mu(\delta), \tag{3.5}$$

где μ – вероятностная борелевская мера на границе $\mathcal{E}(\Gamma)$;

(2) представляющая мера μ является слабым пределом дискретных вероятностных распределений $i(M_n)$, где мера M_n определяется гармонической функцией φ по формуле (3.4).

1.4. Центральные меры.

Исторически одной из первых проблем, сводящихся к задаче о гармонических функциях на графе, была проблема описания вероятностных борелевских мер на пространстве последовательностей нулей и единиц, инвариантных относительно финитных подстановок координат.

Примеры таких мер доставляют продакт - меры M_p с общей для всех координат вероятностью единицы $p \in [0, 1]$. Согласно теореме де Финетти (см. [58], т.2, гл.7, §4) любая инвариантная мера M является смесью продакт мер,

$$M = \int_0^1 M_p \, d\mu(p), \tag{4.1}$$

где μ – однозначно определенное вероятностное распределение на единичном отрезке.

Отождествим $0-1$ последовательности с путями треугольника Паскаля (см. рис.2). Тогда условие инвариантности меры M равносильно следующему:

(**C**) для любых двух путей u, v графа Γ, ведущих из начальной вершины $\emptyset$ в общую конечную вершину $\lambda \in \Gamma$, их M – вероятности равны и зависят только от λ.

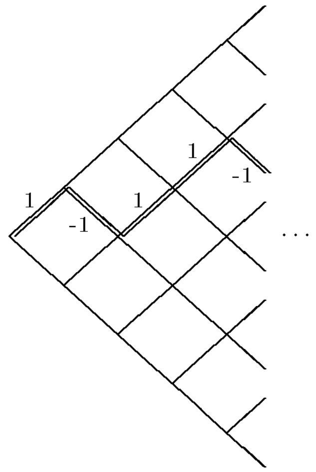


Рис.2 Треугольник Паскаля.

Определение. Для любого графа ветвления Γ вероятностная борелевская мера M на пространстве путей называется *центральной*, если выполнено условие (C). Обозначим через $\varphi(\lambda)$ общую для всех путей с концом в $\lambda \in \Gamma$ вероятность из условия (C). Нетрудно убедиться, что φ – гармоническая функция. Это соответствие устанавливает биекцию между пространством центральных мер $\mathrm{Cent}(\Gamma)$ и пространством $\mathrm{Harm}(\Gamma)$.

Условимся обозначать через $d(\nu, \lambda)$ число ориентированных путей графа Γ, ведущих из вершины $\nu \in \Gamma$ в вершину λ, и называть это число *размерностью* интервала $[\nu, \lambda]$. Если $\nu = \emptyset$ – начальная вершина графа, будем упрощать это обозначение до $d(\lambda) = d(\emptyset, \lambda)$.

Для фиксированного натурального числа n, свяжем с гармонической функцией $\varphi \in \mathrm{Harm}(\Gamma)$ вероятностное распределение на множестве Γ_n, заданное весами

$$M_n(\Lambda) = \varphi(\Lambda)\, d(\Lambda), \quad \Lambda \in \Gamma_n.$$

Семейство распределений $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *когерентно* в следующем смысле:

$$M_{n-1}(\lambda) = \sum_{\Lambda\colon \lambda \nearrow \Lambda} \frac{d(\lambda)\varkappa(\lambda, \Lambda)}{d(\Lambda)}\, M_n(\Lambda); \quad \lambda \in \Gamma_{n-1},\ n = 1, 2, \dots . \tag{4.2}$$

Когерентные семейства доставляют удобный язык для работы с центральными мерами. В частности, смешивающая мера μ в интеграле Пуассона (3.5) возникает как слабый предел распределений M_n. В одном специальном случае когерентные семейства распределений были введены Кингманом [129] под именем *partition structures*.

Любая центральная мера – марковская и задается переходными вероятностями $p(\lambda, \Lambda)$, $\lambda \nearrow \Lambda$, определенными на дугах графа.

1.5. Эргодический метод.

Гармоническая функция $\varphi \in \mathrm{Harm}(\Gamma)$ задает крайнюю точку этого симплекса тогда и только тогда, когда соответствующая ей центральная мера M эргодична относительно хвостового отношения эквивалентности ξ в пространстве путей T графа Γ. По определению, классы отношения ξ состоят из путей, совпадающих начиная с некоторого места. Условие эргодичности меры M означает, что для любого измеримого множества $A \subset T$, состоящего из целых классов отношения эквивалентности ξ, его мера $M(A)$ равна нулю или единице.

В пространстве путей, вообще говоря, нет естественного преобразования $S : T \to T$, для которого траекторное разбиение совпадает с хвостовым отношением эквивалентности ξ. Можно, однако, переформулировать индивидуальную эргодическую теорему Г.Биркгофа таким образом, чтобы выбор подобного преобразования оказался излишним.

С этой целью, заменим в обычной формулировке теоремы чезаровское среднее $\tilde{f}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k t)$ для функции $f\colon T \to \mathbb{R}$ выражением

$$\tilde{f}_n(t) = \frac{1}{d(\Lambda)} \sum f(s), \tag{5.1}$$

где суммирование проводится по всем путям $s \in T$, совпадающим с t начиная с n-ого этажа Γ_n. Вариант стандартного доказательства (ср., например, [46], приложение 3) приводит к следующему важному результату.

Теорема 3 [13]. Пусть M – эргодическая центральная мера в пространстве путей T графа ветвления Γ. Тогда множество путей $t = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n, \dots)$, для которых

(a) существуют пределы

$$\varphi_t(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(\lambda, \nu_n)}{d(\emptyset, \nu_n)}; \quad \lambda \in \Gamma, \tag{5.2}$$

(b) функция $\varphi_t \colon \Gamma \to \mathbb{R}$ гармонична и связана с мерой M по формуле (3.4)

имеет полную M-меру.

Эргодический метод построения границы графа основан на этой теореме.

Следствие. Для любой экстремальной гармонической функции $\varphi \in \mathcal{E}(\Gamma)$ существует такой путь $t \in T$, что φ совпадает с функцией φ_t, определенной по формуле (5.2).

Заслуживает внимания переформулировка этого результата на языке характеров.

Следствие [13]. Пусть $\psi \in \mathrm{ex}\ \mathrm{Char}(G_\infty)$ – экстремальный характер локально - конечной группы $G_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Тогда при $n = 1, 2, \dots$ найдется такой характер ψ_n *неприводимого* представления группы G_n, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n(g)}{\psi_n(e)} = \psi(g); \quad g \in G. \tag{5.3}$$

Путь $t \in T$, для которого существуют пределы (5.2), назовем *регулярным*. Для такого пути предельная функция φ_t гармонична, хотя и не обязательно экстремальна. Согласно предыдущим следствиям, вычисление экстремальных гармонических функций и характеров можно вывести из описания регулярных путей графа ветвления.

1.6. Мультипликативные графы ветвления.

Многие интересные примеры графов ветвления могут быть получены с использованием коммутативных градуированных колец; мы называем эти графы *мультипликативными.*

Например, рассмотрим градуированное кольцо $R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_n$ симметрических полиномов от бесконечного числа переменных. Функции Шура $s_\lambda(x)$, $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ образуют $\mathbb{Z}$-базис в аддитивной подгруппе R_n полиномов степени n. Согласно известной формуле Пьери,

$$s_{(1)} \cdot s_\lambda = \sum_{\Lambda \colon \lambda \nearrow \Lambda} s_\Lambda; \quad \lambda \in \mathcal{Y}, \tag{6.1}$$

и мы приходим к еще одному описанию графа Юнга $\mathcal{Y}$.

Если $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{Y}}$ – любой градуированный базис в кольце R, для которого коэффициенты всех разложений

$$s_{(1)}\cdot f_\lambda=\sum_\Lambda \varkappa(\lambda,\Lambda)\,f_\Lambda;\quad \lambda\in\mathcal{Y} \tag{6.2}$$

неотрицательны, то можно *определить* граф ветвления с множеством вершин $\mathcal{Y}$, объявляя дугами те пары (λ,Λ), для которых $\varkappa(\lambda,\Lambda)\neq 0$, и принимая коэффициенты $\varkappa(\lambda,\Lambda)$ за кратности.

Подчеркнем, что для постановки задачи о гармонических функциях на графе нет никакой необходимости требовать, чтобы кратности дуг были целыми.

Во второй главе диссертации мы изучаем мультипликативные графы ветвления, составляющие двухпараметрическую деформацию графа Юнга $\mathcal{Y}$. При этом в качестве базиса $\{f_\lambda\}$ используются симметрические полиномы Холла - Литтлвуда - Макдональда $P_\lambda(x;\,q,t)$, введенные в [139, 140].

Для общих мультипликативных графов ветвления справедлив следующий *критерий экстремальности.*

Теорема 4 [126]. Рассмотрим гармоническую функцию $\mathrm{Harm}(\Gamma)$ мультипликативного графа ветвления Γ и пусть $\psi\colon R\to\mathbb{R}$ ее продолжение по линейности на кольцо R (т.е. $\psi(f_\lambda)=\varphi(\lambda)$ для $\lambda\in\Gamma$). Тогда следующие условия равносильны:

(a) $\varphi\in\mathcal{E}(\Gamma)$ – крайняя точка симплекса $\mathrm{Harm}(\Gamma)$;

(b) $\psi\colon R\to\mathbb{R}$ – гомоморфизм кольца.

Специальные случаи этого критерия использовались Э.Тома [161] и Д.Войкулеску [165].

Следствие. Для любого мультипликативного графа ветвления Γ граница $\mathrm{Harm}(\Gamma)$ замкнута в симплексе $\mathrm{Harm}(\Gamma)$.

Поскольку все графы ветвления, изучаемые в этой работе, мультипликативны, их граница $\mathcal{E}(\Gamma)$ корректно определена как компактное топологическое пространство, а гармонические функции биективно соответсвуют вероятностным борелевским мерам на границе.

1.7. Конструкция скрещенного произведения.

Выше в п.1 мы связали граф ветвления Γ с произвольным семейством

$$\mathfrak{A}_0\to\mathfrak{A}_1\to\ldots\to\mathfrak{A}_n\to\ldots \tag{7.1}$$

конечномерных полупростых алгебр над полем $\mathbb{C}$. Обратно, предположим, что градуированный граф $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ с ориентированными дугами обладает следующими свойствами:

(a) каждая дуга (λ, Λ) с началом на n-ом этаже $\lambda \in \Gamma_n$ ведет на следующий этаж, т.е. $\Lambda \in \Gamma_{n+1}$;

(b) $\emptyset \in \Gamma_0$ – единственная вершина, в которую не входит ни одна дуга;

(c) из каждой вершины выходит хотя бы одна дуга;

(d) все этажи Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$, конечны.

Тогда нетрудно построить индуктивное семейство (7.1), для которого Γ – граф ветвления. По определению, алгебра $\mathfrak{A}_n$ в этом семействе состоит из матриц вида

$$a = (a_{uv}); \qquad u, v \in T_n(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma_n, \tag{7.2}$$

где через $T_n(\lambda)$ обозначается множество путей длины n с концом в $\lambda \in \Gamma_n$.

Определим *пространство петель* $B = B(\Gamma)$ графа ветвления Γ, как график хвостового отношения эквивалентности ξ в пространстве путей T. Таким образом, точки B – это пары путей $s, t \in T$, совпадающих начиная с некоторого места; последовательность $(s_n, t_n) \in B$ сходится к точке (s, t), если $\lim s_n = s$, $\lim t_n = t$ в T и существует этаж Γ_N, начиная с которого s_n и t_n совпадают при всех n. Пространство петель B локально компактно и вполне несвязно. Предельная LS- алгебра $\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \mathfrak{A}_n$ отождествляется с алгеброй финитных локально - постоянных функций a: $B \to \mathbb{C}$ на пространстве петель. Умножение определяется формулой

$$(a * b)(s, t) = \sum_r a(s, r)\, b(r, t), \tag{7.3}$$

где r пробегает все пути, ξ-эквивалентные путям s, t. Имеется естественная инволюция

$$a^*(s, t) = \overline{a(t, s)}. \tag{7.4}$$

Эта конструкция LS – алгебры является вариантом конструкции скрещенного произведения по фон Нейману, построенного по динамической системе (ср. [150]). Она важна, среди прочего, для построения реализаций фактор - представлений LS-алгебр. Для бесконечной симметрической группы такие реализации были найдены в [14, 15].

Отметим также, что диагональные "матрицы" $a \in \mathfrak{A}_\infty$ образуют в этой алгебре максимальную коммутативную подалгебру, и что все характеры оказываются состояниями типа меры относительно этой подалгебры:

$$\chi(a) = \int_T a(t, t)\, d\mu(t), \tag{7.5}$$

где μ – центральная мера на пространстве путей T.

1.8. Группы размерностей.

Граф ветвления строится по индуктивному семейству алгебр (7.1) и зависит не только от предельной LS-алгебры $\mathfrak{A}_\infty$, но и от выбора аппроксимирующего семейства. Хотя LS-алгебры весьма разнообразны и задача их классификации не слишком содержательна, имеется нетривиальный инвариант именно предельной алгебры $\mathfrak{A}_\infty$, сводящий любые вопросы об LS-алгебрах к вопросам об упорядоченных абелевых группах.

Этот инвариант был предложен Дж.Эллиоттом [88] и представляет собой группу Гротендика $K_0(\mathfrak{A}_\infty)$, снабженную естественной структурой порядка. По определению, образующими этой группы служат классы $[p]$ унитарно эквивалентных проекторов $p \in \mathfrak{A}_\infty$, а соотношения имеют вид

$$[p] + [q] = [p \oplus q], \tag{8.1}$$

где p, q – ортогональные проекторы. Заметим, что в этом описании использовано специфическое свойство K-функтора на классе LS-алгебр: при использовании стандартного определения, группа $K_0(\mathfrak{A}_\infty)$ порождается уже классами подмодулей свободного модуля с одной образующей.

Полугруппа $K_0^+(\mathfrak{A}_\infty)$, порожденная классами $[p]$, является конусом и определяет в группе $K_0(\mathfrak{A}_\infty)$ структуру порядка. Класс единичного проектора $[1] \in K_0^+(\mathfrak{A}_\infty)$ задает порядковую единицу в конусе $K_0^+(\mathfrak{A}_\infty)$, т.е. не содержится ни в каком собственном порядковом идеале группы Гротендика. Дж.Эллиотт получил следующий важный результат.

Теорема 5 [88]. Тройка $(K_0(\mathfrak{A}_\infty), K_0^+(\mathfrak{A}_\infty), [1])$, представляющая собой упорядоченную абелеву группу с выделенной порядковой единицей, является полным инвариантом LS-алгебры $\mathfrak{A}_\infty$.

Инвариант Эллиотта непрерывен по отношению к индуктивным пределам: если $\mathfrak{A}_\infty = \varinjlim \mathfrak{A}_\infty$, то

$$(K_0(\mathfrak{A}_\infty),\, K_0^+(\mathfrak{A}_\infty),\, [1]) = \varinjlim\, (K_0(\mathfrak{A}_n), K_0^+(\mathfrak{A}_n), [1]). \tag{8.2}$$

Вследствие этого, его нетрудно описать через граф ветвления Γ, задающий алгебру $\mathfrak{A}_\infty$.

Функцией размерности на графе Γ назовем любую функцию со значениями в $\mathbb{Z}$, определенную для почти всех вершин графа и удовлетворяющую в области определения уравнению

$$f(\Lambda) = \sum_{\lambda\colon \lambda \nearrow \Lambda} f(\lambda) \varkappa(\lambda, \Lambda), \quad \Lambda \in \Gamma. \tag{8.3}$$

Мы отождествляем две функции f_1, f_2, если они отличаются лишь на конечном множестве вершин. Функция размерности называется *виртуально положительной*, если она неотрицательна для почти всех вершин графа Γ. Выделенным примером виртуально положительной функции служит функция $d(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma$, определенная выше в п. 2.4. Легко видеть, что группа $K_0(\mathfrak{A}_\infty)$ отождествляется с группой (классов) функций размерности, конус $K_0^+(\mathfrak{A}_\infty)$ – с конусом виртуально положительных элементов, а порядковая единица [1] – с функцией d: $\Gamma \to \mathbb{N}$.*)

Замечательным открытием оказалась возможность охарактеризовать инвариант Эллиотта его внутренними свойствами. Напомним (см. [22, 94]), что упорядоченная абелева группа G называется *группой Рисса*, если выполняется *аксиома интерполяции*:

(I) если четыре элемента группы G связаны неравенствами

$$f_i \le g_j \quad \text{при всех} \quad i, j = 1, 2,$$

то найдется интерполирующий элемент $h \in G$, для которого

$$f_i \le h \le g_j \quad \text{при всех} \quad i, j = 1, 2.$$

Эд.Эффрос, Д.Хандельман и Шен показали в [87], что группы размерностей LS-алгебр, по существу, характеризуются как группы Рисса.

Теорема 6 [87]. Класс групп размерностей LS-алгебр совпадает с классом групп Рисса, обладающих следующим свойством *сервантности*:

$$\text{если } g \in G \text{ и } ng \in G^+ \text{ при некотором } n > 0, \text{ то и } g \in G^+.$$

Эта теорема позволила получить ряд интересных контрпримеров в теории C^*-алгебр путем предъявления подходящих групп Рисса (см. [72, 78]). Явное построение соответствующих алгебр представляется весьма затруднительным.

Дуальная характеристика для конуса G^+ положительных элементов группы Рисса G в терминах положительных функционалов на этой группе получена Вершиком и автором [17], теорема 21. В этом же обзоре [17] развита теория колец и модулей Рисса и получен ряд примеров описания групп размерностей. Вычисление группы размерностей для бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ было впервые проведено в [126]. Стоит отметить, что работу Пуанкаре [147] можно интерпретировать, как пример вычисления группы размерностей.

Заметим, что техника групп Рисса, первоначально созданная для описания K-функтора локально - полупростых алгебр, в настоящее время эффективно применяется для классификации автоморфизмов в символической динамике (см. [132], а также недавние яркие результаты C. Skau, T. Giordano и I. Putnum [96]).

---

*) В связи с этим описанием упорядоченную группу $K_0(\mathfrak{A}_\infty)$ называют *группой размерностей*.

1.9. Полуконечные следы и другие инварианты LS-алгебр.

Мы описали в этом параграфе два общих метода работы с алгебрами, которые аппроксимируются полупростыми матричными полалгебрами. Первый основан на изучении комбинаторных свойств графа ветвления, задающего аппроксимацию, второй – на использовании упорядоченных групп Рисса. В принципе, любые вопросы об LS-алгебрах можно рассматривать, применяя обе техники.

Основной для данной работы является задача об описании конечных характеров LS-алгебр. С ней тесно связана проблема *полуконечных* характеров, которые можно понимать, как характеры двусторонних идеалов LS-алгебры. Полуконечные характеры играют ключевую роль в характеризации конуса положительных элементов группы размерностей LS-алгебры (см. [17], гл.2,§4). Впервые задача о полуконечных характерах была поставлена в [126], а в [13] было получено их исчерпывающее описание для симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$.

Определение. *Полуконечным характером* локально - полупростой алгебры $\mathfrak{A}_\infty$ называется функция χ: $\mathfrak{A}_\infty^+ \to [0,\infty]$, определенная на конусе

$$\mathfrak{A}_\infty^+ = \{aa^*\colon a \in \mathfrak{A}_\infty\}, \tag{9.1}$$

и удовлетворяющая четырем аксиомам:

(1) если $a, b \in \mathfrak{A}_\infty^+$, то $\chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)$;

(2) если $a \in \mathfrak{A}_\infty^+$ и $\alpha \in \mathbb{R}^+$, то $\chi(\alpha a) = \alpha\chi(a)$;

(3) если $a \in \mathfrak{A}_\infty^+$, то $\chi(aa^*) = \chi(a^*a)$;

(4) для каждого элемента $a \in \mathfrak{A}_\infty^+$ значение $\chi(a)$ является точной верхней гранью чисел $\chi(b)$ по всем $b \le a$, для которых $\chi(b) < \infty$.

Множество $I(\chi)$ таких $a \in \mathfrak{A}_\infty^*$, что $\chi(aa^*) < \infty$, является самосопряженным двусторонним идеалом в $\mathfrak{A}_\infty$ и называется *идеалом конечности* полуконечного характера. Через $I_0(\chi)$ обозначим ядро χ, т.е. самосопряженный двусторонний идеал тех $a \in I(\chi)$, для которых $\chi(aa^*) = 0$.

Пусть $\mathfrak{A}_\infty$ – скрещенное произведение, построенное по графу ветвления Γ в п.1.7. В $\mathfrak{A}_\infty$ имеется естественная максимальная коммутативная подалгебра, состоящая из диагональных квазиматриц $a(s,t) = \delta_{s,t}\, a(s)$.

Полуконечные характеры, как и конечные, являются состояниями типа меры относительно этой подалгебры. Это означает, что они могут быть записаны в форме

$$\chi(a) = \int_T a(t)\, d\mu(t); \quad a \in \mathfrak{A}_\infty, \tag{9.2}$$

где μ – полуконечная центральная мера на пространстве путей T.

Определение. Центральная мера μ на пространстве путей τ графа ветвления Γ называется *полуконечной*, если любое цилиндрическое множество $A \subset T$ допускает покрытие $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ счетным числом цилиндрических подмножеств A_n конечной μ-меры.

В терминах теории потенциала полуконечный характер задается неотрицательной гармонической функцией $\varphi\colon \Gamma \to [0, \infty]$. Множество $I(\varphi)$ вершин $\lambda \in \Gamma$, для которых $\varphi(\lambda) < \infty$, составляет порядковый идеал частично упорядоченного множества Γ*) , называемый *идеалом конечности* функции φ.

Каждая конечная неотрицательная гармоническая функция φ, определенная на порядковом идеале $I \subset \Gamma$ графа ветвления Γ, допускает каноническое продолжение до конечной или полуконечной гармонической функции $\widetilde{\varphi}$ на всем графе Γ. Это можно сделать по формуле (47) из [128]:

$$\widetilde{\varphi}(\nu) = \sum_{\lambda \nearrow \Lambda} d(\nu, \lambda)\, \varkappa(\lambda, \Lambda)\, \varphi(\Lambda), \tag{9.3}$$

где сумма берется по всем дугам $\lambda \nearrow \Lambda$ графа Γ, для которых $\Lambda \in I$, $\lambda \notin I$.

Полуконечные характеры интересны, как следы фактор - представлений типа II_∞ по фон Нейману, а также в связи со следующей характеристикой конуса в группе Гротендика $K_0[\mathfrak{A}_\infty]$.

Теорема 7 (о положительности) [126]. Функция размерности $f \in K_0[\mathfrak{A}_\infty]$ виртуально положительна тогда и только тогда, когда существует такой порядковый идеал, содержащий f, что для любого полуконечного положительного функционала $\psi\colon K_0[\mathfrak{A}_\infty] \to \mathbb{R}$, конечного и ненулевого на этом идеале, справедливо неравенство $\psi(f) > 0$.

Отметим в заключение ряд аспектов теории LS-алгебр, не затронутых в настоящей диссертации.

Вопрос о классификации двусторонних идеалов в LS-алгебре сравнительно прост. Результаты A.Dooley [83] дают их описание через граф ветвления, а в [17], гл.2, §3 идеалы изучаются в терминах групп Рисса.

Группы когомологий хвостового отношения эквивалентности графа ветвления описаны в [17], гл.1, §12.

Проблеме реализации фактор - представлений LS-алгебр посвящены работы [160], [14, 15, 19]. Другой подход к теории представлений LS-алгебр, связанных с классическими бесконечномерными группами и симметрическими пространствами, развит Г.Ольшанским [53].

---

*) Вершины графа ветвления Γ очевидным образом упорядочены (так что $\emptyset \in \Gamma_0$ – минимальный элемент). Подмножество $I \subset \Gamma$ называется *порядковым идеалом*, если из $\lambda \in I$, $\lambda \nearrow \Lambda$ следует $\Lambda \in I$.

Перейдем теперь к применениям общих методов, изложенных в этом параграфе, к содержательным примерам, в первую очередь к бесконечной симметрической группе.

§2. Характеры бесконечной симметрической группы и граф Юнга

2.1. Работа Э.Тома.

В работе [161] Эльмар Тома впервые поставил и полностью решил задачу о классификации характеров бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$. Новизна ситуации заключалась в том, что эта группа не является *ручной*: она имеет фактор - представления типа II_1 по фон Нейману и обладает характерным набором свойств, "диких" с точки зрения традиционной теории представлений, см. [43], §8.4. В другой статье [162] Э.Тома показал, что большинство дискретных групп – дикие; исключениями являются лишь почти коммутативные группы, т.е. группы, имеющие коммутативную подгруппу конечного индекса.

Для дикой группы классификация неприводимых представлений не является разумной задачей. Центральными объектами становятся фактор - представления конечного типа по фон Нейману. Они обладают всюду определенными следами и допускают адекватную классификацию в терминах своих характеров. Тома первым показал это, получив такую классификацию для бесконечной симметрической группы.

Напомним, что характером дискретной группы G называется любая функция $\chi\colon G\to\mathbb{C}$, обладающая тремя свойствами:

$$\sum_{i,j=1}^{n}\chi(g_ig_j^{-1})\,z_i\bar z_j\ge 0 \tag{a}$$

для любых элементов $g_1,\dots,g_n\in G$ и любых комплексных чисел $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ (положительная определенность);

(b) $\chi(gh)=\chi(hg)$ для всех $g,h\in G$ (центральность);

(c) $\chi(e)=1$, где e – единица группы G (нормировка).

Пространство характеров группы G, снабженное топологией поточечной сходимости, обозначим через $\mathrm{Char}\,(G)$. Это выпуклый компакт; следовательно, каждый характер $\chi\in\mathrm{Char}\,(G)$ является барицентром,

$$\chi(g)=\int_{\mathcal{E}}\chi_\delta(g)\,d\mu(\delta), \tag{1.1}$$

для некоторой меры μ, сосредоточенной на множестве крайних точек $\mathcal{E}(G)=\mathrm{ex}\,\mathrm{Char}\,(G)$. Как мы уже отмечали в §1, разложение с этим свойством определено однозначно, так что пространство $\mathrm{Char}\,(G)$ является симплексом.

Подобно тому как для конечных групп множество $\mathcal{E}(G)$ составлено из нормированных характеров неприводимых представлений, для бесконечных дискретных групп оно состоит из нормированных следов фактор - представлений конечного типа по фон Нейману.

Параметризация множества экстремальных характеров $\mathcal{E}(G)$ группы G составляет важнейшую часть задачи о характерах. Ответ, полученный Тома для бесконечной симметрической группы $G = \mathfrak{S}_\infty$, состоит в следующем.

Теорема 8 [161]. Рассмотрим пространство пар последовательностей

$$\Delta = \left\{\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq 0),\ \beta = (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq 0): \quad \sum(\alpha_i + \beta_i) \leq 1\right\} \quad (1.2)$$

с топологией покоординатной сходимости. Тогда множество экстремальных характеров $\mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ гомеоморфно Δ. Характер $\chi_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$, отвечающий паре $(\alpha, \beta) \in \Delta$, определяется своими значениями

$$\chi_{\alpha;\beta}(w_n) = \sum_i \alpha_i^n + (-1)^{n+1} \sum_i \beta_i^n; \quad n = 2, 3 \ldots \quad (1.3)$$

на одноцикловых подстановках*) по формуле

$$\chi_{\alpha;\beta}(w) = \prod_i \chi_{\alpha,\beta}(w_{n_i}), \quad (1.4)$$

где $w = w_{n_1} w_{n_2} \ldots$ – разложение подстановки $w \in \mathfrak{S}_\infty$ в произведение одноцикловых.

2.2. Вполне положительные последовательности и ряды.

В своем доказательстве Тома сначала редуцирует проблему характеров к чисто аналитической задаче о вполне положительных рядах, а затем решает последнюю,**) опираясь на теорему Неванлинны о распределении значений мероморфных функций.

В задаче о вполне положительных рядах требуется описать вполне положительные бесконечные теплицевы матрицы.

Определение. Матрица $(h_{ij})_{i,j \geq 0}$ *вполне положительна*, если *все* ее миноры конечных порядков неотрицательны.

Вполне положительные матрицы и ядра изучались, в частности, в монографиях [116], [23]. Они возникают в разнообразных задачах анализа и теории вероятностей, например, как обратные матрицы нормальных якобиевых матриц, в теории систем Чебышева, как переходные плотности одномерных марковских процессов. Нас здесь будут интересовать теплицевы матрицы $(h_{j-i})_{i,j \geq 0}$, построенные по односторонней последовательности $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, дополненной нулевыми значениями для

*) Здесь $w_n \in \mathfrak{S}_\infty$ – любая подстановка с единственным нетривиальным циклом длины n.

**) Не зная, что решение было опубликовано за 12 лет до этого Эдреи [84].

отрицательных индексов: $h_n = 0$ при $n < 0$. Последовательность $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *вполне положительной* (английский вариант: Pólya Frequency Sequence), если вполне положительна матрица

$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Можно показать, что это условие следует из формально более слабого требования неотрицательности миноров вида

$$s_\lambda = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \dots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \dots & h_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & \dots & h_{\lambda_n} \end{vmatrix}, \tag{2.2}$$

в которых строки выбираются произвольно, а столбцы идут подряд. Наконец, формальный ряд $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, z^n$ *вполне положителен*, если такова его последовательность коэффициентов $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Замечательное описание вполне положительных рядов, предложенное Шенбергом, доказал Эдреи [84].

Теорема 9. Класс формальных вполне положительных рядов, нормированных условием $H(0) = 1$, совпадает с классом рядов Тейлора для мероморфных функций вида

$$H(z) = e^{\gamma z} \prod_i \frac{1 + \beta_i\, z}{1 - \alpha_i\, z}, \tag{2.3}$$

где $\gamma \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ и $\sum(\alpha_i + \beta_i) < \infty$. В частности, эти ряды имеют ненулевой радиус сходимости.

Труднее всего здесь доказать, что если вполне положительный ряд $H(z)$ задает целую функцию, не имеющую нулей, то $H(z) = e^{\gamma z}$. Этот факт выводится из следующего результата Неванлинны.

Обозначим через $z_1^{(a)}, z_2^{(a)}, \dots$ последовательность всех точек, в которых целая функция f принимает значение $f(z_i^{(a)}) = a$. *Индекс сходимости* значения a определяется как

$$\rho_a = \inf\{\rho \geq 0\colon \sum_i |z_i^{(a)}|^{-\rho} < \infty\}. \tag{2.4}$$

Теорема 10 [144]. Если $\rho_a \leq \rho$ и $\rho_b \leq \rho$ для двух неравных значений $a \neq b$ целой функции f, то порядок f не превосходит ρ.

С. Карлин [116], стр.453, отмечает нежелательность использования столь глубокого, но мало проясняющего суть дела результата в доказательстве теоремы Шенберга – Эдреи. Ниже в разделе 3.3 мы укажем совершенно иное доказательство этой теоремы, основанное на аппроксимативной теории характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$. Идея редукции, примененной Э.Тома, основана на свойстве мультипликативности экстремальных характеров. Оказывается, что если $\chi \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ и $w_1,\ w_2,\ \dots,w_n$ – набор подстановок, нетривиальные циклы которых не пересекаются, то

$$\chi(w_1 \dots w_n) = \chi(w_1)\dots\chi(w_n). \tag{2.5}$$

Таким образом, экстремальный характер группы $\mathfrak{S}_\infty$ вполне определяется своими значениями

$$p_n = \chi((1, 2, \dots, n)); \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{2.6}$$

на одноцикловых перестановках. Удобно воспользоваться формальным производящим рядом $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\, z^n\, /\, n$ и его формальной экспонентой

$$H(z) = e^{S(z)}. \tag{2.7}$$

Коэффициенты рядов $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, z^n$ и $S(z)$ связаны полиномиально; например,

$$h_n = \sum_{r_1+2r_2+\ldots=n} \frac{p_1^{r_1}}{1^{r_1} r_1!}\, \frac{p_2^{r_2}}{2^{r_2} r_2!} \dots, \tag{2.8}$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $\rho = (1^{r_1}\, 2^{r_2} \dots)$ числа n. Тома доказывает, что ряд $S(z)$ задает экстремальный характер $\chi \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ тогда и только тогда, когда ряд $H(z)$ вполне положителен.

2.3. Аппроксимативное описание характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$.

Тома использовал для параметризации характера $\chi \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ нули и полюса степенного ряда

$$H(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \chi(w_n) \frac{z^n}{n}, \tag{3.1}$$

где $w_n = (1, 2, \dots, n) \in \mathfrak{S}_\infty$ – подстановка с единственным нетривиальным циклом длины n. Вершик и автор [13] нашли более адекватную интерпретацию параметров Тома, связанную с аппроксимацией экстремальных характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$ характерами неприводимых представлений конечных симметрических подгрупп $\mathfrak{S}_n$.

Напомним, что неприводимые представления группы $\mathfrak{S}_n$ и их характеры имеют стандартную параметризацию разбиениями натурального числа n. В целях наглядности, разбиение $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$ изображают диаграммой Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, содержащей λ_i клеток в i-ой строке, $i = 1, 2, \ldots, k$. Мы обозначаем через $\mathcal{Y}_n$ множество диаграмм Юнга с n клетками, через π_λ неприводимое представление группы $\mathfrak{S}_n$, отвечающее диаграмме $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, и через $d(\lambda)$, χ^λ его размерность и характер. Заметим, что обозначение $d(\lambda)$ согласуется с введенным ранее в п.2.4 из комбинаторных соображений. Через λ' мы обозначаем сопряженную с λ диаграмму Юнга, строки которой суть столбцы диаграммы λ. По следствию 2 п.1.5 каждый экстремальный характер $\chi \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ допускает поточечную аппроксимацию характерами неприводимых представлений подгрупп $\mathfrak{S}_n$. Детальное описание условий этой аппроксимации таково.

Теорема 11 (об аппроксимации) [13]. Рассмотрим последовательность растущих диаграмм Юнга $\lambda^{(n)} \in \mathcal{Y}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Следующие условия равносильны:

(1) для всех подстановок $w \in \mathfrak{S}_\infty$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\chi^{\lambda^{(n)}}(w)}{d(\lambda^{(n)})} = \chi(w); \tag{3.2}$$

(2) для любых $k = 1, 2, \ldots$ существуют пределы относительных длин строк и столбцов

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n} = \alpha_k; \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(\lambda^{(n)})'_k}{n} = \beta_k. \tag{3.3}$$

Предельный характер в (3.2) совпадает с характером $\chi_{\alpha,\beta}$ в теореме Тома (п.2.1), где за элементы последовательностей α, β взяты пределы (3.3).

Мы называем пределы α, β из (3.3) *частотами* характера $\chi_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$. Частоты доставляют естественную интерпретацию параметров Тома, совершенно не похожую на аналитический смысл этих параметров (нули и полюса производящего ряда).

Приведем эквивалентное описание гармонических функций на графе Юнга $\mathcal{Y}$. Расширенные функции Шура*) выступают здесь в качестве ядра Пуассона из теоремы п.1.3, а вложение

$$i(\lambda) = \left(\frac{f_1}{n}, \ldots, \frac{f_d}{n};\ \frac{g_1}{n}, \ldots, \frac{g_d}{n}\right) \in \Delta; \quad \lambda \in \mathcal{Y}, \tag{3.4}$$

задает "радиальную проекцию" графа $\mathcal{Y}$ на его границу Δ.

Теорема 12 [123]. Каждая гармоническая функция $\varphi \in \mathrm{Harm}(\mathcal{Y})$ на графе Юнга $\mathcal{Y}$ однозначно представима в форме

$$\varphi(\lambda) = \int_\Delta s_\lambda(\alpha;\beta)\, d\mu(\alpha;\beta); \quad \lambda \in \mathcal{Y}, \tag{3.5}$$

*) См. определение расширенных симметрических функций ниже в п.2.4

где ядро $s_\lambda(\alpha;\beta)$ – это расширенная функция Шура, а μ – вероятностная борелевская мера на пространстве частот Δ. Распределение μ является слабым пределом мер $i(M_n)$, где $M_n(\lambda) = d(\lambda)\cdot\varphi(\lambda)$ для $\lambda \in \mathcal{Y}_n$.

Поскольку проблема описания характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$ и вопрос о вполне положительных рядах эквивалентны (на уровне постановки), доказательство теоремы аппроксимации дает новое обоснование результата Шенберга - Эдреи, свободное от использования теории Неванлинны.

Недавно молодой московский математик Андрей Окуньков предложил в [54] третье оригинальное доказательство теоремы Тома. Взаимосвязи всех трех доказательств заслуживают дальнейшего исследования.

Наметим основные идеи нашего доказательства теоремы об аппроксимации.

2.4. Асимптотика числа косых таблиц Юнга.

Путь в графе Юнга, соединяющий пустую диаграмму $\emptyset \in \Gamma_0$ с диаграммой Юнга λ, называется *таблицей Юнга* формы λ. Путь, связывающий произвольные диаграммы $\lambda \subset \nu$, называется *косой таблицей* формы $\nu \setminus \lambda$. Согласно общим обозначениям п.1.4, число косых таблиц равно $d(\lambda,\nu)$.

Применяя эргодический метод из п.1.5, мы должны искать пределы вида

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d(\lambda,\nu^{(n)})}{d(\emptyset,\nu^{(n)})} = \varphi(\lambda); \quad \lambda \in \mathcal{Y}. \tag{4.1}$$

Во второй главе диссертации мы получаем точные формулы для отношений $d(\lambda,\nu)\,/\,d(\emptyset,\nu)$, удобные при переходе к пределу.

Для описания этих формул воспользуемся модифицированными координатами Фробениуса $(f_1,\dots,f_d;g_1,\dots,g_d)$ диаграммы Юнга ν. Их определение должно быть ясно из рис.3 (см. точное определение в основном тексте).

Нам понадобится также продолжить симметрические функции на более широкую область определения. Проще всего это сделать для степенных сумм Ньютона

$$p_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^n.$$

Расширенными степенными суммами назовем следующие полиномы от двух наборов переменных α,β и отдельной переменной γ:

$$p_n(\alpha;\beta;\gamma) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^n + (-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^n; \quad n \geq 2 \tag{4.2a}$$

и

$$p_1(\alpha;\beta;\gamma) = \gamma + \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i \tag{4.2b}$$

при $n = 1$. Прочие симметрические функции однозначно представимы полиномами от степенных сумм; тем самым определены и их расширенные версии. Например, *расширенные функции Шура* можно задать формулой Фробениуса:

$$s_\lambda(\alpha;\beta;\gamma) = \sum_{\rho\in Y_n} \chi^\lambda_\rho \prod_{k\geq 1} \frac{p_k^{r_k}(\alpha;\beta;\gamma)}{k^{r_k}\, r_k!}, \tag{4.3}$$

где $\rho = (1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots)$. Эквивалентные, но чисто комбинаторные, описания расширенных функций Шура можно найти в [128]. Как правило, мы полагаем $\gamma = 1 - \sum(\alpha_i + \beta_i)$; в этом случае будем писать просто $p_n(\alpha;\beta)$, $s_\lambda(\alpha;\beta)$ и т.д.

Расширенные версии *полных однородных* симметрических функций определяются производящим рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(\alpha;\beta;\gamma)\, z^n = e^{\gamma z} \prod_{k\geq 1} \frac{1+\beta_k z}{1-\alpha_k z}. \tag{4.3a}$$

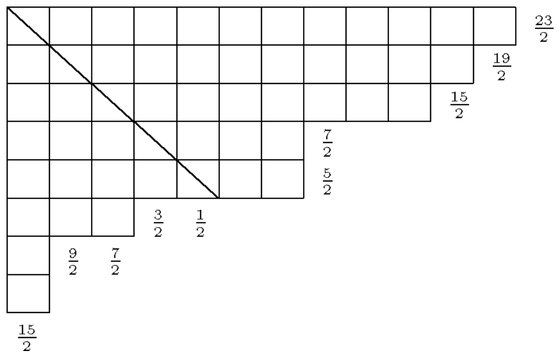


Рис.3 Параметры Фробениуса.

Симметрические полиномы можно вычислять на диаграммах Юнга, применяя расширенные версии этих полиномов к параметрам Фробениуса. Например,

$$s_\lambda(\nu) \stackrel{\text{def}}{=} s_\lambda(f_1, \dots, f_d;\, g_1, \dots, g_d), \tag{4.4}$$

где $(f_1, \dots, f_d;\, g_1, \dots, g_d)$ – параметры Фробениуса диаграммы Юнга ν. Целью этих определений является

Лемма. Для каждой диаграммы Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ существует такой симметрический полином Q_λ степени $\deg Q_\lambda < n$, что

$$\frac{d(\lambda,\nu)}{d(\emptyset,\nu)} = \frac{s_\lambda(\nu) + Q_\lambda(\nu)}{N(N-1)\dots(N-n+1)}, \tag{4.5}$$

где $N = |\nu|$ – число клеток диаграммы $\nu \in \mathcal{Y}_N$.

Пример:

$$\frac{d((2),\nu)}{d(\emptyset,\nu)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sum f_i^2 - \sum g_i^2}{N(N-1)}\right). \tag{4.6}$$

Для прямых диаграмм Юнга существует замечательная *формула крюков* (формула (6.12) в п.3.6) для знаменателя $d(\emptyset,\nu)$. Вместе с леммой эта формула дает удобное выражение для числа косых таблиц Юнга $d(\lambda,\nu)$. По - видимому, этот простой комбинаторный факт не был ранее известен.

Доказательство теоремы аппроксимации легко вытекает из леммы.

2.5. Полуконечные характеры группы $\mathfrak{S}_\infty$.

Групповая алгебра бесконечной симметрической группы $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$ локально - полупроста и имеет каноническую инволюцию

$$a^*(w) = \overline{a(w^{-1})}; \quad a \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]. \tag{5.1}$$

Эта алгебра равномерно плотна в групповой C^*-алгебре $C^*(\mathfrak{S}_\infty)$.

На основе общей теории LS-алгебр в [13] получено описание пространства замкнутых двусторонних идеалов в групповой C^*-алгебре $C^*(\mathfrak{S}_\infty)$. Мы приведем здесь эквивалентное описание порядковых идеалов графа Юнга.

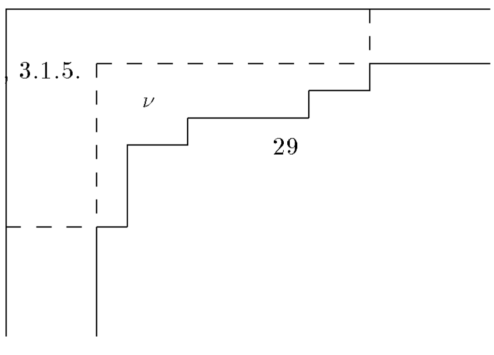
Напомним, что *диаграммой Юнга* называется конечное подмножество $\lambda \subset \mathbb{N}^2$, содержащее вместе с каждой своей "клеткой" $(i,j) \in \lambda$ все меньшие клетки (k,l) с $k \le i$, $l \le j$. Обозначим через $\mathcal{Y}_\infty$ множество *бесконечных диаграмм*, т.е. бесконечных подмножеств $I \subset \mathbb{N}^2$, обладающих тем же свойством. Пример бесконечной диаграммы показан на рис.4. Снабдим $\mathcal{Y}_\infty$ квазикомпактной (не хаусдорфовой) топологией, беря за базис окрестностей множества

$$\mathcal{O}_\lambda = \{I \in \mathcal{Y}_\infty \colon I \supset \lambda\}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}. \tag{5.2}$$

Теорема 13 [13]. Примитивные порядковые идеалы графа Юнга имеют вид

$$\mathcal{Y}_I = \{\lambda \in \mathcal{Y} \colon \lambda \not\subseteq I\}; \quad I \in \mathcal{Y}_\infty. \tag{5.3}$$

Примитивный спектр*) Prim $C^*[\mathfrak{S}_\infty]$ групповой C^*-алгебры гомеоморфен пространству $\mathcal{Y}_\infty$.



*) См. определение в [27], 3.1.5.

Рис.4 Бесконечная диаграмма Юнга.

Перейдем теперь к описанию полуконечных характеров бесконечной симметрической группы. Согласно общей теории, изложенной в п.1.9, достаточно найти *экстремальные* полуконечные гармонические функции на графе Юнга.

Полуконечным характером χ дискретной группы G мы называем любой полуконечный след на групповой C^*-алгебре $C^*[\mathfrak{S}_\infty]$. Для локально - конечных групп общепринятое определение (см. [27], 6.1.1) сводится к приведенному в п.1.9.

Рассмотрим собственную бесконечную диаграмму $I \in \mathcal{Y}_\infty$, $I \neq \mathbb{N}^2$ (рис.4) и пусть k, l – числа ее бесконечных строк и столбцов. Через ν обозначим часть диаграммы I, выступающую за пределы объединения I_0 ее бесконечных строк и столбцов. Выберем два набора неотрицательных чисел

$$\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ \ldots \geq \alpha_k) \quad \text{и} \quad \beta = (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_l), \tag{5.4}$$

для которых $\sum(\alpha_i + \beta_i) = 1$, и определим функцию $\varphi^\nu_{\alpha,\beta}$: $\mathcal{Y} \to [0, \infty]$, полагая

$$\varphi^\nu_{\alpha,\beta}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \not\subseteq I; \\ s_{\lambda\setminus\nu}(\alpha;\beta), & \text{если } \nu \subset \lambda \subset I; \\ \infty, & \text{если } \nu \not\subseteq \lambda, \end{cases} \tag{5.5}$$

где $s_{\lambda\setminus\nu}(\alpha;\beta)$ – расширенная функция Шура.

Теорема 14 [13]. Формула (5.5) задает общий вид (с точностью до положительного множителя) экстремальной полуконечной гармонической функции на графе Юнга. Параметрами служит пара $\alpha;\beta$ конечных наборов неотрицательных чисел с единичной суммой, и непустая диаграмма Юнга $\nu \in \mathcal{Y}$.

2.6. Виртуальная положительность функций на графе Юнга.

Рассмотрим произвольную функцию f_m: $\mathcal{Y}_m \to \mathbb{R}$ и продолжим ее на диаграммы Юнга с бо́льшим числом клеток, пользуясь рекуррентной формулой

$$f_n(\Lambda) = \sum_{\lambda:\, \lambda\nearrow\Lambda} f_{n-1}(\lambda). \tag{6.1}$$

Вектор f_m называется *виртуально положительным*, если функции f_n неотрицательны при достаточно больших n (функция f_m может быть виртуально положительной, даже если сама она не положительна). Описание виртуально положительных функций эквивалентно описанию конуса в K-функторе $K_0(C^*(\mathfrak{S}_\infty))$ бесконечной симметрической группы; оно было получено в [126].

Чтобы сформулировать ответ, определим обычным образом (см. [95]) дифференциальные операторы E_ν, $\nu \in \mathcal{Y}$ в кольце симметрических функций R от бесконечного числа переменных:

$$(E_\nu(P),\, Q) = (P,\, s_\nu \cdot Q); \quad P,\, Q \in R. \tag{6.2}$$

Здесь использовано стандартное скалярное произведение на R, в котором функции Шура s_λ ортонормальны.

Построим по вектору $f_m(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{Y}_m$ симметрический многочлен $P_m \in R$, полагая

$$P(\alpha;\beta) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_m} f_m(\lambda)\, s_\lambda(\alpha;\beta). \tag{6.3}$$

Струей многочлена P назовем совокупность его "производных" $(E_\nu P)(\alpha;\beta)$, $\nu \in \mathcal{Y}$. Для пары натуральных чисел $k, l \geq 0$ (не равных нулю одновременно) и диаграммы Юнга $\nu \in \mathcal{Y}$ обозначим через

$$P^\nu_{k,l}(\alpha;\beta) = (E_\nu P)(\alpha;\beta) \tag{6.4}$$

ограничение струи многочлена P на подмножество

$$\Delta_{k,l} = \left\{(\alpha;\beta) \in \Delta\colon \quad \alpha_{k+1} = 0, \quad \beta_{l+1} = 0, \quad \sum(\alpha_i + \beta_i) = 1\right\}. \tag{6.5}$$

Будем говорить, что струя *положительна*, если

(a) каждое из условий: (1) $\sum \alpha_i + \sum \beta_i < 1$; (2) $\alpha_i > 0$ при всех $i \geq 1$; или (3) $\beta_i > 0$ при всех $i \geq 1$ влечет неравенство $P(\alpha;\beta) > 0$.

(b) если $P^\sigma_{k,l}(\alpha;\beta) \equiv 0$ при всех σ: $\sigma \nearrow \nu$, но $P^\nu_{k,l}(\alpha;\beta) \not\equiv 0$, то $P^\nu_{k,l}(\alpha;\beta) > 0$ для всех $(\alpha;\beta) \in \Delta_{k,l}$.

Теорема 15 ([128], §8.1). Набор вещественных чисел $f_m(\lambda)$, $\lambda \in \mathcal{Y}_m$ стабильно положителен тогда и только тогда, когда струя многочлена (6.3) положительна.

2.7. Ветвление полиномов Макдональда.

В п.1.6 граф Юнга интерпретировался, как граф ветвления функций Шура. Используя другие базисы в кольце симметрических полиномов R, можно получить новые интересные графы ветвления, в том числе обслуживающие теорию характеров спинсимметрической группы $\widetilde{\mathfrak{S}}_\infty$ (группы, линеаризующей проективные характеры симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$), и ветвление классов сопряженности симметрических групп $\mathfrak{S}_n$.

Во второй главе мы покажем, что многомерные интегралы Сельберга можно вычислить, как интегралы Пуассона, представляющие специальные гармонические функции на графах ветвления симметрических полиномов Jack'a.

Интересный класс симметрических многочленов введен недавно И.Макдональдом [139, 140], как обобщение более классических полиномов Холла – Литтлвуда. Полиномы Макдональда $P_\lambda(x;q,t)$ зависят от двух комплексных параметров q,t и могут быть охарактеризованы следующими свойствами:

(a) разложение полиномов P_λ по мономиальным симметрическим функциям $m_\lambda(x)$,

$$P_\lambda(x;q,t) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu}(q,t)\, m_\mu(x), \tag{7.1}$$

задается матрицей $u_{\lambda\mu}$, треугольной относительно доминирования*) диаграмм Юнга $\lambda,\mu \in \mathcal{Y}_n$;

(b) полиномы P_λ ортогональны,

$$(P_\lambda,\ P_\mu)_{q,t} = 0 \quad \text{при } \lambda \neq \mu, \tag{7.2}$$

относительно скалярного произведения, определенного на базисе степенных сумм Ньютона формулой**)

$$(p_\lambda, p_\mu)_{q,t} = \delta_{\lambda\mu}\, z_\lambda \prod_{i\geq 1} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}. \tag{7.3}$$

Для большинства значений параметров q,t многочлены $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{Y}}$ образуют линейный базис в алгебре R. Правило ветвления для них вытекает из результатов Макдональда:

$$s_{(1)}(x)\, P_\lambda(x;q,t) = \sum_{\Lambda\colon\, \lambda\nearrow\Lambda} \varkappa_{q,t}(\lambda,\Lambda) P_\Lambda(x;q,t), \tag{7.4}$$

где кратности ветвления $\varkappa_{q,t}(\lambda,\Lambda)$ суть рациональные функции от параметров, определяемые формулой

$$\varkappa_{q,t}(\lambda,\Lambda) = \prod_b \frac{(1-q^a\, t^{l_i+2})\,(1-q^{a_i+1}\, t^{l_i})}{(1-q^a\, t^{l_i+1})\,(1-q^{a_i+1}\, t^{l_i+1})}. \tag{7.5}$$

Произведение здесь берется по всем клеткам b из столбца диаграммы λ, расположенного над "новой" клеткой, различающей диаграммы λ и Λ. Через $a=a(b)$ обозначается *длина руки* клетки, т.е. число клеток в диаграмме λ, расположенных правее b в той же строке. Аналогично, $l=l(b)$ – *длина ноги* клетки b, т.е. число клеток ниже ее в том же столбце.

---

*) См. определение в [49], §1.

**) Мы используем стандартное обозначение $z_\lambda = 1^{r_1}\, r_1!\, 2^{r_2}\, r_2! \ldots$, где $r_i = r_i(\lambda)$ – число строк длины i в диаграмме Юнга $\lambda\in\mathcal{Y}$.

Начало графа ветвления полиномов Макдональда $\mathcal{Y}(q,t)$ показано на рис.5; оно лишь кратностями дуг отличается от обычного графа Юнга. Лично граф Юнга $\mathcal{Y}$ получается как частный случай при $q=t$.

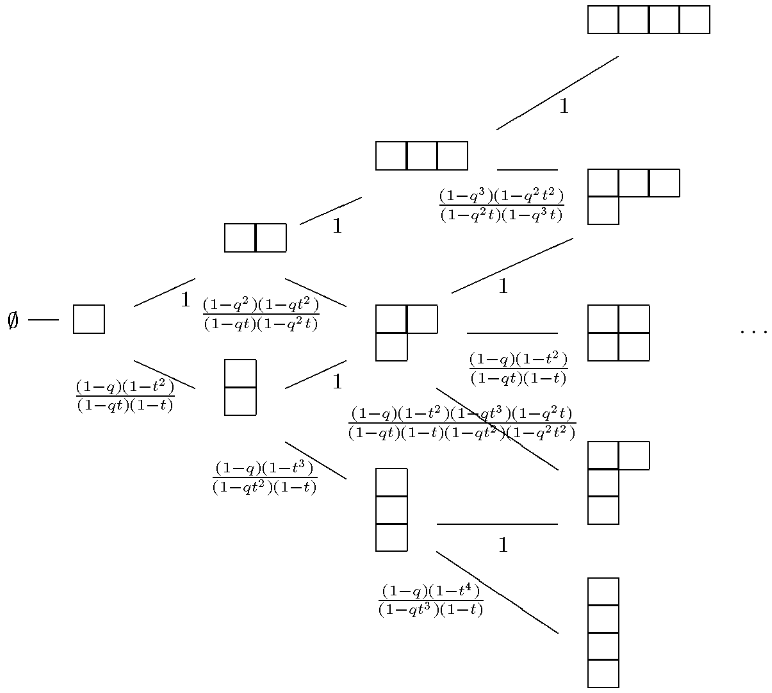


Рис.5 Ветвление полиномов Макдональда.

Если параметры q,t вещественны и заключены в пределах $-1<q,t<1$, то все кратности $\varkappa_{q,t}(\lambda,\Lambda)$, $\lambda\nearrow\Lambda$ положительны и имеет смысл задача о границе, т.е. об описании неотрицательных гармонических функций на графе $\mathcal{Y}(q,t)$.
Критерий экстремальности из п.1.6 сводит эту задачу к следующей.

Обобщенная проблема полной положительности: найти все гомоморфизмы $\psi\colon R\to\mathbb{R}$ алгебры симметрических многочленов R, неотрицательные на базисе полиномов Макдональда:

$$\psi(P_\lambda)\geq 0 \quad \text{при всех} \quad \lambda\in\mathcal{Y}. \tag{7.6}$$

При $q=t$ многочлены P_λ вырождаются в функции Шура, $P_\lambda(x;\,q,t)=s_\lambda(x)$, и вопрос полностью решается теоремой Тома из п.3.1. Во второй главе диссертации мы приводим аргументы в поддержку следующего возможного решения общей проблемы положительности.

Гипотеза [119]. Формальные производящие ряды

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi(h_n)\,z^n \tag{7.7}$$

для гомоморфизмов $\psi\colon R \to \mathbb{R}$, положительных в смысле (7.6), имеют вид

$$\Phi_{\alpha,\beta}(z) = e^{\gamma z} \prod \frac{r(\beta_j z)}{1-\alpha_j z}, \tag{7.8}$$

где

$$r(z) = \prod_{k\geq 0} \frac{(1-q)+(1-t)t^k z}{(1-q)+q(1-t)t^k z}. \tag{7.9}$$

Эта гипотеза полностью доказана в трех случаях:

1) при $q = t$ (теорема Шенберга – Эдреи [84]);

2) при $q = 0, t = 1$ (Кингман [129, 130]);

3) при $q = 0$, $t = -1$ (М.Назаров [51]).

Два последних примера связаны с классическими полиномами Холла – Литтлвуда ([49], гл. III), к которым полиномы Макдональда сводятся при $q = 0$. Кратность дуги (λ, Λ) здесь равна

$$\varkappa_{0,t}(\lambda,\Lambda) = 1 + t + t^2 + \ldots + t^{r-1}, \tag{7.10}$$

где $r = r(\Lambda)$ – число строк длины j в диаграмме Λ, а j – длина строки, содержащей отщепляемую клетку $b = \Lambda \setminus \lambda$.

2.8. Характеры и группа размерностей графа Кингмана.

При значениях параметров $q = 0$, $t = 1$ полиномы Макдональда вырождаются в мономиальные симметрические функции,

$$P_\lambda(x;0,1) = m_\lambda(x); \quad \lambda \in \mathcal{Y}. \tag{8.1}$$

Коэффициенты в формуле Пьери

$$s_{(1)} \cdot m_\lambda = \sum_{\Lambda\colon \lambda \nearrow \Lambda} \varkappa(\lambda,\Lambda) m_\Lambda \tag{8.2}$$

для мономиальных симметрических функций — целые положительные и равны

$$\varkappa(\lambda,\Lambda) = r_j(\Lambda), \tag{8.3}$$

где кратности $r_j(\Lambda)$ определены в подстрочном примечании к п.2.7. Начало графа ветвления показано на рис. 6.

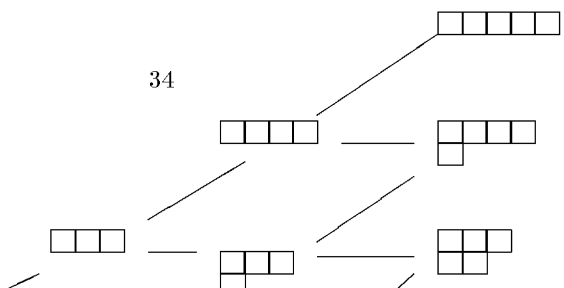


Рис.6 Граф Кингмана.

Условие когерентности семейства вероятностных распределений M_n, заданных на этажах $\mathcal{Y}_n$, принимает для этого графа особенно естественную форму: если начать со случайной диаграммы $\Lambda \in \mathcal{Y}_n$, распределенной с весами $M_n(\Lambda)$, выбрать в ней равномерно распределенную клетку, и удалить крайнюю правую клетку содержащей ее строки, то возникающая диаграмма $\lambda \in \mathcal{Y}_{n-1}$ имеет распределение M_{n-1}.

В статьях [129, 130] Кингман нашел границу этого графа. Мотивировкой для его работы послужил анализ популярного в задачах популяционной генетики распределения Ювенса на симметрической группе $\mathfrak{S}_n$. Мы называем граф $\mathcal{K} = \mathcal{Y}(0, 1)$ *графом Кингмана.*

Совершенно иным способом пришел к графу Кингмана Д.Хандельман в неопубликованной работе [109]. Он заметил, что если диаграммы λ, Λ имеют не более m строк, то коэффициент $\varkappa(\lambda, \Lambda)$ совпадает с кратностью неприводимого представления π_Λ группы $SU(m)$ в разложении тензорного произведения представления π_λ на натуральное представление $\pi_{(1)}$ этой группы.

С точки зрения симметрических групп $\mathfrak{S}_n$, граф $\mathcal{K}$ задает ветвление индуцированных представлений этой группы. Два эквивалентных графа, отражающих ветвление классов сопряженности в группах $\mathfrak{S}_n$ и ветвление разбиений конечного множества, указаны в статье автора [34] и подробнее рассмотрены во второй главе диссертации. Там же мы даем аппроксимативное доказательство теоремы Кингмана о границе графа $\mathcal{K}$ и впервые вычисляем его полуконечные следы и группу размерностей. Сформулируем основные результаты.

Теорема 16 (об интеграле Пуассона). Обозначим через Δ симплекс невозрастающих последовательностей

$$\alpha = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \ldots \geq 0), \tag{8.4}$$

для которых $\gamma = 1 - \sum \alpha_i \geq 0$. Определим вложение $i\colon \mathcal{Y} \to \Delta$, полагая $i(\lambda) = (\,\lambda_1/n,\ \lambda_2/n, \ldots)$ для $\lambda \in \mathcal{Y}_n$. В качестве ядра Пуассона $\Phi(\lambda;\alpha)$ возьмем расширенные мономиальные симметрические функции $m_\lambda(\alpha;\,0;\,\gamma)$, которые выражаются через обычные формулой

$$m_{(1^{r_1},2^{r_2},\ldots)}(\alpha;\,0;\,\gamma) = \sum_{k=0}^{r_1} \frac{\gamma^k}{k!} m_{(1^{r_1-k},2^{r_2},\ldots)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots). \tag{8.5}$$

Тогда справедливы заключения теоремы п.1.3; в частности, каждая гармоническая функция $\varphi \in \mathrm{Harm}\ (K)$ имеет однозначно определенное интегральное представление

$$\varphi(\lambda) = \int_\Delta m_\lambda(\alpha;\, 0;\, 1 - \Sigma\, \alpha_i)\, d\mu(\alpha), \tag{8.6}$$

где μ – вероятностная мера на симплексе Δ.

Теорема 17 (о полуконечных следах). Экстремальные полуконечные неотрицательные гармонические функции на графе Кингмана имеют вид

$$\varphi^\nu_\alpha(\lambda) = (H_\nu m_\lambda)(\alpha;\, 0, \gamma); \quad \lambda \in \mathcal{Y}, \tag{8.7}$$

где H_ν – дифференциальный оператор в кольце симметрических функций R, сопряженный с оператором умножения на полную однородную симметрическую функцию h_ν, ν – непустая диаграмма Юнга, а число ненулевых частот в наборе $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \Delta$ конечно.

Определим *струю* симметрического полинома $P \in R$, как семейство функций

$$\varphi_\nu(\alpha;\, 0;\, \gamma) = (H_\nu P)(\alpha;\, 0;\, \gamma). \tag{8.8}$$

Будем говорить, что струя P *положительна* на подмножестве $\widetilde{\Delta} \subset \Delta$, если из условий

$$\varphi^\sigma(\alpha;\, 0;\, \gamma) \equiv 0 \quad \text{при всех } (\alpha;\, 0;\, \gamma) \in \widetilde{\Delta} \text{ и } \sigma \nearrow \nu$$

и

$$\varphi_\nu(\alpha;\, 0;\, \gamma) \neq 0 \quad \text{на } \widetilde{\Delta}$$

следует, что $\varphi^\nu(\alpha;\, 0;\, \gamma) > 0$ на $\widetilde{\Delta}$.

Теорема 18 (о группе размерностей). Следующие условия на симметрический полином P равносильны:

(a) существует настолько большое n, что все коэффициенты c_Λ в разложении

$$m^n_{(1)} \cdot P = \sum_\Lambda c_\Lambda\, m_\Lambda \tag{8.9}$$

неотрицательны;

(b) струя многочлена P положительна на следующих подмножествах границы Δ при всех $k = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \Delta_k = &\{(\alpha;\, 0;\, 0) \in \Delta\colon \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = 0\}, \\ \Delta'_k = &\{(\alpha;\, 0;\, \gamma) \in \Delta\colon \alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \dots = 0, \quad \gamma \neq 0\}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

2.9. Обобщенные полиномы Макдональда и ортогональные многочлены.

Значительная часть второй главы диссертации посвящена изучению обобщенных полиномов Макдональда. Их определение отличается от данного в п.2.7 определения собственно полиномов Макдональда лишь в двух пунктах:

(1) в формуле (7.1) из п.2.7 треугольность матрицы $u_{\lambda\mu}$ понимается не по доминированию, а по отношению к некоторому сравнимому с ним полному упорядочению множества диаграмм Юнга;

(2) вместо (7.3) используется более общая билинейная форма

$$(p_\lambda, p_\mu)_w = \delta_{\lambda\mu}\, z_\lambda w_\lambda, \tag{9.1}$$

где $w = (w_1, w_2, \dots)$ – произвольная последовательность комплексных чисел и $w_\lambda = w_{\lambda_1}\, w_{\lambda_2} \dots$.

Мы обозначаем обобщенные полиномы Макдональда через $P_\lambda(x;w)$.

Полученные здесь результаты можно условно разбить на три части.

Теоремы первой группы показывают, что ряд свойств, доказанных Макдональдом для его полиномов с использованием специальной техники, справедливы, в должной формулировке, и для гораздо более общих полиномов $P_\lambda(x;w)$. Примером может служить следующая теорема двойственности.

Теорема 19 ([119], теорема 1). Обозначим через Q_λ симметрические полиномы, для которых $(Q_\lambda, P_\mu)_w = \delta_{\lambda\mu}$, а через P'_λ – обобщенные полиномы Макдональда, построенные с использованием сопряженного упорядочения диаграмм Юнга,

$$\lambda \le' \mu \Leftrightarrow \lambda' \ge \mu'. \tag{9.2}$$

Определим автоморфизм ω_w кольца симметрических функций R, полагая

$$\omega_w(p_n) = (-1)^{n+1} w_n\, p_n; \quad n = 1, 2, \dots . \tag{9.3}$$

Тогда

$$\omega_w\, P'_\lambda(x;w) = Q_{\lambda'}(x; 1/w), \tag{9.4}$$

где $1/w = (1/w_1, 1/w_2, \dots)$.

Вторая группа результатов характеризует оригинальные полиномы Макдональда в классе обобщенных. Например, Макдональд установил для своих полиномов (т.е. при $w_n = (1-q^n)\,/\,(1-t^n)$) следующее свойство

(**SO**): если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диаграмма Юнга с n ненулевыми строками и $x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$, то

$$P_\lambda(x;w) = x_1\, x_2 \dots x_n\, P_{\lambda_*}(x;w), \tag{9.5}$$

где $\lambda_* = (\lambda_1 - 1, \dots , \lambda_n - 1)$. Мы показываем, что это свойство не справедливо для более общих последовательностей w.

Теорема 20 ([119], теорема 2). Если свойство (SO) выполняется при $n = 2$, то определяющая последовательность имеет вид

$$w^{(c)} = (cw_1, c^2 w_2, \dots , c^n w_n, \dots), \tag{9.6}$$

где c – константа, а последовательность $\{w_n\}$ определяется одной из следующих формул:

$$w_n = \frac{1 - q^n}{1 - t^n}; \quad n = 1, 2, \dots , \tag{9.7}$$

$$w_n = \alpha; \quad n = 1, 2, \dots , \tag{9.8}$$

$$w_{km} = \alpha; \qquad w_n = 1, \text{ если } n \not\equiv 0 \mod m. \tag{9.9}$$

Заметим, что случаи (9.8), (9.9) – предельные для (9.7).

Результаты третьего типа устанавливают связь многочленов Макдональда $P_\lambda(x;\, q, t)$ с семейством ортогональных многочленов Роджерса – Рамануджана [154]. Последние получаются, если в $P_\lambda(x;\, q, t)$ подставить две переменные, $x = (x_1, x_2)$, а затем наложить соотношение $x_1 x_2 = 1$ и рассмотреть P_λ как полином от одной переменной $y = x_1 + x_2$.

Это наблюдение позволяет связать задачу характеризации истинных полиномов Макдональда среди обобщенных со старой проблемой Фейера [90]. В последней требуется среди полиномов вида

$$R_n(\cos\varphi) = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\, b_k \cos(n - 2k)\, \varphi, \tag{9.10}$$

где $b_0, b_1, \dots$ – числовая последовательность, найти ортогональные по некоторой мере. Проблема Фейера была в основном решена в работах [60], [48]. Мы устанавливаем эквивалентность этих двух задач и исправляем неточности, допущенные в [60], [48] (там оказался пропущенным наш случай (9.9)). Решение основано на следующем неожиданном факте.

Теорема 21 [119]. Общее решение бесконечной системы нелинейных уравнений

$$\begin{gathered}(f_{n-1} - f_n)\,(f_n - f_1)\,(f_{n-1} - f_1)\,(f_3 - f_2) = \\ (f_{n-1} - f_n)\,(f_n - f_2)\,(f_2 - f_1)\,(f_3 - f_1); \quad n = 2, 3, \dots\end{gathered} \tag{9.11}$$

с неизвестными $f_1, f_2, f_3, \dots$ зависит всего от трех произвольных параметров: если $f_2 \neq f_1$ и $f_3 \neq f_1$, то $f_n = f_1 + (f_2 - f_1)\, z_n$, где

$$z_{n+1} = y\, \frac{U_{n-1}(y\,/\,2)}{U_n(y\,/\,2)}, \tag{9.12}$$

а $U_n(\cos\varphi) = \sin(n+1)\varphi \,/\, \sin\varphi$ – полиномы Чебышева второго рода.

В заключение обратим внимание читателя на теорему 6.3 из [119], где найдено новое детерминантное представление некоторых полиномов Макдональда $P_\lambda(x;q,t)$. По–видимому, эти формулы не были известны даже для мономиальных симметрических функций, когда $q=0$ и $t=1$.

§3. Мера Планшереля бесконечной симметрической группы

В третьей главе диссертации подробно изучается наиболее интересный характер группы $\mathfrak{S}_\infty$ – характер ее регулярного представления. Это просто δ-функция в единице, однако дуальное описание на языке графа ветвления приводит к весьма содержательному *процессу планшерелевского роста* диаграмм Юнга.
Наш главный результат в третьей главе – центральная предельная теорема для меры Планшереля.

3.1. Определение меры Планшереля.
Мерой Планшереля *конечной* группы G называют*) вероятностное распределение на ее двойственном объекте**) $\widehat{G}$, веса которого пропорциональны квадратам размерностей неприводимых представлений. Из формулы Бернсайда

$$\sum_{\pi\in\widehat{G}} \dim^2 \pi = |G| \tag{1.1}$$

ясно, что веса меры Планшереля имеют вид

$$M(\pi) = \frac{\dim^2 \pi}{|G|}; \quad \pi \in \widehat{G}. \tag{1.2}$$

Теорема Планшереля для обычного преобразования Фурье

$$\widehat{f}(\pi) = \sum_{w\in G} \pi(w)\, f(w); \quad \pi \in \widehat{G} \tag{1.3}$$

имеет вид

$$\sum_{w\in G} f(w)\overline{g(w_{-1})} = \sum_{\pi\in\widehat{G}} \mathrm{tr}(\widehat{f}(\pi)\,\widehat{g}(\pi)^*)\, M(\pi) \tag{1.4}$$

(где $\mathrm{tr}(a) = \frac{1}{n}\sum a_{ii}$ – нормированный след матрицы $a \in M_n\mathbb{C}$), а обращение Фурье записывается в форме

$$f(w) = \sum_{\pi\in\widehat{G}} \mathrm{tr}(\widehat{f}(\pi)\,\pi\,(w)^*)\, M(\pi). \tag{1.5}$$

Если функции f, g центральны, то матрицы $\widehat{f}(\pi)$, $\widehat{g}(\pi)$ скалярные, и их удобно рассматривать как числовые функции на $\widehat{G}$.
Формулы (1.3), (1.4), (1.5) принимают вид

$$\widehat{f}(\pi) = \sum_{w\in G} \frac{\chi^\pi(w)}{\dim \pi} f(w), \tag{1.6}$$

*) См., например, [43], п.12.4.
**) Т.е. на конечном множестве классов эквивалентности унитарных неприводимых представлений.

$$\sum_{w\in G} f(w)\overline{g(w_{-1})} = \sum_{\pi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\pi)\,\overline{\widehat{g}(\pi)}\,M(\pi), \tag{1.7}$$

$$f(w) = \sum_{\pi\in\widehat{G}} \frac{\overline{\chi^\pi(w)}}{\dim\pi}\widehat{f}(\pi)\,M(\pi), \tag{1.8}$$

где $\chi^\pi(w)/\dim\pi$ – нормированный характер представления $\pi\in\widehat{G}$. В частности, при $w=e$ получаем тождество

$$f(e) = \sum_{\pi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\pi)\frac{\dim^2\pi}{|G|}. \tag{1.9}$$

Для *бесконечной* дискретной группы G также имеется стандартное определение меры Планшереля, как вероятностной меры на дуальном пространстве $\widehat{G}$. Однако для диких групп, подобных группе $\mathfrak{S}_\infty$, оно малосодержательно. Мы предлагаем новое определение меры Планшереля для класса локально - конечных групп.
Зафиксируем аппроксимацию $G_\infty = \varinjlim G_n$ локально - конечной группы G_∞ конечными подгруппами G_n и пусть Γ – соответствующий граф ветвления.

Определение. *Мера Планшереля* группы G_∞ (относительно выбранной аппроксимации) задается марковской цепью на графе ветвления Γ, определенной переходными вероятностями

$$p(\lambda,\Lambda) = \frac{|G_n|}{|G_{n+1}|}\cdot\frac{\varkappa(\lambda,\Lambda)\dim\pi_\Lambda}{\dim\pi_\lambda}; \quad \text{где} \quad \lambda\in\Gamma_n,\,\Lambda\in\Gamma_{n+1} \quad \text{и} \quad \lambda\nearrow\Lambda. \tag{1.10}$$

Начальным состоянием считается единственная вершина $\emptyset\in\Gamma_0$. Условимся называть эту цепь *процессом планшерелевского роста.*
Корректность определения следует из подсчета размерностей индуцированного представления

$$\operatorname{Ind}\,_{G_n}^{G_{n+1}}\pi_\lambda = \bigoplus_{\Lambda:\,\lambda\nearrow\Lambda}\varkappa(\lambda,\Lambda)\,\pi_\Lambda$$

двумя способами. Получаем, что

$$\frac{|G_{n+1}|}{|G_n|}\,\dim\pi_\lambda = \sum_{\Lambda:\,\lambda\nearrow\Lambda}\varkappa(\lambda,\Lambda)\,\dim\Lambda, \tag{1.11}$$

откуда $\sum_\Lambda p(\lambda,\Lambda)=1$.
Обозначим через M_n распределение состояния $\lambda\in\Gamma_n$ процесса планшерелевского роста после n шагов. Нетрудно проверить, что M_n совпадает с мерой Планшереля для группы G_n,

$$M_n(\lambda) = \frac{\dim^2\pi_\lambda}{|G_n|}, \tag{1.12}$$

что поясняет выбор термина.

3.2. Типичная форма больших случайных диаграмм Юнга.

Мера Планшереля бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ задается марковской цепью на графе Юнга с переходными вероятностями

$$p(\lambda, \Lambda) = \frac{d(\Lambda)}{(n+1)\,d(\lambda)}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n,\, \Lambda \in \mathcal{Y}_{n+1}, \quad \lambda \nearrow \Lambda. \tag{2.1}$$

Это одна из эргодических центральных мер на пространстве бесконечных таблиц Юнга T; она отвечает нулевым частотам $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = 0$.

Важные результаты об асимптотике формы диаграмм Юнга в процессе планшерелевского роста получены Вершиком и автором [12], [18] и независимо Логаном и Шеппом [138]. Эти результаты служат мотивировкой для большинства проблем, затронутых в настоящей диссертации.

Предельную форму диаграмм Юнга удобно обсуждать, несколько изменив их первоначальное описание. Следуя комбинаторной традиции, мы считали до сих пор, что диаграммы Юнга служат лишь для наглядного изображения разбиений натуральных чисел.*) Теперь мы изменим точку зрения на диаграммы, рассматривая их как кусочно - линейные *функции* (рис. 7).

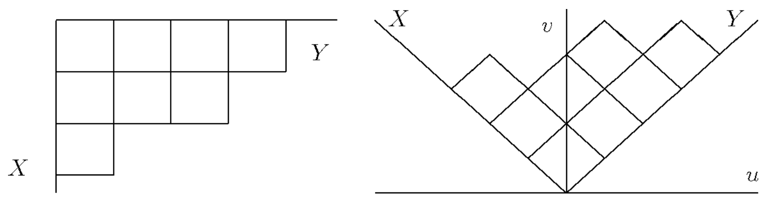


Рис.7 Два способа изображения диаграмм Юнга.

Определение. *Диаграммой Юнга* называется любая непрерывная кусочно – линейная функция $v = \omega(u)$, обладающая тремя свойствами:

(1) $\omega'(u) = \pm 1$

(2) $\omega(u) = |u|$ для достаточно больших $|u|$

(3) точки минимума $x_1, \ldots, x_d$ и точки максимума $y_1, \ldots, y_{d-1}$ функции ω являются целыми.

Например, одноклеточная диаграмма Юнга из $\omega \in \mathcal{Y}_1$ изображается функцией $\omega(u) = \max(|u|,\, 2 - |u|)$. Вообще, число клеток диаграммы $\omega \in \mathcal{Y}_n$ можно записать в виде

$$n = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\omega(u) - |u|)\, du = \sum_{i<j} (y_i - x_i)\,(x_j - y_{j-1}). \tag{2.2}$$

*) Другой общепринятый способ изображения разбиений – диаграммы Ферре (см.[49], стр.12) – вовсе непригоден для нащих целей.

Чтобы получить предельную функцию для растущих диаграмм Юнга, следует равномерно сжимать их таким образом, чтобы площадь подграфика (2.2) оставалась единичной.

Рассмотрим среднее значение, относительно меры Планшереля M_n, для сжатых диаграмм Юнга с n клетками:

$$\omega_n(u) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\omega \in \mathcal{Y}_n} \omega(u\sqrt{n})\, M_n(\omega). \tag{2.3}$$

Теорема 22. Существует равномерный предел $\Omega(u) = \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(u)$ средних (2.3), совпадающий с функцией

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}), & \text{если } |u| \le 2 \\ |u|, & \text{если } |u| \ge 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

Поскольку $\Omega'(u) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{u}{2}$, мы будем называть функцию $\Omega(u)$ (а также любое утверждение, в котором говорится о равномерном приближении к этой функции) *законом арксинуса.*

Поведение средних вытекает из следующего усиленного закона больших чисел.

Теорема 23 [12]. Равномерный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n(u\sqrt{n}) = \Omega(u), \tag{2.5}$$

где Ω – закон арксинуса (2.4), существует для почти всех по мере Планшереля бесконечных таблиц Юнга $t = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots) \in T$.

На рис.8 показан график функции Ω вместе со случайной стоклеточной диаграммой Юнга, полученной при компьютерном моделировании меры Планшереля.

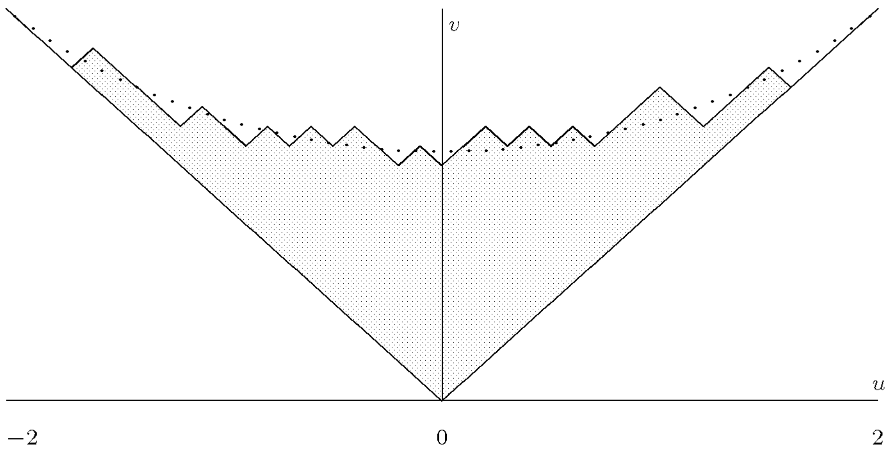


Рис.8 Закон арксинуса.

Замечательным следствием теорем о предельной форме диаграмм Юнга является решение так называемой проблемы Улама [163] о максимальной длине $L_n(x)$ возрастающей подпоследовательности $x = \{x_j\}_{j=1}^n$.

Следствие [12], [18]. Пусть x – последовательность независимых случайных величин с общим непрерывным распределением. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Prob} \left\{ x\colon \left| \frac{L_n(x)}{\sqrt{n}} - 2 \right| < \varepsilon \right\} = 1 \tag{2.6}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство использует не менее замечательный алгоритм Робинсона – Шенстеда – Кнута (см. [152, 157, 133], а также [45]), который можно рассматривать как комбинаторный вариант преобразования Фурье для группы $\mathfrak{S}_n$. Подробнее об использовании этого алгоритма в теории характеров бесконечной симметрической группы см. [127].

Закон арксинуса справедлив и для диаграмм Юнга максимальной размерности.

Теорема 24 [18]. Пусть ω_n – любая диаграмма Юнга, реализующая максимальное значение функции $d(\omega) = \dim \pi_\omega$ на множестве $\mathcal{Y}_n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_n(u\sqrt{n}) = \Omega(u).$$

3.3. Закон арксинуса для распределений тензоров по типам симметрии.

В пространстве $V_{n,m} = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathbb{C}^m$ тензоров степени n над пространством $\mathbb{C}^m$ действует подстановками сомножителей симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$. Там же представлена унитарная группа $U(m)$. Пространство $V_{n,m}$ распадается в прямую сумму подпространств $V_{n,m}(\lambda)$, примарных относительно каждого из действий и неприводимых относительно совместного действия группы $\mathfrak{S}_n \times U(m)$:

$$V_{n,m} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_{n,m}} V_{n,m}(\lambda). \tag{3.1}$$

Здесь λ пробегает множество $\mathcal{Y}_{n,m}$ диаграмм Юнга с n клетками и не более чем m строками. Говорят, что тензоры, принадлежащие подпространству $V_{n,m}(\lambda)$, имеют *тип симметрии* λ.

Обозначим через

$$M_{n,m}(\lambda) = \frac{\dim V_{n,m}(\lambda)}{\dim V_{n,m}}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}_{n,m} \tag{3.2}$$

относительную размерность примарной компоненты $V_{n,m}(\lambda)$. Веса $M_{n,m}(\lambda)$ задают вероятностную меру на $\mathcal{Y}_{n,m}$ – распределение тензоров по типам симметрии. Оказывается, что это распределение при $n, m \to \infty$ подчиняется закону арксинуса.

Теорема 25 [31]. Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество диаграмм

$$\mathcal{Y}_{n,m}(\varepsilon) = \left\{ \omega \in \mathcal{Y}_{n,m} \colon \sup_u \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \omega(u\sqrt{n}) - \Omega(u) \right| < \varepsilon \right\}, \tag{3.3}$$

которые после сжатия в $\sqrt{n}$ раз равномерно близки к функции (2.4). Предположим, что $n, m \to \infty$ таким образом, что существует предел $\lim n/m = \gamma > 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} M_{n,m}(\mathcal{Y}_{n,m}(\varepsilon)) = 1. \tag{3.4}$$

Совершенно иная асимптотика имеет место в предположении, что $n \to \infty$, а m остается постоянным. Определим приведенные длины строк диаграммы Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}_{n,m}$, полагая

$$x_k = \frac{\lambda - n/m}{\sqrt{n}}; \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{3.5}$$

Тогда вектор $x = (x_1, \dots, x_m)$ лежит в конусе

$$C_m = \left\{ x \colon x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_m; \quad \sum x_j = 0 \right\}. \tag{3.6}$$

Теорема 26 [31]. Предположим, что m фиксировано и $n \to \infty$. Тогда совместное распределение приведенных длин строк относительно меры $M_{n,m}$ на $\mathcal{Y}_{n,m}$ слабо сходится к абсолютно непрерывной мере M_m на конусе C_m, с плотностью

$$\varphi_m(x) = A_m \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2\, e^{-\frac{m}{2}\sum x_k^2}, \tag{3.7}$$

где

$$A_m = \frac{m^{(m-1)m/2}}{1!\,2!\dots(m-1)!}\,\left(\frac{m}{2\pi}\right)^{(m-1)/2} \tag{3.8}$$

– нормировочная константа.

Стандартное рассуждение, использующее электростатическую интерпретацию нулей классических ортогональных многочленов*) дает форму наивероятнейшей диаграммы с m строками.

Следствие. Пусть m фиксировано и $n \to \infty$. Обозначим через $\lambda^{(n)}$ диаграмму из $\mathcal{Y}_{n,m}$, для которой тензоры симметрии $\lambda^{(n)}$ наиболее вероятны. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_k^{(n)} - n/m}{\sqrt{n}} = \frac{z_k}{\sqrt{m}}; \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

где $z_1, \dots, z_m$ – корни многочлена Эрмита $H_m(z) = (-1)^m e^{z^2/2}(e^{-z^2/2})^{(m)}$.

3.4. Гауссовский предел для меры Планшереля симметрической группы.

Обозначим через χ^λ характер неприводимого представления группы $\mathfrak{S}_n$, связанный с диаграмммой Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, и пусть χ_ρ^λ – его значение на классе сопряженных подстановок с цикловой структурой $\rho = (1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots)$. При фиксированном значении $\rho \in \mathcal{Y}_n$ характер является случайной величиной, определенной на множестве $\mathcal{Y}_n$ с мерой Планшереля M_n. Нас интересует асимптотика распределения этой величины при $n \to \infty$.

Чтобы существовало нетривиальное предельное распределение, значения характеров необходимо подходящим образом нормировать. Рассмотрим случайные величины

$$\varphi_k(\lambda) = n^{k/2}\,\frac{\chi^\lambda_{(k,1^{n-k})}}{\dim\lambda}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n, \tag{4.1}$$

отвечающие значениям характеров на подстановках с единственным нетривиальным циклом длины $k = 2, 3, \dots$.

---

*) См. [56], стр.150.

Теорема 27 [121]. При любом выборе чисел $x_2, x_3, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} M_n\{\lambda \in \mathcal{Y}_n : \varphi_k(\lambda) < x_k,\ \ 2 \le k \le m\} = \prod_{k=2}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{x_k} \exp(-\frac{y_k^2}{2k})\, dy_k. \quad (4.2)$$

Этот результат можно рассматривать, как центральную предельную теорему для распределений характеров группы $\mathfrak{S}_n$ относительно меры Планшереля. Он означает, что случайные величины (4.1) асимптотически независимы и имеют гауссовские предельные распределения с нулевым средним и дисперсией k.

Формула (4.2) является уточнением теоремы из п.3.2 о предельной форме типичных по мере Планшереля диаграмм Юнга (которую можно сравнить с законом больших чисел). Она описывает предельный гауссовский процесс, к которому сходятся отклонения случайной диаграммы от ее предельной формы. Точная формулировка (эквивалентная предыдущей теореме) такова.

Теорема 28 [121]. Рассмотрим случайную функцию

$$\Delta_\omega^{(n)}(x) = \omega(x\sqrt{n}) - \sqrt{n}\,\Omega(x); \quad x \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathcal{Y}_n, \quad (4.3)$$

задающую уклонение диаграммы Юнга $\omega \in \mathcal{Y}_n$ от предельной ожидаемой формы (2.4). При $n \to \infty$ случайный процесс (4.3) сходится по вероятности к гауссовскому случайному процессу

$$\Delta(x) = \sum_{m\ge 1} \xi_m\, u_m(x)/\sqrt{m+1}, \quad (4.4)$$

где

$$u_m(2\cos\theta) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \quad (4.5)$$

– полиномы Чебышева второго рода и $\xi_1, \ldots, \xi_m, \ldots$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Корреляционная функция процесса (4.4) имеет вид

$$B(2\cos\varphi, 2\cos\psi) = \frac{1}{2\sin\varphi\sin\psi} \ln\left(\frac{\sin|\varphi+\psi|/2}{\sin|\varphi-\psi|/2}\right) - 1. \quad (4.6)$$

Новые интересные переформулировки можно получить, переходя к другим функционалам от диаграммы Юнга.

Обозначим через $t_m(x)$ ортогональные полиномы Чебышева I рода,

$$t_m(2\cos\theta) = 2\cos m\theta, \quad (4.7)$$

и пусть

$$t_m(\lambda) = \sum_{j=1}^{d} t_m\left(\frac{f_j(\lambda)}{\sqrt{n}}\right) + (-1)^{m+1}\sum_{j=1}^{d} t_m\left(\frac{g_j(\lambda)}{\sqrt{n}}\right); \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n, \tag{4.8}$$

где $(f_1, \dots, f_d; g_1, \dots, g_d)$ – параметры Фробениуса диаграммы λ, см. п.2.4.

Теорема 29 [121]. Планшерелевское среднее случайных величин t_m равно

$$< t_{2m+1} >_n = \frac{(-1)^m(2m+1)}{m(m+1)}\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \tag{4.9}$$

для нечетных индексов и нулю для четных. При $n \to \infty$ центрированные случайные величины $\overset{\circ}{t}_m(\lambda) = t_m(\lambda) - < t_m >_n;\ \lambda \in \mathcal{Y}_n$, асимптотически независимы и нормальны. Предельная вариация для t_m равна m.

Напомним, что *содержанием* клетки b, расположенной на пересечении i-ой строки и j-ого столбца диаграммы Юнга λ, называется число $c(b) = j - i$.

Совокупность содержаний всех клеток диаграммы однозначно ее характеризует и может рассматриваться как еще одна система параметров. Положим

$$u_m(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{b\in\lambda} u_m\left(\frac{c(b)}{\sqrt{n}}\right); \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n, \tag{4.10}$$

где u_m – ортогональные полиномы Чебышева II рода (4.5).

Теорема 30 [121]. Планшерелевское среднее значение случайной величины u_m имеет асимптотику

$$< u_{2m} >_n = \frac{(-1)^m}{m(m+1)}\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \tag{4.11}$$

для четных индексов и равно нулю для нечетных. При $n \to \infty$ центрированные величины $\overset{\circ}{u}_m(\lambda) = u_m(\lambda) - < u_m >_n;\ \lambda \in \mathcal{Y}_n$ асимптотически независимы и нормальны. Предельная вариация для u_m равна $1/(m+1)$.

Доказательства приведенных здесь теорем основаны на изучении введенной в [121] градуировки на алгебре классов сопряженности в конечных симметрических группах. Полное описание сверток классов сопряженности считается трудной комбинаторной проблемой, см. [89], [101].

3.5. Блуждание по крюкам и его q-аналоги.

В работах [102], [103] Грин, Нейенхауз и Вилф нашли замечательный комбинаторный алгоритм, названный ими блужданием по крюкам (hook walk). Алгоритм предназначался для двух целей: для доказательства формулы крюков (см. ниже п.3.6, формула (6.12)) и для порождения случайных таблиц Юнга, распределенных по мере Планшереля. Более точно, их алгоритм позволяет моделировать переходные вероятности процесса планшерелевского роста диаграмм.

Оригинальный алгоритм состоит в следующем. Поместим диаграмму Юнга λ в достаточно просторный прямоугольник Π (рис.9). Начав с правой нижней клетки прямоугольника, выберем, с равной вероятностью, любую клетку, расположенную в дополнении диаграммы $\Pi \setminus \lambda$ выше в том же столбце или левее в той же строке, что и исходная. После нескольких повторений этой процедуры процесс завершается в одной из внешних угловых клеток b диаграммы λ. Обозначим через Λ диаграмму Юнга, полученную присоединением клетки b к λ. Тогда вероятность перехода $\lambda \nearrow \Lambda$ совпадает с переходной вероятностью процесса планшерелевского роста:

$$\mathrm{Prob}\,\{\lambda \nearrow \Lambda\} = \frac{d(\Lambda)}{(n+1)\,d(\lambda)}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n. \tag{5.1}$$

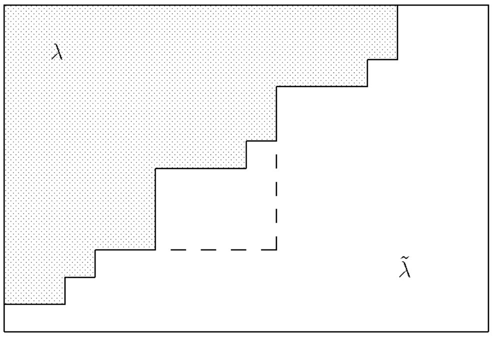


Рис.9 Блуждание по крюкам.

В статье [36] показано, что алгоритм блуждания по крюкам можно приспособить для порождения более общих центральных мер. Несколько загадочным остается тот факт, что в точности тот же класс центральных мер можно использовать для построения топологических инвариантов узлов по схеме Джоунса – Окнеану, см. [114], [93]. Посредником служат характеры бесконечномерной алгебры Гекке, обладающие свойством А.А.Маркова (мл). Частотное описание всех таких характеров было получено Вершиком и автором в [19].

Центральная эргодическая мера $M^{\alpha,\beta}$ на графе Юнга названа в [36] *узловой*, если ее частоты (параметры Тома) α, β удовлетворяют одному из следующих условий:

(a) частоты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ образуют конечную или бесконечную геометрическую прогрессию с единичной суммой, $\beta \equiv 0$;

(b) то же с переменой ролей α и β;

(c) частоты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ образуют пару бесконечных геометрических прогрессий с общим знаменателем $0 < q < 1$ и единичной суммой $\sum(\alpha_i + \beta_i) = 1$;

(d) $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 0$ (мера Планшереля).

В третьей главе диссертации мы описываем обобщенный алгоритм блуждания по крюкам, порождающий все узловые центральные меры. Параллельно получается следующий q-аналог формулы крюков из [92].

Теорема 31 [36]. Снабдим дуги графа Юнга $\mathcal{Y}$ "кратностями"

$$\varkappa_q(\lambda, \Lambda) = \frac{1 + q + \ldots + q^n}{\sum\limits_{b \in \Lambda} q^{c(\Lambda \setminus \lambda) - c(b)}}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n,\ \lambda \nearrow \Lambda \tag{5.2}$$

и определим "размерности" рекуррентно, полагая $d_q(\emptyset) = 1$ и

$$d_q(\Lambda) = \sum_{\lambda : \lambda \nearrow \Lambda} d_q(\lambda)\, \varkappa_q(\lambda, \Lambda). \tag{5.3}$$

Тогда

$$d_q(\lambda) = q^{n(\lambda)} \frac{[n]_q!}{\prod\limits_{b \in \lambda} [h(b)]_q}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n, \tag{5.4}$$

где $[k]_q = 1 + q + \ldots + q^{k-1}$; $[k]_q! = [1]_q\, [2]_q, \ldots, [k]_q$; $h(b)$ – длина крюка*) клетки b в диаграмме λ и $n(\Lambda) = \sum_{k \geq 1} (k-1)\, \Lambda_k$.

При $q = 1$ кратности дуг равны единице, а формула (5.4) вырождается в обычную формулу крюков.

3.6. Случайные таблицы Юнга и интегралы Сельберга.

А.Сельберг ([156], см. также [69]) вычислил некоторые многомерные интегралы, в том числе интеграл

$$\begin{aligned} \int\limits_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0 \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1}} \cdots \int \prod_{1 \leq i < j \leq k} |\alpha_i - \alpha_j|^{2\theta} \prod_{j=1}^{k} \alpha_j^{A-1}\, d\alpha_1 \ldots d\alpha_{k-1} = \\ = \frac{1}{\Gamma(kA + k(k-1)\theta)\, \Gamma^k(\theta + 1)} \prod_{j=1}^{k} \Gamma(A + (k-j)\theta)\, \Gamma(j\theta + 1). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Этот и другие подобные интегралы*) обсуждаются в работах [151], [66].

В диссертации предлагается новый подход к вычислению интегралов Сельберга. Суть его в том, что эти интегралы интерпретируются как интегралы Пуассона

*) Длиной крюка называют число клеток справа от b в той же строке и ниже b в том же столбце.

*) Мы называем их интегралами Сельберга.

(3.5) из §1, предствляющие специальные гармонические функции на графе Юнга и его деформациях.

Поясним эту идею на простом модельном примере с бета-интегралом Эйлера

$$\frac{\Gamma(A+B)}{\Gamma(A)\,\Gamma(B)} \int_0^1 p^{A-1}\,(1-p)^{B-1}\,dp = 1. \tag{6.2}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$\varphi(k,n) = \frac{(A)_k\,(B)_{n-k}}{(A+B)_n}; \quad 0 \le k \le n, \tag{6.3}$$

где $(c)_n = c(c+1)\dots(c+n-1)$ – символ Похгаммера, является гармонической функцией на треугольнике Паскаля (см. п.1.4). Как и все гармонические функции, она представима интегралом Пуассона (3.5), §1. Плотность представляющей меры получается как "радиальный предел"

$$\lim_{n\to\infty} n\,M_n([np],n) = \frac{\Gamma(A+B)}{\Gamma(A)\,\Gamma(B)}\,p^{A-1}\,(1-p)^{B-1} \tag{6.4}$$

вероятностных распределений

$$M_n(k,n) = \binom{n}{k} \frac{(A)_k\,(B)_{n-k}}{(A+B)_n}; \quad 0 \le k \le n, \tag{6.5}$$

откуда непосредственно следует (6.2).

Чтобы получить интегралы Сельберга, перейдем от треугольника Паскаля к усеченному графу Юнга $\mathcal{Y}(k)$ и его деформациям. По определению, вершинами графа $\mathcal{Y}(k)$ служат диаграммы Юнга с не более чем k строками, а дуги – те же что и в полном графе Юнга $\mathcal{Y}$.

Вместо когерентной системы распределений (6.5) рассмотрим семейство**)

$$M_n^{(k,A)}(\lambda) = \frac{n!}{(kA+k(k-1))_n} \prod_{b\in\lambda} \frac{(k+c(b))\,(A+k-1+c(b))}{h^2(b)}, \tag{6.6}$$

зависящее от параметра $A > 0$. Мы проверим, что эти распределения соответствуют переходным вероятностям

$$p^{(k,A)}(\lambda,\Lambda) = \frac{(c(\Lambda\setminus\lambda)+k)\,(c(\Lambda\setminus\lambda)+A+k-1)}{|\lambda|+kA+k(k-1)} \cdot \frac{d(\Lambda)}{|\Lambda|\,d(\lambda)}, \tag{6.7}$$

**) Через $c(b) = j - i$ мы обозначаем *содержание* клетки $b \in \lambda$ на пересечении i-той строки и j-ого столбца диаграммы Юнга λ.

откуда следует, что формула (6.6) действительно задает когерентное семейство вероятностных распределений на графе $\mathcal{Y}(k)$. Переходя к пределу $n \to \infty$ при условии, что

$$\frac{\lambda_j^{(n)}}{n} \to \alpha_j; \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{6.8}$$

находим плотность представляющей меры

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-1} M_n^{(k,A)}(\lambda^{(n)}) = C_k \prod_{1\le i<j\le k} |\alpha_i - \alpha_j|^2 \prod_{j=1}^{k} \alpha_j^{A-1}, \tag{6.9}$$

где C_k – нормировочная константа

$$C_k = \frac{\Gamma(kA + k(k-1))}{\prod_{j=1}^{k} \Gamma(A+k-j)\,\Gamma(j)}. \tag{6.10}$$

Общая теорема о пуассоновском интеграле (п.1.3) позволяет заключить, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\ge 0\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_k=1}} \cdots \int s_\lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \prod_{1\le i<j\le k} |\alpha_i-\alpha_j|^2 \prod_{j=1}^{k} \alpha_j^{A-1}\, d\alpha_1\ldots d\alpha_{k-1} = \\ = \frac{s_\lambda(\overbrace{1,\ldots,1}^{k \text{ единиц}})}{\Gamma(n+kA+k(k-1))} \prod_{j=1}^{k} \Gamma(\lambda_j + A + k - j)\, j!,\end{aligned} \tag{6.11}$$

где $s_\lambda(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ – функция Шура, задающая в рассматриваемом случае ядро Пуассона.

Наименее тривиальная часть приведенного рассуждения – выбор переходных вероятностей (6.7) – является упрощенным вариантом центральной темы статьи [125], где рассматриваются бесконечномерные аналоги формулы (6.11). Характерное свойство распределений (6.6) – их мультипликативность: веса диаграммы Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}_n(k)$ суть произведения простых множителей, связанных с отдельными клетками $b \in \lambda$. Это верно и для меры Планшереля.

Действительно, используя знаменитую *формулу крюков* [92]

$$d(\lambda) = \frac{n!}{\prod\limits_{b\in\lambda} h(b)}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n \tag{6.12}$$

для размерности неприводимых представлений группы $\mathfrak{S}_n$, находим для нагрузок меры Планшереля мультипликативную форму

$$M_n(\lambda) = \frac{d^2(\lambda)}{n!} = \frac{n!}{\prod\limits_{b\in\lambda} h^2(b)}. \tag{6.13}$$

Здесь $h(b)$ – длина крюка клетки $b \in \lambda$, определенная в подстрочном примечании к п.3.5.

Наиболее общий вид интегралов Сельберга, полученный в диссертации, таков:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k \geq 0 \\ \alpha_1+\dots+\alpha_k=1}} \cdots \int P_\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_k;\theta) \prod_{1\leq i<j\leq k} |\alpha_i-\alpha_j|^{2\theta} \prod_{j=1}^{k} \alpha_j^{A-1}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_{k-1} = \\
&\qquad = \frac{P_\lambda(\overbrace{1,\dots,1}^{k \text{ единиц}};\theta)}{\Gamma(n+kA+k(k-1)\theta)} \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(\lambda_j+A+(k-j)\,\theta)\,\Gamma(j\theta+1)}{\Gamma(\theta+1)}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Здесь $P_\lambda(x;\theta)$ – так называемые *зональные симметрические многочлены*,*) возникающие как предельные варианты полиномов Макдональда из п.2.7. Для доказательства используется усеченный граф ветвления зональных симметрических полиномов от конечного числа переменных $x_1,\dots,x_k$ (рис.10).

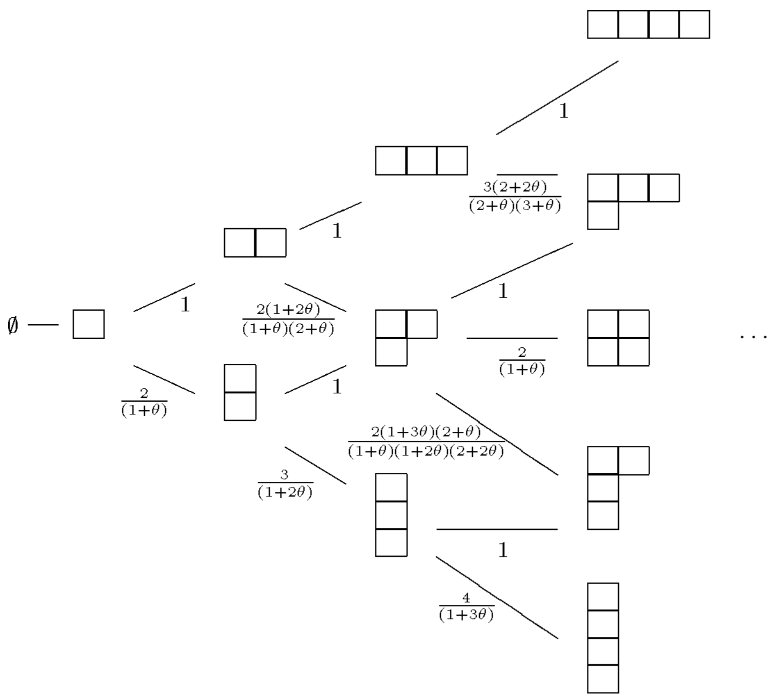


Рис.10 Ветвление зональных симметрических полиномов.

Зональные симметрические многочлены изучались в работах [111, 112, 159, 106]. Сам по себе интеграл (6.13) не нов (см. [151], хотя доказательство там отсутствует). Стоит особо отметить предельный случай интеграла (6.14), когда $\theta = 0$, а

*) Другое название – полиномы Jack'а.

$k \to \infty$, $A \to 0$ таким образом, что $kA \to t > 0$. Здесь формула (6.14) принимает вид*)

$$\frac{\lambda_1!\lambda_2!\dots}{1^{r_1} r_1!\, 2^{r_2} r_2!\dots} \cdot \frac{t^{l(\lambda)}}{(t)_n} = \int_{\Delta} m_\lambda(\alpha)\, d\mu_t(\alpha), \tag{6.15}$$

где μ_t – хорошо изученное распределение Пуассона – Дирихле на *бесконечномерном* симплексе Δ – границе графа Кингмана (8.4) из п.2.8.

*) Как и выше, r_j – число строк длины j диаграммы λ, а $l(\lambda) = \sum r_j$ – ее общее число строк.

§4. Континуальные диаграммы Юнга в задачах анализа

В четвертой, заключительной главе диссертации, диаграммы Юнга и их континуальные аналоги используются в задачах математического анализа и теории вероятностей.

Основная идея здесь состоит в систематическом изучении вместе с обычными диаграммами Юнга (которые мы рассматриваем как кусочно-линейные функции) их пределов в топологии равномерной сходимости — т.н. *континуальных диаграмм.* Мы покажем, что многие конструкции и алгоритмы, традиционные для комбинаторики диаграмм Юнга, допускают продолжение по непрерывности и применимы к произвольным континуальным диаграммам.

В диссертации детально рассмотрено преобразование, сопоставляющее диаграмме Юнга ее переходное распределение в марковском процессе планшерелевского роста. Нами получен предельный аналог этого преобразования, устанавливающий нетривиальное биективное соответствие между континуальными диаграммами и произвольными вероятностными распределениями. Это причудливое, на первый взгляд, соответствие, возникает на самом деле в целом ряде разнообразных задач: в континуальном варианте разложений рациональных дробей на простейшие, при вычислении интегралов по случайным мерам Дирихле, в проблеме моментов А.А.Маркова. В связи с проблемами моментов эта биекция (на другом языке) использовалась М.Г.Крейном (см. [47]) и мы называем ее *соответствием Крейна.*

Выше в п.3.5 упоминался красивый комбинаторный алгоритм – блуждание по крюкам – предназначенный для стохастического моделирования переходных вероятностей меры Планшереля бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$. Здесь мы найдем его предельный вариант, пригодный для произвольных континуальных диаграмм и названный нами алгоритмом *усадки отрезка.* Этот алгоритм доставляет новое описание соответствия Крейна на вероятностном языке.

Вторая важная тема четвертой главы – асимптотики перемежающихся последовательностей. Оказывается, что во многих ситуациях (разделение нулей ортогональных многочленов, спектры больших случайных матриц и т.д.) диаграмма, описывающая пару перемежающихся последовательностей, подчиняется тому же "закону арксинуса", что и большие случайные диаграммы Юнга (см. п.3.2).

Некоторый свет на причины универсальности закона арксинуса проливает свободная теория вероятностей [167], в которой этот закон (точнее, тесно связанный с ним *полукруговой* закон) играет ту же роль, что и нормальное распределение в традиционной теории вероятностей. Мы показываем, что континуальным пределом для процесса планшерелевского роста диаграмм Юнга служит простейшая (полукруговая) диффузия в свободной теории вероятностей, описываемая уравнением Бюргерса $R_t + R\,R_x = 0$.

4.1. Мера Планшереля и разложение рациональных дробей на простейшие.

Воспользуемся введенным в п.3.2 определением диаграмм Юнга, как кусочно - линейных функций. Напомним, что через $x_1, x_2, \ldots, x_d$ мы обозначаем точки минимума, а через $y_1, \ldots, y_{d-1}$ – точки максимума диаграммы $v = \omega(u)$. Для дальнейшего условие целочисленности (3) несущественно и мы от него отказываемся. Функции $v = \omega(u)$, удовлетворяющие лишь условиям

(1) $\omega'(u) = \pm 1$;

(2) существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $\omega(u) = |u - c|$ при достаточно больших $|u|$,

назовем *прямоугольными диаграммами*. Точку $c = \sum x_k - \sum y_k$ мы называем *центром диаграммы*, а величину

$$A = \sum_{i<j} (y_i - x_i)\,(x_j - y_{j-1})$$

ее *площадью*.

В процессе роста диаграммы Юнга λ абсцисса вновь добавляемой клетки должна совпадать с одной из точек минимума x_k; $k = 1, \ldots, d$. Соответствующую планшерелевскую переходную вероятность $p(\lambda, \Lambda)$ из (2.1), §3 мы переобозначим через μ_k,

$$\mu_k = \frac{d(\Lambda)}{(n+1)\,d(\lambda)}; \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n,\ \lambda \nearrow \Lambda. \tag{1.1}$$

В [117], [36] для этой вероятности была найдена*) следующая простая формула:

$$\mu_k = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_k - y_i}{x_k - x_i} \prod_{i=k+1}^{d} \frac{x_k - y_{i-1}}{x_k - x_i}. \tag{1.2}$$

Непосредственным, но важным следствием этой формулы является

Теорема 32 [118], [37]. Пусть диаграмма Юнга $v = \lambda(u)$ задана парой последовательностей $x_1, x_2, \ldots, x_d$ и $y_1, \ldots, y_{d-1}$. Тогда ее планшерелевские переходные вероятности (1.1) суть в точности коэффициенты простейших дробей в разложении

$$\frac{\prod_{i=1}^{d-1} (x - y_i)}{\prod_{i=1}^{d} (x - x_i)} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\mu_k}{x - x_k}. \tag{1.3}$$

---

*) Менее удобные для наших целей варианты формулы (1.1) опубликованы ранее в [11], [44].

Заметим, что формулы (1.2), (1.3) имеют смысл для произвольной прямоугольной диаграммы ω и задают дискретное вероятностное распределение с нагрузками μ_k в точках x_k; $k = 1, \ldots, d$. Условие положительности коэффициентов в (1.3) равносильно условию перемежаемости нулей и полюсов этой дроби:

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{d-1} < y_{d-1} < x_d. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и определения расширенных полных однородных симметрических функций h_n в п.3.4 вытекает простая формула для моментов меры (1.1):

$$\sum_{k=1}^{d} x_k^n \mu_k = h_n(x; -y); \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.5}$$

Особенно просто устроены первые три момента:

$$h_0 = 1; \quad h_1 = \sum x_k - \sum y_k; \quad h_2 = \sum_{i<j} (y_i - x_i)(x_j - y_{j-1}). \tag{1.6}$$

Для истинных диаграмм Юнга имеем $h_1 = 0$, а дисперсия $h_2 = n$ зависит только от числа клеток диаграммы (но не от ее формы).

Следствие. Для любого $A > 0$ и $k = 1, 2, \ldots$ положим

$$\mu_k^{(A)}(\lambda, \Lambda) = \frac{(c(\Lambda \setminus \lambda) + k)(c(\Lambda \setminus \lambda) + A + k - 1)}{|\lambda| + kA + k(k-1)} \cdot \frac{d(\Lambda)}{|\Lambda|\, d(\lambda)}; \quad \lambda \nearrow \Lambda. \tag{1.7}$$

Тогда $\sum_\Lambda \mu_k^{(A)}(\lambda, \Lambda) = 1$ для всех $\lambda \in \mathcal{Y}$, и вероятности (1.7) задают центральную марковскую цепь на k-строчной части графа Юнга $\mathcal{Y}(k)$.

Тем самым мы обосновали вывод интеграла Сельберга (6.10) в п.3.6. Более общие интегралы (6.14), §3 получаются аналогично; переходные вероятности здесь также задаются формулой (1.7), но вместо параметров x_k, y_k исходной диаграммы Юнга λ следует использовать параметры $x_k(\theta)$, $y_k(\theta)$ прямоугольной диаграммы $\lambda(\theta)$, полученной из λ сжатием по одной из осей в θ раз. Это еще один аргумент в пользу серьезного отношения к нецелочисленным прямоугольным диаграммам.

4.2. Асимптотики перемежающихся последовательностей.

Как могут вести себя перемежающиеся последовательности

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n \tag{2.1}$$

с ростом n? Чтобы уточнить вопрос, рассмотрим прямоугольную диаграмму ω_n с точками минимумов $\{x_k\}$ и точками максимумов $\{y_k\}$; легко видеть, что эта диаграмма определена однозначно. Проблему можно теперь переформулировать так: какова предельная форма диаграммы ω_n? В §3 мы видели, что предельная форма типичных по мере Планшереля диаграмм Юнга определяется функцией

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}), & \text{если } |u| \le 2 \\ |u|, & \text{если } |u| \ge 2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь мы покажем, что такой же "закон арксинуса" имеет место и в чисто аналитических ситуациях, казалось бы никак не связанных с симметрической группой. В нашем первом примере, рассмотрим семейство ортогональных многочленов $\{P_n(u)\}_{n=0}^{\infty}$, заданное линейным рекуррентным соотношением

$$P_n(u) + (b_n - u)P_{n-1}(u) + c_n^2 P_{n-2}(u) = 0 \tag{2.3}$$

и начальными условиями $P_0(u) = 1, \quad P_1(u) = u - b_1$. Хорошо известно, что корни соседних многочленов

$$P_{n-1}(u) = \prod_{i=1}^{n-1}(u - y_i), \quad P_n(u) = \prod_{i=1}^{n}(u - x_i) \tag{2.4}$$

перемежаются.

Прямоугольная диаграмма ω_n, при помощи которой мы следим за характером взаимного разделения последовательностей $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, определяется условиями

$$\omega_n'(u) = \operatorname{sign}\frac{P_{n-1}(u)}{P_n(u)}; \quad \omega_n(u) = |u - C_n| \text{ при достаточно больших } |u|, \tag{2.5}$$

где $C_n = \sum x_i - \sum y_i$.

Оказывается, для широкого класса ортогональных многочленов (в том числе для классических многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита) асимптотика перемежающихся корней подчиняется закону арксинуса.

Теорема 33 [38]. Предположим, что в рекуррентном соотношении (2.3)

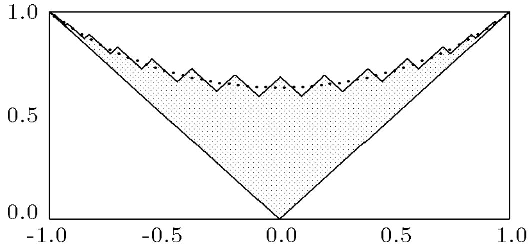
$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{n-1}}{c_n} = 0. \tag{2.6}$$

Тогда равномерно по $u \in \mathbb{R}$ существует предел

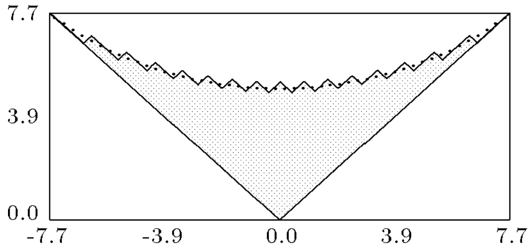
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n}\omega_n(uc_{n-1} + b_n) = \Omega(u), \tag{2.7}$$

где функция Ω задана формулой (2.2).

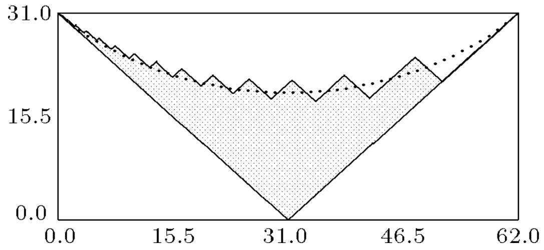
На рис.11 показаны диаграммы разделения корней для многочленов Чебышева, Эрмита и Лагерра степеней 15 и 16. Поверх диаграмм наложен график функции (2.2) с соответствующими параметрами положения.



Полиномы Чебышева



Полиномы Эрмита



Полиномы Лагерра

Рис.11 Разделение корней ортогональных многочленов.

Асимптотику *разделения* корней следует отличать от асимптотики их *распределения.* Для полиномов Якоби, например, предельная плотность корней описывается обратным полукруговым распределением,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i\colon x_i<u\}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{u}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad |u|\le 1,$$

а для полиномов Эрмита – полукруговым:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i\colon \frac{x_i}{\sqrt{2n}}<u\}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{u}\sqrt{1-x^2}\,dx,\quad |u|\le 1.$$

Таким образом, предельные плотности корней различны, хотя закон арксинуса имеет место в обоих случаях.

Нетрудно дать достаточные условия справедливости закона арксинуса в терминах меры μ, относительно которой многочлены P_n ортогональны. Например, он выполняется, если мера абсолютно непрерывна на отрезке $[-1,\, 1]$, а функция $\ln \mu'(\cos\theta)$ интегрируема на $[0,\, \pi]$.

Второй пример появления закона арксинуса в аналитической задаче связан с классическим полукруговым законом Вигнера (см. [142], [55]), согласно которому в типичных спектрах больших случайных матриц собственные числа распределены с полукруговой плотностью $2\sqrt{1-x^2}/\pi$.

Рассмотрим устойчивую механическую систему с n степенями свободы, совершающую малые колебания вблизи положения равновесия. Ее потенциальная энергия квадратична и задается симметричной положительно определенной матрицей A. Квадраты собственных частот суть собственные числа $x_1, \dots, x_n$ этой матрицы. В результате наложения линейной связи собственные частоты смещаются и занимают промежуточные положения между исходными частотами, так что условие разделения (2.1) выполняется. Этот результат называют теоремой Релея (см. [1], §24).

Назовем *диаграммой жесткости* прямоугольную диаграмму ω_n, изображающую перемежающиеся спектры эрмитовой матрицы A и ее ограничения на некоторую гиперплоскость h.

Теорема 34 [38]. Пусть ω_n – диаграмма жесткости случайной симметрической матрицы $A^{(n)}$ порядка n по отношению к случайной гиперплоскости $h \subset \mathbb{R}_n$. Предположим, что нормаль к h равномерно распределена на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, а матричные элементы $a_{ij}^{(n)}$, $i \leq j$ независимы от h и между собой и одинаково распределены со средним $E(a_{ij}^{(n)}) = 0$ и дисперсией $D(a_{ij}^{(n)}) = 1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E\omega_n(u\sqrt{n}) = \Omega(u) \tag{2.8}$$

равномерно по $u \in \mathbb{R}$.

Д.Войкулеску (см. [167]) получил недавно концептуальное доказательство теоремы Вигнера. В развитой им и его учениками “свободной теории вероятностей” эта теорема появляется, как следствие “центральной предельной теоремы”, в которой, однако, роль гауссовского распределения выполняет полукруговой закон Вигнера.

4.3. Диаграммы, заряды Релея, и их моменты.

Определение. *Континуальной диаграммой* (или просто диаграммой) мы называем любую функцию $v = \omega(u)$, обладающую двумя свойствами:

(1) $|\omega(u_1) - \omega(u_2)| \leq |u_1 - u_2|$;

(2) $\omega(u) = |u - c|$ для некоторого $c \in \mathbb{R}$ и достаточно больших $|u|$.

Характерный пример континуальной диаграммы – функция (2.2).

Обозначим через $\mathcal{D} = \mathcal{D}[a, b]$ пространство диаграмм с *носителем* в интервале $[a, b]$, т.е. таких, что $\omega(u) = |u - c|$ для $u \notin [a, b]$. Мы наделяем $\mathcal{D}$ топологией равномерной сходимости; ясно, что подмножество прямоугольных диаграмм $\mathcal{D}_0$ плотно в $\mathcal{D}$. Точка c называется *центром* диаграммы ω, а величина

$$A = \frac{1}{2} \int (\omega(u) - |u - c|)\, du \tag{3.1}$$

– ее площадью.*)

Наш выбор диаграмм для изображения перемежающихся последовательностей имеет чисто исторические причины (в виде теоремы о предельной форме больших диаграмм Юнга) и ни коим образом не является единственно возможным. Укажем другой подход, более близкий изложению в [47]. Он основан на идее *перемежающихся мер*.

Определение. Условимся называть конечную σ-аддитивную функцию τ, определенную на борелевских подмножествах вещественной прямой, *зарядом Релея*,**) если

$$\tau(-\infty, x) \geq 0 \quad \text{и} \quad \tau(x, +\infty) \geq 0 \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Будем говорить, что неотрицательные борелевские меры μ, ν *перемежаются*, если их разность $\tau = \mu - \nu$ является зарядом Релея.

Приведем два примера.

(1) Любая неотрицательная мера τ является зарядом Релея.

(2) Пусть μ_n – сумма δ-мер в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и ν_n – аналогичная сумма для точек $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Меры μ_n и ν_n перемежаются тогда и только тогда, когда выполнено условие взаимного разделения (2.1).

Нетрудно видеть, что заряды Релея $\tau_n = \mu_n - \nu_n$ имеют слабый предел τ в точности при условии, что существует предел ω соответствующих прямоугольных диаграмм ω_n. Оба предела связаны простыми формулами:

$$\tau(u) \stackrel{\text{def}}{=} \tau\{(-\infty, u)\} = \frac{1}{2}(1 + \omega'(u)), \tag{3.3}$$

$$\omega(u) = \int_{-\infty}^{u} \tau(u)\, du + \int_{u}^{\infty} (1 - \tau(u))\, du. \tag{3.4}$$

---

*) Интегралы без явно указанных пределов берутся по всей вещественной оси.

**) Выбор термина мотивирован цитированной выше теоремой Релея о разделении спектров при ограничении эрмитовой матрицы на гиперплоскость. Теорема Релея для *операторов* тесно связана с идеей *функции спектрального сдвига*, см. [6].

Рис.12 иллюстрирует геометрический смысл формулы (3.4). Отметим, что функция f, использованная М.Г.Крейном и А.А.Нудельманом в [47] (гл.VII, §2.1), дополнительна к нашему заряду Релея:

$$f(u) = 1 - \tau(u). \tag{3.5}$$

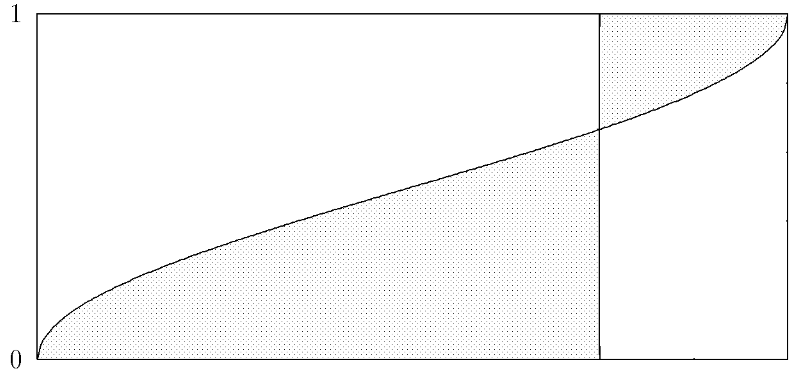


Рис.12 Связь диаграммы и ее заряда Релея.

Определение. *Моментами* диаграммы $\omega \in \mathcal{D}$ назовем обычные моменты ее заряда Релея:

$$p_n = \int u^n \, d\tau(u); \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{3.6}$$

В терминах самой диаграммы моменты имеют вид

$$p_n = -\frac{n}{2} \int u^{n-1} \, d(\omega(u) - |u|). \tag{3.7}$$

Нам понадобится *производящая функция моментов*

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{z^n}{n} \tag{3.8}$$

диаграммы ω, которую можно выразить интегралами

$$S(z) = -\int \ln(1 - uz) \, d\tau(u) = -\frac{z}{2} \int \frac{d(\omega(u) - |u|)}{1 - uz}. \tag{3.9}$$

Например, для диаграммы $\omega = \Omega$ из (2.2) моменты суть биномиальные коэффициенты

$$p_{2n} = \binom{2n}{n}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.10}$$

(нечетные моменты равны нулю), а производящая функция имеет вид

$$S(z) = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2}. \tag{3.11}$$

Заряд Релея здесь неотрицателен и имеет плотность

$$\frac{d\tau(u)}{du} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4 - u^2}}; \quad -2 < u < 2. \tag{3.12}$$

4.4. Соответствие Крейна.

Перепишем тождество (1.3), задающее связь между диаграммой Юнга ω и ее планшерелевской переходной вероятностью, в чуть измененной форме:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(1-y_i z)}{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{1-x_k z}. \tag{4.1}$$

Более общим образом, эта формула устанавливает биективное соответствие между множеством $\mathcal{D}_0$ прямоугольных диаграмм ω и множеством $\mathcal{M}_0$ вероятностных распределений μ с конечным носителем. Обозначая через τ заряд Релея (3.3) диаграммы ω, можно предложить еще одну полезную форму записи для тождества (4.1):

$$e^{-\int \ln(1-uz)\, d\tau(u)} = \int \frac{d\mu(u)}{1-uz}. \tag{4.2}$$

Ее преимущество в том, что обе части имеют смысл для любых континуальных диаграмм и вероятностных мер.

Теорема 35 [37]. Биективное соответствие между подмножествами $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{M}_0$, заданное формулой (4.1), продолжается по непрерывности до гомеоморфизма пространства всех диаграмм $\mathcal{D} = \mathcal{D}[a,b]$ на пространство $\mathcal{M} = \mathcal{M}[a,b]$ всех вероятностных распределений с носителем на отрезке $[a,b]$.*) Формула (4.2) однозначно характеризует это соответствие.

Основное наблюдение, приводящее к этому результату, состояло в том, что диаграмма Юнга однозначно восстанавливается по своему переходному распределению в марковском процессе планшерелевского роста (возникающем в ходе построения гармонического анализа на бесконечной симметрической группе $\mathfrak{S}_\infty$). Соответствие между зарядами Релея и вероятностными распределениями было открыто**) в [47] из совершенно иных соображений. Там оно использовалось для установления связи между двумя проблемами моментов – проблемой моментов Хаусдорфа:

$$h_n = \int_a^b u^n\, d\mu(u); \quad n = 0,1,2,\dots \tag{4.3}$$

и $(0,1)$ проблемой моментов Маркова:

$$p_n = \int_a^b u^n\, d\tau(u); \quad n = 0,1,2,\dots\ , \tag{4.4}$$

*) Имеется в виду топология слабой сходимости в пространстве мер.

**) Более ранние упоминания этого соответствия автору не известны.

где τ – заряд Релея.***) Результат Крейна и Нудельмана ([47], гл.VII, §2, теорема 2.1) состоит в том, что последовательность $\{p_n\}$ является решением проблемы Маркова (4.4) тогда и только тогда, когда существует решение проблемы Хаусдорфа (4.3) для последовательности $\{h_n\}$, связанной с исходной последовательностью p_n тождеством

$$e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n \frac{z^n}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \, z^n. \tag{4.5}$$

Эта формула, с точностью до обозначений, совпадает с тождеством (4.2).
Например, беря в качестве заряда Релея τ вероятностную меру с плотностью (3.12), можно показать ([37], 2.3, пример 1), что мера μ – это полукруговой закон

$$d\mu(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{4 - x^2} \, dx; \quad |x| \le 2, \tag{4.6}$$

ее моменты (4.3) суть популярные в комбинаторике *числа Каталана**)

$$h_{2n} = \frac{1}{(n+1)} \binom{2n}{n}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.7}$$

(нечетные моменты равны нулю), а обе части формулы (4.5) совпадают с функцией

$$R(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2}. \tag{4.8}$$

Это вычисление проясняет появление "закона арксинуса" (2.8) рядом с полукруговым законом Вигнера.
Третий подход к соответствию Крейна связан со случайными мерами Дирихле, возникающими в задачах непараметрической статистики (см. [91]). В качестве простого примера рассмотрим дискретное вероятностное распределение τ с нагрузками $\tau_1, \ldots, \tau_n$ в точках вещественной оси $x_1, \ldots, x_n$. С ним связана вероятностная мера на $(n-1)$-мерном симплексе

$$\Delta_n = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n \colon \sum \alpha_k = 1 \right\},$$

заданная *плотностью Дирихле*

$$\frac{\Gamma(\tau_1 + \ldots + \tau_n)}{\Gamma(\tau_1) \ldots \Gamma(\tau_n)} \, \alpha_1^{\tau_1 - 1} \, \alpha_2^{\tau_2 - 1} \ldots \alpha_n^{\tau_n - 1}. \tag{4.9}$$

***) Мы слегка меняем формулировки проблемы моментов Маркова и ее решения в [47], чтобы сблизить терминологию с основным текстом.
*) Подробнее о комбинаторной теории ортогональных многочленов см. [164].

Обозначим через μ распределение вероятностей линейного функционала

$$X(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \alpha_k \tag{4.10}$$

на симплексе Δ_n. Известно (см. [82]), что исходное распределение τ связано с распределением μ как раз по формуле Крейна (4.2).

Совершенно аналогично, с каждой вероятностной мерой τ на отрезке вещественной прямой можно связать (см. [131], гл.9) случайный *процесс Дирихле*, реализациями которого являются случайные вероятностные меры. Ожидаемое значение

$$X = \int x \, d\alpha(x) \tag{4.11}$$

по случайной мере α является случайной величиной; обозначим ее распределение через μ. Тогда τ и μ связаны по формуле (4.2).

Для случая дискретной меры τ в [82] найдена явная формула для плотности вероятности f случайной величины (4.10):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\pi \sum_{x_k < x} \tau_k\right) \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{-\tau_k}. \tag{4.12}$$

Более общая формула

$$\varphi^{(\omega)}(x) = \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi\omega'(x)}{2} \, \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \, \exp \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d\omega(u)}{u - x} \tag{4.13}$$

для плотности $\varphi^{(\omega)}(x) = d\mu \,/\, dx$, пригодная для любой *вероятностной* меры τ, была предложена в качестве гипотезы в [37], (2.8.2). Как позже выяснилось, ее нетрудно вывести из результатов статьи [80]. В [37], (2.8.1) дано также выражение для чисто точечной части распределения μ в терминах заряда Релея τ. Какая-либо явная общая формула, задающая распределение μ через заряд τ, автору не известна.

4.5. Дифференциальная модель роста диаграмм Юнга.

Процесс планшерелевского роста диаграмм Юнга, подробно рассмотренный в §3, является случайным процессом с дискретным временем и пространством. Опираясь на соответствие Крейна, мы построим дифференциальную модель планшерелевского роста – неслучайный процесс с континуальным временем и пространством, который, однако, обнаруживает те же асимптотические свойства, что и мера Планшереля бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$. Наша дифференциальная модель адекватно описывается уравнением Бюргерса

$$R_t + RR_x = 0. \tag{5.1}$$

Закону арксинуса, управляющему формой больших случайных диаграмм Юнга, соответствует автомодельное решение

$$R(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{x}{\sqrt{t}} - \sqrt{\frac{x^2}{t} - 4}\right) \tag{5.2}$$

уравнения (5.1). Мы покажем, что в определенном смысле все решения асимптотически сближаются с функцией (5.2). Хотя уравнение Бюргерса хорошо изучено,*) нам не удалось обнаружить этот факт в литературе.

Идея, приводящая к дифференциальной модели, чрезвычайно проста: вместо того, чтобы добавить к диаграмме Юнга λ одну случайную клетку с планшерелевскими переходными вероятностями (1.2), мы хотим добавлять одновременно и всюду, где это возможно, части этой клетки, пропорциональные планшерелевским вероятностям.

Для осуществления этой идеи перейдем от множества диаграмм Юнга $\mathcal{Y}$ к пространству всех континуальных диаграмм $\mathcal{D}$. Аналогом таблиц Юнга служат кривые $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \omega_t \in \mathcal{D}$ в пространстве диаграмм, для которых функции $\omega_t(x) = \omega(x,t)$ не убывают по аргументу t. Не умаляя общности, можно взять за параметр t вдоль кривой площадь (3.1) диаграммы*) ω_t. Тогда частная производная $\frac{\partial}{\partial t}\omega(x,t)$ является плотностью вероятностного распределения по переменной x, которое удобно интерпретировать, как касательный вектор к кривой.

С другой стороны, соответствие Крейна сопоставляет каждой диаграмме $\omega \in \mathcal{D}$ ее “переходную меру” μ, и мы получаем векторное поле на пространстве $\mathcal{D}$. Приравнивая касательное распределение в общей точке кривой ω_t и переходное распределение для соответствующей диаграммы, мы и приходим к *основному динамическому уравнению*. К сожалению, из-за отсутствия явной формулы для переходной меры (преобразования Крейна), для записи нашего уравнения приходится опираться на характеристическое тождество (4.2):

$$\exp\left(-\int \frac{\partial}{\partial u}\sigma(u,t)\,\frac{z\,du}{1-uz}\right) = \int \frac{\partial}{\partial t}\,\sigma(u,t)\,\frac{du}{1-uz} \tag{5.3}$$

(при достаточно малых z). Здесь мы использовали вспомогательное обозначение $\sigma(u,t) = \frac{1}{2}(\omega(u,t) - |u|)$.

Уравнение (5.3) существенно упрощается, если переписать его в других переменных. Например, для коэффициентов $h_n(t)$ производящей функции

$$R(x,t) = \sum_{h=0}^{\infty} h_n(t)\, x^{-(n+1)} = \int \frac{\partial}{\partial t}\sigma(u,t)\,\frac{du}{x-u} \tag{5.4}$$

---

*) См., например, статью Э.Хопфа [110], специально посвященную этому уравнению.

*) В этом разделе мы рассматриваем только диаграммы с центром в нуле, $c = 0$.

получаем цепочку обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{2h'_{n+2}(t)}{n+2} = \sum_{k=0}^{n} h_k(t)\, h_{n-k}(t); \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{5.5}$$

Еще интереснее переписать уравнение (5.3) в терминах самой функции (5.4).

Теорема 36 [40]. Основное динамическое уравнение (5.3) для неизвестной функции $\sigma(x,t)$ равносильно уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial R}{\partial t} + R\frac{\partial R}{\partial x} = 0 \tag{5.6}$$

для функции (5.4).

Анализируя уравнения (5.5), мы приходим к закону арксинуса, как общей асимптотике при $t \to \infty$ всех решений уравнения (5.3).

Теорема 37 [40]. Предположим, что функция $\sigma(x,t) = (\omega(x,t) - |x|)\,/\,2$ удовлетворяет основному динамическому уравнению (5.3). Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\omega(x\sqrt{t}, t) = \Omega(x) \tag{5.7}$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Следующий результат позволяет более прямо связать рост диаграмм Юнга и уравнение Бюргерса.

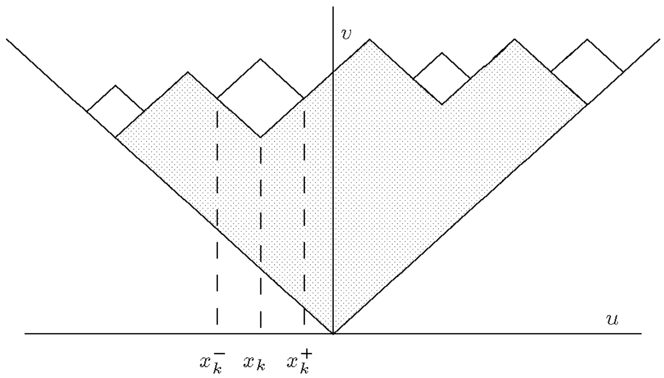


Рис.13 Дифференциальный рост диаграммы Юнга.

Выберем диаграмму Юнга $\omega \in \mathcal{Y}$ и пусть $\{x_k\}_{k=0}^{d}$, $\{y_k\}_{k=1}^{d-1}$ – точки ее минимумов и максимумов. Рассмотрим однопараметрическую деформацию ω_t диаграммы ω, добавляя над каждой точкой минимума x_k крошечную квадратную клеточку*)

*) Интересен только случай, когда t мало.

площади $\mu_k\, t$, где μ_k – планшерелевская вероятность (1.2). Для полученной таким образом прямоугольной диаграммы ω_t (рис.13) к прежним максимумам y_k добавляются новые в точках $\tilde{y}_k(t) = x_k$, а каждая точка минимума x_k расщепляется на пару $x_k^{\pm}(t) = x_k \pm \sqrt{t\mu_k}$. Составим рациональную дробь

$$R(x,t) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{d-1}(x-y_j)\prod\limits_{j=1}^{d}(x-x_j)}{\prod\limits_{j=1}^{d}((x-x_j)^2 - t\mu_j)} \tag{5.8}$$

(совпадающую с левой частью (1.3) для диаграммы ω_t). Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial t}(x,0) + R(x,0)\frac{\partial R}{\partial x}(x,0) = 0, \tag{5.9}$$

т.е. уравнение Бюргерса выполняется на начальном условии $R(x,0)$.

4.6. Планшерелевский рост и диффузия Войкулеску.

В книге [167] развит нестандартный вариант теории вероятностей, основанный на замене обычной свертки понятием *свободной свертки* $\mu \boxplus \nu$ вероятностных распределений μ, ν. Не входя здесь в подробности, заметим только, что распределение $\mu \boxplus \nu$ возникает, как спектральная мера суммы двух самосопряженных операторов при условии, что они порождают свободную алгебру и имеют спектральные меры μ и ν соответственно. Например, полукруговые распределения

$$d\nu_t = \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2}\, dx; \quad |x| \le 2\sqrt{t} \tag{6.1}$$

образуют полугруппу относительно свободной свертки:

$$\nu_s \boxplus \nu_t = \nu_{s+t}; \quad s,t > 0. \tag{6.2}$$

В теории Войкулеску органично определяются аналоги многих понятий и теорем обычной теории вероятностей. В частности, роль гауссовского распределения берет на себя полукруговой закон, а аналог (6.1) гауссовской диффузионной полугруппы косвенно описывается уравнением Бюргерса (5.6) для преобразования Коши – Стилтьеса

$$R(x,t) = \int \frac{d\mu_t(u)}{x-u} \tag{6.3}$$

диффундирующих мер $\mu_t = \mu \boxplus \nu_t$, $t > 0$.

Сопоставление планшерелевского роста диаграмм Юнга и диффузии Войкулеску через уравнение Бюргерса позволяет получить диффузионное уравнение непосредственно в терминах мер μ_t:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int f(x)\, d\mu_t(x) = \frac{1}{2}\int\int \frac{f'(x) - f'(y)}{x-y}\, d\mu_t(x)\, d\mu_t(y), \tag{6.4}$$

где $f(x)$ – финитная пробная функция. Подчеркнем, что в оригинальных работах [166, 71, 167] уравнение (6.4) отсутствует; их авторы используют лишь косвенные описания полукруговой диффузии.

Мы получаем также прямую информацию об инфинитезимальном переносе масс в процессе диффузии Войкулеску.

Теорема 38. Пусть μ – дискретное вероятностное распределение с нагрузками μ_k в точках x_k; $k = 1, 2, \dots, n$ и $\mu_t = \mu \boxplus \nu_t$, где ν_t – полугруппа (6.1). Определим семейство дискретных вероятностных мер $\tilde{\mu}_t$ с нагрузками

$$\mu_k^{\pm}(t) = \frac{1}{2}(\mu_k \pm \Delta_k \sqrt{\mu_k\, t}) \tag{6.5}$$

в точках

$$x_k^{\pm}(t) = x_k \pm \sqrt{\mu_k t}; \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{6.6}$$

где

$$\Delta_k = \sum_{j \neq k} \frac{\mu_j}{x_k - x_j}. \tag{6.7}$$

Тогда меры μ_t, $\tilde{\mu}_t$ совпадают с точностью до бесконечно малых порядка выше t:

$$\int f(x)\, d\mu_t(x) = \int f(x)\, d\tilde{\mu}_t(x) + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0 \tag{6.8}$$

для любого многочлена f.

4.7. Процесс усадки отрезка.

Выше в п.4.4 мы описали три различных подхода к определению соответствия Крейна между континуальными диаграммами и вероятностными распределениями на прямой. Согласно одному из них, основному в данной работе, распределение $\mu \in \mathcal{M}$, отвечающее диаграмме $\omega \in \mathcal{D}$, следует понимать как обобщение переходного распределения диаграммы Юнга в марковском процессе планшерелевского роста. Естественно ожидать, что каждое описание меры Планшереля бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ имеет подходящий предельный аналог, задающий соответствие Крейна. Здесь мы подтвердим эти ожидания, построив предельный вариант алгоритма блуждания по крюкам из п.3.5 – *процесс усадки отрезка.*

Процесс усадки управляется заданной диаграммой $\omega \in \mathcal{D}$ или, что эквивалентно, ее зарядом Релея τ (см. п.4.3). В ходе этого процесса строится бесконечная цепочка случайных вложенных промежутков

$$[\alpha_0, \beta_0] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset \dots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \dots . \tag{7.1}$$

С вероятностью единица пересечение этих интервалов сводится к единственной точке $X = \bigcap_{n\geq 1}[\alpha_n, \beta_n]$. Основное утверждение состоит в том, что распределение случайной величины X, построенной по диаграмме ω, – это в точности преобразование Крейна μ этой диаграммы.

Точное описание процесса усадки отрезка состоит в следующем. Начнем с произвольного промежутка $[\alpha_0, \beta_0]$, содержащего носитель заряда Релея τ. Каждый шаг процесса совершается в два действия:

(1) текущий отрезок $[\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ делится на две части случайной точкой γ, распределенной на этом отрезке *равномерно* (т.е. по мере Лебега);

(2) в качестве следующего отрезка $[\alpha_n, \beta_n]$ случайно выбирается одна из этих частей, причем вероятности зависят от заряда τ:

$$[\alpha_n, \beta_n] = \begin{cases} [\alpha_{n-1}, \gamma] & \text{с вероятностью } \tau(-\infty, \gamma], \\ [\gamma, \beta_{n-1}] & \text{с вероятностью } \tau(\gamma, +\infty). \end{cases} \tag{7.2}$$

Описание корректно, так как по определению заряда Релея числа $\tau(-\infty, \gamma]$, $\tau(\gamma, +\infty)$ неотрицательны и в сумме дают единицу.*) Подразумевается, что все выборы производятся независимо.

Теорема 39 [37]. Пусть цепочка случайных вложенных отрезков (7.1) построена по заряду Релея τ при помощи процесса усадки отрезка. Тогда с вероятностью единица пределы

$$X = \lim \alpha_n = \lim \beta_n \tag{7.3}$$

совпадают и распределение μ случайной величины X удовлетворяет тождеству Крейна (4.2).

В качестве иллюстрации, рассмотрим "треугольную" диаграмму Юнга

$$\omega(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } |u| \leq 1 \\ |u|, & \text{если } |u| \geq 1. \end{cases} \tag{7.4}$$

Заряд Релея этой диаграммы – это вероятностное распределение с равными нагрузками $\tau\{\pm 1\} = 1/2$ в точках $u = \pm 1$. После деления отрезка $[\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$ случайной точкой γ мы выбираем за $[\alpha_n, \beta_n]$ любую из двух частей $[\alpha_{n-1}, \gamma]$, $[\gamma, \beta_{n-1}]$ с равными вероятностями. Нетрудно убедиться, что распределение случайной точки (7.3) в этом примере имеет плотность

$$\frac{d\mu}{du} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}; \quad |u| \leq 1, \tag{7.5}$$

*) Мы рассматриваем только заряды единичной полной массы $\tau(-\infty, \infty) = 1$.

что вполне согласуется с формулой (4.12).

Связующим звеном между оригинальным алгоритмом блуждания по крюкам и нашим процессом усадки отрезка является следующая процедура моделирования коэффициентов в разложениях на простейшие дроби. Рассмотрим рациональную дробь

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x-y_i)}{\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{x-x_k}, \tag{7.6}$$

нули и полюса которой перемежаются,

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n, \tag{7.7}$$

а коэффициенты μ_k положительны (эти два условия равносильны). Мы опишем марковскую цепь, которая за конечное число шагов приводит к одному из полюсов $x_1, \ldots, x_n$, причем вероятность выбора именно полюса x_k равна соответствующему коэффициенту μ_k.

Состояниями этой цепи служат промежутки вида $[x_i, x_j]$. За исходное состояние берется максимальный отрезок $[x_1, x_n]$, а переход к новому состоянию осуществляется так. На текущем промежутке $[x_i, x_j]$ выбираем равномерно распределенную точку γ. Она попадает в один из подинтервалов, на которые разбивают отрезок $[x_i, x_j]$ числа (7.7), причем возможны два случая:

$$\gamma \in [x_k, y_k] \quad \text{или} \quad \gamma \in [y_{k-1}, x_k] \tag{7.8}$$

при некотором k. По определению, в первом случае новым состоянием служит отрезок $[x_i, x_k]$, во втором — $[x_k, x_j]$. На каждом шаге процесса края отрезка сближаются; не позже чем на n-ом шаге отрезок вырождается в точку и процесс останавливается в одном из полюсов дроби.

Теорема 40 [37]. Вероятность остановки описанной выше цепи в точке x_k равна μ_k.

Глава I

ГРАНИЦЫ И ГРУППЫ РАЗМЕРНОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ ВЕТВЛЕНИЯ

В первом параграфе введения была кратко изложена теория локально - полупростых алгебр. Можно выделить в ней три основные компоненты.

Комбинаторные методы изучения LS-алгебры $\mathfrak{A}_\infty$ основаны на выборе аппроксимирующего семейства $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ конечномерных полупростых подалгебр и рассмотрении задающего это семейство графа ветвления. Эти методы особенно хороши, когда существует объективно выделенная аппроксимация конечномерными подалгебрами. Именно такова ситуация с групповой алгеброй бесконечной симметрической группы $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$. Заметим, что теория LS-алгебр мотивирует постановки новых задач в традиционных разделах комбинаторики. Примером может служить формула (4.5) из §2 введения, дающая число косых таблиц Юнга заданной формы.
Другой класс методов основан на изучении группы Гротендика $K_0(\mathfrak{A}_\infty)$, рассматриваемой как упорядоченная абелева группа с выделенной порядковой единицей. Преимущество этого метода в том, что он использует только предельную алгебру $\mathfrak{A}_\infty$ и не зависит от выбора конкретной аппроксимации.
Третий круг идей основан на использовании методов метрической теории динамических систем. Можно определить измеримое преобразование S в пространстве путей графа ветвления (называемое адическим сдвигом) таким образом, что центральные меры этого графа отождествляются с S-инвариантными мерами. На этом замечании основан эргодический метод – наиболее мощный и универсальный метод вычисления характеров LS-алгебр.
В этой главе мы дополняем обзор теории LS-алгебр, данный выше в §1 введения, следующим образом.
В §1 дано обоснование эргодического метода, применяемого в диссертации при вычислении центральных мер для различных графов ветвления. В §2 рассмотрены некоторые примеры графов ветвления комбинаторного происхождения, связанные с графом Юнга. Они иллюстрируют идею *подобия* графов ветвления, предложенную автором в [34]. В §3 – 4 мы вычисляем центральные меры и группы размерностей для графа ветвления индуцированных представлений симметрических групп $\mathfrak{S}_n$, а также для обобщенных треугольников Стирлинга.

§1. Эргодический метод

В этом параграфе мы приводим обоснование эргодического метода вычисления характеров LS-алгебр, изложенного выше в п.1.5 введения.
Рассмотрим граф ветвления Γ, то есть ориентированный градуированный граф, удовлетворяющий условиям (a) – (d) из п.1.7 введения. Пусть дуги (λ, Λ) этого графа снабжены положительными (но не обязательно целыми) кратностями $\varkappa(\lambda, \Lambda)$. Обозначим через T пространство путей

$$t = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \tag{1.1.1}$$

графа Γ с началом в вершине $\lambda_0 = \emptyset \in \Gamma_0$. По определению, $\lambda_{n-1} \nearrow \lambda_n$ при всех $n \geq 1$. Мы снабжаем T топологией покоординатной сходимости, в которой это пространство компактно.

Конечному пути $u = (\lambda_m, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n)$ сопоставим произведение

$$\varkappa(u) = \prod_{k=m+1}^{n} \varkappa(\lambda_{k-1}, \lambda_k) \tag{1.1.2}$$

кратностей дуг вдоль этого пути и положим

$$d(\lambda, \Lambda) = \sum_u \varkappa(u), \tag{1.1.3}$$

где сумма берется по всем путям u с началом в точке $\lambda_m = \lambda$ и концом в $\lambda_n = \Lambda$. В частности, для $\lambda = \emptyset$ мы пишем просто $d(\Lambda) = d(\emptyset, \Lambda)$ и называем $d(\Lambda)$ *размерностью* вершины $\lambda \in \Gamma$. Обозначим через $C_u \subset T$ цилиндрическое множество, состоящее из всех путей с заданным началом $u = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Вероятностная борелевская мера M в пространстве путей T называется *центральной* (по отношению к функции кратностей $\varkappa$), если отношение

$$\varphi(\lambda) = \frac{M(C_u)}{\varkappa(u)}; \quad u = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \lambda) \tag{1.1.4}$$

зависит только от концевой вершины $\lambda_n = \lambda$ пути u.

Функция $\varphi\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$, определенная формулой (1.1.4), задает центральную меру M однозначно и характеризуется условием гармоничности (2.2) из п.1.2 введения.

Описание всех центральных мер для заданной пары $(\Gamma, \varkappa)$ – одна из основных задач теории LS-алгебр. К ней сводится, в частности, описание характеров локально - конечных групп. Наибольший интерес представляют *эргодические* центральные меры, определенные выше в п.1.5 введения.

Легко видеть, что если для некоторого бесконечного пути (1.1.1) существуют пределы

$$\varphi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{d(\lambda, \lambda_n)}{d(\lambda_n)}; \quad \lambda \in \Gamma,$$

то функция $\varphi\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$ гармонична. Как показывает следующий результат, так можно получить гармонические функции, ассоциированные с любой эргодической центральной мерой.

Теорема. *Пусть M – эргодическая центральная мера на пространстве T. Тогда для п.в. по этой мере путей $t = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots)$ пределы*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(\lambda, \lambda_n)}{d(\lambda_n)} = \varphi(\lambda) \tag{1.1.5}$$

существуют для всех $\lambda \in \Gamma$.

Доказательство является адаптацией стандартного доказательства индивидуальной эргодической теоремы Г. Биркгофа (см., напр., [46], стр.363-366).

Начнем с анализа максимальной эргодической леммы.

Условимся обозначать через $\lambda_m(t)$ вершину λ_m пути (1.1.1) на m-ом этаже Γ_m и через $\alpha_m(t)$ начальный отрезок длины m пути t. Для заданной измеримой функции $g : T \to \mathbb{R}$ и пути $t \in T$ обозначим через

$$s_m(g,t) = \frac{1}{d(\lambda_m(t))} \sum_{r \in \xi_m(t)} \varkappa(\alpha_m(r))\, g(r) \tag{1.1.6}$$

среднее значение функции g на конечном подмножестве путей $\xi_m(t)$, совпадающих с t начиная с m-ого этажа. Рассмотрим теперь множество $E = E(g)$ тех путей $t \in T$, для которых

$$s_m(g,t) > 0 \quad \text{хотя бы при одном } m = 1, 2, \dots . \tag{1.1.7}$$

Ясно, что множество E измеримо.

Лемма 1. *Для любой центральной меры M и любой измеримой функции $g : T \to \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$\int_{E(g)} g(t)\, dM(t) \geq 0. \tag{1.1.8}$$

Доказательство леммы. Пусть $m \leq n$ и $\mu \in \Gamma_m$. Обозначим через $E_n(\mu)$ множество таких путей $t \in T$, что

(a) $\lambda_m(t) = \mu$ и $s_m(g,t) > 0$;

(b) $s_j(g,t) \leq 0$ при $m < j \leq n$.

Множество $E_n(\mu)$ состоит из целых классов разбиения ξ_m. Обозначим через $\overline{T}$ фактор - пространство по измеримому разбиению ξ_m и через $\overline{M}$ фактор - меру для меры M на пространстве $\overline{T}$. Поскольку мера M центральна, имеем

$$\int\limits_{E_n(\mu)} g(t)\, dM(t) = \int\limits_{\overline{E_n(\mu)}} s_m(g,t)\, d\overline{M}(t) \geq 0. \tag{1.1.9}$$

Если E_n – множество путей из E, для которых $s_m(g,t) > 0$ при некотором $m \leq n$, то

$$E_n = \bigcup_{m=0}^{n} \bigcup_{\mu \in \Gamma_m} E_n(\mu) \tag{1.1.10}$$

– объединение непересекающихся множеств и

$$\int\limits_{E_n} g(t)\,dM(t) = \sum_{m=0}^{n}\sum_{\mu}\int\limits_{E_n(\mu)} g(t)\,dM(t) \geq 0.$$

Поскольку множества E_n монотонно возрастают и $E = \cup_{n=m}^{\infty} E_n$, получаем, что

$$\int_E g(t)\,dM(t) = \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} g(t)\,dM(t) \geq 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть M – центральная мера и $f : \Gamma_m \to \mathbb{R}$ – функция на некотором этаже графа Γ. Тогда для п.в. путей $t = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) \in T$ существует предел*

$$\overline{f}(t) = \lim_{n\to\infty} s_n(f(\lambda_m(t)), t). \tag{1.1.11}$$

Доказательство. Для любых рациональных $a < b$ положим

$$E = E_{a,b} = \{t \in T : \liminf s_n(f(\lambda_m(t)), t) < a < b < \limsup s_n(f(\lambda_m(t)), t)\}$$

и убедимся в том, что $M(E_{a,b}) = 0$.

Применяя лемму 1 к функции

$$g(t) = \begin{cases} f(\lambda_m(t)) & \text{при} \quad t \in E \\ 0 & \text{при} \quad t \notin E, \end{cases}$$

получим

$$\int_E f(\lambda_m(t))\,dM(t) \geq b\,M(E).$$

Действительно, если

$$A(g) = \{t \in T : \sup_{n\geq 1} s_n(f(\lambda_m(t)), t) > b\},$$

то $A(g) \supseteq E$. Обратно, если $t \notin E$, то $s_n(f(\lambda_m(t)), t) \equiv 0$ и $A(g) \subset E$, так что $A(g) = E$. Аналогично можно получить неравенство

$$\int_E f(\lambda_m(t))\,dM(t) \leq a\,M(E).$$

Таким образом, $bM(E) \leq aM(E)$, откуда $M(E) = 0$. Лемма доказана.

Можно убедиться, что $\overline{f}(t) = f(t)$ при почти всех $t \in T$. Применение леммы 2 к функции $f(\mu) = \delta_{\lambda\mu}\,/\,d(\lambda)$ завершает доказательство теоремы.

§2. Комбинаторные примеры графов ветвления

Центральной задачей при изучении локально - полупростой алгебры является вычисление ее группы размерностей – группы Гротендика с естественной структурой порядка в ней. Другой важный вопрос – описание конечных и полуконечных следов.

Как показано в п.1.7 введения, с каждым графом ветвления связана LS-алгебра. При этом задачи о ее следах и группе размерностей допускают формулировки в терминах исходного графа и могут иметь приложения за пределами теории LS-алгебр (см., например, [130]). Мы рассмотрим здесь некоторые примеры графов ветвления комбинаторного происхождения. Комбинаторные объекты отождествляются при этом с путями графа, число объектов данного типа λ равно $\dim\lambda = d(\lambda)$, а дуги графа вместе с их (целыми) кратностями выражают характерные для этих объектов рекуррентные соотношения.

2.1. Марковские семейства классификаций.

Если значения функции кратностей $\varkappa(\lambda,\Lambda)$ целые, удобно рассматривать *схему ветвления* $(\Gamma,\varkappa)$ как ориентированный граф с кратными дугами. Последовательность инцидентных дуг с началом в вершине $\emptyset\in\Gamma_0$ назовем *путем* и пусть T_n – множество путей длины n. Обозначая начало $s\in T_{n-1}$ пути $t\in T_n$ через $\pi_n(t)$, получим проективное семейство

$$T_0 \xleftarrow{\pi_1} T_1 \longleftarrow \ \dots \xleftarrow{\pi_n} T_n \xleftarrow{\pi_{n+1}} \ \dots \tag{1.2.1}$$

пределом которого служит пространство $T=\varprojlim T_n$ бесконечных путей.

Пусть ξ_n – разбиение T_n на классы путей с общим концом. Для $s\in T_{n-1}$ и $\Lambda\in\xi_n$ обозначим через $\tilde\varkappa(s,\Lambda)$ число элементов множества $\{t\in\Lambda|\pi_n(t)=s\}$. Ясно, что

$$s_1\sim_{\xi_{n-1}} s_2 \quad\Rightarrow\quad \tilde\varkappa(s_1,\Lambda)=\tilde\varkappa(s_2,\Lambda). \tag{1.2.2}$$

Будем называть *марковским семейством классификаций* любое семейство конечных множеств (1.2.1) и заданных на них разбиений ξ_n, удовлетворяющих условию (1.2.2). Тогда существует схема ветвления (т.е. граф вместе с функцией кратностей) $(\Gamma,\varkappa)$, определяющая это семейство по данному выше описанию. Вершинами n-ого этажа Γ_n служат классы разбиения ξ_n, а кратность дуги $\varkappa(\lambda,\Lambda)$ равна $\tilde\varkappa(s,\Lambda)$ для любого элемента $s\in\lambda$.

Пример 1. Пусть $T_n=\mathcal{B}_n$ множество разбиений отрезка натурального ряда $P_n=\{1,2,\dots,n\}$, а проекция $\pi_n\colon T_n\to T_{n-1}$ состоит в ограничении разбиения $t\in T_n$ на подмножество $P_{n-1}\subset P_n$. Сопоставим разбиению $t\in T_n$ диаграмму Юнга $\lambda=\lambda(t)$, длины строк которой – величины блоков t. Будем классифицировать разбиения по размерам блоков, т.е. считать, что $t_1 \sim_{\xi_n} t_2$, если $\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$. Тогда $\{(\mathcal{B}_n, \xi_n)\}$ – марковское семейство. Граф совпадает с графом Юнга $\mathcal{Y}$, а функция кратностей равна

$$\varkappa_B(\lambda, \Lambda) = \rho_k + 1, \tag{1.2.3}$$

где

$$\lambda = (1^{\rho_1}, \dots, k^{\rho_k+1}, (k+1)^{\rho_{k+1}-1}, \dots)$$

$$\Lambda = (1^{\rho_1}, \dots, k^{\rho_k}, (k+1)^{\rho_{k+1}}, \dots).$$

Схему ветвления $(\mathcal{Y}, \varkappa_B)$ будем называть *схемой Белла* (рис.14). Бесконечные пути схемы Белла отождествляются с разбиениями натурального ряда.

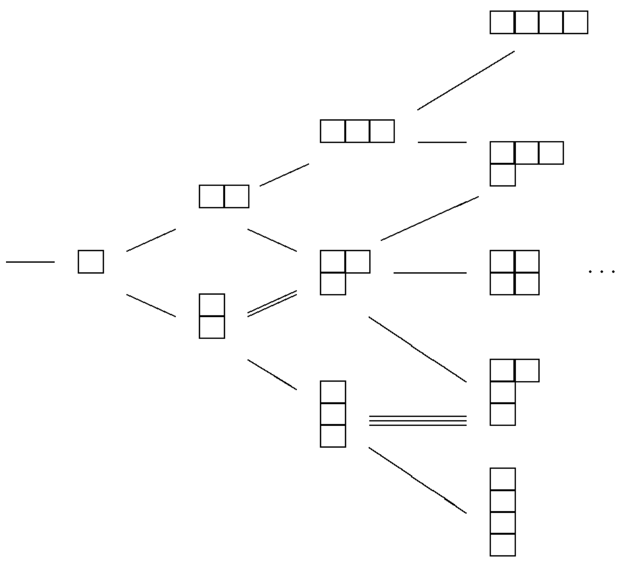


Рис.14 Ветвление разбиений множества.

Пример 2. Рассмотрим в примере 1 более грубую классификацию разбиений – по числу блоков (без учета их размеров). Это семейство марковское. Соответствующую схему ветвления будем называть схемой Стирлинга II рода (см. рис.17 на стр.86, где $\mu_k = k+1$, $\nu_k = 0$). Числа Стирлинга II рода совпадают с размерностями $\dim \lambda_j^{(n)}$ вершин графа Γ.

Пример 3. Пусть $T_n = \mathfrak{S}_n$ совокупность подстановок множества P_n. Определим проекцию $\pi_n \colon T_n \to T_{n-1}$ как переход к производной подстановке на подмножестве $P_{n-1} \subset P_n$ и пусть ξ_n – разбиение $\mathfrak{S}_n$ на классы сопряженности. Тогда $\{(\mathfrak{S}_n, \xi_n)\}$ – марковское семейство. Его граф ветвления – граф Юнга, функция кратностей равна

$$\varkappa_C(\lambda, \Lambda) = k(\rho_k + 1). \tag{1.2.4}$$

Схему ветвления $(\mathcal{Y}, \varkappa_C)$ назовем *схемой классов сопряженности* (симметричес-ких групп), см. рис.15. Бесконечные пути этой схемы можно отождествить с разбиениями натурального ряда, элементы которых линейно упорядочены (по типу конечного или бесконечного отрезка в $\mathbb{Z}$). Размерность $\dim \Lambda$ в этой схеме совпадает с величиной класса сопряженности $\Lambda \subset \mathfrak{S}_n$.

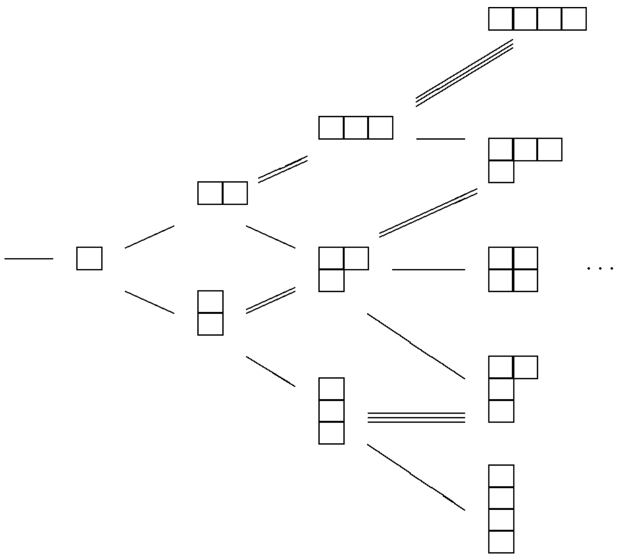


Рис.15 Ветвление классов сопряженности группы $\mathfrak{S}_n$.

Пример 4. Рассмотрим более грубую, чем в примере 3 классификацию подстановок по числу циклов. Это семейство также марковское. Соответствующая схема ветвления – схема Стирлинга I рода, см. ниже §4.

Пример 5. Пусть T_n – множество таблоидов (см. [26]) с элементами из P_n и проекция $\pi_n\colon T_n \to T_{n-1}$ состоит в вычеркивании элемента $n \in P_n$. Пусть ξ_n – классификация таблоидов с точностью до диаграммы Юнга. Мы снова получаем марковское семейство; его схема (*схема Кингмана* (см. [129])) показана на рис.16. Граф ветвления совпадает с $\mathcal{Y}$, а функция кратностей равна

$$\varkappa_K(\lambda, \Lambda) = \rho_{k+1}. \tag{1.2.5}$$

Данное выше определение означает, что схема $(\mathcal{Y}, \varkappa_K)$ является схемой ветвления представлений симметрических групп, индуцированных с единичного представления подгрупп Шура $\mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k} \subset \mathfrak{S}_n$. Интересно, что в работе [130] схема возникла в связи с задачей популяционной генетики.

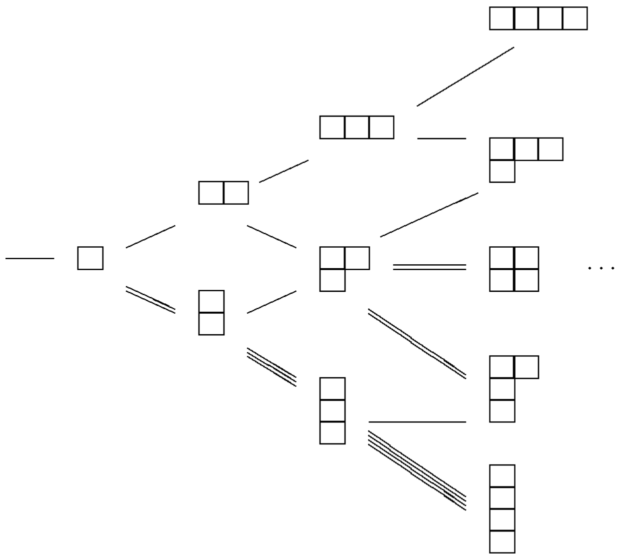


Рис.16 Ветвление индуцированных представлений группы $\mathfrak{S}_n$.

Пример 6. Попытка классифицировать таблоиды по числу строк дает, в отличие от примеров 2, 4 не марковское семейство. Например, для двустрочных таблоидов $s_1 = \binom{123}{4}$ и $s_2 = \binom{12}{34}$ и класса Λ двустрочных таблоидов из T_5 $\tilde{\varkappa}(s_1, \Lambda) = 2 \neq 1 = \tilde{\varkappa}(s_2, \Lambda)$.

2.2. Подобие схем ветвления.

Определение. Схемы ветвления $(\Gamma, \varkappa_1)$, $(\Gamma, \varkappa_2)$ с общим графом Γ назовем *подобными*, если существует такая положительная функция на множестве вершин Γ, что

$$\varkappa_2(\lambda, \Lambda) = g(\lambda)\, \varkappa_1(\lambda, \Lambda)\, g^{-1}(\Lambda) \tag{1.2.6}$$

для всех дуг (λ, Λ).

Пример 7. Схема ветвления Белла (пример 1) подобна схеме Кингмана:

$$\varkappa_B(\lambda, \Lambda) = g_B(\lambda)\varkappa_K(\lambda, \Lambda)g_B^{-1}(\Lambda), \tag{1.2.7}$$

где $g_B(1^{\rho_1}, 2^{\rho_2}, \dots) = \rho_1!\rho_2!\dots$.

Пример 8. Схема классов сопряженности подстановок (пример 3) также подобна схеме Кингмана:

$$\varkappa_C(\lambda, \Lambda) = g_C(\lambda)\varkappa_K(\lambda, \Lambda)g_C^{-1}(\Lambda), \tag{1.2.8}$$

где $g_C(1^{\rho_1}, 2^{\rho_2}, \dots) = \prod_{k=1}^{\infty} \rho_k!/[(k-1)!]^{\rho_k}$.

Пример 9. Если схемы $(\Gamma, \varkappa_1)$, $(\Gamma, \varkappa_2)$ подобны и J – идеал графа ветвления Γ, то схемы $(J, \varkappa_1)$, $(J, \varkappa_2)$, также подобны.

Свойства подобных схем ветвления очень похожи.

Предложение 1. *Если* $\varphi_1 \in \operatorname{ex} \mathcal{T}_1$ *– гармоническая функция схемы* $(\Gamma, \varkappa_1)$, *то функция*

$$\varphi_2(\lambda) = g(\lambda)\varphi_1(\lambda) \tag{1.2.9}$$

принадлежит $\operatorname{ex} \mathcal{T}_2$ *для схемы ветвления* $(\Gamma, \varkappa_2)$.

Доказательство:

$$\varphi_2(\lambda) = g(\lambda)\varphi_1(\lambda) = \sum_{\Lambda} g(\lambda)\varkappa_1(\lambda, \Lambda)\varphi_1(\Lambda) = \sum_{\Lambda} \varkappa_2(\lambda, \Lambda)\varphi_2(\Lambda).$$

Согласно примеру 9, предложение 1 распространяется и на гармонические функции на идеалах подобных схем ветвления или, в других терминах, на полуконечные гармонические функции.

Аналогично проверяется

Предложение 2. *Если* f_1 *– функции размерности схемы ветвления* $(\Gamma, \varkappa_1)$, *то*

$$f_2(\lambda) = \frac{f_1(\lambda)}{g(\lambda)} \tag{1.2.10}$$

– функция размерностей подобной схемы $(\Gamma, \varkappa_2)$. *В частности,*

$$g(\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{d_2(\lambda)}. \tag{1.2.11}$$

Пусть $R(Q) = R \otimes_{\mathbb{Z}} Q$ – рациональная оболочка группы размерностей R и $R^+(Q)$ – конус над Q, порожденный R^+.

Следствие. Если схемы ветвления подобны, то рациональные оболочки их групп размерностей изоморфны, как упорядоченные группы.

Предложения 1, 2 и следствие позволяют перенести результаты, полученные ниже в §3, на графы классов сопряженности и Белла.

Заметим, что основным объектом в работе [129] является семейство вероятностных распределений $\{\varphi(\lambda) \dim \lambda\}$, $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (partition structure). Для подобных схем ветвления эти распределения идентичны.

§3. Граница и группа размерностей графа Кингмана

Дадим описание границы и группы размерностей схемы ветвления $(\mathcal{Y}, \varkappa_K)$ из примера 5. Ответы и метод их получения близки соответствующим результатам для графа Юнга ([17], гл.3 §7). Описание границы впервые получено Кингманом [129]. Пусть $m_\lambda, \lambda \in \mathcal{Y}$ – мономиальные симметрические функции. Тогда их расширенные версии определяются формулой

$$M_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots; \gamma) = \sum_{k=0}^{\rho_1} \frac{\gamma^k}{k!} m_{(1^{\rho_1-k}, 2^{\rho_2}, \dots)}(\alpha_1, \alpha_2, \dots), \tag{1.3.1}$$

где $\lambda = (1^{\rho_1}, 2^{\rho_2}, \dots)$.

Теорема 1 ([129]). *Граница $\mathcal{E}$ схемы Кингмана отождествляется с пространством последовательностей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, для которых*

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \leq 1. \tag{1.3.2}$$

Если $\gamma = 1 - \sum \alpha_k$, то неразложимые гармонические функции имеют вид

$$\varphi_\alpha(\lambda) = M_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots; \gamma). \tag{1.3.3}$$

Доказательство. Для функций M_λ справедливы тождества

$$M_\lambda \cdot M_{(1)} = \sum_\Lambda \varkappa_K(\lambda, \Lambda) M_\Lambda. \tag{1.3.4}$$

Обозначим через A кольцо, порожденное функциями $M_\Lambda, \Lambda \in \mathcal{Y}$. Согласно [17], гл.2, §5 точки границы отождествляются с гомоморфизмами колец $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$, для которых $\varphi(M_\Lambda) \geq 0$ при $\Lambda \in \mathcal{Y}$. Значения (1.3.3) в точках из $\mathcal{E}$ как раз и задают такие гомоморфизмы.

Полноту описания границы можно обосновать эргодическим методом ([17], гл.1, §9). Пусть $\dim(\lambda, \Lambda)$ – число путей графа $(\mathcal{Y}, \varkappa_K)$ между вершинами λ, Λ. Из эргодической теоремы Биркгофа следует, что каждую функцию $\varphi \in \operatorname{ex} \mathcal{T}$ можно получить как предел

$$\varphi(\lambda) = \lim_{N \to \infty} \frac{\dim(\lambda, \Lambda^{(N)})}{\dim \Lambda^{(N)}} \tag{1.3.5}$$

для подходящей последовательности $\Lambda^{(N)} \in \mathcal{Y}_N$; $N = 1, 2, \dots$.

Определим факториальные мономиальные функции

$$\tilde{m}_\lambda(x_1, x_2, \dots) = \sum (x_{i_1})_{\lambda_1} (x_{i_2})_{\lambda_2} \dots, \tag{1.3.6}$$

где $(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)$ – факториальные степени и сумма берется по различным факториальным мономам. Нетрудно проверить, что для схемы $(\mathcal{Y}, \varkappa_K)$

$$\frac{\dim(\lambda, \Lambda)}{\dim \Lambda} = \frac{1}{(N)_n}\tilde{m}_\lambda(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots), \tag{1.3.7}$$

где $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots) \in \mathcal{Y}_N$ и $n = |\lambda|$. Если диаграммы Юнга $\Lambda^{(N)}$ растут таким образом, что существуют пределы относительных длин строк

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\Lambda_k^{(N)}}{N} = \alpha_k; \quad k = 1, 2, \dots, \tag{1.3.8}$$

то

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{(N)_n}\tilde{m}_\lambda(\Lambda_1^{(N)}, \Lambda_2^{(N)}, \dots) = M_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots; \gamma). \tag{1.3.9}$$

Поскольку пределы (1.3.8), (1.3.9) существуют или нет одновременно, теорема доказана. Формулы (1.3.8) интерпретируют параметры $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ как частоты заполнения строк растущей диаграммы Юнга.

Опишем носители функций φ_α. Пусть I_k – бесконечная диаграмма, содержащая k бесконечных строк и I_k' – объединение I_k с одним бесконечным столбцом, $k = 1, 2, \dots, \infty$; (так что $I_\infty = I_\infty'$).

Предложение 2. *Пусть $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_k \neq 0$ и $\alpha_{k+1} = 0$. Тогда $\varphi_\lambda(\Lambda) > 0$ тогда и только тогда, когда $\Lambda \subset I_k$. Если же $\gamma = 1 - \sum \alpha_i > 0$, то $\varphi_\lambda(\Lambda) > 0$ в точности при условии $\Lambda \subset I_k$.*

Доказательство вытекает из формулы (1.3.1).

Обозначим через $\{h_\lambda\}$, $\lambda \in \mathcal{Y}$ базис полных однородных симметрических функций. Пусть H_λ – дифференциальный оператор в кольце симметрических функций A, сопряженный к оператору умножения на h_λ (см. [95]).

Теорема 3. *Полуконечные неразложимые гармонические функции на графе Кингмана имеют вид*

$$\varphi_\alpha^\nu(\Lambda) = (H_\nu\, M_\lambda)(\alpha_1, \alpha_2, \dots; \gamma) \tag{1.3.10}$$

на идеале диаграммы Юнга λ, для которых

$$\tau \subset \nu,\ \tau \neq \nu \Rightarrow (H_\tau M_\lambda)(\alpha_1, \alpha_2, \dots; \gamma) = 0. \tag{1.3.11}$$

Условие (1.3.11) выделяет идеал конечности функций $\varphi_\lambda(\Lambda) > 0$. Предполагается, что число ненулевых частот $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ конечно.

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 4.4 из [16], см. также [126].

Определим *струю* полинома $Q \in A$, как семейство $\{H_\nu Q\}$, $\lambda \in \mathcal{Y}$. Будем говорить, что струя *положительна* на подмножестве $\tilde{\mathcal{E}} \subset \mathcal{E}$, если из условий

$$(H_\tau Q)(\alpha;\gamma) = 0 \quad \text{при всех } (\alpha;\gamma) \in \tilde{\mathcal{E}}, \quad \tau \subset \nu, \quad \tau \neq \nu$$

и

$$(H_\nu Q)(\alpha;\gamma) \not\equiv 0 \quad \text{на } \mathcal{E}$$

следует, что

$$(H_\nu Q)(\alpha;\gamma) > 0 \quad \text{для} \quad (\alpha;\gamma) \in \tilde{\mathcal{E}}.$$

Пусть $\mathcal{E}_k = \{\alpha \in \mathcal{E} | \alpha_k > 0,\, \alpha_{k+1} = 0,\, \gamma = 0\}$ и

$$\mathcal{E}'_k = \{\alpha \in \mathcal{E} | \alpha_k > 0,\, \alpha_{k+1} = 0,\, \gamma > 0\},\ k = 1, 2, \dots, \infty\ (\mathcal{E}_\infty = \mathcal{E}'_\infty).$$

Из общей теоремы о положительности ([17], теорема 2) и теорем 1, 3 вытекает

Теорема 4. *Следующие условия на функцию $Q \in A$ равносильны:*

1) существует такое n, что все коэффициенты разложения

$$M_{(1)}^n Q = \sum_\lambda c_\lambda M_\lambda$$

неотрицательны.

2) струя Q положительна на всех подмножествах $\mathcal{E}_k$, $\mathcal{E}'_k$ при $k = 1, 2, \dots, \infty$.

Пример: $Q = (M_{(2)} - M_{(1^2)})^2$ не удовлетворяет условиям теоремы, хотя все конечные и полуконечные следы неотрицательны на Q. Действительно, при $\alpha = (1/2, 1/4, 1/8, \dots) \in \mathcal{E}_\infty$ имеем $Q(\alpha) = 0$.

Группа размерностей R графа Кингмана является кольцом и отождествляется с фактор - кольцом $A/(M_{(1)} - 1)$ по идеалу, порожденному соотношением $\gamma + \sum \alpha_i = 1$. Теорема 4 описывает конус в группе размерностей.

§4. Треугольники Стирлинга

Рассмотрим теперь примеры схем ветвления $(\Gamma, \varkappa)$, в которых граф Γ – треугольник Паскаля, а кратности дуг определяются последовательностями $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ и $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots)$, рис.17. Будем называть их обобщенными треугольниками Стирлинга.

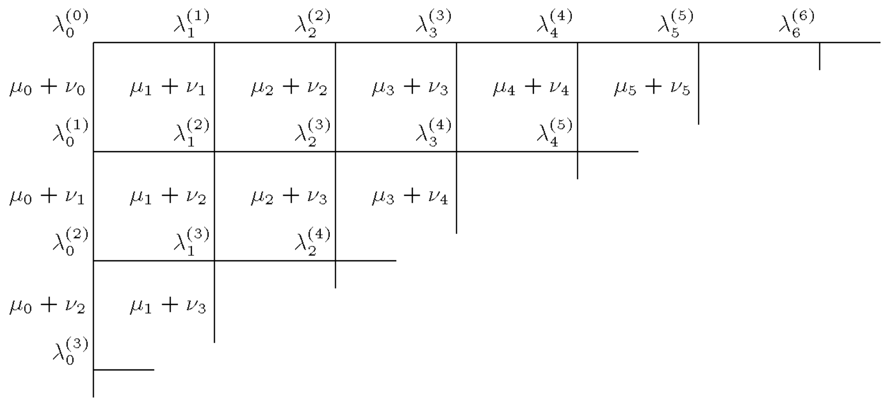


Рис.17 Обобщенные треугольники Стирлинга.

Вершину i-ой строки и j-столбца графа Γ обозначим через $\lambda_j^{(n)}$, где $n = i + j$ – номер этажа; $i, j = 0, 1, 2, \dots$.

Предложение 1. *Для обобщенного треугольника Стирлинга*

$$\dim \lambda_j^{(n)} = h_{n-j}(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_j;\ \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}). \tag{1.4.1}$$

Доказательство: для расширенных полных однородных симметрических функций (см. [17], гл.3, §7) справедливо рекуррентное соотношение (2):

$$\begin{aligned} &h_i(\mu_0, \dots, \mu_j; \nu_0, \dots, \nu_{n-1}) = h_i(\mu_0, \dots, \mu_{j-1};\ \nu_0, \dots, \nu_{n-2}) + \\ &+ (\mu_j + \nu_{n-1})\, h_{i-1}(\mu_0, \dots, \mu_j;\ \nu_0, \dots, \nu_{n-2}). \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_j^{(n)}(x) = \frac{(x-\mu_0)(x-\mu_1)\dots(x-\mu_{j-1})}{(x+\nu_0)(x+\nu_1)\dots(x+\nu_{n-1})}. \tag{1.4.3}$$

Для них выполняются соотношения

$$\varphi_j^{(n)}(x) = (\mu_j + \nu_n)\varphi_j^{(n+1)}(x) + \varphi_{j+1}^{(n+1)}(x). \tag{1.4.4}$$

Теорема 2. *Предположим, что $\nu_0 = \nu_1 = \ldots = 0$ (обобщенный треугольник Стирлинга* II *рода). Тогда группа размерностей реализуется как группа многочленов $\mathbb{Z}[1/x]$. Граница $\mathcal{E}$ является объединением интервала $[\mu^{(0)}, +\infty]$, где*

$\mu^{(0)} = \sup_{k\geq 0}\mu_k$, и точек $x = \mu_n$, для которых $\mu_k < \mu_n$ при $k < n$. Пусть $P \in \mathbb{Z}[1/x]$ и n – наименьшее значение k, при котором $P(\mu_k) \neq 0$. Тогда P принадлежит конусу группы размерностей в том и только том случае, когда

$$P(x)/\prod_{k=0}^{n-1}(x-\mu_k) > 0$$

при $x > \mu^{(n)} = \sup_{k\geq n}\mu_k$ и для $x = \mu_k$, если $\mu_j < \mu_k$ при $n \leq j < k$.

Доказательство. Группа, порожденная функциями $\varphi_j^{(n)}(x)$, совпадает с $\mathbb{Z}[1/x]$. По теореме о кольце ([17], гл.2, §5) гармонические функции из ex $\mathcal{T}$ задаются гомоморфизмами колец $\varphi\colon \mathbb{Z}[1/x] \to R$, для которых $\varphi(\lambda_j^{(n)}) \geq 0$. Легко видеть, что такие гомоморфизмы имеют вид

$$\varphi_x(P) = P(x), \quad x \in \mathcal{E}. \tag{1.4.5}$$

Примитивные идеалы графа Γ ([17], гл.1, §11) имеют вид $\{\lambda_j^{(n)}\}$, $j \geq k$ или $\{\lambda_j^{(n)}\}$, $n-j \geq k$. В обоих случаях они изоморфны обобщенным треугольникам Стирлинга, быть может, с другими значениями параметров $\mu_0, \mu_1, \dots$. По предыдущему, следы на них известны и можно применить теорему о положительности ([17], гл.2, §5), которая и дает описание конуса.

Следствие 3 (Пуанкаре [147]). Для треугольника Паскаля ($\mu_k \equiv 1$, $\nu_k \equiv 0$, $k = 0,1,2,\dots$) конус в $\mathbb{Z}[1/x]$ состоит из функций $P(x)$, для которых $P(x) > 0$ при $x > 0$.

Следствие 4. Для треугольника Стирлинга II рода ($\mu_k = k+1$, $\nu_k \equiv 0$, $k = 0,1,2,\dots$) границей служит $\mathcal{E} = \{1,2,3,\dots,\infty\}$. Конус в $\mathbb{Z}[1/x]$ состоит из функций P, для которых $P(1) = \dots = P(n-1) = 0$ при некотором $n = 1,2,\dots$ и $P(k) > 0$ для $k \geq n$.

Отметим, что примеры из [30], связанные с треугольниками Паскаля, подобны обобщенным треугольникам Стирлинга II рода.

Другой интересный класс примеров, обобщенные треугольники Стирлинга I рода, возникает, когда $\mu_0 = \mu_1 = \dots = 0$. Ответы здесь качественно зависят от скорости роста последовательности $\nu_0, \nu_1, \dots$.

Предположим сначала, что $\sum_{k=0}^{\infty} 1/\nu_k < \infty$. Обозначим через $e_k(x_0, x_1, \dots)$ элементарные симметрические функции от аргументов $x_i = 1/\nu_i$, $i = 0,1,2,\dots$ и положим

$$\Psi_k(\lambda_j^{(n)}) = \frac{x_0 x_1 \dots x_{n-1}\, e_{k-j}(x_n, x_{n+1}, \dots)}{e_k(x_0, x_1, \dots)}. \tag{1.4.6}$$

Теорема 5. *Функции φ_k при $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ гармоничны и неразложимы.*

Доказательство. Гармоничность следует из соотношений

$$e_i(y_0, y_1, \dots) = e_i(y_1, y_2, \dots) + y_0 e_{i-1}(y_1, y_2, \dots).$$

Неотрицательность очевидна. Неразложимость легко выводится из того факта, что носитель функций (1.4.6) состоит из конечного числа столбцов или одной строки графа Г.

Следствие 6. *Рассмотрим q-вариацию треугольника Паскаля с параметрами $\mu_k \equiv 0$, $\nu_k = q^k$; $k = 0, 1, 2, \dots$, где $q > 1$. Тогда функции φ_k; $k = 0, 1, \dots, \infty$ исчерпывают границу $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Из [49], §1.3 следует, что

$$\Psi_k(\lambda_j^{(n)}) = x^{i(i-1)/2+ki} \prod_{s=0}^{j-1}(1 - q^s x^k), \tag{1.4.7}$$

где $i = n - j$, $x = 1/q$. Группа, порожденная этими функциями, совпадает с кольцом $\mathbb{Z}[x]$. Полнота списка легко выводится из теоремы о кольце.

Отметим, что в пределе при $q \to 1$ происходит "фазовый переход": счетная граница $\mathcal{E} = \{1, 1/q, 1/q^2, \dots, 0\}$ превращается в отрезок $[0, 1]$.

Предложение 7. *q-треугольник Паскаля подобен треугольнику Стирлинга* II *рода с параметрами $\mu_k = q^k$, $\nu_k \equiv 0$; $k = 0, 1, 2, \dots$*

Доказательство: функция $g(\lambda_j^{(n)}) = \nu_j \nu_{j+1} \dots \nu_{n-1}$ осуществляет подобие обобщенного треугольника Стирлинга I рода и треугольника с простыми вертикальными дугами и горизонтальными дугами с кратностями $\varkappa(\lambda_j^{(n)}, \lambda_{j+1}^{(n+1)}) = \nu_j/\nu_n$.

Для q-треугольника Паскаля это дает "транспонированный" треугольник Стирлинга II рода.

Следствие 8. Группа размерностей q-треугольника Паскаля изоморфна кольцу $\mathbb{Z}[x]$ с конусом таких многочленов $P(x)$, что

$$P(1) = P(1/q) = \dots = P(1/q^{(n-1)}) = 0 \quad P(1/q^k) > 0$$

для $k \geq n$ при некотором $n = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь на треугольнике Стирлинга I рода функции

$$\varphi_x(\lambda_j^{(n)}) = \varphi_j^{(n)}(x) = \frac{x^j}{(x + \nu_0)(x + \nu_1) \dots (x + \nu_{n-1})}. \tag{1.4.8}$$

Легко видеть, что они неотрицательны и гармоничны при $0 \leq x \leq \infty$.

Гипотеза: *если* $\sum 1/\nu_k = \infty$, *то эти функции неразложимы и исчерпывают границу* $\mathcal{E}$.

Предложение 9. *Гипотеза верна, если каждое значение встречается в последовательности* $\nu_0, \nu_1, \dots$ *с бесконечной кратностью.*

Доказательство. В этом случае группа, порожденная функциями $\varphi_j^{(n)}(x)$, допускает согласованное с порядком умножение и можно воспользоваться теоремой о кольце.

Автору не известно, верна ли гипотеза для треугольника из примера 4. Как показал Кингман [130], функции, отвечающие φ_x в графе классов сопряженности – так называемые распределения Эванса – в этом графе разложимы.

В случае q-треугольника Паскаля разложение функций φ_x нетрудно предъявить явно.

Предложение 10. *Положим* $\Pi = \prod_{k=0}^{\infty}(1 + x/q^k)$ *и пусть*

$$P_k = \frac{1}{\Pi}\,\frac{(qx)^k}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^k-1)}; \quad k = 0, 1, \dots . \tag{1.4.9}$$

Тогда при всех $\lambda_j^{(n)} \in \Gamma$

$$\varphi_x(\lambda_j^{(n)}) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\, \Psi_k(\lambda_j^{(n)}). \tag{1.4.10}$$

Доказательство вытекает из тождества Эйлера ([63], 2.2.6):

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + \frac{x}{q^k}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(qx)^k}{(q-1)(q^2-1)\dots(q^k-1)}. \tag{1.4.11}$$

Распределение $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ естественно рассматривать как q-аналог распределения Пуассона с параметром $y = qx/(q-1)$.

Отметим в заключение, что гармонические функции на графе ветвления задают центральные меры в пространстве путей этого графа ([17], гл.1, §8). В примерах 1, 3 получаются интересные меры в пространствах разбиений на $\mathbb{N}$, см. [9], [130].

Глава II

ГРАНИЦА ГРАФА ЮНГА И ПОЛИНОМЫ МАКДОНАЛЬДА

В этой главе описана структура групповой алгебры бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$. Найдены ее двусторонние идеалы и характеры (конечные и полуконечные). Большинство формулировок приводится в общих терминах графов ветвления. Это обстоятельство естественно приводит нас к аналогичным вопросам для двухпараметрической деформации графа Юнга, связанной с ветвлением симметрических полиномов Макдональда. Значительная часть главы посвящена обсуждению свойств этих полиномов, а также более общего класса обобщенных симметрических многочленов Холла – Литтлвуда, введенного в [35, 119].

§1. Идеалы групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$

1.1. Ветвление характеров симметрических групп.

Пусть $\mathfrak{S}_\infty$ – группа финитных перестановок счетного множества. В дальнейшем мы фиксируем в ней структуру индуктивного предела конечных симметрических групп $\mathfrak{S}_\infty = \varinjlim \mathfrak{S}_n$ (все получаемые далее результаты об $\mathfrak{S}_\infty$ не зависят от выбранной структуры). Тем самым можно считать $\mathfrak{S}_\infty$ группой перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$, причем $\mathfrak{S}_n = \{\sigma \,:\, \sigma(k) = k,\ k \geq n\}$. Через $\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_\infty\,]$ обозначим комплексную групповую алгебру, т.е. алгебру конечных формальных линейных комбинаций подстановок из $\mathfrak{S}_\infty$; пополнение $\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_\infty\,]$ есть групповая C^*-алгебра $C^*(\mathfrak{S}_\infty)$. Поскольку $\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_\infty\,] = \varinjlim \mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_n\,]$, алгебра $\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_\infty\,]$ локально полупроста.
Диаграммой Юнга называется конечный идеал λ в частично упорядоченном множестве $\mathbb{N}^2$, т.е. подмножество $\lambda \subset \mathbb{N}^2$, содержащее вместе с каждой своей "клеткой" $(k,l) \in \lambda$ все меньшие: $(i,j) \in \lambda$, если $i \leq k$, $j \leq l$. Пусть $\mathcal{Y}_n$ – множество диаграмм Юнга с n клетками. Множество $\mathcal{Y} = \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{Y}_n$ всех диаграмм Юнга частично упорядочено по включению; его диаграммой Хассе служит *граф Юнга* (рис.1, стр.8), который является *градуированным графом*: сопоставление диаграмме числа ее клеток задает градуировку на $\mathcal{Y}$.
Стандартные конструкции теории представлений конечных групп (см. [26], [50]) связывают с диаграммой $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ неприводимое комплексное представление V^λ группы $\mathfrak{S}_n$ с характером χ^λ. Хорошо известна следующая

Теорема ветвления (см. [26]). *Имеет место формула*

$$\chi^\Lambda(\sigma) = \sum_{\mathcal{Y}_n \ni \lambda \subset \Lambda} \chi^\lambda(\sigma), \tag{2.1.1}$$

где $\Lambda \in \mathcal{Y}_{n+1}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Иначе говоря, ограничение представления V^Λ группы $\mathfrak{S}_{n+1}$ на $\mathfrak{S}_n$ разлагается в прямую сумму

$$\bigoplus_{\Lambda \supset \lambda \in \mathcal{Y}_n} V^\lambda.$$

Этот факт означает, что частично упорядоченное множество $\mathcal{Y}$ задает *схему ветвления* (или диаграмму Браттели, см. [74]) индуктивного семейства конечномерных алгебр $\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_1\,] \subset \mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_2\,] \subset \ldots \subset \mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_n\,] \subset \ldots$.

Таблицей Юнга u с диаграммой $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ называется максимальная строго возрастающая цепь $\emptyset = u_0 \subset u_1 \subset \ldots \subset u_n = \lambda$ частично упорядоченного множества $\mathcal{Y}$, т.е. путь в градуированном графе с началом в $\emptyset$ и концом λ. Множество таких таблиц обозначим через $T(\lambda)$, а его мощность (число путей, ведущих в λ) – через $\dim \lambda$, так как она совпадает с размерностью соответствующего неприводимого представления V^λ; размерность $\dim \lambda$ вычисляется по классической формуле Фробениуса или формуле крюков (см. [45]). Для λ, $\Lambda \in \mathcal{Y}$ через $\dim(\lambda, \Lambda)$ обозначается число максимальных строго возрастающих цепей от λ к Λ. Итерируя (2.1.1), получим

$$\chi^\Lambda(\sigma) = \sum_{\mathcal{Y}_m \ni \lambda \subset \Lambda} \chi^\lambda(\sigma) \, \dim(\lambda, \Lambda) \tag{2.1.2}$$

для $\Lambda \in \mathcal{Y}_n$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $m < n$.

Конечной битаблицей называется пара таблиц с общим концом, т.е. конечная петля в графе $\mathcal{Y}$.

1.2. Бесконечные диаграммы и таблицы Юнга.

Бесконечной *таблицей* t назовем максимальную строго возрастающую цепь $\emptyset = t_0 \subset t_1 \subset \ldots \subset t_n \subset \ldots$ частично упорядоченного множества $\mathcal{Y}$. *Диаграммой (бесконечной)* назовем бесконечный идеал в $\mathbb{N}^2$. С таблицей t связана диаграмма $[\,t\,] = \cup_{n=1}^\infty t_n$. Таблицу удобно также задавать с помощью монотонной нумерации клеток ее диаграммы $\mathcal{N}_t : [\,t\,] \to \mathbb{N}$, определяемой равенством $\mathcal{N}_t(t_n \backslash t_{n-1}) = n$; при этом $t_n = \mathcal{N}_t^{-1}\{1, \ldots, n\}$. Множество таблиц T снабдим топологией отделимого компактного вполне несвязного пространства, принимая за базис окрестностей цилиндры $F_u = \{t \in T \,:\, h_n(t) = u\}$, где u – таблица Юнга с n клетками, а $h_n(t)$ – начальный отрезок длины n цепи t. Таким образом, T есть пространство бесконечных путей в графе Юнга $\mathcal{Y}$.

Пусть $\mathcal{Y}_\infty$ – множество всех (бесконечных) диаграмм. Отображение T в $\mathcal{Y}_\infty$, сопоставляющее таблице t ее носитель $[t]$, индуцирует на $\mathcal{Y}_\infty$ квазикомпактную (не хаусдорфову) T_0-топологию, базис окрестностей которой составляют множества

$$\mathcal{O}_\lambda = \{I \in \mathcal{Y}_\infty \,:\, I \supset \lambda\}, \quad \lambda \in \mathcal{Y}.$$

Предложение 1. *Пространство диаграмм $\mathcal{Y}_\infty$ естественно гомеоморфно примитивному спектру $\operatorname{Prim} C^*(\mathfrak{S}_\infty)$ групповой C^*-алгебры группы $\mathfrak{S}_\infty$.*

Доказательство легко следует из общего описания идеалов в LS-алгебрах (см. [83]). Диаграмме $I \in \mathcal{Y}_\infty$ сопоставляется замыкание идеала $\mathfrak{A}^I = \varinjlim \mathfrak{A}_n^I$ в $\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_\infty\,]$, где $\mathfrak{A}_n^I = \bigcap_{\mathcal{Y}_n \ni \lambda \subset I} \ker V^\lambda$.

Каждая диаграмма $\mathcal{Y}_\infty \ni I \neq \mathbb{N}^2$ имеет вид $I = I_{k,l} = \{(i,j)\colon\ i \leq k$ или $j \leq l\}$, $k + l \geq 1$ или $I = I_{k,l}^\nu = I_{k,l} \cup \{\nu + (k,l)\}$, где ν –непустая конечная диаграмма Юнга.

Через $T(I)$ обозначим подмножество таблиц t с диаграммой $[t] = I$. Замыкание $T(I)$ в T состоит из таблиц, для которых $[t] \subset I$.

1.3. Битаблицы и скрещенные произведения.

На множестве T имеется важное *отношение эквивалентности.* Таблицы $t', t'' \in T$ эквивалентны, $t' \sim t''$, если они совпадают, начиная с некоторого места. Разбиение на классы эквивалентных таблиц в T обозначим через ξ; это пересечение убывающей последовательности разбиений $\xi_1 \succ \xi_2 \succ \dots$, где ξ_n – разбиение на классы таблиц, совпадающих уже с n-го места.

Пару эквивалентных таблиц (t', t''), $t' \sim t''$, назовем *битаблицей.* Пространство битаблиц B (т.е. график отношения ξ-эквивалентности) снабдим топологией индуктивного предела $B = \varinjlim B_n$, где B_n – пары таблиц, совпадающих с n-го места (график отношения ξ-эквивалентности). Таким образом, B – отделимое вполне несвязное локально компактное пространство, а диагональ $B_0 = \{(t,t) \, : \, t \in T\}$ гомеоморфна T.

Пусть $C(T, \xi)$ – пространство локально постоянных финитных функций битаблицы с комплексными значениями. Операции умножения и сопряжения (аналогичные матричным)

$$(f * g)(t', t'') = \sum_{t \sim t'} f(t', t)\, g(t, t''), \quad f^*(t', t'') = \overline{f(t'', t')}, \quad f, g \in C(T, \xi) \qquad (2.1.3)$$

превращают $C(T, \xi)$ в $*$-алгебру. C^*-пополнение $C^*(T, \xi)$ этой алгебры называется *C^*-скрещенным произведением*, построенным по разбиению ξ на T.

Предложение 2. *Алгебры* $\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_\infty\,]$ *и* $C(T,\xi)$ *изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_n \subset C(T,\xi)$ состоит из функций $f : B \to \mathbb{C}$, равных нулю вне B_n и таких, что значение $f(t',t'')$ зависит только от начальных отрезков $h_n(t')$, $h_n(t'')$ таблиц t', t''. Тогда $\mathfrak{A}_n$ – $*$-подалгебра и $C(T,\xi) = \varinjlim \mathfrak{A}_n$. Из построения ясно, что схема ветвления индуктивного семейства $\mathfrak{A}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{A}_n \subset \ldots$ совпадает с графом Юнга $\mathcal{Y}$. По теореме Браттели [74] существует изоморфизм $i : C^*(\mathfrak{S}_\infty) \to C^*(T,\xi)$, переводящий $\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_n\,]$ в $\mathfrak{A}_n$; в частности, $i\mathbb{C}[\,\mathfrak{S}_\infty\,] = C(T,\xi)$. Коммутативная подалгебра $\mathfrak{M}$ функций с носителем на диагонали B_0 переходит при этом изоморфизме в *алгебру Гельфанда –Цетлина* индуктивного семейства $\{\mathfrak{S}_n\}_{n=1}^\infty$. Заметим, что структура скрещенного произведения в $C^*(\mathfrak{S}_\infty)$ уже зависит от выбора индуктивного семейства в $\mathfrak{S}_\infty$.

§2. Характеры бесконечной симметрической группы

2.1. Теорема об аппроксимации характеров.

Принципиальный факт, полезный при вычислении характеров локально конечной группы, – аппроксимируемость неприводимыми характерами конечных подгрупп. Мы приводим его в наиболее сильной формулировке.

Теорема 1. *Для любого нормированного характера φ группы $\mathfrak{S}_\infty$ существует такая таблица $t \in T$, что*

$$\varphi(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi^{t_n}(\sigma)}{\dim t^n} \tag{2.2.1}$$

при всех $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$. Иначе говоря, всякий характер группы $\mathfrak{S}_\infty$ есть предел некоторой последовательности нормированных неприводимых характеров групп $\mathfrak{S}_n$ при $n \to \infty$.

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы §1 первой главы и соответствия между центральными мерами и характерами, установленного в п.1.4 введения. Приведенный способ нахождения эргодических мер был предложен в [10] и использован для построения мер, инвариантных относительно групп $\mathfrak{S}_\infty$, $U(\infty)$ и др.

Следствие 1. *Пусть M – локально - конечная центральная эргодическая мера на T и $0 < \varphi(\lambda) < \infty$. Тогда для почти всех таблиц $t \in T$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim(\Lambda, t_n)}{\dim(\lambda, t_n)} = \frac{\varphi(\Lambda)}{\varphi(\lambda)} \tag{2.2.2}$$

при всех λ, для которых $\varphi(\Lambda) \neq 0$.

2.2. Асимптотика числа косых таблиц Юнга.

Из теоремы 1 следует, что для отыскания всех характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$ достаточно найти пределы различных последовательностей неприводимых характеров групп $\mathfrak{S}_n$ при $n \to \infty$. Для того чтобы явно описать условия, при которых пределы неприводимых характеров существуют, удобно воспользоваться следующим вариантом параметров Фробениуса диаграммы Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}$:

$$\begin{aligned} f_k(\lambda) &= \max\{i \,:\, (i,k) \in \lambda\} - k + (1/2), \\ g_k(\lambda) &= \max\{i \,:\, (k,i) \in \lambda\} - k + (1/2), \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

где $k = 1, 2, \ldots, r(\lambda)$; $r(\lambda) = \max\{k : (k,k) \in \lambda\}$ – длина главной диагонали диаграммы λ.*)

---

*) На рис.3, стр.28, $r(\lambda) = 5$, $f = (11\frac{1}{2},\ 9\frac{1}{2},\ 7\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2})$; $g = (7\frac{1}{2},\ 4\frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 1\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$.

Для пары последовательностей $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2 \dots)$ (конечных или бесконечных) положим

$$p_m(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \sum_{i \geq 1} f_i^m + (-1)^{m+1} \sum_{i \geq 1} g_i^m. \tag{2.2.4}$$

Лемма 1. *Пусть $\sigma_m \in \mathfrak{S}_\infty$ –перестановка с единственным нетривиальным циклом длины m. Существует многочлен P_m, для которого*

$$\frac{\chi^\lambda(\sigma_m)}{\dim \lambda} = \frac{p_m(\lambda) + P_m(p_1(\lambda), \dots, p_{m-1}(\lambda))}{(n)_m}, \tag{2.2.5}$$

где $p_m(\lambda) = p_m(\mathbf{f}(\lambda), \mathbf{g}(\lambda))$, $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, $n \geq m$. Степень P_m как многочлена от f_k, g_k, $k = 1, 2, \dots$, не превосходит $m - 1$.

Доказательство этой леммы имеется в книге [50] (гл. 6, §1, п. 5); многочлены P_m нетрудно вычислить явно.

Лемма верна и для произвольных перестановок $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$, например, для $\sigma = (1,2)(3,4)$

$$\frac{\chi^\lambda(\sigma_m)}{\dim \lambda} = \frac{p_2^2(\lambda) - 4p_3(\lambda) + 4p_1^2(\lambda) - 3p_1(\lambda)}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}.$$

Соотношения такого типа будут рассмотрены отдельно.

Следствие 2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{\chi^\lambda(\gamma)}{\dim \lambda} = p_m\left(\frac{f_1(\lambda)}{n}, \dots ; \frac{g_1(\lambda)}{n}, \dots\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2.2.6}$$

при этом остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно по $\lambda \in \mathcal{Y}_n$.

Для доказательства достаточно воспользоваться однородностью p_m и оценками

$$p_m\left(\frac{f_1(\lambda)}{n}, \dots ; \frac{g_1(\lambda)}{n}, \dots\right) \leq p_1\left(\frac{f_1(\lambda)}{n}, \dots ; \frac{g_1(\lambda)}{n}, \dots\right) = 1.$$

Лемма 2. *Следующие условия на таблицу $t \in T$ равносильны:*

1) для любого $m \geq 2$ существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\chi^{t_n}(\sigma_m)}{\dim t_n} = p_m, \tag{2.2.7}$$

2) для любого $k = 1, 2, \dots$ существуют пределы

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_k(t_n)}{n} = \alpha_k, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{g_k(t_n)}{n} = \beta_k. \tag{2.2.8}$$

Если эти условия выполняются, то $p_m = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^m + (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^\infty \beta_k^m$.

Доказательство. Если существуют пределы (2.2.8), то по следствию 2

$$p_m = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi^{t_n}(\sigma_m)}{\dim t_n} = p_m(\alpha_1, \ldots : \beta_1).$$

Напротив, последовательности $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots$ однозначно восстанавливаются по суммам p_m: если

$$\gamma = 1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_1$$

и

$$S(z) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(\alpha_1, \ldots; \beta_1, \ldots) \frac{z^m}{m},$$

то

$$e^{S(z)} = e^{\gamma z} \prod_{i\geq 1} \frac{1+\beta_i z}{1-\alpha_i z}.$$

Поэтому, если при некотором k последовательность $f_k(t_n)/n$ имеет более одной предельной точки, то пределы (2.2.7) также не существуют.

Таким образом, числа α_k и β_k имеют прозрачный смысл – это частоты клеток k-ой строки и k-го столбца в растущей таблице. Только этими частотами и определяется характер, как следует из основной теоремы.

2.3. Параметризация характеров.

Теорема 2 (Тома [161]). *Все нормированные (неразложимые) характеры группы* $\mathfrak{S}_\infty$ *задаются формулой*

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\sigma) = \prod_{m\geq 2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^m + (-1)^{m+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^m \right)^{\rho_m(\sigma)}, \tag{2.2.9}$$

где $\alpha_1 \geq \alpha_2 \ldots \geq 0$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq 0$, $\sum \alpha_i + \sum \beta_i \leq 1$ *и* $\rho_m(\sigma)$ *– число циклов длины* m *в перестановке* σ. *В частности, если* σ_m *– подстановка с одним нетривиальным циклом длины* m, *то* $\varphi_{\alpha,\beta}(\sigma_m) = p_m(\alpha, \beta)$.

Тома доказывал эту теорему, основываясь, во-первых, на несложном факте о мультипликативности неразложимого характера $\mathfrak{S}_\infty$ по циклам, что сводит задачу к нахождению значений характера на одноцикловых подстановках, и, во-вторых, на том, что производящая функция этих значений удовлетворяет некоторому функциональному уравнению. Тома решил его, используя глубокую теорему Неванлинны [144] из теории целых функций. Возникновение и смысл чисел α, β, параметризующих решения, не имеют объяснения при таком ходе рассуждений. Наше доказательство основано на эргодическом методе и предельном переходе от конечных групп.

Доказательство. Пусть φ – нормированный характер. По теореме 1 существует таблица $t \in T$, для которой $\varphi(\sigma) = \lim \frac{\chi^{t_n(\sigma)}}{\dim t_n}$ при всех $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$. По лемме 2, существуют пределы (2.2.8) и $\varphi(\sigma_m) = p_m(\alpha_1, \dots; \beta_1, \dots)$. Наконец, согласно упомянутому свойству мультипликативности, значение характера на произвольном элементе $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ выражается через значения на одноцикловых подстановках: $\varphi(\sigma) = \prod_{m\geq 2} \varphi(\sigma_m)^{\rho_m(\sigma)}$.

Заметим, что из обобщения формулы (2.2.5) на произвольные подстановки формула (2.2.9) получается сразу для произвольного элемента $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$, без использования мультипликативности. Теорема мультипликативности Тома, как и ее обобщение Войкулеску на группу $U(\infty)$, вытекает из следующей общей теоремы: *неразложимый положительный функционал на кольце Рисса со значениями в* $\mathbb{R}$ *есть кольцевой гомоморфизм. Группа размерностей алгебры* $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$ *является кольцом Рисса* (см. [126]).

Обозначим центральную эргодическую меру, отвечающую, согласно формуле (6), характеру $\varphi_{\alpha,\beta}$, через $M_{\alpha,\beta}$.

Назовем функции $p_\rho(\alpha, \beta) = \prod_{m\geq 1} p_m(\alpha, \beta)^{\rho_m}$, где ρ – диаграмма Юнга с длинами строк $\rho_1, \rho_2, \dots$, а $p_m(\alpha, \beta)$ задана формулой (2.2.4), *расширенными функциями Ньютона.* Поскольку все симметрические функции выражаются через функции Ньютона по известным формулам, им также отвечают соответствующие расширенные функции от α, β. В частности, $s_\lambda(\alpha, \beta)$ – *расширенные функции Шура* – определяются по формуле Фробениуса

$$p_\rho(\alpha, \beta) = \sum_\Lambda \chi^\Lambda(\rho)\, s_\Lambda(\alpha, \beta).$$

Сопоставляя эту формулу с (6), получаем

Следствие 3. *Значения центральной эргодической меры $M_{\alpha,\beta}$ на цилиндрах F_u, $u \in T(\lambda)$, выражаются через расширенные функции Шура: $M_{\alpha,\beta}(\tilde{\lambda}) = s_\lambda(\alpha, \beta)$.*

Следствие 4. *Для п. в. по мере $M_{\alpha,\beta}$ таблиц $t \in T$ существуют пределы $\lim \frac{f_k(t_n)}{n} = \alpha_k$, $\lim \frac{g_k(t_n)}{n} = \beta_k$, $k = 1, 2 \dots$.*

Наиболее удивительным следствием теоремы 2 является то, что при нулевых частотах $\alpha = \beta = 0$ существует ровно один характер δ_ε – характер регулярного представления. Ему отвечает центральная мера, называемая мерой Планшереля, она подробно изучается ниже в главах III, IV настоящей диссертации. Оказывается, рост строк и столбцов в почти всех таблицах по этой мере имеет порядок $\sqrt{n}$ и форма таблицы при соответствующей нормировке $(1/\sqrt{n})$ стабилизируется. Таким образом, все предельные характеры получаются уже при асимптотике строк и столбцов, линейной по n или весьма специальной с порядком $\sqrt{n}$.

Параметры α, β имеют еще одну интерпретацию, связанную с соответствием Робинсона – Шенстеда – Кнута(RSK) и конструкцией представления типа II_1, отвечающего характеру $\varphi_{\alpha,\beta}$ (см. [14]). Здесь мы укажем в этой связи лишь следующее. Если μ – мера Бернулли в пространстве последовательностей с распределением координат $\alpha = (\alpha_1, \dots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, то значение $\varphi_{\alpha,0}(\sigma)$ есть μ-мера множества неподвижных точек относительно подстановки координат σ:

$$\varphi_{\alpha,0}(\sigma) = \prod_{m \geq 2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^m \right)^{\rho_m(\sigma)} \quad = \quad \mu\{x \, : \, \sigma\, x = x\}. \tag{2.2.10}$$

Эта интерпретация связана еще с одним способом доказательства теоремы Тома, опубликованным А.М.Вершиком и автором в [127]. А именно, существует отображение пространства последовательностей $X = \prod_1^{\infty} \mathbb{R}$ в пространство таблиц T (обобщенное преобразование RSK), при котором каждая центральная эргодическая вероятностная мера на T есть образ продакт-меры.

Пусть $\lambda \in \mathcal{Y}_n$ – диаграмма Юнга и $\tilde{f}_i = f_i(\lambda) + (1/2)$, $\tilde{g}_i = g_i(\lambda) + (1/2)$, $i = 1, \dots, r$. Введем обозначения $\mathfrak{S}^f = \mathfrak{S}_{\tilde{f}_1} \times \mathfrak{S}_{\tilde{f}_2} \times \dots$, $\mathfrak{S}^g = \mathfrak{S}_{\tilde{g}_1} \times \mathfrak{S}_{\tilde{g}_2} \times \dots$ и пусть ψ^{λ} – характер представления группы $\mathfrak{S}_{n+r}$, индуцированный с подгруппы Юнга $\mathfrak{S}^f \times \mathfrak{S}^g$ характером $\mathbf{1} \times \mathrm{sign}$, где $\mathbf{1}$ – единичный, а sign – знакопеременный характер. Нетрудно проверить, что если для последовательности диаграмм $\{t_n\}$ существуют частоты (2.2.8), то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\psi^{t_n}(\sigma)}{\psi^{t_n}(\varepsilon)} = \varphi_{\alpha,\beta}(\sigma) \tag{2.2.11}$$

при всех $\sigma \in \mathfrak{S}_{\infty}$, ε – единичная подстановка. Таким образом, из теоремы 2 получаем

Следствие 5. *Все конечные характеры группы $\mathfrak{S}_{\infty}$ являются пределами индуцированных характеров.*

Прямое доказательство этого следствия, независимое от теоремы 2, использует упоминавшееся выше обобщенное соответствие RSK и опубликовано в [127].

Из (2.2.11) следует, что при большом числе клеток в диаграмме λ в разложении индуцированного представления с характером ψ_{λ} подавляющую часть (в смысле относительной размерности) составляют неприводимые представления с характером, близким к χ_{λ}. Это утверждение можно назвать законом больших чисел для индуцированных представлений. Оно, по-видимому, имеет весьма общий характер.

2.4. Полуконечные характеры группы $\mathfrak{S}_{\infty}$.

В этом параграфе вычисляются все бесконечные характеры группы $\mathfrak{S}_\infty$. Это обстоятельство позволяет описать конус положительных элементов K_0-функтора этой группы.

Для таблицы $t \in T(I^\nu_{k,l})$ пусть $v_t \,:\, \nu^{(k,l)} \to \mathbb{N}$ – ограничение $\mathcal{N}_t$ на $\nu^{(k,l)} = \nu + (k,l)$*). Пусть также $\bar t \in T(I_{k,l})$ – максимальная строго возрастающая подпоследовательность в последовательности диаграмм $\{t_n \bigcap I_{k,l}\}_{n=1}^\infty$. Таблица t восстанавливается по $\bar t$ и v_t, так что все пространство таблиц на $I^\nu_{k,l}$ разбивается в объединение $\cup T_v$ непересекающихся частей $T_v = \{t \,:\, v_t = v\}$, $v \,:\, \nu^{(k,l)} \to \mathbb{N}$ – монотонное вложение; при этом каждое T_v вложено в $T(I_{k,l})$. Пусть задан конечный набор чисел $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_k > 0$, $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_l > 0$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{i=1}^l \beta_i = 1$ и $M_{\alpha,\beta}$ – соответствующая вероятностная центральная эргодическая мера на $T(I_{k,l})$. Зададим меру $M^\nu_{\alpha,\beta}$ на $T(I^\nu_{k,l})$, определяя ее на каждом T_v как прообраз меры $M_{\alpha,\beta}$ при вложении $t \to \bar t$. Иначе говоря, если u – λ-таблица Юнга, $\nu^{(k,l)} \subset \lambda$, то по определению

$$M^\nu_{\alpha,\beta}(F_u) = M_{\alpha,\beta}(F_{\bar u}). \tag{2.2.12}$$

Если u, w – λ-таблицы Юнга, $\nu^{(k,l)} \subset \lambda$, то $\bar u, \bar w \in T(\lambda \cap I_{k,l})$ и $M_{\alpha,\beta}({}_{\bar u}) = M_{\alpha,\beta}(F_{\bar w})$, так что меры $M^\nu_{\alpha,\beta}$ центральны. Эргодичность также очевидна, поскольку любые таблицы Юнга $u \in T(\lambda_1)$, $w \in T(\lambda_2)$ можно продолжить до таблиц с общей диаграммой $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Нетрудно убедиться, что полюсами меры $M^\nu_{\alpha,\beta}$ служат в точности таблицы t, для которых $\nu^{(k,l)} \not\subset [\,t\,] \subset I^\nu_{k,l}$.

Покажем, что каждая бесконечная центральная эргодическая локально конечная мера пропорциональна одной из мер $M^\nu_{\alpha,\beta}$.

Лемма 3. *Пусть M – центральная эргодическая локально конечная или конечная мера. Обозначим через $I_M \in \mathcal{Y}_\infty$ объединение всех диаграмм $\lambda \subset \mathbb{N}^2$, для которых $M(\tilde\lambda) \neq 0$. Тогда $M(\tilde\Lambda) \neq 0$ для всех $\Lambda \subset I_M$.*

Доказательство. Если $M(\tilde\lambda_1)$, $M(\tilde\lambda_2) \neq 0$, то $M(\widetilde{\lambda_1 \cup \lambda_2}) \neq 0$; в противном случае $\{t \,:\, [\,t\,] \supset \lambda_1\}$ и $\{t \,:\, [\,t\,] \supset \lambda_2\}$ – непересекающиеся ξ-инвариантные множества положительной меры.

Лемма 4. *Пусть $\{t_n\}$ – последовательность диаграмм, для которой существуют предельные частоты (2.2.8), причем α_k, $\beta_l > 0$, $\sum_1^k \alpha_i + \sum_1^l \beta_i = 1$. Тогда $m_n = |\nu_n| = o(n)$ и*

$$\dim(\lambda, t_n) \sim \frac{n^{m_n}}{m_n!} \dim \nu_n \, \dim \mu_n \tag{2.2.13}$$

при $n \to \infty$, где $\mu_n = (t_n \backslash \lambda) \cap I_{k,l}$, $\nu_n = (t_n \backslash \lambda) \setminus I_{k,l}$, $\lambda \in \mathcal{Y}$ (рис.4, стр.30).

Доказательство. С каждой таблицей w на $t_n \backslash \lambda$ можно связать, как указано в начале параграфа, μ_n-таблицу u и монотонное вложение $v \,:\, \nu_n \to \{1, \ldots, n\}$, по

*) Сумма в $\mathbb{Z}^2$.

которым w восстанавливается однозначно. Таким образом, $\dim(\lambda, t_n)$ не превосходит общего числа $C_n^{m_n} \dim \nu_n \dim \mu_n$ всех таких пар (u, v). Выберем последовательность $r_n \to \infty$ такой, чтобы $m_n/r_n \to 0$, $r_n/n \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть T_n – множество μ_n-таблиц u, для которых $f_k(u_{r_n}) \geq m_n$, $g_l(u_{r_n}) \geq m_n$; из (2.2.8) следует, что $\lim |T_n| / \dim \mu_n = 1$. Наконец, если $u \in T_n$ и $v : \nu_n \to \{r_n + 1, \dots, n\}$ – монотонное вложение, то пара (u, v) отвечает некоторой $(t_n \backslash \lambda)$-таблице w, так что $\dim(\lambda, t_n) \geq C_{n-r_n}^{m_n} \dim \nu_n \cdot |T_n|$. Обе оценки на $\dim(\lambda, t_n)$ эквивалентны, при $n \to \infty$, правой части (2.2.13).

Теорема 3. *Каждая локально конечная эргодическая центральная мера M на пространстве таблиц T пропорциональна одной из мер $M_{\alpha,\beta}^{\nu}$.*

Доказательство. Пусть λ – такая диаграмма Юнга, что $0 < M(\tilde{\lambda}) < \infty$. По следствию 1 существует таблица $t \in T$, для которой справедлива формула (2.2.2). Переходя, если надо, к подпоследовательности, можем считать, что для последовательности диаграмм Юнга $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, существуют предельные частоты $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ в (2.2.8); пусть m – соответствующая вероятностная мера. Тогда

$$\lim \frac{\dim(\Lambda, t_n)}{\dim t_n} = m(\tilde{\Lambda}) \quad \text{при всех} \quad \Lambda \in \mathcal{Y}.$$

Если $m(\tilde{\lambda}) \neq 0$, то

$$\frac{\dim(\Lambda, t_n)}{\dim t_n} \frac{\dim t_n}{\dim(\lambda, t_n)} \to \frac{m(\tilde{\Lambda})}{m(\tilde{\lambda})},$$

так что $M(\tilde{\Lambda}) = \frac{M(\tilde{\lambda})}{m(\tilde{\lambda})} m(\tilde{\Lambda})$ и мера M конечна. Поэтому случай $I_m = \mathbb{N}^2$ неинтересен, и можно считать, что $I_m = I_{k,l}$.

Предположим, что $m(\tilde{\lambda}) = 0$, т.е. что $\lambda \backslash I_{k,l} \neq \emptyset$. Тогда $\nu = \lambda^{-(k,l)}$ – непустая диаграмма Юнга[*)], и по лемме 5 получаем

$$\frac{\dim(\Lambda, t_n)}{\dim(\lambda, t_n)} \to \frac{m(\widetilde{\Lambda \cap I_{k,l}})}{m(\widetilde{\lambda \cap I_{k,l}})} = \frac{M_{\alpha,\beta}^{\nu}(\tilde{\Lambda})}{M_{\alpha,\beta}^{\nu}(\tilde{\lambda})}$$

для любой диаграммы Юнга Λ с $\Lambda^{-(k,l)} = \nu$. Сравнивая с (2.2.2), получаем, что меры M и $M_{\alpha,\beta}^{\nu}$ пропорциональны.

Переходя по общим формулам от центральных мер на T к характерам группы $\mathfrak{S}_\infty$, получаем основной результат этого параграфа.

Теорема 4. *Пусть $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k > 0$, $\beta_1 \geq \dots \geq \beta_l > 0$, $\sum_1^k \alpha_i + \sum_1^l \beta_i = 1$ и ν – непустая диаграмма Юнга. Формула*

$$\varphi_{\alpha,\beta}^{\nu}(E_\lambda) = s_{\lambda \cap I_{k,l}}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_l) \tag{2.2.14}$$

[*)] $M^{-(k,l)} = \mathbb{N}^2 \cap (\mu - (k,l))$, вычитание в $\mathbb{Z}^2$.

при $\nu^{(k,l)} \subset \lambda \subset I^{\nu}_{k,l}$ *задает неразложимый полуконечный характер группы* $\mathfrak{S}_\infty$.*) *Если* $\lambda^{-(k,l)} \underset{\neq}{\subseteq} \nu$, *то* $\varphi^{\nu}_{\alpha,\beta}(E_\lambda) = \infty$; *при* $\lambda \not\subset I^{\nu}_{k,l}$ *имеем* $\varphi^{\nu}_{\alpha,\beta}(E_\lambda) = 0$. *Каждый (бесконечный) полуконечный характер группы* $\mathfrak{S}_\infty$ *с точностью до множителя совпадает с одним из характеров* $\varphi^{\nu}_{\alpha,\beta}$.

Заметим, что характер $\varphi^{\nu}_{\alpha,\beta}$, $\nu \in \mathcal{Y}_m$ можно описать как индуцированный с подгруппы $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_\infty$ тех перестановок $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$, для которых $\sigma(k) < m$ при $k < m$:

$$\varphi^{\nu}_{\alpha,\beta} = \chi^{\nu} \circ \varphi_{\alpha,\beta} = \operatorname{ind} \chi^{\nu} \times \varphi_{\alpha,\beta}. \tag{2.2.15}$$

*) Напомним, что $s_\Lambda(\alpha,\beta)$ – расширенная функция Шура.

§3. Обобщенные полиномы Макдональда и ортогональные многочлены

3.1. Полиномы Холла-Литтлвуда были впервые введены Ф.Холлом [104] и Д.Е.Литтлвудом [137]. Превосходное изложение их свойств и многочисленные приложения к теории представлений (обычных, проективных, модулярных) симметрических групп и полных линейных групп над различными полями можно найти в [49]; см. также [143].

В недавней работе [139] И.Макдональд ввел более общее семейство симметрических полиномов и описал их замечательные свойства. В качестве предельного случая это семейство содержит полиномы Джека, и в частности, зональные сферические функции симметрических пространств $GL(n, \mathbb{R})/O(n)$ (ср.[112]). Комбинаторные свойства полиномов Джека изучались также Р. П. Стенли [159] и Ф.Хенлоном [106].

Основная цель настоящего раздела состоит в том, чтобы охарактеризовать HL-функции, определенные Макдональдом, внутри гораздо более обширного класса полиномов, зависящего от бесконечного числа параметров. В некотором смысле, эти последние являются бесконечномерными версиями обобщенных полиномов Лежандра, определенных Фейером [90]. С этой точки зрения HL-функции Макдональда соответствуют непрерывным q-ультрасферическим полиномам, впервые рассмотренным Роджерсом [154] в его знаменитой работе о тождествах Роджерса – Рамануджана.

3.2. Опишем наш подход более детально. В этом разделе мы заимствуем из [49] обозначения и терминологию, относящиеся к разбиениям и симметрическим функциям.

Пусть $\mathbb{A} = \bigoplus \mathbb{A}_n = \Lambda \otimes \mathbb{C}$ – градуированная алгебра симметрических полиномов от переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$ с комплексными коэффициентами и $\mathbb{P} = \bigcup \mathbb{P}_n$ – множество разбиений натуральных чисел. Для $\lambda \in \mathbb{P}$ обозначим через μ_λ мономиальную симметрическую функцию, а через p_λ степенную сумму Ньютона. Рассмотрим семейство симметрических билинейных форм $(\cdot,\cdot)_w$ на $\mathbb{A}$, зависящее от последовательности комплексных параметров $w = (w_1, w_2, \dots)$ и определенное формулой

$$(p_\lambda,\, p_\mu)_w = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda w_\mu, \tag{2.3.1}$$

где $z_\lambda = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \dots$ и $w_\lambda = w_{\lambda_1} w_{\lambda_2} \dots$ для разбиения $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$ с кратностями $m_1, m_2, \dots$. Мы выбираем и фиксируем произвольный полный порядок $\leq$ на $\mathbb{P}_n$, согласованный с *естественным порядком (т.е. порядком по доминированию)*, например, обратный лексикографический порядок.

Определим *обобщенные полиномы Холла - Литтлвуда* (для краткости, GHL-полиномы) $P_\lambda(x; w)$, как результат процесса ортогонализации, примененного к базису $\{m_\lambda(x)\}$ по отношению к форме $(\cdot, \cdot)$ и выбранному упорядочению. Таким образом,

$$P_\lambda(x; w) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu<\lambda} u_{\lambda\mu}(w) m_\mu(x),$$

$$(P_\lambda,\, P_\mu)_w = 0 \qquad \text{если} \quad \lambda \neq \mu.$$

Через $Q_\lambda(x; w) = b_\lambda(w) P_\lambda(x; w)$ обозначим *присоединенные* GHL-*функции*, определенные равенствами

$$(Q_\lambda,\, P_\lambda) = \delta_{\lambda\mu}, \quad b_\lambda(w) = ||P_\lambda||_w^{-2}$$

3.3. Несколько примеров заслуживают особого упоминания.

(S) Случай Шура

$$w_n \equiv 1, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Здесь $P_\lambda(x;\, w) = Q_\lambda(x;\, w) = s_\lambda(x)$ – функции Шура.

(H) Случай Холла – Литтлвуда

$$w_n = \frac{1}{(1 - t^n)}, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

где $P_\lambda(x;\, w) \equiv P_\lambda(x;\, t)$ – классические полиномы Холла – Литтлвуда.

(J) Случай Джека

$$w_n = \alpha, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

где $P_\lambda(x; w) = h_\lambda(\alpha)\, J_\lambda(x; \alpha)$ совпадают, с точностью до множителя $h_\lambda(\alpha)$, не зависящего от x, с полиномами Джека.

(J_m) Обобщенный случай Джека, $m \geq 2$,

$$w_{km} = \alpha; \qquad w_n = 1, \text{ если } n \neq 0 \mod m.$$

Насколько мне известно, этот случай прежде в данном контексте не рассматривался. Для $m = 1$ получается обычный случай Джека (J).

(M) Случай Макдональда

$$w_n = \frac{(1 - q^n)}{(1 - t^n)}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Этот случай изучался в [139]. Все предыдущие примеры являются специальными или предельными случаями данного. Например, чтобы получить случай J_m, следует положить $q = r + \alpha \cdot \epsilon$, $t = r + \epsilon$, где r – это m-ый примитивный корень из единицы, и перейти к пределу при $\epsilon \to 0$.

3.4. Перечислим основные свойства HL-полиномов, доказанные Макдональдом в случае (M). По непрерывности все эти свойства справедливы также в случаях Джека (J) и (J_m).

(i) Двойственность:

$$w_\omega \, P_\lambda(x;\, w) = Q_{\lambda'}(x;\, 1/w)$$

для эндоморфизма алгебры $w_\omega : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, определенного посредством $w_\omega(p_n) = (-1)^{n+1} \cdot w_n \cdot p_n$, $n = 1, 2, \dots$. Здесь λ' – разбиение, сопряженное к λ и $1/w = (1/w_1,\, 1/w_2, \dots)$.

(ii) Суперортогональность[*)]: пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – разбиение длины n и $x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$; тогда

$$P_\lambda(x;\, w) = x_1 x_2 \dots x_n \cdot P_{\lambda_*}(x;\, w),$$

где $\lambda_* = (\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - 1)$.

(iii) Супертреугольность:

$$u_{\lambda\mu}(w) \neq 0 \quad \text{влечет} \quad \mu \ll \lambda,$$

где $\ll$ – упорядочение по доминированию (по определению, матрица $(u_{\lambda\mu}(w))$ треугольна только относительно полного упорядочения $\leq$).

(iv) Ветвление юнговского типа: определим *кратности ветвления* $m_{\lambda\Lambda}(w)$ посредством формулы

$$P_{(1)}(x;\, w) \cdot P_\lambda(x;\, w) = \sum_\Lambda m_{\lambda\Lambda}(w) \, P_\Lambda(x;\, w);$$

тогда $m_{\lambda\Lambda}(w) = 0$, за исключением случаев, когда Λ непосредственно следует за λ в графе Юнга (т.е. $\Lambda \supset \lambda$ и $|\Lambda \backslash \lambda| = 1$, где λ и Λ рассматриваются как диаграммы Юнга, а не разбиения).

Основным в данной работе является вопрос о том, насколько эти свойства ограничивают параметризующую последовательность w значениями, указанными в случае (M) и других случаях, перечисленных выше.

3.5. Прежде всего, перепишем подходящим образом формулу двойственности (i). Определим *сопряженный порядок* $\leq'$ на $\mathbb{P}_n$ так:

$$\lambda \leq' \mu \quad \Leftrightarrow \quad \lambda' \geq \mu'$$

[*)] Значение этого термина выяснится ниже в §7.

и пусть P'_λ обозначает GHL-полиномы, построенные с использованием этого порядка. Будет доказана

Теорема 1. *Для всех* $w = (w_1, w_2, \dots)$

$$w_\omega\, P'_\lambda(x;\, w) = Q_{\lambda'}(x;\, 1/w).$$

Достаточно ясно, что свойства (ii) – (iv) влекут гораздо более серьезные ограничения на w. Наш следующий основной результат –

Теорема 2. *Предположим, что (ii) выполняется для* $(w_1, w_2, \dots)$ *при* $n = 2$. *Тогда последовательность*

$$w^{(c)} = (c \cdot w_1,\, c^2 \cdot w_2, \dots, c^k \cdot w_k, \dots),$$

для подходящей константы c, *принадлежит одному из случаев (M), (J),* (J_m) *выше.*

Заметим, что "калибровочные преобразования" $w \to w^{(c)}$ не меняют GHL-полиномов:

$$P_\lambda(x;\, w^{(c)}) = P_\lambda(x;\, w)$$

Мы докажем теорему 2, сводя ее к замечательной теореме Фельдхейма [60] и Лансевицкого [48], характеризующей ортогональные обобщенные полиномы Лежандра как непрерывные q-ультрасферические полиномы, первоначально изучавшиеся Роджерсом [154]. Мы даем полное доказательство этого результата, поскольку предельные случаи (J_m) в работах [60], [48] были пропущены. Ортогональные полиномы, отвечающие этим случаям, изучались в [65] под именем "просеянных ультрасферических полиномов первого рода". Относительно свойств полиномов Роджерса см. [67], [70].

В настоящий момент мне не известны точные ограничения на параметры $(w_1, w_2, \dots)$, вытекающие из свойств (iii) или (iv).

§4. Ортогонализация характеров симметрической группы

4.1. Зафиксируем некоторые обозначения. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ комплексное векторное пространство центральных функций на симметрической группе $\mathfrak{S}_n$. Неприводимые характеры χ^λ, параметризуемые разбиениями $\lambda \in \mathbb{P}_n$, образуют линейный базис в $\mathcal{F}_n$. Пусть c^ρ обозначает характеристическую функцию класса сопряженности с цикловой структурой $\rho \in \mathbb{P}_n$ и $C^\rho = z_\rho \cdot c^\rho$ для $z_\rho = 1^{m_1} \cdot m_1! \cdot 2^{m_2} \cdot m_2! \ldots$, где $\rho = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots)$. Тогда C^ρ – плотность равномерного вероятностного распределения на классе ρ.

На $\mathcal{F}_n$ определена естественная билинейная форма

$$(f,\, g) = \frac{1}{n!} \sum_\sigma f(\sigma)\, g(\sigma) = \sum_\rho f_\rho \cdot g_\rho / z_\rho, \tag{2.4.1}$$

где $f_\rho = f(\sigma)$ – значения $f \in \mathcal{F}_n$ на любой перестановке σ с длинами циклов $\rho_1, \rho_2, \ldots$. Например, $\chi^\lambda_\rho = (\chi^\lambda,\, C^\rho)$ есть значения характера χ^λ на классе ρ.

4.2. Для каждой последовательности $w = (w_1, w_2, \ldots)$ комплексных параметров определим более общую билинейную форму $(\cdot,\cdot)_w$ на $\mathcal{F}_n$ посредством

$$(f, g)_w = \frac{1}{n!} \sum_\sigma f(\sigma)\, g(\sigma)\, w(\sigma) = \sum_\rho f_\rho \cdot g_\rho \cdot w_\rho / z_\rho. \tag{2.4.2}$$

Весовая функция $w(\sigma) = w_1^{m_1} \cdot w_2^{m_2} \cdot \ldots$ мультипликативна:

$$w(\sigma) = w_{\rho_1} \cdot w_{\rho_2} \cdot \ldots$$

для перестановки σ с длинами циклов $\rho_1, \rho_2 \ldots$.

По определению, для $\rho, \tau \in \mathbb{P}_n$

$$(C^\rho, C^\tau)_w = \delta_{\rho\tau}\, z_\rho\, w_\rho.$$

4.3. Напомним определение натурального порядка (порядка по доминированию) $\ll$ на множестве разбиений $\mathbb{P}_n$:

$$\lambda \ll \mu \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \le \mu_1 + \ldots + \mu_k \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Мы говорим, что полный порядок $\le$ на $\mathbb{P}_n$ *сравним* с порядком по доминированию, если

$$\mu \ll \lambda \quad \text{влечет} \quad \mu' \le \lambda'.$$

Пусть λ' обозначает разбиение, сопряженное к разбиению λ. Определим *сопряженный порядок* $\le'$ так:

$$\mu \le' \lambda \quad \text{если и только если} \quad \mu' \ge \lambda'.$$

Этот порядок также является полным и сравним с упорядочением по доминированию.

Обозначим через $r = r(\lambda)$ порядковый номер $\lambda \in \mathbb{P}_n$ по отношению к выбранному полному упорядочению. По определению, $r((1^n)) = 1$ и $r((n)) = p(n)$. На рисунке 18 показана диаграмма Хассе множества $\mathbb{P}_6$, упорядоченного по доминированию. Указаны порядковые номера обратного лексикографического порядка (цифры) и сопряженного порядка (буквы).

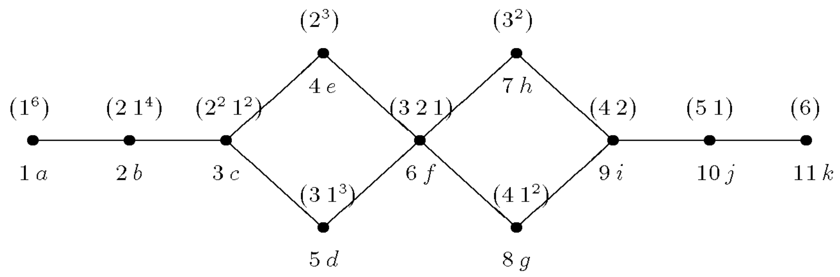


Рис.18 Различные упорядочения множества разбиений.

4.4. Пусть $Y^{(1^n)}, \ldots, Y^{(n)}$ обозначают функции в $\mathcal{F}_n$, определенные, как результат ортогонализации неприводимых характеров по отношению к форме $(\cdot,\cdot)_w$ и полному упорядочению $\leq$. Таким образом,

$$Y_\lambda = \chi^\lambda + \sum_{\mu<\lambda} V_{\lambda\mu}(w)\,\chi^\mu, \tag{2.4.3}$$

$$(Y^\lambda,\, Y^\mu)_w = 0, \quad \text{если} \quad \lambda \neq \mu. \tag{2.4.4}$$

Мы можем также записать

$$\chi^\lambda = Y^\lambda + \sum_{\mu<\lambda} K_{\lambda\mu}(w)\,Y^\mu. \tag{2.4.5}$$

Функции $Y^\lambda = Y^\lambda(w)$ вполне определяются свойствами (2.4.3), (2.4.4) или (2.4.4), (2.4.5).

4.5. Рассмотрим матрицу Грама $H = (h_{\lambda\mu})$, $h_{\lambda\mu} = (\chi^\lambda, \chi^\mu)_w$ и некоторые из ее миноров. Мы будем по мере надобности использовать разбиения λ и их номера $r(\lambda)$. Пусть

$$\begin{vmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i1} & \ldots & h_{ii} \end{vmatrix}$$

обозначает главный минор порядка $i = r(\lambda)$ и, более общим образом,

$$L_{\lambda\mu} = \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1,j-1} & h_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{j1} & \dots & h_{j,j-1} & h_{ji} \end{vmatrix}, \tag{2.4.6}$$

$j = r(\mu)$, так что $f_\lambda = L_{\lambda\lambda}$. Пусть $J_{\lambda\mu}$ обозначает алгебраическое дополнение элемента $h_{\mu\lambda}$ в определителе (2.4.6) и $g_\lambda = J_{\lambda\lambda}$. Через U_ρ^λ мы обозначаем определитель

$$U_\rho^\lambda = \begin{vmatrix} h_{11} & \dots & h_{1,i-1} & \chi_\rho^{(1^n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{i,i-1} & \chi_\rho^\lambda \end{vmatrix}. \tag{2.4.7}$$

Ясно, что для $\lambda = (1^n)$ получается

$$f_{(1^n)}(w) = \sum w_\rho / z_\rho \quad \text{и} \quad U_\rho^{(1^n)}(w) = \chi_\rho^{(1^n)} = \varepsilon_\rho, \tag{2.4.8}$$

где ε_ρ – знак перестановки с цикловой структурой ρ. Позднее в §5 мы увидим, что для $\lambda = (n)$

$$f_{(n)}(w) = \prod w_\rho, \quad g_{(n)}(w) = f_{(n)}(w) \cdot \sum 1/z_\rho w_\rho, \tag{2.4.9}$$

и $U_\rho^{(n)}(w) = f_{(n)}(w)/w_\rho$ (эти функции не зависят от выбора порядка).
Используем эти обозначения для вывода явных формул для функций Y^λ и переходных коэффициентов $V_{\lambda\mu}$, $K_{\lambda\mu}$.

4.6. Рассмотрим функции X^λ, определенные как

$$X_\rho^\lambda(w) = w_\rho \, b_\lambda(w) \, Y_\rho^\lambda(w), \tag{2.4.10}$$

где

$$b_\lambda(w) = (Y_\lambda, Y_\lambda)_w^{-1}. \tag{2.4.11}$$

Тогда $(X^\lambda, Y^\mu)_w = b_\lambda \, (Y^\lambda, Y^\mu)_w = \delta_{\lambda\mu}$. Из (2.4.8) мы получаем

$$X_\rho^{(1^n)}(w) = \varepsilon_\rho \, w_\rho / f_{(1^n)}, \quad b_{(1^n)}(w) = \left(\sum w_\rho / z_\rho\right)^{-1}$$

для $\lambda = (1^n)$, и из (2.4.9)

$$X_\rho^{(n)}(w) \equiv 1, \quad b_{(n)}(w) = \sum 1/z_\rho \, w_\rho$$

для $\lambda = (n)$. Разумеется, в случае Шура ($w_n \equiv 1$),

$$X_\rho^\lambda(w) = Y_\rho^\lambda(w) = \chi_\rho^\lambda, \quad b_\lambda(w) \equiv 1$$

для всех $\lambda, \rho \in \mathbb{P}_n$.

4.7. Предложение.

$$b_\lambda(w) = g_\lambda(w)/f_\lambda(w), \tag{2.4.12}$$

$$Y^\lambda_\rho(w) = U^\lambda_\rho(w)/g_\lambda(w), \tag{2.4.13}$$

$$X^\lambda_\rho(w) = w_\rho U^\lambda_\rho(w)/f_\lambda(w), \tag{2.4.14}$$

$$V_{\lambda\mu}(w) = J_{\lambda\mu}(w)/g_\lambda(w), \tag{2.4.15}$$

$$K_{\lambda\mu}(w) = L_{\lambda\mu}(w)/f_\lambda(w). \tag{2.4.16}$$

Доказательство стандартно (ср.[5]). Разлагая определитель (2.4.7) вдоль последнего столбца, получаем

$$U^\lambda_\rho(w) = \sum_{\mu \le \lambda} J_{\lambda\mu}(w)\, \chi^\mu_\rho.$$

Ясно также, что

$$(U^\mu,\, \chi^\lambda)_w = L_{\lambda\mu}(w). \tag{2.4.17}$$

Для $\lambda < \mu$ мы имеем $L_{\lambda\mu} = 0$ и

$$(U^\lambda,\, U^\mu)_w = \delta_{\lambda\mu} L_{\lambda\lambda} (U^\lambda,\, \chi^\lambda)_w = \delta_{\lambda\mu} L_{\lambda\lambda}\, J_{\lambda\lambda}.$$

Мы видим, что $Y^\lambda = U^\lambda/J_{\lambda\lambda}$ удовлетворяет как (2.4.3), так и (2.4.4) и что $b_\lambda = (Y^\lambda,\, Y^\lambda)^{-2}_w = J_{\lambda\lambda}/L_{\lambda\lambda}$.

Используя (2.4.17) еще раз, получаем

$$\chi_\lambda = \sum_{\mu \le \lambda} L_{\lambda\mu} \frac{U^\mu}{L_{\mu\mu}\, J_{\mu\mu}} = \sum_{\mu \le \lambda} \frac{L_{\lambda\mu}}{L_{\mu\mu}}\, Y^\mu,$$

откуда следует (2.4.16); (2.4.14) и (2.4.15) получаются непосредственно.

4.8. Пусть $\mathcal{X}_n = (\chi^\lambda_\rho/\sqrt{z_\rho})$ обозначает нормированную матрицу неприводимых характеров симметрической группы $\mathfrak{S}_n$. Мы располагаем как строчки, так и столбцы матрицы $\mathcal{X}_n$ в возрастающем порядке относительно упорядочения $\le$. Матрица $\mathcal{X}_n$ ортогональна и имеет единичный определитель. Этот факт можно обобщить следующим образом.

Предложение. *Матрица* $\mathcal{X}_n(w) = \left(\sqrt{X^\lambda_\rho(w) Y^\lambda_\rho(w)/z_\rho}\right)$ *ортогональна для всех* $w = (w_1, w_2, \dots)$.

Доказательство: $\sum_\rho \mathcal{X}^\lambda_\rho \mathcal{X}^\mu_\rho = \sqrt{b_\lambda b_\mu}\, (Y^\lambda,\, Y^\mu)_w = \delta_{\lambda\mu}$.

Следствие (соотношения ортогональности).

$$\sum_\rho X^\lambda_\rho(w)\, Y^\mu_\rho(w)/z_\rho = \delta_{\lambda\mu}, \tag{2.4.18}$$

$$\sum_{\lambda} X^{\lambda}_{\rho}(w)\, Y^{\lambda}_{\tau}(w) = z_{\rho}\delta_{\rho\tau}. \qquad (2.4.19)$$

Для $w \equiv 1$ эти формулы превращаются в обычные соотношения ортогональности для неприводимых характеров.

4.9. Заметим, что $h_{\lambda\mu}$, $J_{\lambda\mu}$, U^{λ}_{ρ} и $L_{\lambda\mu} = \sum_{\nu} J_{\lambda\nu}h_{\nu\lambda}$ – полиномы по переменным $w_1, w_2, \ldots$. Нам понадобятся некоторые новые обозначения для явного описания коэффициентов.

Рассмотрим две системы разбиений

$$M = \{\mu_1, \ldots, \mu_m\}, \quad R = \{\rho_1, \ldots, \rho_m\} \qquad (2.4.20)$$

из $\mathbb{P}_n$ и запишем

$$z^R = \prod_{\rho \in R} z_{\rho}, \quad w^R = \prod_{\rho \in R} w_{\rho}.$$

Обозначим через

$$\binom{M}{R} = \det(\mathcal{X}^{\mu}_{\rho})_{\mu \in M, \rho \in R}$$

минор $\mathcal{X}_n$, отвечающий строчкам и столбцам (2.4.20). Для $\lambda \in \mathbb{P}_n$ мы пишем $M_{\lambda} = \{\mu : \mu < \lambda\}$, $M^{\lambda} = \{\mu : \mu \leq \lambda\}$.

По формуле Бине – Коши,

$$g_{\lambda}(w) = \sum_{R} \binom{M_{\lambda}}{R}^2 w^R, \qquad (2.4.21)$$

$$f_{\lambda}(w) = \sum_{R} \binom{M_{\lambda}}{R}^2 w^R, \qquad (2.4.22)$$

$$U^{\lambda}_{\rho}(w) = \sqrt{z_{\rho}} \sum_{R} \binom{M_{\lambda}, \lambda}{R, \rho} \binom{M_{\lambda}}{R} w^R, \qquad (2.4.23)$$

где $|R| = |M_{\lambda}|$ в обеих суммах. Из определений $J_{\lambda\mu}$, $L_{\lambda\mu}$ следует, что

$$J_{\lambda\mu}(w) = (-1)^{r(\lambda)-r(\mu)} \cdot \sum_{R} \binom{M_{\lambda}}{R} \binom{M^{\lambda} \backslash \mu}{R} w^R, \qquad (2.4.24)$$

где $r(\lambda)$, $r(\mu)$ – номера разбиений λ, μ и

$$L_{\lambda\mu}(w) = \sum_{R} \binom{M_{\mu}, \lambda}{R} \binom{M^{\mu}}{R} w^R, \qquad (2.4.25)$$

В последней формуле $|R| = |M^{\mu}|$.

§5. Симметрические полиномы Холла – Литтлвуда – Макдональда

5.1. Напомним, что через $\mathbb{A}$ обозначается комплексная градуированная алгебра симметрических полиномов от бесконечного числа переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$ и через $\mathbb{A}_n$ – подпространство однородных полиномов степени n. Для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ пусть $p_r = p_r(x) = \sum_k x_k^r$ обозначает степенную сумму и $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$; полиномы p_λ, $\lambda \in \mathbb{P}_n$ образуют линейный базис в $\mathbb{A}_n$.

Характеристическое отображение [49, I.7] – это изоморфизм градуированных алгебр $\mathrm{ch} : \mathcal{F} \to \mathbb{A}$, определенный формулой $\mathrm{ch}(c^\rho) = p_\rho / z_\rho$, $\rho \in \mathbb{P}$. Используя это отображение, можно описать функции Шура $s_\lambda \in \mathbb{A}$, как характеристики неприводимых характеров: $\mathrm{ch}(\chi^\lambda) = s_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{P}$.

С точностью до характеристического отображения, определение GHL -функций в §4 аналогично определению в [139]. Мы пересказываем его в терминах алгебры $\mathbb{A}$.

5.2. Определим билинейную форму $(\cdot, \cdot)$ на $\mathbb{A}$, зависящую от последовательности $w = (w_1, w_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$, посредством

$$(p_\lambda,\, p_\mu)_w = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda w_\lambda, \tag{2.5.1}$$

где z_λ и w_λ были определены в §4. Тогда $(p_\lambda, p_\mu^*)_w = \delta_{\lambda\mu}$ для полиномов $p_\lambda^*(x) = p_\lambda(x)/z_\lambda\, w_\lambda$. В случае, если $w_n \equiv 1$, мы упрощаем обозначение до $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_w$. Отметим, что характеристическое отображение является изометрией:

$$(\mathrm{ch}(f), \mathrm{ch}(g))_w = (f, g)_w.$$

Каждый GHL-функции отвечает симметрический полином

$$P_\lambda(x; w) = \sum_\rho Y_\rho^\lambda(w)\, p_\rho(x)/z_\rho, \tag{2.5.2}$$

называемый *GHL-полиномом.* Из (3.4.3) и (3.4.4) мы получаем

$$P_\lambda(x; w) = s_\lambda(w) + \sum_{\mu < \lambda} V_{\lambda\mu}(w)\, s_\mu(x), \tag{2.5.3}$$

$$(P_\lambda, P_\mu)_w = 0, \quad \text{если} \quad \lambda \neq \mu, \tag{2.5.4}$$

и можно использовать эти формулы как определение GHL-полиномов. Из (2.5.3) видно, что полиномы P_λ, $\lambda \in \mathbb{P}$ образуют линейный базис в $\mathbb{A}$. Формула

$$s_\lambda(x) = P_\lambda(x; w) + \sum_{\mu < \lambda} K_{\lambda\mu}(w)\, P_\mu(x; w) \tag{2.5.5}$$

является обратной к формуле (2.5.3); функции $K_{\lambda\mu} = K_{\lambda\mu}(w)$ называются (обобщенными) *коэффициентами Костка.*

5.3. Рассмотрим эндоморфизм ω_w алгебры $\mathbb{A}$, определенный как

$$\omega_w(p_n) = (-1)^{n+1} w_n p_n.$$

Другими словами,

$$\omega_w(p_\rho) = \varepsilon_\rho w_\rho p_\rho, \quad \rho \in \mathbb{P}, \tag{2.5.6}$$

где

$$\varepsilon_\rho = (-1)^{\sum (k-1) m_k}$$

– это знак разбиения $\rho = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$. Для $w = (1, 1, \dots)$ отображение ω_w совпадает со стандартной инволюцией ω алгебры $\mathbb{A}$, определенной формулой $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}$, $\lambda \in \mathbb{P}$; напомним, что $(\omega(f), g) = (f, \omega(g))$. Ясно, что $\omega_w^{-1} = \omega_{1/w}$.

Лемма. $(\omega_{1/w}(f), g)_w = (f, \omega(g))$.

Доказательство. Для $f = p_\rho$, $g = p_\tau$ имеем

$$(\omega_{1/w}(p_\rho), p_\tau)_w = (\varepsilon_\rho / w_\rho)\, (z_\rho w_\rho)\, \delta_{\rho\tau} = (p_\rho, \omega(p_\tau)).$$

Следствие: $(\omega_{1/w}(f),\, \omega_{1/w}(g)) = (f, g)_{1/w}$.

5.4. Используя отображение $\omega_{1/w}$, мы введем еще два семейства симметрических полиномов, параметризованных диаграммами $\lambda \in \mathbb{P}$:

$$S_\lambda = \omega_{1/w}(s_\lambda), \tag{2.5.7}$$

$$q_\lambda = \omega_{1/w}(e_\lambda), \tag{2.5.8}$$

где e_λ – элементарные симметрические функции. Более явно эти функции описаны в следующей лемме.

Лемма. *Для* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ *имеем* $q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} \dots$, *где*

$$q_n = q_n(x; w) = \sum_\rho p_\rho(x) / z_\rho w_\rho, \tag{2.5.9}$$

$$S_\lambda = S_\lambda(x; w) = \det(q_{\lambda_i - i + j}). \tag{2.5.10}$$

Доказательство. Это непосредственно следует из формул

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots, \quad e_n(x) = \sum \varepsilon_\rho p_\rho(x) / z_\rho, \quad s_{\lambda'} = \det(e_{\lambda_i - i + j})$$

и леммы 3.3.

Из леммы 3.3 следует также, что функции q_λ, S_λ образуют базис, двойственный соответственно к m_λ и s_λ:

$$(q_\lambda, m_\mu)_w = \delta_{\lambda\mu}, \quad (S_\lambda, s_\mu)_w = \delta_{\lambda\mu}.$$

Подчеркнем, что определения q_λ и S_λ не зависят от выбора порядка $\leq$.
Есть другой, эквивалентный способ определить полиномы q_λ, S_λ. Заметим, что степенные суммы $p_1, p_2, \ldots$ алгебраически независимы и порождают алгебру $\mathbb{A}$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi = \varphi_{x,w} : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$, определенный как

$$\varphi_{x,w}(p_n) = p_n(x)/w_n$$

и будем писать $\hat{f}(x) = \varphi_{x,w}(f)$ для $f \in \mathbb{A}$. Обозначая через $h_\lambda(x)$ полные однородные симметрические функции, получаем из (2.5.9), что

$$q_\lambda(x; w) = \hat{h}_\lambda(x) \quad \text{и} \quad S_\lambda(x; w) = \hat{s}_\lambda(x).$$

5.5. Определим *присоединенные GHL-полиномы* Q_λ, $\lambda \in \mathbb{P}$ формулой

$$Q_\lambda(x; w) = \sum_\rho X_\rho^\lambda(w)\, p_\rho(x)/z_\rho w_\rho; \tag{2.5.11}$$

тогда $Q_\lambda(x; w) = b_\lambda(w)\, P_\lambda(x; w)$ для $b_\lambda = (P_\lambda,\, P_\lambda)_w^{-1}$ и

$$(P_\lambda,\, Q_\mu)_w = \delta_{\lambda\mu}. \tag{2.5.12}$$

Альтернативное определение в терминах ортогонализации состоит в следующем:

$$Q_\lambda(x; w) = S_\lambda(x; w) + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda}(w)\, S_\mu(x; w), \tag{2.5.13}$$

$$(Q_\lambda,\, Q_\mu)_w = 0 \quad \text{для} \quad \lambda \neq \mu. \tag{2.5.14}$$

Коэффициенты в формулах (2.5.13) и (2.5.5) совпадают:

$$K_{\mu\lambda}(w) = (s_\mu, Q_\lambda)_w. \tag{2.5.15}$$

5.6. Будем писать просто b_n для b_λ с $\lambda = (n)$; тогда

$$b_n = \sum 1/z_\rho w_\rho, \quad \rho \in \mathbb{P}_n. \tag{2.5.16}$$

Производящую функцию $W(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ последовательности $b_0, b_1, \ldots$ можно записать как

$$W(z) = \exp \sum_{n \geq 1} z^n / n w_n. \tag{2.5.17}$$

Мы вычислим *ядро Коши*

$$\Pi(x,y;w)=\sum p_\rho(x)\,p_\rho(y)/z_\rho w_\rho,\quad \rho\in\mathbb{P}, \tag{2.5.18}$$

для $x=(x_1,x_2,\dots)$, $y=(y_1,y_2,\dots)$ в терминах $W(z)$.

Лемма: $\Pi(x,y;w)=\prod_{i,j}W(x_iy_j)$.

Доказательство. Поскольку

$$\log\prod_{i,j}W(x_iy_j)=\sum_{i,j}\sum_{n\ge 1}x_i^ny_j^n/nw_n=\sum_{n\ge 1}p_n(x)p_n(y)/nw_n,$$

имеем

$$\prod_{i,j}W(x_iy_j)=\exp\sum_{n\ge 1}p_n(x)p_n(y)/nw_n=\sum_{\rho\in\mathbb{P}}p_\rho(x)p_\rho(y)/z_\rho w_\rho.$$

Рассмотрим два однородных линейных базиса $\{u_\lambda\}$, $\{v_\mu\}$ градуированной алгебры $\mathbb{A}$. Рассуждая как в [49, I.4.8], можно установить, что следующие условия эквивалентны:

$$(u_\lambda,v_\mu)_w=\delta_{\lambda\mu}\quad \text{для всех}\quad \lambda,\mu;$$

$$\sum_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y)=\Pi(x,y;w).$$

Следствие.

$$\sum q_\lambda(x;w)m_\lambda(y)=\prod W(x_iy_j), \tag{2.5.19}$$

$$\sum S_\lambda(x;w)s_\lambda(y)=\prod W(x_iy_j), \tag{2.5.20}$$

$$\sum P_\lambda(x;w)Q_\lambda(y;w)=\prod W(x_iy_j), \tag{2.5.21}$$

$$\sum p_\rho(x)p_\rho(y)/z_\rho w_\rho=\prod W(x_iy_j). \tag{2.5.22}$$

Пример. Для $w_n\equiv 1$ имеем

$$W(z)=1/(1-z),\quad \Pi(x,y;w)=\prod(1-x_iy_j)^{-1},$$

и (2.5.20) превращается в обычную формулу Коши:

$$\sum s_\lambda(x)\,s_\lambda(y)=\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}.$$

5.7. Определим произведения $B_\lambda=b_{\lambda_1}b_{\lambda_2}\dots$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)\in\mathbb{P}$. Тогда справедлива

Лемма: $q_n(x;w)=\sum B_\lambda(w)\,m_\lambda(x)$.

Доказательство. Заметим, что

$$b_n(w) = \sum 1/z_\rho \, w_\rho = q_n(1, 0, 0, \dots ; w)$$

и

$$B_\lambda(w) = q_\lambda(1, 0, 0, \dots ; w).$$

Подставляя $x = (z, 0, 0, \dots)$ в (2.5.19), получим

$$\prod_j W(y_j z) = \sum_{\lambda \in \mathbb{P}} B_\lambda(w) \, m_\lambda(y) \, z^{|\lambda|}.$$

Таким же образом (2.5.22) влечет

$$\prod_j W(y_j z) = \sum q_n(y; w) z^n, \tag{2.5.23}$$

откуда и вытекает лемма.

§6. Двойственность

6.1. В предыдущих параграфах мы ввели GHL-полиномы $P_\lambda(x;w)$, $Q_\lambda(x;w)$ используя выбранное полное упорядочение $\leq$ множества $\mathbb{P}_n$. Рассмотрим теперь сопряженный порядок $\leq'$, определенный в 4.3, и обозначим через $P'_\lambda(x;w)$, $Q'_\lambda(x;w)$, $b'_\lambda(w)$ и т.д. соответствующие объекты. Мы будем использовать эндоморфизм ω_w из 5.3 и обозначать последовательность $(1/w_1, 1/w_2, \dots)$ через $1/w$. Основным результатом этого раздела служит

Теорема. *Эндоморфизм ω_w действует на GHL-функции следующим образом:*

$$\omega_w\, P_{\lambda'}(x;w) = Q'_\lambda(x;1/w), \tag{2.6.1}$$

$$\omega_w\, Q_{\lambda'}(x;w) = P'_\lambda(x;1/w). \tag{2.6.2}$$

Мы откладываем доказательство до раздела 4.5.

В случае Макдональда (M) (см. §3), эта теорема эквивалентна теореме 5.2 из [139]. Действительно, в этом случае в [139] было показано, что свойство суперортогональности (iii) из §3 выполняется. Следовательно, в этом случае $P'_\lambda(x;w) = P_\lambda(x;w)$ и $Q'_\lambda(x;w) = Q_\lambda(x;w)$.

6.2. Доказательство теоремы двойственности в [139] использует некоторые специальные свойства GHL-функций, справедливые только в случае (M). Наш подход более общий; он основывается на следующем хорошо известном факте (ср.[57], с.415): для унитарной матрицы с единичным определителем каждый минор равен своему алгебраическому дополнению.

Мы воспользуемся обозначениями из раздела 4.9. Пусть $\overline{M}$, $\overline{R}$ – дополнения множеств (2.4.20) в $\mathbb{P}_n$; мы будем обозначать через $\begin{pmatrix}\overline{M}\\ \overline{R}\end{pmatrix}$ дополнительный минор и через $\begin{Bmatrix}M\\ R\end{Bmatrix} = (-1)^{r(M)+r(R)}\begin{pmatrix}M\\ R\end{pmatrix}$ алгебраическое дополнение, соответствующее минору $\begin{pmatrix}M\\ R\end{pmatrix}$ (здесь $r(M) = \sum r(\lambda)$ есть сумма номеров строк из множества M; $r(R)$ определяется таким же образом). Тогда

$$\begin{Bmatrix}M\\ R\end{Bmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{M}\\ \overline{R}\end{pmatrix}. \tag{2.6.3}$$

6.3. Лемма. *Для всех $\lambda \in \mathbb{P}_n$,*

$$f'_\lambda(w) = f_{(n)}(w)\, g_{\lambda'}(1/w). \tag{2.6.4}$$

Доказательство. Полагая $M = \{\mu : \mu \leq' \lambda\}$ и $M_{\lambda'} = \{\mu : \mu < \lambda'\}$, мы видим, что (2.4.22) влечет

$$f'_\lambda(w) = \sum_R \begin{pmatrix}M\\ R\end{pmatrix}^2 w^R. \tag{2.6.5}$$

По определению сопряженного порядка, мы можем записать

$$M' = \{\mu' : \mu \leq' \lambda\} = \{\mu : \mu \geq \lambda'\} = \overline{M}_{\lambda'};$$

тогда минор $\begin{pmatrix} M' \\ R \end{pmatrix}$ отличается от $\begin{pmatrix} M \\ R \end{pmatrix}$ в двух отношениях: порядок строк противоположный и элементы столбцов, отвечающих нечетным разбиениям $\rho \in \mathbb{P}_n$, меняют знаки. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} M \\ R \end{pmatrix} = \varepsilon(R)\,(-1)^{t(R)} \begin{Bmatrix} M' \\ R \end{Bmatrix}, \tag{2.6.6}$$

где $\varepsilon(R) = \prod_{\rho \in R} \varepsilon(\rho)$ и $t(R) = \sum_{\rho \in R}(N - r(\rho))$, $N = |\mathbb{P}_n|$. Из (2.6.3) следует, что

$$\begin{pmatrix} M \\ R \end{pmatrix}^2 = \begin{Bmatrix} M' \\ R \end{Bmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \overline{M}' \\ \overline{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\lambda'} \\ \overline{R} \end{pmatrix}^2. \tag{2.6.7}$$

Поскольку $w^R\, w^{\overline{R}} = \Pi w_\rho = f_n(w)$, лемма доказана.

6.4. Лемма. *Для всех* $\lambda, \rho \in \mathbb{P}_n$,

$$\varepsilon_\rho w_\rho\, (U')^\lambda_\rho(w) = f_{(n)}(w)\, U^{\lambda'}_\rho\,(1/w). \tag{2.6.8}$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение $\mathbb{P}_n = M \cup \{\lambda\} \cup L$ множества $\mathbb{P}_n$, где $M = \{\mu' : \mu <' \lambda\} = \{\mu : \mu > \lambda'\}$ и $L = \{\mu : \mu < \lambda'\}$. Пусть R пробегает все подмножества в $\mathbb{P}_n$ с $|R| = |M|$, и обозначим через S дополнение множества $R \cup \{\rho\}$ в $\mathbb{P}_n$. В соответствии с (2.4.23),

$$\varepsilon_\rho\, w_\rho\, (U')^\lambda_\rho(w) = \sqrt{z_\rho}\varepsilon_\rho \sum_R \begin{pmatrix} M, \lambda \\ R, \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ R \end{pmatrix} w_\rho\, w^R$$

и

$$f_{(n)}(w)\, U^{\lambda'}_\rho\,(1/w) = \sqrt{z}_\rho \sum_S \begin{pmatrix} L, \lambda' \\ S, \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} \frac{f_{(n)}(w)}{w^S}.$$

Применяя (2.6.3) дважды, получаем

$$\varepsilon_\rho \begin{pmatrix} M, \lambda \\ R, \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M \\ R \end{pmatrix} = (-1)^{N - r(\rho)} \begin{Bmatrix} \lambda, M' \\ R, \rho \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ R \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L, \lambda \\ S, \rho \end{pmatrix}.$$

Действительно, чтобы восстановить стандартный порядок последовательности R, ρ, столбец ρ нужно поменять местами с $(N - r(\rho))$ другими столбцами. Поскольку $f_{(n)}(w)/w^S = w_\rho\, w^R$, лемма доказана.

6.5. Мы готовы теперь доказать теорему. Воспользуемся (2.4.13) и формулой

$$(X')^\lambda_\rho(w) = w_\rho (U')^\lambda_\rho(w)/f'_\lambda(w),$$

аналогичной (2.4.14). Деля (2.6.8) на (2.6.4), получаем

$$\varepsilon_\rho (X')^\lambda_\rho(w) = Y^{\lambda'}_\rho(1/w). \tag{2.6.9}$$

Используя определение $Q'_\lambda(x;w)$, аналогичное (2.5.11), и формулу (2.5.2), получаем

$$Q'_\lambda(x;w) = \sum (X')^\lambda_\rho(w)\, p_\rho(x)/z_\rho\, w_\rho =$$
$$= \sum Y^{\lambda'}_\rho\,(1/w)\,\varepsilon_\rho\, p_\rho(x)/z_\rho\, w_\rho = \omega_{1/w}\, P_{\lambda'}(x;1/w).$$

Остается подставить w вместо $1/w$ и (2.6.1) доказано.

Чтобы доказать (2.6.2), применим эндоморфизм $\omega_{1/w}$ к (2.6.1), что дает $\omega_{1/w}Q'_\lambda(x;\,1/w) = P'_\lambda(x;w)$. Это эквивалентно (2.6.2), если подставить λ вместо λ', w вместо $1/w$, и Q', P вместо Q, P' соответственно. Теорема доказана.

6.6. Выведем из теоремы некоторые следствия. Как и раньше, мы помечаем штрихом функции, построенные с использованием сопряженного порядка $\leq'$. Например, $K'_{\lambda\mu}(w)$ – соответствующие коэффициенты Костка. Как следует из (2.5.3) и (2.5.5), матрица $(V_{\lambda\mu})$ является обратной по отношению к матрице Костка $(K_{\lambda\mu})$:

$$\sum_\nu K_{\lambda\nu}(w)\, V_{\nu\mu}(w) = \delta_{\lambda\mu}. \tag{2.6.10}$$

Предложение:

$$V_{\lambda'\mu'}(1/w) = K'_{\mu\lambda}(w). \tag{2.6.11}$$

Доказательство. Применяя эндоморфизм $\omega_{1/w}$ к обеим частям формулы

$$P_{\lambda'}(x;1/w) = \sum_{\lambda\leq'\mu} V_{\lambda'\mu'}(1/w)\, s_{\mu'}(x)$$

и используя теорему двойственности (2.6.2) мы видим, что

$$Q'_\lambda(x;w) = \sum_{\lambda\leq'\mu} V_{\lambda'\mu'}(1/w)\, S_\mu(x;w). \tag{2.6.12}$$

Поскольку

$$Q'_\lambda(x;w) = \sum_{\lambda\leq'\mu} K'_{\mu\lambda}(w)\, S_\mu(x;w) \tag{2.6.13}$$

по (2.5.13), предложение доказано.

Лемма:

$$b'_\lambda(w)\cdot b_{\lambda'}(1/w) = 1.$$

Доказательство. Используя (2.5.12) и следствие 5.3 с функциями $f(x) = g(x) = P_{\lambda'}(x; 1/w)$, можно проверить, что

$$b'_\lambda(w) = ||Q'_\lambda(x;w)||_w^2 = ||P_{\lambda'}(x;1/w)||_{1/w}^{-2} = b_{\lambda'}^{-1}(1/w).$$

6.7. Обозначим через $f_{\mu\nu}^\lambda(w)$ структурные константы умножения в базисе $\{P_\lambda\}$ алгебры $\mathbb{A}$:

$$P_\mu(x;w)\cdot P_\nu(x;w) = \sum_\lambda f_{\mu\nu}^\lambda(w)\, P_\lambda(x;w). \qquad (2.6.14)$$

Пусть $g_{\mu\nu}^\lambda(w)$ аналогичные коэффициенты в базисе $\{Q_\lambda\}$:

$$Q_\mu(x;w)\cdot Q_\nu(x;w) = \sum_\lambda g_{\mu\nu}^\lambda(w)\, Q_\lambda(x;w). \qquad (2.6.15)$$

Напомним, что $Q_\lambda(x;w) = b_\lambda(w)\, P_\lambda(x;w)$; сравнивая (2.6.14) и (2.6.15), получаем

$$g_{\mu\nu}^\lambda(w) = f_{\mu\nu}^\lambda(w)\cdot b_\lambda(w)/b_\mu(w)b_\nu(w). \qquad (2.6.16)$$

Предложение:

$$(g')_{\mu\nu}^\lambda(w) = f_{\mu'\nu'}^{\lambda'}(1/w). \qquad (2.6.17)$$

Доказательство. Достаточно применить эндоморфизм ω_w к формуле

$$Q'_\mu(x;w)\cdot Q'_\nu(x;w) = \sum (g')_{\mu\nu}^\lambda(w)\, Q'_\lambda(x;w)$$

и использовать теорему двойственности.

Следствие: $f_{\mu\nu}^\lambda(w) \neq 0$ *влечет* $\mu \cup \nu \le \lambda \le \mu + \nu$.

Доказательство – такое же, как в предложении (6.4) в [139].

Для $w_n \equiv 1$ функции $f_{\mu\nu}^\lambda(w) = g_{\mu\nu}^\lambda(w) = c_{\mu\nu}^\lambda$ совпадают с обычными коэффициентами Литтлвуда – Ричардсона $c_{\mu\nu}^\lambda$ [49, I.9]. В [139, (6.6)] было доказано (для случая (M)), что

$$f_{\mu\nu}^\lambda(w) \neq 0 \quad \text{влечет} \quad \lambda \supset \mu \quad \text{и} \quad \lambda \supset \nu.$$

Это не так для произвольного w.

6.8. Рассмотрим частный случай формул умножения (2.6.14), (2.6.15) при $\nu = (1)$:

$$P_{(1)}(x;w)\cdot P_\lambda(x;w) = \sum_\Lambda m_{\lambda\Lambda}(w)\, P_\Lambda(x;w), \qquad (2.6.18)$$

$$Q_{(1)}(x;w)\cdot Q_\lambda(x;w) = \sum_\Lambda M_{\lambda\Lambda}(w)\, Q_\Lambda(x;w). \qquad (2.6.19)$$

Мы называем $m_{\lambda\Lambda}(w)$ и $M_{\lambda\Lambda}(w)$ *коэффициентами ветвления* GHL-полиномов. Согласно результатам предыдущего раздела, имеем:

$$M_{\lambda\Lambda}(w) = m_{\lambda\Lambda}(w) \cdot w_1 b_\Lambda(w)/b_\lambda(w), \tag{2.6.20}$$

$$M'_{\lambda\Lambda}(w) = m_{\lambda'\Lambda'}(1/w), \tag{2.6.21}$$

$$m_{\lambda\Lambda}(w) \neq 0, \quad \text{влечет} \quad \lambda \cup (1) \leq \Lambda \leq \lambda + (1). \tag{2.6.22}$$

Будем писать $\lambda \nearrow \Lambda$, если $\lambda \subset \Lambda$ и $|\Lambda| = |\lambda|+1$. Мы говорим, что GHL - полиномы $P_\lambda(x; w)$ для заданного w имеют *ветвление типа Юнга*, если $m_{\lambda\Lambda}(w) \neq 0$ только при $\lambda \nearrow \Lambda$. Из [139, (6.6)] следует, что во всех случаях, обсуждавшихся в §3, мы имеем ветвление типа Юнга.

6.9. Опишем более явно коэффициенты ветвления $m_{\lambda\Lambda}(w)$ для обобщенного случая Юнга (J_m). Пусть λ – диаграмма Юнга и $s = (i, j) \in \lambda$. Следуя [139, §7], обозначим через $a(s) = \lambda_j - j$ *длину руки*, через $l(s) = \lambda'_j - i$ *длину ноги* и через $h(s) = a(s) + l(s) + 1$ *длину крюка* клетки s в λ. Пусть

$$b_{\lambda,s}(\alpha) = \frac{a(s)\alpha + (l(s) + 1)}{(a(s) + 1)\alpha + l(s)}, \tag{2.6.23}$$

где α – параметр для (J_m)-случая: $w_{km} = \alpha$ и $w_n = 1$, если $n \neq 0 \mod m$.

Предложение. *Обозначим через $m_{\lambda\Lambda}(\alpha)$ коэффициенты ветвления для GHL-полиномов в (J_m)-случае. Тогда*

$$m_{\lambda\Lambda}(\alpha) = b_{\lambda_*}(\alpha) b^{-1}_{\Lambda_*}(\alpha) \cdot b_\Lambda(\alpha) b^{-1}_\lambda(\alpha) \cdot b^{-1}_{(1)}(\alpha), \tag{2.6.24}$$

где

$$b_\lambda(\alpha) = \prod b_{\lambda,s}(\alpha)$$

и произведение берется по всем $s \in \lambda$, для которых $h(s) = 0 \mod m$.

Доказательство. Это следует из формул (6.5) и (7.5) в [139] после перехода к пределу, описанного в 3.3: $q = r + \alpha\varepsilon$, $t = r + \varepsilon$, где r – корень степени m из единицы и $\varepsilon \to 0$.

Отметим, что для $|\Lambda| \leq 4$ из (2.6.22) следует, что

$$m_{\lambda\Lambda}(w) \neq 0 \quad \text{влечет} \quad \lambda \nearrow \Lambda$$

для всех w. Простейший пример неюнговского ветвления демонстрирует коэффициент $m_{\lambda\Lambda}(w)$ при $\lambda = (2^2)$, $\Lambda = (3\,1^2)$, который не зануляется при некоторых значениях w. Например, если $w = (u, 1, 1, \dots)$, то

$$m_{(2^2),(3\,1^2)}(w) = 8\,(4u^{15} + 5u^{14} - 18u^{13} - 12u^{12} +$$
$$+30u^{11} - 18u^{10} + 30u^9 - 12u^8 - 18u^7 + 5u^6 + 4u^5).$$

§7. GHL-функции и обобщенные полиномы Лежандра

7.1. Любой симметрический полином P от n переменных $x_1, \dots, x_n$ можно однозначно записать, как полином $P(x_1, \dots, x_n) = R(e_1, \dots, e_n)$ от элементарных симметрических функций $e_1, \dots, e_n$. Если P однороден, то он полностью определяется ограничением $\tilde{P} = \tilde{P}(e_1, \dots, e_n)$ полинома R на гиперплоскость $e_n = 1$. В частности, для $n = 2$, мы связываем с каждым однородным симметрическим полиномом $P(x_1, x_2)$ от двух переменных x_1, x_2 полином от одной переменной $\tilde{P}(y)$, полагая $y = e_1 = x_1 + x_2$ и $e_2 = x_1 x_2 = 1$. Можно легко проверить, что для степенных сумм $p_n(x_1, x_2) = x_1^n + x_2^n$ и для полных однородных симметрических функций

$$h_n(x_1, x_2) = (x_1^{n+1} - x_2^{n+1}) \,/\, (x_1 - x_2)$$

мы получаем

$$\tilde{p}_n(y) = 2 \cdot T_n(y/2), \quad \tilde{h}_n(y) = 2 \cdot U_n(y/2),$$

где $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$, $U_n(\cos\varphi) = \sin(n+1)\varphi / \sin\varphi$ – полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно. Поскольку

$$m_{n-k,k}(x_1, x_2) = (x_1 \, x_2)^k \cdot p_{n-2k}(x_1, x_2),$$

ясно также, что

$$\tilde{m}_{n-k,k}(y) = 2 \cdot T_{n-2k}(y/2). \tag{2.7.1}$$

Рассмотрим теперь полиномы $q_n = q_n(x; w)$, определенные в (2.5.9).

Предложение. *Полином, ассоциированный с $q_n(x_1, x_2; w)$ имеет вид*

$$\tilde{q}_n(y) = \sum_{k=1}^{n} b_{n-k}(w) \, b_k(w) \, T_{|n-2k|}(y/2).$$

Доказательство. Подставляя $x = (x_1, x_2, 0, \dots)$ в лемме 3.7, мы видим, что ненулевые слагаемые отвечают разбиениям $\lambda = (n-k, k)$ с двумя частями. Поскольку $B_{(n-k,k)}(w) = b_{n-k}(w) \, b_k(w)$, предложение вытекает из (2.7.1).

7.2. Напомним, что Фейер [90] ввел *обобщенные полиномы Лежандра* $P_n(y)$, связанные с производящей функцией

$$W(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \, z^n$$

следующим образом:

$$W(re^{i\varphi}) \cdot W(re^{-i\varphi}) = \sum_{n \geq 0} R_n \,(\cos\varphi) \, r^n. \tag{2.7.2}$$

Более явно,

$$R_n(\cos\varphi) = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\, b_k\, \cos(n-2k)\varphi. \tag{2.7.3}$$

Обычные полиномы Лежандра соответствуют $W(z) = (1-z)^{-1/2}$.

Предложение. *Пусть $R_n(y) = R_n(y; w)$ – обобщенные полиномы Лежандра, заданные производящей функцией $W(z) = \exp\sum z^n/n\, w_n$. Тогда $\tilde{q}_n(y; w) = R_n(y/2)$.*

Доказательство. Подставляя $y_1 = e^{i\varphi}$, $y_2 = e^{-i\varphi}$, $z = r$ в (2.5.23), находим

$$W(re^{i\varphi})\cdot W(re^{-i\varphi}) = \sum_{n\geq 0} q_n(y_1, y_2; w)\, r^n = \sum_{n\geq 0} \tilde{q}_n\,(2\cos\varphi; w)\, r^n,$$

и предложение следует из (2.7.2).

Следствие. *$\tilde{P}_{(n)}(y; w) = R_n(y/2; w)/b_n(w)$, где $b_n(w)$ суть коэффициенты ряда $W(z) = \sum_{n\geq 0} b_n(w)\, z^n$.*

7.3. Рассмотрим частные случаи, перечисленные в §3.

(S) $\quad w_n \equiv 1$; $n = 1, 2, \ldots$.

В этом случае $W(z) = 1/(1-z)$, $b_n \equiv 1$ и $R_n(y) = 2U_n(y/2)$ суть полиномы Чебышева второго рода. Рекуррентное соотношение для них имеет вид

$$2y\cdot R_n(y) = R_{n+1}(y) + R_{n-1}(y). \tag{2.7.4}$$

(H) $\quad w_n = 1/(1-t^n)$.

Здесь $W(z) = (1-tz)/(1-z)$ и $b_0 = 1$, $b_n = 1-t$ для $n\geq 1$. Таким образом, $R_n(y) = 2(1-t)\cdot[U_n(y/2) - tU_{n-2}(y/2)]$. Рекуррентное соотношение совпадает с (2.7.4) при $n\geq 2$ и имеет вид $2y\cdot R_1(y) = R_2(y) + (1+t)R_0(y)$ при $n = 1$.

(J) $\quad w_n \equiv 1/\theta$.

Для этого случая $W(z) = (1-z)^{-\theta}$, $b_n = \binom{\theta+n-1}{n}$ и $R_n(y)$ суть ультрасферические полиномы (полиномы Гегенбауэра). Рекуррентное соотношение имеет вид

$$2y\cdot R_n(y) = R_{n+1}(y) + c_n R_{n-1}(y), \tag{2.7.5}$$

где

$$c_n = \frac{n(2\cdot\theta + n - 1)}{(\theta+n-1)\,(\theta+n)}. \tag{2.7.6}$$

При $\theta = 2$ получаем обычные полиномы Лежандра.

(M) $\quad w_n = (1-q^n)/(1-t^n)$.

Можно проверить, что здесь

$$W(z) = \prod_{k\geq 0}\frac{1-q^k tz}{1-q^k z} = \frac{(tz;q)_\infty}{(z;q)_\infty};$$

согласно q-биномиальной теореме [67]

$$b_n = \frac{(t;q)_n}{(q;q)_n} = \frac{(1-t)(1-qt)\dots(1-q^{n-1}t)}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)},$$

и $R_n(y) = r_n(y;t|q)$ суть *непрерывные q-ультрасферические полиномы*, см.[67].

(G) $\quad w_n = 1 - q^n$.

Этот случай является подслучаем в (M). Здесь $W(z) = \prod(1-q^k z)$, $b_n = (q;q)_n^{-1}$ и $R_n(y) = H_n(y|q)$ называются *непрерывными q-полиномами Эрмита*, см.[67].

(J_m) $\quad w_n = 1/\theta$ если $n = 0 \mod m$ и $w_n = 1$ иначе.

В этом случае

$$W(z) = (1-z^m)^{(1-\theta)/m}(1-z)^{-1},$$

$$b_{km} = b_{km+1} = b_{km+m-1} = \binom{t+k-1}{k}, \quad t = (\theta+m-1)/m,$$

и полиномы $R_n(y)$ были названы в [67] *просеянными q-ультрасферическими полиномами первого рода*. Коэффициенты в рекуррентных соотношениях в (2.7.5) суть

$$c_n = \begin{cases} n/(\theta+n-1), & \text{если } n = km, \\ (2\theta+n-1)/(\theta+n), & \text{если } n = km-1, \\ 1, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{2.7.7}$$

7.4. Из (2.7.3) ясно, что $R_n(-y) = (-1)^n R_n(y)$ для полиномов Фейера $R_n(y)$. Если эти полиномы ортогональны по отношению к некоторой мере на $\mathbb{R}$, то выполняется трехчленное рекуррентное соотношение вида (2.7.5). Обратное утверждение также справедливо и известно как теорема Фавара: из рекуррентных соотношений (2.7.5) с положительными коэффициентами $c \geq 0$ и начальными условиями $R_0(y) \equiv 1$, $R_1(y) = y$ следует, что последовательность $R_n(y)$ ортогональна по отношению к некоторой симметричной мере на $\mathbb{R}$; см., например, [70].

Во всех случаях раздела 5.3 обобщенные полиномы Лежандра ортогональны. Замечательный результат Фельдхейма [60] и Лансевицкого [48] состоит в том, что обратное тоже верно: условие ортогональности выполняется для обобщенных полиномов Лежандра только в случае (M) (на самом деле это условие справедливо также в предельных случаях (J_m), что не было отмечено в [48, 60]).

7.5. Будем писать $f_n = b_n/b_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, предполагая $b_0 = 1$; тогда $b_n = f_1 f_2 \dots f_n$. Подставляя (2.7.3) в рекуррентное соотношение (2.7.5), можно легко убедиться, что оно эквивалентно бесконечной системе уравнений

$$(1 - f_n/f_{n+1})(1 - f_{n-k+1}/f_{n+1}) = 1 - c_n f_n/f_{n+1}, \tag{2.7.8}$$

$1 \le k \le n \le \infty$, для двух последовательностей переменных $f_1, f_2, \dots$; $c_1, c_2, \dots$. В [48, 60] было найдено общее решение этой системы, зависящее от первых трех переменных f_1, f_2 и f_3.

Последовательность $\{c_n\}$ можно выразить в терминах $\{f_n\}$:

$$c_n = 1 + f_1/f_n - f_1/f_{n+1}, \tag{2.7.9}$$

так что можно перейти к переменным f.

После некоторых вычислений, которые мы здесь не повторяем (см.[60]), из (2.7.8) можно вывести, что для всех $n \ge 2$

$$\begin{gathered}(f_{n-1} - f_n)(f_n - f_1)(f_{n-1} - f_1)(f_3 - f_2) = \\ (f_{n-1} - f_n)(f_n - f_2)(f_2 - f_1)(f_3 - f_1).\end{gathered} \tag{2.7.10}$$

Пусть $y^2 = (f_3 - f_1)/(f_3 - f_2)$, $z_n = (f_n - f_1)(f_2 - f_1)$ и предположим, что $f_n \ne f_{n-1}$ для всех $n \ge 2$. Деля обе части (2.7.10) на

$$(f_{n-1} - f_n)(f_3 - f_2)(f_2 - f_1)^2,$$

получаем

$$z_n = y^2/(y^2 - z_{n-1}). \tag{2.7.11}$$

Поскольку $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$, можно убедиться, что

$$z_{n+1} = y \cdot U_{n-1}(y/2)/U_n(y/2), \tag{2.7.12}$$

где $U_N(\cos\varphi) = \sin(n+1)\varphi/\sin\varphi$ – полином Чебышева второго рода. Формула (2.7.12) верна при условии, что $y/2$ не является корнем одного из полиномов U_n, т.е. $y \ne 2\cos\pi k/m$ при целых k, m. Эти соображения приводят нас к следующему результату.

Предложение [60]. *Предположим, что $f_2 \ne f_1$, $f_3 \ne f_1$ и что*

$$y^2 = (f_3 - f_1)\,/\,(f_3 - f_2) \ne 4\cos^2 \pi k/m$$

при целых k и m. Определим последовательность $z_1, z_2, \dots$ посредством формулы (2.7.11)$^{*)}$. Тогда последовательность

$$f_n = f_1 + (f_2 - f_1)z_n \tag{2.7.13}$$

вместе с (2.7.9), доставляет решение системы (2.7.8).

$^{*)}$ Если $f_3 = f_2$, мы положим $z_n \equiv 1$.

Мы будем называть решение (2.7.13) *основной серией.* Существует и другая параметризация, использующая переменные

$$q = (f_2 - f_1)^{-1}(1 - f_2), \quad t = (f_2 - f_1)^{-1}[f_2(1 - f_2) + (f_2 - f_1)^2].$$

В терминах этих параметров получаем

$$y^2 = (q + 1)^2/q, \quad z_n = (1 + q)(1 - q^{n-1})/(1 - q^n)$$

и следовательно

$$f_n = \frac{1 - q^{n-1}t}{1 - q^n}, \quad c_n = \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}t^2)}{(1 - q^{n-1}t)(1 - q^n t)}. \tag{2.7.14}$$

Поскольку $y \neq 2\cos \pi k/m$, q не является корнем из единицы.

7.6. Помимо (2.7.14), есть еще одно семейство решений уравнения (2.7.8).

Предложение. *Для заданного целого $m \geq 2$ и вещественных $f_1, f_m \neq 0$, $f_m \neq f_1$ последовательности $\{f_n\}$ и $\{c_n\}$, определенные формулой*

$$f_n = \begin{cases} f_1 + (f_m - f_1)/k, & \text{если } n = km, \\ f_1, & \text{иначе} \end{cases} \tag{2.7.15}$$

и формулой (2.7.9), удовлетворяют уравнениям (2.7.8).

Доказательство. Используя обозначение $\theta = f_m/f_1$, запишем последовательность f_n более явно:

$$f_{mk} = f_1 \cdot (\theta + k - 1)/k; \quad f_n = f_1, \quad \text{если} \quad n \neq 0 \mod m. \tag{2.7.16}$$

Из (2.7.9) ясно, что коэффициенты c_n выражаются посредством (2.7.6) и предложение подтверждается прямым вычислением.

Мы будем называть (2.7.15) *дополнительной серией* решений для (2.7.8). Это семейство было пропущено в [48, 60]; в [65] оно появляется в иной форме.

Дополнительную серию можно получить как предел решений, принадлежащих основной серии (2.7.13). С этой целью обозначим через r примитивный корень m-степени из единицы и положим

$$q = r + \delta, \quad t = r + \theta\delta. \tag{2.7.17}$$

Подставляя эти значения в (2.7.14), получаем (2.7.16) в пределе $\delta \to 0$. При $m = 1$ решение (2.7.16) соответствует обычному случаю Джека (J). Оно может быть формально включено в основную серию (2.7.14), если положить $y^2 = 4$.

7.7. Мы покажем, что основная и дополнительная серии исчерпывают решения системы (2.7.8). Заметим для начала, что уравнение (2.7.8) и (2.7.9) однородны; поэтому множество решений инвариантно относительно преобразований

$$f = (f_1, f_2, \dots) \mapsto f^{(a)} = (af_1, af_2, \dots), \tag{2.7.18}$$

$a \neq 0$. Поскольку $b_n = f_1 f_2 \dots f_n$, получаем $b_n^{(\alpha)} = a^n b_n$, $W^{(\alpha)}(z) = W(az)$ и $w_n^{(\alpha)} = w_n/a^n$ для $n = 1, 2, \dots$. Из (2.7.9) ясно, что полиномы $R_n(y)/b_n$ не меняются при преобразованиях (2.7.18).

Теорема. *С точностью до ненулевого общего множителя, предложения 5.5 и 5.6 исчерпывают все решения уравнений (2.7.8), (2.7.9).*

Доказательство. Из (2.7.8) и (2.7.9) легко следует, что

$$(1 - c_n)(1 - f_k f_{n-k+1}/f_1 f_n) = (1 - f_k/f_n)(1 - f_{n-k+1}/f_n) \tag{2.7.19}$$

для всех $1 < k < n$. Предположим, что для некоторого k множитель

$$M = 1 - f_k f_{n-k+1}/f_1 f_n \tag{2.7.20}$$

– ненулевой. Тогда f_{n+1} и c_n полностью определены значениями $f_1, f_2, \dots, f_n$. Мы найдем такие множители для всех решений дополнительной серии.

Предположим, что $f_1 = f_2 = \dots = f_{m-1} = 1$ и $\theta = f_m \neq 1$. При $k = m$ и $s \geq 2$ имеем

(1) если $n = ms$, то

$$M = 1 - f_m/f_{ms} = (s-1)(1-\theta)/(\theta + s - 1) \neq 0;$$

(2) если $n = ms - 1$, тогда

$$M = 1 - f_m \cdot f_{ms-m} = (1-\theta)(\theta + s - 1)/(s-1) \neq 0;$$

(3) если $n = ms - t, \quad 1 < t < m$, то

$$M = 1 - f_m = 1 - \theta \neq 0.$$

Остается случай $m = n$, $m \geq 3$, где мы положим $k = 2$. Тогда

(4) $M = 1 - 1/f_n = (\theta - 1)/\theta \neq 0.$

Заключаем, что начальные значения $f_1 = \dots = f_{m-1} \neq f_m$, $m \geq 3$ однозначно определяют решение $\{f_n\}$, и что оно принадлежит к дополнительной серии.

Рассмотрим теперь случаи $f_2 \neq f_1$ или $f_3 \neq f_1$. Если $f_3 = f_2 \neq f_1$, то для $k = 2$ и $n \geq 3$ множитель (2.7.20) отличен от нуля: $M = 1 - f_2/f_1 \neq 0$; мы получаем случай Джека ($(m = 1)$). Случаи $f_1 = f_3 \neq f_2$ и $f_1 = f_2 \neq f_3$ сводятся к рассмотренным в (1) и (4) и определяют решения из дополнительной серии с $m = 2$ и $m = 3$ соответственно.

В общем случае $f_1 \neq f_2$, $f_1 \neq f_3$, $f_2 \neq f_3$ решение $\{f_n\}$ полностью задается через f_1, f_2, f_3 (основная серия), см.5.5. Теорема доказана.

7.8. Вернемся к симметрическим GHL -полиномам. Из (2.6.22) следует, что

$$P_{(1)}(x;w)\,P_{(n)}(x;w) = P_{(n+1)}(x;w) + c_n(w)\,P_{(n,1)}(x;w) \tag{2.7.21}$$

для подходящих коэффициентов $c_n = c_n(w) = m_{(n),(n,1)}(w)$. Предполагая, что $x = (x_1, x_2, 0, \dots)$ и используя условие суперортогональности (ii) из 1.4, получаем $P_{(n,1)}(x;w) = x_1 x_2\, P_{(n-1)}(x;w)$ и из следствия 5.2 вытекает следующее

Предложение. *Из условия суперортогональности 1.4 (ii) следует, что обобщенные полиномы Лежандра $R_n(y)$, ассоциированные с GHL-симметрическими полиномами, удовлетворяют рекуррентным соотношениям (2.7.5).*

Предполагая, что $c_n \geq 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$ и пользуясь замечаниями в 5.4, мы можем утверждать, что полиномы $R_n(y)$ в предложении ортогональны как полиномы от одной переменной.

Из последнего предложения и теоремы 5.7 получаем наш второй основной результат.

Теорема. *Предположим, что GHL-полиномы $P_\lambda(x;w)$ удовлетворяют условию 1.4 (ii) с $n = 2$. Тогда последовательность $w^{(c)} = \{c^n\, w_n\}$, при подходящей константе c, имеет вид (M) или (J_m) из раздела 5.3.*

§8. Детерминантные формулы для GHL-полиномов

8.1. В оставшейся части этой главы мы рассматриваем GHL-полиномы только в случае Макдональда (M) и будем пользоваться обозначениями [139]:

$$P_\lambda(x;q,t) = P_\lambda(x;w), \quad Q_\lambda(x;q,t) = Q_\lambda(x;w)$$

для $w_n = (1-q^n)/(1-t^n)$, $n = 1,2,\ldots$. Мы хотели бы получить детерминантные формулы для P_λ, Q_λ, которые бы специализировались к хорошо известной второй формуле Вейля для функций Шура в случае (S):

$$s_{\lambda'}(x) = \det\left(e_{\lambda_i-i+j}(x)\right). \tag{2.8.1}$$

С другой точки зрения, эти формулы обобщают классические представления ортогональных многочленов детерминантами якобиевых трехдиагональных матриц:

$$R_n(y) = \begin{vmatrix} y & c_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & y & c_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & y & c_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \tag{2.8.2}$$

где c_n суть коэффициенты рекуррентных соотношений $y\cdot R_n(y) = R_{n+1}(y) + c_nR_{n-1}(y)$, задающих полиномы $R_n(y)$. По непрерывности, наши формулы также справедливы и в обобщенном случае Джека (J_m).

8.2. Введем рациональные функции

$$c_{ij}^\lambda(q,t) = \frac{1-q^{\lambda_i-i+j}\, t^{m-j}}{1-q^{\lambda_i}\, t^{m-i}}, \tag{2.8.3}$$

где $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ – диаграмма Юнга с m ненулевыми строчками. Мы будем изучать определители

$$\varphi_\lambda(x;q,t) = \det(c_{ij}^\lambda(q,t)\; e_{\lambda_i-i+j}(x))_{i,j=1}^m \tag{2.8.4}$$

и

$$\psi_\lambda(x;q,t) = \det(c_{ij}^\lambda(q,t)\; q_{\lambda_i-i+j}(x;q,t))_{i,j=1}^m. \tag{2.8.5}$$

Если $q=t$, то $c_{ij}^\lambda(q,t)\equiv 1$ и $\varphi_\lambda = \psi_\lambda$ превращаются в обычные выражения (2.8.1) для функций Шура:

$$s_\lambda(x) = \psi_\lambda(x;q,q) = \det(h_{\lambda_i-i+j}(x)), \tag{2.8.6}$$

$$s_{\lambda'}(x) = \varphi_\lambda(x;q,q) = \det(e_{\lambda_i-i+j}(x)), \tag{2.8.7}$$

поскольку $q_n(x;q,q) = h_n(x)$. Следуя [139], обозначим через $\omega_{q,t}$ автоморфизм алгебры $\mathbb{A}$, определенный как

$$\omega_{q,t}(p_n) = (-1)^{n+1}\frac{(1-q^n)}{(1-t^n)}\,p_n;$$

тогда $\omega_{t,q}$ – обратный автоморфизм. По теореме двойственности [139, (5.2)],

$$\omega_{t,q}\,e_n = \omega_{t,q}\,P_{(1^n)}(x;t,q) = Q_{(n)}(x;q,t) = q_n(x;q,t)$$

и $\omega_{q,t}\,q_n(x;q,t) = e_n(x)$. Применяя автоморфизмы $\omega_{q,t}$, $\omega_{t,q}$ к определителям φ_λ, ψ_l получаем

Предложение.

$$\omega_{q,t}\ \psi_\lambda(x;q,t) = \varphi_\lambda(x;q,t), \tag{2.8.8}$$

$$\omega_{t,q}\ \varphi_\lambda(x;q,t) = \psi_\lambda(x;q,t). \tag{2.8.9}$$

8.3. Имеются естественные обобщения (2.8.6) и (2.8.7) для диаграмм - крюков.

Теорема. *Пусть $\lambda = (n-k,1^k)$ – диаграмма, имеющая форму крюка с длиной руки $n-k-1$ и длиной ноги k. Тогда*

$$Q_\lambda(x;q,t) = \psi_\lambda(x;q,t), \tag{2.8.10}$$

$$P_{\lambda'}(x;q,t) = \varphi_\lambda(x;q,t). \tag{2.8.11}$$

Доказательство. Макдональд [139] получил явные формулы для функций $b_\mu(q,t) = b_\mu(w)$; в частности, для $\mu = (1^n)$

$$b_{(1^n)}(q,t) = \frac{1-t^n}{1-qt^{n-1}}\cdots\frac{1-t}{1-q}. \tag{2.8.12}$$

Разлагая определитель (2.8.5) по первой строке, можем записать

$$\begin{gathered}\psi_{(n-k,1^k)}(x;q,t) = \\ = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\,\frac{(1-q^{n-j}\,t^j)}{(1-q^{n-k}\,t^k)}\ \frac{b_{(1^k)}(q,t)}{b_{(1^j)}(q,t)}\,q_{n-j}(x;q,t)\psi_{(1^j)}(x;q,t).\end{gathered} \tag{2.8.13}$$

Используя индукцию по n, предположим, что $\psi_{(1^j)}(x;q,t) = Q_{(1^j)}(x;q,t)$ для всех $j<n$. Из теоремы (6.5) из [139] следует, что

$$q_{n-j}\cdot Q_{(1^j)} = Q_{(n-j,1^j)} + \frac{(1-t^j)(1-q^{n-j+1}\,t^{j-1})}{(1-qt^{j-1})(1-q^{n-j}\,t^j)}\,Q_{(n-j+1,1^{j-1})}. \tag{2.8.14}$$

Следовательно, j-ый член в (2.8.13) равен

$$(-1)^{k-j}\frac{(1-q^{n-j}\,t^{j})}{(1-q^{n-k}\,t^{k})}\;\frac{b_{(1^k)}(q,t)}{b_{(1^j)}(q,t)}\,Q_{(n-j,1^j)}(x;q,t)+$$
$$+(-1)^{k-j}\frac{(1-q^{n-j+1}\,t^{j-1})}{(1-q^{n-k}\,t^{k})}\;\frac{b_{(1^k)}(q,t)}{b_{(1^{j-1})}(q,t)}\,Q^{(n-j+1,1^{j-1})}(x;q,t).$$

Все слагаемые в (2.8.13), кроме $Q_{(n-k,1^k)}(x;q,t)$, сокращаются и формула (2.8.11) доказана. Применяя автоморфизм $\omega_{q,t}$, и используя теорему двойственности (5.2) из [139] и предложение 6.2, получаем (2.8.10).

Следствие.

$$Q_\lambda(x;q,t)=b_\lambda(q,t)\cdot\varphi_{\lambda'}(x;t,q), \tag{2.8.15}$$

$$P_{\lambda'}(x;q,t)=b_\lambda(t,q)\cdot\psi_{\lambda'}(x;q,t), \tag{2.8.16}$$

Теорема имеет несколько интересных специализаций, например, для функций Холла – Литтлвуда ($q=0$), мономиальных симметрических функций ($q=0$, $t=1$), и т.д.

Для $q=t$, формулы (2.8.10), (2.8.15) специализируются к (2.8.6), а (2.8.11) и (2.8.16) – к (2.8.7). Для общих q, t и $x=(x_1,x_2,0,\dots)$, (2.8.11) есть определитель представления (2.8.2) для полиномов Роджерса.

8.4. Если диаграмма λ не является крюком, формулы усложняются. Например, для $\lambda=(a+1,2,1^{b-1})$,

$$P_{\lambda'}(x;q,t)=\varphi_\lambda(x;q,t)+K\cdot\varphi_{(a+2,1^b)}(x;t,q),$$

где

$$K=\frac{(q-t)\,(1-t^a)\,(1-q^{b-1}t)\,(1-q^bt^{a+1})}{(1-t)\,(1-qt^a)\,(1-q^{b-1}t^2)\,(1-q^bt^{a-1})}.$$

Напомним параметризацию Фробениуса диаграммы $\lambda\in\mathbb{P}$. Обозначим через $d=d(\lambda)$ наибольшее i, для которого $\lambda_i\geq i$, и пусть $f_i=\lambda_i-i$, $g_i=\lambda'_i-i$ для $i=1,2,\dots d$, где λ' обозначает разбиение, сопряженное к λ. Тогда символ Фробениуса $\binom{f_1,\dots,f_d}{g_1,\dots,g_d}$ однозначно определяет λ.

Обозначим через $f\&g=(f+1,1^g)$ диаграмму – крюк с длиной руки f и длиной ноги g. Имеется хорошо известное выражение для функций Шура в терминах крюковых функций Шура $s_{f\&g}(x)$:

$$s_\lambda(x)=\det(s_{f_i\&g_j}(x))_{i,j=1}^d. \tag{2.8.17}$$

Гипотеза. *Для всех $\lambda\in\mathbb{P}$ существует такая рациональная функция $M_\lambda=M_\lambda(q,t)$, что*

$$M_\lambda\cdot\psi_\lambda(x;q,t)=\det(\psi_{f_i\&g_j}(x;q,t))_{i,j=1}^d \tag{2.8.18}$$

при всех $x = (x_1, x_2, \dots)$.

Например, если $\lambda = (a, b)$, то

$$M_\lambda = \frac{1-t}{1-q} \cdot \frac{1-q^b}{1-q^{b-1}t},$$

а если $\lambda = (a+1,\ 2,\ 1^{b-1})$, то

$$M_\lambda = \frac{1-t^b}{1-qt^{b-1}} \cdot \frac{1-q^2t^{b-1}}{1-qt^b}.$$

§9. Ветвление полиномов Макдональда

9.1. Классические функции Холла – Литтлвуда имеют многочисленные приложения в теории представлений ([49], [143]). Например, рассмотрим GHL-функции X^λ_ρ, Y^λ_ρ для случая Холла (H) в пределе $t \to -1$. Тогда характеры проективных представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, найденные Шуром, можно записать как

$$\chi^\lambda_\rho = (2^{\varepsilon(\lambda)} Y^\lambda_\rho X^\lambda_\rho)^{1/2},$$

где λ – строгое разбиение n с m частями; $\varepsilon(\lambda) = 0$ если разность $(n-m)$ четна и $\varepsilon(\lambda) = 1$ иначе. Здесь ρ пробегает разбиения с нечетными частями, параметризующие классы сопряженности второго рода в $\mathfrak{S}_n$.

Вторым примером является алгебра Гекке $H_n(q)$ симметрической группы $\mathfrak{S}_n$. В [19] было показано, что характеры $H_n(q)$ можно описать при помощи симметрических функций посредством формулы, похожей на формулу Фробениуса:

$$r_\rho = \sum_\lambda \chi^\lambda_\rho s_\lambda,$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots)$, $r_\rho = r_{\rho_1} r_{\rho_2} \dots$ и

$$r_m = r_m(x;q) = q^{m-1} \cdot P_{(m)}(x;0,1/q).$$

Через χ^λ_ρ мы обозначаем значения неприводимых характеров χ^λ, $\lambda \in \mathbb{P}_n$ на элементах вида

$$c_\rho = (t_1 \cdots t_{\rho_1 - 1})(t_{\rho_1+1} \cdots t_{\rho_1+\rho_2-1}) \cdot \dots ,$$

где $t_1, \dots, t_{n-1}$ – стандартные образующие в $H_n(q)$.

9.2. Другая точка зрения на симметрические функции возникает при описании характеров фактор-представлений бесконечномерных алгебр $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_\infty]$, $H_\infty(q)$. Согласно результату Тома [161], такой характер $\chi_{\alpha,\beta}$ параметризуется парой неотрицательных последовательностей

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots), \tag{2.9.1}$$

такой, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots 0$ и $\gamma = 1 - \sum \alpha_i - \sum \beta_i \geq 0$. Значение $\chi_{\alpha,\beta}$ на цикле $c_{(m)}$, $m \geq 2$ равно

$$\chi_{\alpha,\beta}(c_{(m)}) = \sum \alpha_i^m + (-1)^{m+1} \sum \beta_i^m = p_m(\alpha,\beta).$$

Аналогичный результат был получен в [19] для алгебр Гекке $H_\infty(q)$:

$$\chi_{\alpha,\beta}(c_{(m)}) = q^{m-1} P_{(m)}(\alpha,\beta;0,1/q),$$

где $P_{(m)}(\alpha,\beta;0,1/q)$ определяется путем подстановки $p_n=p_n(\alpha,\beta)$ в (2.5.2).
Для так называемых *марковских следов* $\mathrm{tr}_{q,t}$ алгебры $H_\infty(q)$, изучавшихся в связи с алгебраической конструкцией инвариантов узлов Джонса [114], можно проверить, что

$$\mathrm{tr}_{q,t}(b)=\sum\Phi_\lambda(q,t)\,\chi^\lambda(b), \tag{2.9.2}$$

где коэффициенты связаны с HL-полиномами Макдональда следующим образом:

$$\Phi_\lambda(q,t)=\left(\frac{1-q^{-1}}{1-t}\right)^n\det(b_{\lambda_i-i+j}(q^{-1},t)).$$

Если $b\in H_n(q)\subset H_\infty(q)$, то сумма в (2.9.2) берется по $\lambda\in\mathbb{P}_N$ для любого $N\geq n$. Скалярное произведение (2.5.1) и соответствующие GHL-функции в случае (M) можно связать с представлениями квантовых групп и их централизаторных алгебр, см. [148].

9.3. Описание характеров фактор-представлений группы $\mathfrak{S}_\infty=\varinjlim\mathfrak{S}_n$ сводится к следующему вопросу:

(*) найти все гомоморфизмы $\varphi:\mathbb{A}\to\mathbb{C}$, для которых $\varphi(s_\lambda)\geq 0$ при всех $\lambda\in\mathbb{P}$.

Гомоморфизм φ можно задать при помощи производящей функции

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(h_n)\,z^n. \tag{2.9.3}$$

Тогда ответ на вопрос (*) таков:

$$\Phi_{\alpha,\beta}(z)=e^{yz}\prod\frac{1+\beta_i z}{1-\alpha_i z}, \tag{2.9.4}$$

где α, β такие же, как в (2.9.1). Рассмотрим более общую проблему:

(**) найти все гомоморфизмы $\varphi:\mathbb{A}\to\mathbb{C}$, для которых $\varphi(P_\lambda)\geq 0$ при всех $\lambda\in\mathbb{P}$, где $P_\lambda=P_\lambda(x;q,t)$.

Гипотеза. *Производящие функции (2.9.3) для гомоморфизмов, положительных в смысле (**), имеют вид*

$$\Phi_{\alpha,\beta}(z)=e^{yz}\prod\frac{R(\beta_i z)}{1-\alpha_i z}, \tag{2.9.5}$$

где

$$R(z)=\prod_{k\geq 0}\frac{(1-q)+(1-t)\,t^k\,z}{(1-q)+q(1-t)\,t^k\,z}.$$

Можно показать, что все эти гомоморфизмы действительно положительны. В некоторых случаях известно, что приведенный список полон:

(1) в случае Шура (S) это было доказано в [161, 13].

(2) для проективных характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$ ($q = 0$, $t = -1$) гипотеза была доказана М.Назаровым [51].

(3) в случае $q = 0$, $t = 1$ гипотеза вытекает из результата Кингмана [130]; см. также [34].

Глава III

МЕРА ПЛАНШЕРЕЛЯ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

В этой главе изучаются свойства меры Планшереля бесконечной симметрической группы. Для полноты изложения в §1 приведены результаты А.М.Вершика и автора [12, 18] о типичной предельной форме больших диаграмм Юнга. Эти результаты послужили источником значительной части рассмотрений данной работы. В §2 получен аналог центральной предельной теоремы для характеров группы $\mathfrak{S}_\infty$, уточняющий основную теорему первого параграфа. В §3 теорема о предельной форме применяется к статистике типов симметрии случайных тензоров. В §4, 5 рассмотрен q-аналог алгоритма блуждания по крюкам, а в §6 многомерные интегралы Сельберга вычисляются как обобщенные интегралы Пуассона для подходящих графов ветвления.

§1. Типичная форма случайных диаграмм Юнга

В статье Вершика и автора [18] приведены точные по порядку двусторонние оценки максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ при $N \to \infty$. Обе задачи решаются одновременно и связываются с доказанной ранее в [12] теоремой о предельной форме типичной диаграммы Юнга. Поскольку эти теоремы служат мотивировкой многих результатов настоящей диссертации, мы напомним их содержание и дадим наброски доказательств.

1.1. Формулировки результатов.

Пусть $\mathfrak{S}_N$ – симметрическая группа степени N, а $\hat{\mathfrak{S}}_N \cong \mathcal{Y}_N$ – множество всех классов эквивалентности ее комплексных неприводимых представлений. Если $\Lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_N$, то через $\dim \Lambda$ обозначим размерность представления Λ.

Задача о вычислении максимальной размерности $\dim(\Lambda)$ ставилась давно (см. [141]). Напомним, что по формуле Бернсайда

$$\sum_{\Lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_N} \dim^2 \Lambda = N!,$$

поэтому $\dim \Lambda < \sqrt{N}!$ при всех $\Lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_N$, а естественная нормировка размерности – это $\dim \Lambda / \sqrt{N}!$. Высказывалась гипотеза о существовании гигантских представлений, размерность которых удовлетворяет неравенству $\dim \Lambda / \sqrt{N}! \geq 1/N$. Эта гипотеза основывалась на численных данных, полученных в [141] для $N \le 75$ (!); позднее выяснилось, что она опровергается при $N = 81$. Однако, можно было бы думать, что $\max \dim \Lambda / \sqrt{N!} \ge P(N)^{-1}$, где P – полином. Из следующей теоремы вытекает, что это не так, и отношение $\max_\Lambda \dim \Lambda / \sqrt{N!}$ убывает со скоростью $\exp(-c\sqrt{N})$, т.е. быстрее любого полинома.

Теорема A. *Существуют положительные константы c_0 и c_1, для которых*

$$e^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!} \le \max_{\Lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_N} \dim \Lambda \le e^{-\frac{c_0}{2}\sqrt{N}}\sqrt{N!}$$

при всех $N = 1, 2, \ldots$.

Задача о максимальной размерности оказалась теснейшим образом связанной с другой задачей – о типичной размерности. Для $\Lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_N$ положим $\mu_N(\Lambda) = \dim^2 \Lambda / N!$. Из формулы Бернсайда вытекает, что μ_N есть вероятностная мера на $\hat{\mathfrak{S}}_N$; ее следует называть мерой Планшереля. Заметим, что мера Планшереля естественно выделена; $\mu_n(\Lambda)$ – это относительная размерность изотипической компоненты представления $\Lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_N$ в регулярном представлении группы $\mathfrak{S}_N$. Именно относительно этой меры следует изучать статистику и асимптотику характеров. Оказывается, асимптотика типичной (по мере Планшереля) размерности совпадает, по порядку, с асимптотикой максимальной размерности.

Теорема B. *Существуют такие положительные константы c_0', c_1' что*

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left\{ \Lambda : \, c_0' < -\frac{2}{\sqrt{N}} \ln \frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}} < c_1' \right\} = 1.$$

Иначе говоря,

$$\sum_{\Lambda \in \mathcal{F}_N} \frac{\dim^2 \Lambda}{\sqrt{N!}} = 1 - o(1),$$

где $\mathcal{F}_N = \{\Lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_N : \sqrt{N!}\, e^{-\frac{c_1'}{2}\sqrt{N}} < \dim \Lambda < \sqrt{N!}\, e^{-\frac{c_0'}{2}\sqrt{N}}\}$.

Примечательно взаимодействие теорем A и B. В работе [12] (см. также [138]) получена нижняя оценка для типичной и тем самым для максимальной размерности; отметим, что несколько более грубая нижняя оценка максимальной размерности имеется в работе Маккея [141]. В [12] и [138] также найдена предельная форма Ω типичной диаграммы Юнга. Естественно было предположить, что диаграммы представлений максимальной размерности также сходятся, в соответствующем масштабе, к той же кривой. В [18] было показано, что это действительно так. Более того, отсюда получается верхняя оценка максимальной и, следовательно, типичной размерности. Неожиданно, что логарифмический порядок у максимальной и у типичной размерности одинаков (различие разве лишь в константе), но именно это обстоятельство и связало обе задачи.

Константы в теореме В не претендуют на точность. Мы доказываем лишь, что можно взять $c_0' = c_0 = 0,2313$; $c_1' = c_1 = 2,5651$. Однако теорема В, скорее всего, допускает следующее усиление: существует такая константа c (энтропия меры Планшереля), что при любом $\epsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left\{ \Lambda : \left| \frac{2}{\sqrt{N}} \ln \frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}} - c \right| < \epsilon \right\} = 1.$$

Более того, по-видимому предел

$$\lim_{N\to\infty} \ln \frac{\dim \Lambda}{\sqrt{N!}} = c$$

существует для почти всех бесконечных таблиц Юнга (в смысле меры Планшереля на таблицах, определение которой дано в п.3.1 введения). Эти утверждения означали бы асимптотическую равнораспределенность меры Планшереля и служили бы аналогом теоремы Шеннона – Макмиллана – Бреймана, а константа c – "удельной энтропией представления". Речь идет о не совсем обычной теореме Шеннона: рассматривается марковская цепь с быстро растущим числом состояний, и требуется доказать асимптотическую равнораспределенность состояний в момент N при $N \to \infty$. Из численных экспериментов следует правдоподобность этой гипотезы и оценка $c > 1,8$.

Доказательство в основных чертах следует такому плану: преобразование формулы для размерности, решение вариационной задачи и доказательство единственности ее решения. С этой целью для интеграла крюков в [12] было использовано выражение

$$\|f\|^2 = -\iint \ln 2|s-t| \cdot f'(s) \cdot f'(t)\, ds\, dt.$$

Эти соображения позволяли исследовать асимптотику формы и размерности типичной по мере Планшереля диаграммы, но не давали информации о максимальной размерности. Существенно новой явилась запись квадратичной части интеграла крюков в виде

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2} \iint \left(\frac{f(s) - f(t)}{s-t} \right)^2 \, ds\, dt.$$

Появление соболевской нормы и интеграла Гильберта в комбинаторной задаче о диаграммах Юнга максимальной размерности выглядит удивительным.

В качестве одного из приложений теоремы о предельной форме, в [12] было анонсировано доказательство гипотезы Улама. Оно требует новых соображений по сравнению с теоремой В, а именно дополнительной оценки сверху длины первой строки случайной диаграммы Юнга. Мы приводим в п.1.4 подробное доказательство.

1.2. Интеграл крюков.

Доказательство теорем A, B основано на замечательной формуле крюков Фрейма – Робинсона – Трелла [92]:

$$\dim\Lambda = \frac{N!}{\prod h_{ij}}. \tag{3.1.1}$$

Здесь произведение берется по всем клеткам (i,j) диаграммы Λ, а $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ (где λ'_j – длина j-го столбца) – число клеток крюка с вершиной (i,j). Эта формула эквивалентна известной формуле Фробениуса, но гораздо более удобна из-за своей симметричности и мультипликативности. Из нее получаем формулу для меры Планшереля

$$\mu_N(\Lambda) = \frac{\dim^2\Lambda}{N!} = \frac{N!}{\prod h_{ij}^2}. \tag{3.1.2}$$

Логарифмируя и деля на $\sqrt{N}$, получим с помощью формулы Стирлинга, что

$$-\frac{\ln\mu_N(\Lambda)}{\sqrt{N}} = J_\Lambda\sqrt{N} - \epsilon_N, \tag{3.1.3}$$

где $J_\Lambda = 1 + \frac{2}{N}\sum_{ij}\ln\frac{hij}{\sqrt{N}}$, а

$$\epsilon_N = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\ln\sqrt{2\pi N} + \frac{1}{12N} + \dots\right) = o\left(\frac{\ln N}{\sqrt{N}}\right)$$

зависит лишь от N.

Пусть $y = F(x)$ – финитная ограниченная невозрастающая функция, определенная на $[0,\infty)$. Положим $F^{-1}(y) = \inf\{F(x) \le y\}$ и введем обозначения $h_F(x,y) = F(x) + F^{-1}(y) - x - y$ для крюка точки (x,y) и $s_F = \{(x,y) : 0 \le y < F(x),\ 0 \le x < \infty\}$ для подграфика F.

Интегралом крюков функции F в [18] назван двойной интеграл

$$\theta_F = 1 + 2\iint_{s_F}\ln h_F(x,y)\,dxdy.$$

Для диаграммы Юнга Λ с N клетками обозначим через $\tilde\Lambda$ подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, получаемое при сжатии Λ в $\sqrt{N}$ раз. Назовем $\tilde\Lambda$ нормированной диаграммой; ее площадь равна единице. Пусть $F = F_\Lambda$ такая функция, что $s_F = \tilde\Lambda$, тогда J_Λ – интегральная сумма для интеграла крюков θ_F. Ниже доказывается, что если $F_{\Lambda_N} \to F$ для последовательности диаграммы $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots,$ то

$$-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln\mu_N(\Lambda_N) = \theta_F. \tag{3.1.4}$$

Пример. Пусть Λ_N – треугольная диаграмма; $\tilde{\Lambda}_N$ сходится к подграфику функции $F(x) = \sqrt{2} - x,\ 0 \leq x \leq \sqrt{2}$. Тогда

$$\dim \Lambda_N = \sqrt{N}!\, \exp(-N \frac{2\sqrt{2}}{3} + o(N))$$

и $\mu_N(\Lambda_N)$ убывает экспоненциально.

Аналогично этому можно вычислять асимптотику размерности по формуле (3.1.4) и для других кривых, кроме одной: для "закона арксинуса" Ω (к которому сходятся как типичные, так и максимальные по размерности нормированные диаграммы) правая часть в (3.1.4) обращается в нуль: $\theta_\Omega = 0$. Оказывается, что для изучения аисмптотики размерности в этом случае нужно перейти к другой нормировке, $-\frac{\ln \mu_N(\Lambda)}{\sqrt{N}}$, а $\mu_N(\Lambda_N)$ здесь убывает субэкспоненциально.

Чтобы оценить отклонение интегральной суммы J_Λ от интеграла крюков, рассмотрим величину $\tilde{\theta}(\Lambda) = (J_\Lambda - \theta_\Lambda)\sqrt{N}$, для которой

$$-\frac{\ln \mu_N(\Lambda)}{\sqrt{N}} = \theta(\Lambda)\sqrt{N} + \tilde{\theta}(\Lambda) - \varepsilon_N. \tag{3.1.5}$$

Лемма 1.

$$\tilde{\theta}(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i,j} c(h_{ij}),$$

где

$$c(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)\,(2k+1)x^{2k}};$$

в частности, $\tilde{\theta}(\Lambda) > 0$ *при всех* $\Lambda \in \mathcal{Y}_N$.

Приведем интеграл крюков к квадратичному виду. Для этого введем координаты $X = \frac{1}{2}(x-y)$, $Y = \frac{1}{2}(x+y)$, в которых граница нормированной диаграммы является графиком функции, обозначаемой через L_Λ. Эта функция является прямоугольной диаграммой, т.е. она кусочно - линейна, непрерывна и

1) $L'_\Lambda(X) = \pm 1$;
2) $L_\Lambda(X) \geq |X|$ и $L_\Lambda(X) = |X|$ при достаточно больших $|X|$.

При этом $\tilde{\Lambda} = \{(X,Y) : |X| \leq Y \leq L(X)\}$.

Для любой кусочно - гладкой функции $Y = L(X)$ положим

$$\theta(L) = 1 + 2 \iint_{t<s} [\ln 2(s-t)]\,(1 - L'(s))\,(1 + L'(t))\,dsdt. \tag{3.1.6}$$

Лемма 2. $\theta_\Lambda = \theta(L_\Lambda)$ *для всех* $\Lambda \in \mathcal{Y}_N$.

Найдем критическую точку интеграла крюков и его первую вариацию в этой точке. Для этого воспользуемся следующим вариантом закона арксинуса:

$$\bar{\Omega}(X) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(X \arcsin X + \sqrt{1-X^2}) & \text{при} \quad |X| \le 1 \\ |X| & \text{при} \quad |X| \ge 1. \end{cases} \tag{3.1.7}$$

Пусть $f(X) = L(X) - \bar{\Omega}(X)$; если свойство 2) выполняется, то f – финитная функция.

Лемма 3. *Интеграл крюков можно представить в виде*

$$\theta(L) = -\iint \ln 2\,|s-t|\, f'(s) f'(t)\, ds\, dt + 4\int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arch}|s|\, ds. \tag{3.1.8}$$

Следствие: $\theta(\bar{\Omega}) = 0$.

Оказывается, что квадратичная часть интеграла крюков совпадает с соболевской нормой

$$\|f\|_\theta^2 = \iint \left(\frac{f(s)-f(t)}{s-t}\right)^2 dsdt \tag{3.1.9}$$

в пространстве кусочно - гладких финитных функций:

Лемма 4.

$$\theta(\bar{\Omega} + f) = \frac{1}{2}\,\|f\|_\theta^2 + 4\int_{|s|>1} f(s)\, \operatorname{arch}|s|\, ds.$$

Следствие. Если $L(s) \ge s$ и $L \ne \bar{\Omega}$, то $\theta(L) > 0$, тем самым, $\bar{\Omega}$ – единственный строгий минимум для $\theta(\cdot)$ на множестве допустимых функций.

1.3. Доказательства теорем.

Оценка снизу интеграла крюков вытекает из следующего результата.

Лемма 5. *Если* $\Lambda \in \mathcal{Y}_N$ *и* $f_\Lambda(s) = L_\Lambda(s) - \bar{\Omega}(s)$, *то для всякого* $\varepsilon > 0$ *при достаточно больших* N *имеет место неравенство*

$$\sqrt{N} \cdot \theta(L_\Lambda) \ge \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} |f'_\Lambda(s)|^2\, ds - \varepsilon.$$

Доказательство. Точки $s_i = i/2\sqrt{N}$, $i \in \mathbb{Z}$ разбивают прямую на отрезки длины $\triangle s = 1/2\sqrt{N}$, на которых функция L_Λ линейна. Пусть s_i^* реализует минимальное значение $[f'_\Lambda(s)]^2$ при $s_i \le s \le s_{i+1}$. Тогда

$$\left(\frac{f_\Lambda(s) - f_\Lambda(t)}{s-t}\right)^2 \ge [f'\Lambda(s_i^*)]^2$$

при всех $s,t\in[s_i,s_{i+1}]$, $i\in\mathbb{Z}$ и, сохраняя в (3.1.9) лишь интегрирование по объединению квадратов $s,t\in[s_i,s_{i+1}]$, $i\in\mathbb{Z}$, получаем, что

$$\|f_\Lambda\|^2\geq\sum_i[f'\Lambda(s_i^*)]^2(\triangle s)^2=\frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_i[f'\Lambda(s_i^*)]^2\triangle s.$$

Заменяя интегральную сумму в правой части соответствующим интегралом и используя лемму 4, имеем

$$\theta(\Lambda)\sqrt{N}\geq\frac{1}{2}\|f_\Lambda\|^2\sqrt{N}\geq\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}[f'\Lambda(s)]^2ds-\varepsilon$$

при любом $\varepsilon>0$.

Следствие (оценка размерности сверху):

$$-\frac{\ln\mu(\Lambda)}{\sqrt{N}}\geq c_0,$$

или, что то же,

$$\max\dim\Lambda\leq\sqrt{N!}\,e^{-c_0\sqrt{N}}.$$

Для c_0 можно дать оценку

$$c_0=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}|\operatorname{sign}s-\bar{\Omega}'(s)|^2\,ds=\frac{2}{\pi^2}(\pi-2)\approx0,2313.$$

Дадим теперь оценку снизу для размерности типичных диаграмм. Пусть

$$M_N=\left\{\Lambda\in\mathcal{Y}_N:\theta\left(L_\Lambda\right)<\frac{2\pi}{\sqrt{6N}}\right\}.$$

Диаграммы из множества M_N назовем *существенными.*

Лемма 6. $\lim_{N\to\infty}\mu_N(M_N)=1$.

Доказательство. Общее число диаграмм с N клетками традиционно обозначается через $p(N)$; по формуле Эйлера – Харди – Рамануджана

$$p(N)\sim\frac{1}{4N\sqrt{3}}e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}.$$

Поэтому если $\Lambda\in\mathcal{Y}_N\setminus M_N$, то $\mu_N(\Lambda)\leq e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}$ по (3.1.5), и $\mu_N(\mathcal{Y}_N\setminus M_N)\leq p(N)\cdot e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}\to0$.

Следствие:

$$\lim_{N\to\infty}\mu_N\{\Lambda:\dim\Lambda>\sqrt{N!}\,e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}}\}=1.$$

Таким образом, обе оценки, а с ними и теоремы A, B доказаны.

Заметим, что Маккей [141] применил для получения нижней оценки максимальной размерности аналогичные соображения. Вместо формулы Бернсайда он использовал тождество $\sum_\Lambda \dim\Lambda = t_N$, где $t_N \sim \mathrm{const}\cdot(\frac{N}{e})^{N/2}\cdot e^{\sqrt{N}}$ – число инволюций в $\mathfrak{S}_N$. Получается, что $\frac{1}{\sqrt{N!}}\max\dim\Lambda \geq \frac{t_N}{p_N\sqrt{N}} \sim \mathrm{const}\cdot e^{-(\frac{2\pi}{\sqrt{6}}-1)\sqrt{N}}$. Наша оценка несколько точнее: $\frac{\pi}{\sqrt{6}} = 1,2825 < 1,5651 = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} - 1$ (см. п.4 §3).

Докажем теперь теорему о предельной форме существенных диаграмм.

Теорема C (ср. [12], [138]). *Если* $\Lambda \in M_N$, *то*

$$\sup_s \left| L_\Lambda(s) - \bar\Omega(s)\right| < C\cdot N^{-\frac{1}{6}}.$$

Доказательство. Оценим прежде всего L_2 – норму разности $f_\Lambda(s) = L_\Lambda(s) - \bar\Omega(s)$. Выбирая отрезок $[-a,\, a]$, содержащий носитель f_Λ, можем разбить интеграл (3.1.9) на два слагаемых

$$\|f_\Lambda\|^2_\theta = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\left(\frac{f(s)-f(t)}{s-t}\right)^2 ds\,dt + 8\int_{-a}^{a}\frac{f^2(s)\,ds}{a^2-s^2}. \tag{3.1.10}$$

Следовательно, для существенной диаграммы $\Lambda \in M_N$

$$\left\|\frac{f_\Lambda(s)}{\sqrt{a^2-s^2}}\right\|^2_{L_2} \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{6N}} \quad \text{и} \quad \|f_\Lambda(s)\|^2_{L_2} \leq \frac{\pi a^2}{2\sqrt{6N}}.$$

Пользуясь тем, что для любой диаграммы Юнга $|f'_\Lambda(s)| \leq 2$, получаем оценку равномерной нормы

$$\|f_\Lambda\|^3_{L_\infty} \ \leq\ 6\cdot\|f_\Lambda\|^2_{L_2} \ \leq\ \frac{3\pi a^2}{2\sqrt{6N}},$$

и теорема доказана: $\|f_\Lambda\|_{L_\infty} \leq C\cdot N^{-1/6}$.

1.4. Решение проблемы Улама.

Покажем, что для существенной диаграммы $\Lambda \in \mathcal{Y}_N$ длина ее первой строки $r_1(\Lambda)$ имеет асимптотику $r_1(\Lambda) \sim 2\sqrt{N}$. Из теоремы C вытекает, что $\frac{r_1(\Lambda)}{2\sqrt{N}} \geq 1 - C\cdot N^{-1/6}$, т.е. лишь оценка снизу. Чтобы получить верхнюю оценку для $r_1(\Lambda)$, найдем асимптотику среднего значения $r_1(\Lambda)$ по мере Планшереля.

Лемма 7.

$$\sum_{\Lambda\in\mathcal{Y}_N} r_1(\Lambda)\,\mu_N(\Lambda) < 2\sqrt{N}.$$

Доказательство. Пусть T – пространство (бесконечных) таблиц Юнга и μ – мера Планшереля на T (см. п.3.1 введения). Мера μ – марковская; если диаграмма Юнга $\Lambda \in \mathcal{Y}_k$ получается из диаграммы $\Lambda \in \mathcal{Y}_{k-1}$ добавлением одной клетки, то переходная вероятность равна $p_{\lambda,\Lambda} = \frac{\dim \Lambda}{k \cdot \dim \lambda}$. Мы воспользуемся следующим тождеством, характерным для меры Планшереля:

$$k \cdot p_{\lambda,\Lambda}^2 = \frac{\mu_k(\Lambda)}{\mu_{k-1}(\lambda)}. \tag{3.1.11}$$

Обозначим через $\lambda' \in \mathcal{Y}_k$ диаграмму Юнга, получаемую из $\lambda \in \mathcal{Y}_k$ добавлением клетки в первую строку, и пусть ψ_k – индикаторная функция множества таблиц $t = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in T$, для которых $\lambda_k = \lambda'_{k-1}$. Среднее значение функции ψ_k по мере Планшереля, обозначаемое $< \psi_k >$, равно $< \psi_k >= \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{k-1}} \mu_{k-1}(\lambda)\, p_{\lambda,\lambda'}$, откуда с учетом (3.1.11) получаем

$$< \psi_k >^2 \quad \leq \sum_{\Lambda \in \mathcal{Y}_{k-1}} \mu_{k-1}(\lambda)\, p_{\lambda,\lambda'}^2 = \frac{1}{k} \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_{k-1}} \mu_k(\lambda') < \frac{1}{k},$$

т.е. $< \psi_k > < \frac{1}{\sqrt{k}}$. Поскольку $r_1(\lambda_N) = \sum_{k=1}^{N} \psi_k(t)$, получаем окончательно

$$< r_1 > = \sum_{k=1}^{N} < \psi_k > \quad < \quad \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{k}} \, < \, 2\sqrt{N}.$$

По лемме 6, $< \frac{r_1}{\sqrt{N}} > \ \ < 2$. С другой стороны, по теореме C, $r_1/\sqrt{N} > 2 - \varepsilon$ почти наверное по мере μ_N для любого $\varepsilon > 0$ при $N \to \infty$, и доказана

Теорема D.

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N \left\{ \Lambda \in \mathcal{Y}_N : \frac{r_1(\Lambda)}{\sqrt{N}} \, < \, 2 + \varepsilon \right\} = 1$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Разумеется, число столбцов $c_1(\Lambda)$ типичной диаграммы $\Lambda \in \mathcal{Y}_N$ также имеет асимптотику $c_1(\Lambda) \sim 2\sqrt{N}$.

Из теоремы D вытекает решение известной вероятностной проблемы Улама. Пусть $\xi = \{\xi_k\}_1^N$ – последовательность независимых случайных величин с общим непрерывным распределением. Обозначим через $R_1(\xi)$ длину максимальной возрастающей подпоследовательности в последовательности ξ.

Следствие. *При любом* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} P \left\{ \left| \frac{R_1(\xi)}{2\sqrt{N}} \right| \, < \, \varepsilon \right\} = 1.$$

Доказательство. Алгоритм Робинсона – Шенстеда – Кнута (RSK) (см. [152, 157, 133, 127] задает отображение пространства последовательностей в пространство таблиц T. При этом продакт - мера с непрерывным сомножителем переходит в меру Планшереля. Кроме того, по известному свойству алгоритма RSK, длина максимальной возрастающей подпоследовательности совпадает с длиной первой строки соответствующей диаграммы Юнга (теорема Шенстеда, см. [157]). Следствие вытекает теперь из теоремы D.

Теорема Шенстеда допускает обобщение: число клеток в первых k строках диаграммы Юнга равно максимальному числу элементов в объединении k монотонно возрастающих подпоследовательностей. Исходя из этого в [18] получено усиление теоремы D, которое мы здесь опускаем.

§2. Гауссовский предел для меры Планшереля

В этом параграфе показано, что меры Планшереля симметрических групп $\mathfrak{S}_n$ слабо сходятся при $n \to \infty$ к гауссовскому случайному процессу в бесконечномерном линейном пространстве. По отношению к закону больших чисел для этих мер, найденному ранее в [12, 18], это утверждение является аналогом центральной предельной теоремы. Идея подобной теоремы обсуждалась в [138].

2.1. Основные результаты. Пусть $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая группа степени n и $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ – множество (классов эквивалентности) ее неприводимых представлений; характер представления $\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}_n$ обозначим через χ^λ. Если $\rho = (1^{r_1}2^{r_2}\dots)$ – разбиение числа n, рассмотрим класс сопряженных подстановок в группе $\mathfrak{S}_n$, имеющих r_k циклов длины k при $k = 1, 2, \dots,$ и обозначим через χ^λ_ρ значение характера χ^λ на этом классе.

Пусть $\dim\lambda = \chi^\lambda_{(1^n)}$ – размерность представления $\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}_n$. По теореме Бернсайда, $\sum_\lambda \dim^2\lambda = n!$, так что нагрузки $M_n(\lambda) = \dim^2\lambda/n!$ образуют вероятностное распределение M_n на множестве $\widehat{\mathfrak{S}}_n$, называемое *мерой Планшереля* группы $\mathfrak{S}_n$.

Определим случайную величину

$$\varphi_k(\lambda) = \frac{\chi^\lambda_{(k,1^{n-k})}}{\dim\lambda} n^{k/2}, \quad \lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}_n, \tag{3.2.1}$$

как (нормированное) значение характеров представлений λ на классе подстановок с одним нетривиальным циклом длины k. Основным результатом параграфа служит следующая

Теорема 1. *Для любых $x_2, x_3, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} M_n\{\lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}_n : \varphi_k(\lambda) < x_k,\ \ 2 \le k \le m\} = \prod_{k=2}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \int_{-\infty}^{x_k} \exp(-\frac{y_k^2}{2k})\, dy_k. \tag{3.2.2}$$

Иначе говоря, функционалы $\varphi_k(\lambda)$ асимптотически независимы и имеют предельные гауссовские распределения с нулевым средним и дисперсией k.

Укажем альтернативные формулировки теоремы 1, относящиеся к другим системам основных функционалов. При этом мы используем стандартное отождествление множества $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ с множеством $\mathcal{Y}_n$ диаграмм Юнга с n клетками.

Введем обозначения для приведенных полиномов Чебышева первого и второго рода на отрезке $[-2, 2]$:

$$t_r(2\cos\theta) = 2\cos r\theta, \quad u_r(2\cos\theta) = \frac{\sin(r+1)\theta}{\sin\theta}. \tag{3.2.3}$$

Пусть d – длина диагонали диаграммы Юнга $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \mathcal{Y}_n$ и $\tilde{a}_i = (\lambda_i - i)/\sqrt{n}$, $\tilde{b}_i = (\lambda'_i - i)/\sqrt{n}$; $i = 1, \dots, d$ – ее нормированные координаты Фробениуса. Для $r = 2, 3, \dots$ положим

$$t_r(\lambda) = \sum_i (t_r(\tilde{a}_i) + (-1)^{r+1}\, t_r(\tilde{b}_i)). \tag{3.2.4}$$

Будем обозначать через $< f >_n = \sum_{\lambda\in\mathcal{Y}_n} f(\lambda)\, M_n(\lambda)$ среднее значение функции f по мере Планшереля M_n.

Теорема 2. *Планшерелевское среднее случайной величины (3.2.4) равно нулю, если r – четное, и равно*

$$< t_{2m+1} >_n = \frac{(-1)^m (2m+1)}{m(m+1)}\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \tag{3.2.5}$$

при $r = 2m+1$. *При* $n \to \infty$ *центрированные величины* $\mathring{t}_r(\lambda) = t_r(\lambda) - < t_r >_n$, $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, *асимптотически независимы и нормальны. Предельная дисперсия* $t_r(\lambda)$ *равна* $\lim < \mathring{t}_r^{\,2} >_n = r$.

Пусть $c(i,j) = (j-i)/\sqrt{n}$ – нормированное содержание клетки (i,j), находящейся в i-ой строке и j-ом столбце диаграммы Юнга λ. Для $r = 1, 2, \dots$ положим

$$u_r(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{(i,j)\in\lambda} u_r\left(\frac{j-i}{\sqrt{n}}\right). \tag{3.2.6}$$

Теорема 3. *Планшерелевское среднее случайной величины (3.2.6) равно нулю, если r – нечетное, и равно*

$$< u_{2m} >_n = \frac{(-1)^m}{m(m+1)}\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \tag{3.2.7}$$

при $r = 2m$. *При* $n \to \infty$ *центрированные величины* $\mathring{u}_r(\lambda) = u_r(\lambda) - < u_r >_n$, $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, *асимптотически независимы и нормальны. Предельная дисперсия* $u_r(\lambda)$ *равна* $\lim < \mathring{u}_r^{\,2} >_n = 1/(r+1)$.

Рассмотрим теперь диаграмму Юнга как кусочно - линейную непрерывную функцию ω с производной ± 1 (эта точка зрения использовалась еще в [12]). Например, одноклеточная диаграмма $\omega \in \mathcal{Y}_1$ отождествляется с функцией $\omega(x) = \max(|x|, 2 - |x|)$. Из закона больших чисел, установленного в [12], следует, что планшерелевское среднее значение

$$\sum_{\omega\in\mathcal{Y}_n} \frac{1}{\sqrt{n}}\omega(x\sqrt{n})\, M_n(\omega)$$

случайной диаграммы с n клетками (сжатой в $\sqrt{n}$ раз по обеим осям) равномерно сходится к функции

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}), & \text{если } |u| \le 2 \\ |u|, & \text{если } |u| \ge 2. \end{cases} \tag{3.2.8}$$

Вложим множество $\mathcal{Y}_n$ диаграмм Юнга с n клетками в пространство функций, сопоставляя диаграмме $\omega \in \mathcal{Y}_n$ ее отклонение $\Delta_\omega(x)$ от кривой (3.2.8); более точно,

$$\Delta_\omega(x) = \omega(x\sqrt{n}) - \sqrt{n}\,\Omega(x). \tag{3.2.9}$$

Отождествим меру Планшереля M_n с ее образом при указанном вложении.

Теорема 4. *При $n \to \infty$ меры M_n слабо сходятся к гауссовскому случайному процессу на отрезке $[-2, 2]$. Предельный процесс имеет нулевое среднее и корреляционную функцию*

$$B(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_m(x)\, u_m(y)}{m+1}. \tag{3.2.10}$$

Используя подстановку $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\cos\psi$ и определение (3.2.3) полиномов Чебышева, можно записать функцию (3.2.10) более явно:

$$B(2\cos\varphi, 2\cos\psi) = \frac{1}{2\sin\varphi\sin\psi} \ln\left(\frac{\sin|\varphi+\psi|/2}{\sin|\varphi-\psi|/2}\right) - 1. \tag{3.2.11}$$

2.2. Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{Y} = \bigcup_{n\ge 0} \mathcal{Y}_n$ – множество всех диаграмм Юнга (или, эквивалентно, разбиений натуральных чисел). С каждым разбиением $\rho \in \mathcal{Y}$ свяжем семейство центральных элементов $c_{\rho;n} \in \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$, $n \ge 0$, определяемое формулой

$$c_{\rho;n} = (n)_r\, \tilde{C}_{(\rho, 1^{n-r})}. \tag{3.2.12}$$

Здесь $\rho = (1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots)$ – разбиение числа $r = |\rho| = \sum k\, r_k$, $\tilde{C}_{(\rho,1^{n-r})}$ – равномерное вероятностное распределение на классе сопряженности $C_{(\rho,1^{n-r})}$ группы $\mathfrak{S}_n$ и $(n)_r = n(n-1)\dots(n-r+1)$. При $n < r$ мы полагаем $c_{\rho;n} = 0$. Замечательно, что в базисе (3.2.12) операция свертки стабильна по n:

Предложение 1. *Для любой пары разбиений σ, τ существует (и определен однозначно) конечный набор целых неотрицательных коэффициентов $f^\rho_{\sigma,\tau}$, для которых*

$$c_{\sigma;n} * c_{\tau;n} = \sum_\rho f^\rho_{\sigma,\tau}\, c_{\rho;n} \tag{3.2.13}$$

при всех $n \ge 0$.

Не приводя здесь доказательства, ограничимся поясняющим примером:

$$c_{(2);n} * c_{(2);n} = c_{(2^2);n} + 4c_{(3);n} + 2c_{(1^2);n}.$$

В базисе классов сопряженности коэффициенты разложения зависят от n:

$$C_{(2,1^{n-2})} * C_{(2,1^{n-2})} = 2C_{(2^2,1^{n-4})} + 3C_{(3,1^{n-3})} + \binom{n}{2} C_{(1^n)}.$$

Определим *кольцо классов* $\mathcal{C}$, как свободную абелеву группу с образующими $\{c_\rho\}$, $\rho \in \mathcal{Y}$ и структурными константами умножения $f^\rho_{\sigma,\tau}$. Элементы $c_\rho \in \mathcal{C}$ задают функционалы на $\widehat{\mathfrak{S}} = \bigcup_{n\geq 0} \widehat{\mathfrak{S}}_n$ по формуле $c_\rho(\lambda) = \chi^\lambda(c_{\rho;n})/\dim\lambda$. Легко видеть, что

$$(c_\sigma * c_\tau)(\lambda) = c_\sigma(\lambda)\, c_\tau(\lambda), \quad \lambda \in \widehat{\mathfrak{S}}. \tag{3.2.14}$$

Введем обозначение $\deg(c_\rho) = r_1 + |\rho|$; если $f^\rho_{\sigma,\tau} \neq 0$ в формуле (3.2.13), то

$$\deg(c_\rho) \leq \deg(c_\sigma) + \deg(c_\tau). \tag{3.2.15}$$

Таким образом, на кольце классов определена фильтрация и нам понадобится детальное описание соответствующего градуированного кольца $\mathrm{gr}\,\mathcal{C}$. По определению, это кольцо аддитивно порождается тем же базисом $\{c_\rho\}$, а умножение определяется членами старшей степени:

$$c_\sigma\, c_\tau = \sum_{\deg\rho = \deg\sigma + \deg\tau} f^\rho_{\sigma,\tau}\, c_\rho. \tag{3.2.16}$$

Ниже произведения и степени элементов c_ρ берутся в кольце $\mathrm{gr}\,\mathcal{C}$, т.е. с точностью до младших членов. Назовем *фундаментальными классами* элементы $c_k = c_{(k)}$, отвечающие разбиениям $\rho = (k)$ с единственным слагаемым.

Предложение 2. *Элементы $c_1, c_2, \ldots$ алгебраически независимы и мультипликативно порождают кольцо $\mathrm{gr}\,\mathcal{C} \simeq \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots]$. Если разбиения σ, τ не содержат общих частей, отличных от единицы, то $c_\sigma\, c_\tau = c_{\sigma\cup\tau}$, где разбиение $\sigma\cup\tau$ объединяет слагаемые из σ и из τ. Если все слагаемые разбиения равны k, то*

$$c_{(k^r)} = s_k^r\, H_r(c_k/s_k), \tag{3.2.17}$$

где $H_r(x) = (-1)^r\, e^{x^2/2}\, (e^{-x^2/2})^{(r)}$ – полиномы Эрмита и $s_k = \sqrt{k c_1^k}$.

Доказательство основано на тождестве

$$c_{(\sigma,k^r)}\; c_k = c_{(\sigma,k^{r+1})} + k\, r\, c_{(\sigma,k^{r-1},1^k)}, \tag{3.2.18}$$

в котором предполагается, что разбиение σ не имеет частей, равных k. По индукции получаем, что в кольце $\mathrm{gr}\,\mathcal{C}$

$$c_k^r = \sum_{s\geq 0} \binom{r}{2s} (2s-1)!!\, k^s\, c_{(k^{r-2s},1^{ks})}. \tag{3.2.19}$$

Обращение этой формулы и дает (3.2.17).

Покажем, что планшерелевские средние $< f >_n$ для элементов $f \in \mathcal{C}$ кольца классов зависят от n полиномиально.

Лемма: $< \sum_\rho f_\rho\, c_\rho >_n = \sum_k f_{(1^k)} \cdot (n)_k$.

Доказательство сводится к соотношениям ортогональности для характеров симметрической группы:

$$< c_\rho >_n = \frac{(n)_r}{n!} \sum_\lambda \chi^\lambda_{(\rho,1^{n-r})} \chi^\lambda_{(1^n)} = (n)_r\, \delta_{\rho,(1^r)}.$$

Из этой леммы и формулы (3.2.19) вытекает, что

$$< c_k^{2r} >_n = k^r\, (2r-1)!!\, n^{kr}\, (1 + o(1)) \tag{3.2.20}$$

и $< c_k^r >_n = 0$, если r нечетно; кроме того,

$$< c_2^{r_2} c_3^{r_3} \ldots >_n = \prod_{k\geq 2} < c_k^{r_k} >_n + o(n^{\deg(c_\rho)/2}). \tag{3.2.21}$$

Положим $\varphi_\rho(\lambda) = n^{-\deg(c_\rho)/2}\, c_\rho(\lambda)$, $\rho \in \mathcal{Y}$; в частности, величины $\varphi_k = \varphi_{(k)}$ эквивалентны определенным формулой (3.2.1). Обозначим через $< \varphi_2^{r_2}\varphi_3^{r_3} \ldots >_\infty = \lim < \varphi_2^{r_2}\varphi_3^{r_3} \ldots >_n$ предельные моменты мер Планшереля. Из (3.2.20), (3.2.21) видно, что

$$< \varphi_k^r >_\infty = \begin{cases} k^m\,(2m-1)!!, & \text{если } r = 2m \\ 0, & \text{если } r = 2m-1 \end{cases} \tag{3.2.22}$$

и

$$< \varphi_2^{r_2}\varphi_3^{r_3} \ldots >_\infty = \prod_{k\geq 2} < \varphi_k^{r_k} >_\infty . \tag{3.2.23}$$

Таким образом, моменты (3.2.22) совпадают с моментами нормального распределения с дисперсией k, а из (3.2.23) следует независимость случайных величин $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ относительно предельной меры. Теорема 1 доказана.

2.3. Доказательства теорем 2 – 4. Модифицируем координаты Фробениуса, полагая $a_i = \lambda_i - i + 1/2$, $b_i = \lambda_i' - i + 1/2$. Согласно лемме 1 из [13], суперсимметрические суммы Ньютона

$$p_r(\lambda) = \sum_i \left(a_i^r + (-1)^{r+1} b_i^r\right) \tag{3.2.24}$$

от координат a_i, b_i диаграммы Юнга λ принадлежат кольцу $\mathbb{Q}[c_1, c_2, \dots]$ и мультипликативно его порождают. Легко проверить, что суммы Ньютона

$$\pi_n(\lambda) = \sum_{(i,j)\in\lambda} (j-i)^n \tag{3.2.25}$$

от содержаний клеток диаграммы λ порождают то же кольцо.

Предложение 1. *Нормированные фундаментальные классы (3.2.1) выражаются через суммы (3.2.24) следующим образом:*

$$\varphi_r(\lambda) = \sum_{2j\le r} (-1)^j \frac{r}{r-j} \binom{r-j}{j} \frac{p_{r-2j}(\lambda)}{n^{(r-2j)/2}} - r\,\delta_{r-1}\sqrt{n} + o(1), \tag{3.2.26}$$

где $\delta_{2m-1} = 0$, $\delta_{2m} = (-1)^m/m(m+1)$ и $o(1)$ понимается в смысле L_2-нормы.

Сравним (3.2.26) с явной формулой для полиномов Чебышева первого рода:

$$t_r(x) = \sum_{2j\le r} (-1)^j \frac{r}{r-j} \binom{r-j}{j} x^{r-2j}.$$

Теорема 2 вытекает теперь из теоремы 1. Теорема 3 равносильна теореме 2, поскольку $p_{r+1} = (r+1)\,\pi_r$ с точностью до слагаемых меньшей deg-степени.
Для доказательства теоремы 3 заметим, что выражение

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\, u_r(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{(i,j)} u_r\left(\frac{j-i}{\sqrt{n}}\right)$$

представляет собой интегральную сумму для двойного интеграла

$$\frac{1}{2} \iint_{D_{\tilde\omega}} u_r(x)\,dx\,dy = \frac{1}{2} \int u_r(x)\,(\tilde\omega(x) - |x|)\,dx,$$

где $D_{\tilde\omega} = \{(x,y) : |x| \le y \le \tilde\omega(x)\}$ и $\tilde\omega(x) = \omega(x\sqrt{n})/\sqrt{n}$. Легко проверить, что

$$\frac{1}{2} \int u_r(x)\,(\Omega(x) - |x|)\,dx = \delta_r. \tag{3.2.27}$$

Поэтому

$$u_r(\omega) - < u_r >_n = \frac{1}{2} \int u_r(x)\,\Delta_\omega(x)\,dx + o(1); \quad \omega \in \mathcal{Y}_n, \tag{3.2.28}$$

где $\Delta_\omega(x)$ определено в (3.2.9). Теорема 4 следует теперь из теоремы 3.

§3. Распределение типов симметрии тензоров высокой степени

В пространстве $V_{N,m} = \bigotimes_{k=1}^{N} \mathbb{C}^m$ тензоров степени N над m-мерным пространством действует подстановками сомножителей симметрическая группа $\mathfrak{S}_N$. Обозначим через $\mathcal{Y}_N$ множество всех диаграмм Юнга с N клетками и через $\mathcal{Y}_{N,m}$ подмножество диаграмм не более чем с m строками. Пространство $V_{N,m}$ распадается в прямую сумму примарных компонент действия $\mathfrak{S}_N$:

$$V_{N,m} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{Y}_{N,m}} V_{N,m}(\lambda).$$

Говорят, что тензоры, принадлежащие подпространству $V_{N,m}(\lambda)$, имеют тип симметрии λ.

Обозначим через $\mu_{N,m}(\lambda) = \dim V_{N,m}(\lambda)/\dim V_{N,m}$ относительную размерность примарной компоненты $V_{N,m}(\lambda)$. Числа $\mu_{N,m}(\lambda)$ задают вероятностную меру на $\mathcal{Y}_{N,m}$ – распределение тензоров по типам симметрии. Цель этого параграфа – описать асимптотику меры $\mu_{N,m}$ при $N \to \infty$ в двух случаях: когда $m \simeq N/\gamma$, $\gamma = \mathrm{const}$ и когда $m = \mathrm{const}$.

В первом случае (при $N/m \to \gamma$) получен закон больших чисел, полностью аналогичный найденному в [12, 138] для меры Планшереля: после сжатия в $\sqrt{N}$ раз и поворота осей на угол $\pi/4$ край типичной диаграммы Юнга близок к графику универсальной функции

$$\Omega(x) = \begin{cases} 2/\pi\,(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}) & \text{при } |x| \le 1, \\ |x| & \text{при } |x| \ge 1. \end{cases}$$

В случае фиксированного числа строк m найдено предельное непрерывное распределение для мер $\mu_{N,m}$ (теорема 2). Близкий результат (для других мер) получен ранее в [149].

3.1. Сравнение меры $\mu_{N,m}$ с мерой Планшереля.

Обозначим через π_λ, τ_λ неприводимые представления групп $SU(m)$ и $\mathfrak{S}_N$, связанные с диаграммой Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}_{N,m}$. По теореме Г.Вейля,

$$\dim V_{N,m}(\lambda) = \dim \pi_\lambda \cdot \dim \tau_\lambda.$$

Воспользуемся известными формулами для размерностей:

$$\dim \pi_\lambda = \frac{\prod_{i<j}(l_i - l_j)}{0!1!\ldots(m-1)!};$$

$$\dim \tau_\lambda = \frac{N!\,\prod_{i<j}(l_i - l_j)}{\prod l_i!},$$

где $l_i = \lambda_i + m - i$; $i = 1, 2, \ldots, m$ – крюки первого столбца диаграммы λ. Если $\mu_N(\lambda) = \dim^2 \tau_\lambda \,/\, N!$ – мера Планшереля, то для "плотности" $h_{N,m}(\lambda) = \mu_{N,m}(\lambda) \,/\, \mu_N(\lambda)$ без труда получается формула:

$$h_{N,m}(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{\lambda_i} \left(1 + \frac{j-i}{m}\right).$$

Оценим $h_{N,m}(\lambda)$ через длину λ_1 первой строки диаграммы λ.

Лемма 1: $h_{N,m}(\lambda) \le \exp \frac{\lambda_1}{2m} N$

Доказательство. Из выпуклости функции $y = \ln(1+x)$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{\lambda_i} \ln(1 + \frac{j-i}{m}) \le \sum_{j=1}^{\lambda_i} \ln(1 + \frac{j-1}{m}) \le \lambda_i \ln(1 + \frac{\lambda_i - 1}{2m}) \le \frac{\lambda_i^2}{2m}.$$

Получаем, что $\ln h_{N,m}(\lambda) =$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\lambda_i} \ln(1 + \frac{j-i}{m}) \le \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \le \frac{N}{2m} \lambda_i$$

и лемма 1 доказана.

3.2. Оценка меры Планшереля через длину первой строки диаграммы Юнга.

Лемма 2. *Для любой диаграммы $\lambda \in \mathcal{Y}_N$*

$$\mu_N(\lambda) \le \exp -2\alpha(\ln\alpha - 1)\sqrt{N},$$

где $\alpha = \lambda_1 / \sqrt{N}$.

Доказательство. Пусть λ' – диаграмма Юнга с $(N - \lambda_1)$ клетками, которая остается после удаления из λ первой строки. Ясно, что $\dim \lambda \le \binom{N}{\lambda_1} \dim \lambda'$, откуда

$$\mu_N(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{N!} \le \binom{N}{\lambda_1} \frac{N!}{\lambda_1!(N-\lambda_1)!} \cdot \frac{\dim^2 \lambda'}{N!} \le \frac{1}{\lambda_1!} \binom{N}{\lambda_1}.$$

Положим $p = \lambda_1 / N$, $q = 1 - \lambda_1 / N$; из неравенства $\binom{N}{\lambda_1} p^{\lambda_1} q^{N-\lambda_1} \le 1$ следует, что

$$\binom{N}{\lambda_1} \le \exp -N(p \ln p + q \ln q) \le \exp -(Np \ln p + Np),$$

т.е. $-q \ln q \le p$. Используя оценку факториала $\lambda_1! \ge (\lambda_1 / e)^{\lambda_1}$ и переходя к логарифмам, получаем:

$$\ln \mu_N(\lambda) \le \ln \binom{N}{\lambda_1} - \ln \lambda_1! \le$$
$$\le -Np \ln p + Np - \lambda_1 \ln \lambda_1 + \lambda_1 =$$
$$= -\lambda_1 \ln(\frac{\lambda_1}{\sqrt{N}}) + 2\lambda_1 = -2\alpha(\ln\alpha - 1)\sqrt{N},$$

т.к. $Np = \lambda_1$ и $\lambda_1 p = (\lambda_1/\sqrt{N})^2$. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1, 2 получаем

Следствие 1:

$$\mu_{N,m}(\lambda) \le \exp\left(-\alpha[2(\ln\alpha - 1) - \gamma/2]\sqrt{N}\right),$$

где $\gamma = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{m}$.

3.3. Основная теорема.

Следуя [12], подвергнем диаграмму Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}_N$ сжатию в $\sqrt{N}$ раз вдоль обеих осей (так что площадь станет равной единице) и перейдем к координатам $X = \frac{1}{2}(x-y)$, $Y = \frac{1}{2}(x+y)$. Край диаграммы является тогда графиком кусочно - линейной непрерывной функции $Y = L_\lambda(X)$.

Теорема 1. *Пусть существует предел* $\lim_{N\to\infty}\frac{N}{m} = \gamma$. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty}\mu_{N,m}\{\lambda \in \mathcal{Y}_N : \sup_X |L_\lambda(X) - \Omega(X)| < \epsilon\} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим множества диаграмм

$$\mathcal{D}_{N,m} = \{\lambda \in \mathcal{Y}_{N,m} : \mu_{N,m}(\lambda) \ge \exp\frac{-2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{N}\};$$

$$\mathcal{D}_N(c) = \{\lambda \in \mathcal{Y}_N : \mu_N(\lambda) \ge \exp -c\sqrt{N}\},$$

где $c \in \mathbb{R}$. Из известной оценки Харди-Рамануджана

$$p(n) = o(\exp 2\pi\sqrt{N/6})$$

для числа $p(n) = |\mathcal{Y}_N|$ всех разбиений получаем, что $D_{N,m}$ имеет асимтотически полную $\mu_{N,m}$-меру:

$$\mu_{N,m}\left(\mathcal{Y}_{N,m} \setminus \mathcal{D}_{N,m}\right) \to 0 \quad \text{при } N \to \infty.$$

Покажем, что $\mathcal{D}_{N,m} \subset \mathcal{D}_N(c)$ при достаточно большом c.

Лемма 3. *Пусть* $A = A(\gamma)$ *удовлетворяет неравенству*

$$A(2(\ln A - 1) - \gamma/2) \ge 2\pi/\sqrt{6}$$

и $c = 2\pi/\sqrt{6} + \gamma A/2$. *Тогда* $\mathcal{D}_{N,m} \subset \mathcal{D}_N(c)$.

Доказательство. Если $\lambda_1/\sqrt{N} > A$, то по следствию 1

$$\mu_{N,m}(\lambda) < \exp -\left(A[2(\ln A - 1) - \gamma/2]\sqrt{N}\right) \le \exp -2\pi\sqrt{N/6}.$$

Получаем, что $\lambda_1/\sqrt{N} \le A$ для всех $\lambda \in \mathcal{D}_{N,m}$. Но тогда по лемме 1

$$-\frac{\ln \mu_N(\lambda)}{\sqrt{N}} = -\frac{\ln \mu_{N,m}(\lambda)}{\sqrt{N}} + \frac{\ln h_{N,m}(\lambda)}{\sqrt{N}} \le \frac{2\pi}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\frac{N}{m}\frac{\lambda_1}{\sqrt{N}} \le c,$$

что и требовалось доказать.

Из леммы 3 ясно, что множество $\mathcal{D}_N(c)$ имеет асимптотически полную $\mu_{N,m}$-меру:

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{N,m}(\mathcal{D}_N(c)) = 1.$$

Доказательство теоремы 1 завершается теперь так же, как при выводе теоремы 3 в [18]. Используется оценка

$$\frac{1}{2}||L_\lambda - \Omega||_\theta^2 < -\frac{\ln \mu_N(\lambda)}{\sqrt{N}},$$

где $||f||_\theta^2 = \int\int \left(\frac{f(s)-f(t)}{s-t}\right)^2 ds\,dt$ – квадрат соболевской нормы. Из нее следует, что для $\lambda \in \mathcal{D}_N(c)$

$$||L_\lambda - \Omega||_\theta^2 < \frac{2c}{\sqrt{N}} \to 0,$$

откуда выводится сходимость L_λ к Ω и в равномерной норме. Теорема 1 доказана.

3.4. Предельная плотность меры $\mu_{N,m}$ при фиксированном числе строк.

Определим приведенные длины строк диаграммы $\lambda \in \mathcal{Y}_{N,m}$:

$$x_k = \frac{\lambda_k - N/m}{\sqrt{N}}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Вектор $x = (x_1, \dots, x_m)$ лежит в гиперплоскости $H_m = \{x | \sum_{k=1}^m x_k = 0\}$ и принадлежит конусу

$$C_m = \{x \in H_m : x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_m\}.$$

Обозначим через $P_{N,m}$ образ меры $\mu_{N,m}$ в конусе C_m, т.е. совместное распределение приведенных длин строк.

Теорема 2. *При $N \to \infty$ (и фиксированном m) меры $P_{N,m}$ слабо сходятся к абсолютно непрерывной мере P_m в конусе C_m с плотностью*

$$\varphi_m(x) = A_m \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 e^{-m/2 \sum x_k^2},$$

где

$$A_m = \frac{m^{(m+1)m/2}}{1!2!\dots(m-1)!} \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{(m-1)/2}$$

– нормировочная константа.

Доказательство. Пусть мера $Q_{N,m}$ в H_m задает совместное распределение приведенных длин строк $x_1, \ldots, x_m$ относительно мультиномиального распределения

$$\nu_{N,m}(\lambda) = \frac{N!}{\lambda_1! \ldots \lambda_m!}(\frac{1}{m})^N.$$

По теореме Муавра – Лапласа ([25], §13) мера $Q_{N,m}$ слабо сходится к гауссовскому распределению в H_m с плотностью

$$\psi_m(x) = (\frac{m}{2\pi})^{(m-1)/2} e^{-\frac{m}{2}\sum x_k^2}.$$

Из формул п.1 получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{N,m}(\lambda)}{\nu_{N,m}(\lambda)} &= \frac{\lambda_1! \ldots \lambda_m!}{1! \ldots (m-1)!} \cdot \frac{\prod (l_i - l_j)^2}{l_1! \ldots l_m!} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{1! \ldots (m-1)!} \frac{\prod (x_i - x_j)^2 N^{(m-1)m/2}}{(N/m)^{(m-1)m/2}} = \\ &= \frac{m^{(m-1)m/2}}{1! \ldots (m-1)!} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2.\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Мера P_m появляется в различных задачах (см. [149, 142]). Нетрудно получить наивероятнейшие значения приведенных длин строк:

Лемма 4. *Функция $\varphi_m(x)$ достигает наибольшего значения в конусе C_m на векторе $z = \sqrt{\frac{2}{m}}(z_1, \ldots, z_m)$, где $z_1, \ldots, z_m$ – нули многочлена Эрмита $H_m(z)$.*

Доказательство проводится так же, как в теореме Стильеса, см. [56], с. 150.

Следствие 2. *Пусть размерность m основного пространства фиксирована и $N \to \infty$. Пространство $V_{N,m}(\lambda)$ тензоров с симметрией типа λ имеет максимальную размерность, если*

$$\lambda_k = \frac{N}{m} + z_k \sqrt{\frac{2N}{m}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где $z_1, \ldots, z_m$ – корни полинома Эрмита

$$H_m(z) = (-1)^m e^{z^2} \frac{d^m}{dz^m} e^{-z^2}.$$

Для конечнострочного аналога меры Планшереля близкий результат получен в [68].

§4. q-аналог алгоритма блуждания по крюкам

В работах [102], [103] был предложен замечательный вероятностный алгоритм – блуждание по крюкам (hook walk). Этот алгоритм использовался для двух целей: для доказательства формулы крюков и для порождения случайных таблиц Юнга, распределенных по мере Планшереля. В этом параграфе указаны новые применения оригинального алгоритма Грина, Нейенхауза и Вилфа, а также описан q-аналог этого алгоритма и два его приложения.

Первое связано с интересным семейством распределений на (бесконечных) таблицах Юнга, которое естественно рассматривать, как q-деформацию меры Планшереля. Эти распределения взаимно-однозначно соответствуют марковским следам на алгебре Гекке, возникающим при одном из построений инварианта Джонса топологических узлов и зацеплений. Новый алгоритм позволяет эффективно порождать случайные таблицы Юнга с этими распределениями.

Второе приложение связано с новой интерпретацией известного q-аналога формулы крюков. Оказывается, что дугам графа Юнга можно так приписать кратности, рационально зависящие от q, что определяемая рекуррентно "q-размерность" диаграммы Юнга задается q-формулой крюков. При $q = 1$ все кратности дуг равны единице и доказательство дает классическую формулу.

Напомним известные факты, связанные с формулой крюков и мерой Планшереля, пользуясь обозначениями и терминологией из [49].

4.1. Формула крюков и переходные вероятности.

Для двух диаграмм Юнга λ, Λ будем писать $\lambda \nearrow \Lambda$, если $\lambda \subset \Lambda$ и $|\Lambda| = |\lambda| + 1$, то есть Λ имеет ровно на одну клетку больше чем λ. Отношение $\lambda \nearrow \Lambda$ задает на множестве $\mathcal{Y}$ всех диаграмм Юнга структуру ориентированного графа (дугами которого служат пары (λ, Λ) с $\lambda \nearrow \Lambda$). Ориентированные пути этого *графа Юнга*, ведущие из начальной вершины $\lambda = \emptyset$, называются таблицами Юнга.

Назовем *размерностью* диаграммы Юнга λ число f_λ, определяемое рекуррентно: $f_\emptyset = 0$ для пустой диаграммы $\lambda = \emptyset$ и

$$f_\Lambda = \sum_{\lambda:\lambda\nearrow\Lambda} f_\lambda. \tag{3.4.1}$$

Из определения ясно, что f_λ есть число таблиц Юнга формы λ. Известно также, что f_λ совпадает с размерностью соответствующего представления симметрической группы. Согласно классической формуле крюков [92], $f_\lambda = n!/\prod h_{ij}$, где h_{ij} – длина крюка диаграммы λ с вершиной в j-ой клетке i-ой строки.

Мерой Планшереля здесь называется марковская вероятностная мера на пространстве $\mathcal{T}$ бесконечных таблиц Юнга, заданная переходными вероятностями $R_{\lambda\Lambda} =$

$f_\Lambda/(n+1)f_\lambda$, где $n=|\lambda|$ – число клеток диаграммы λ. Пользуясь формулой крюков, можно переписать это в виде

$$R_k=\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(x_k-y_i)}{(x_k-x_i)}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{(x_k-y_{i-1})}{(x_k-x_i)}. \tag{3.4.2}$$

Поясним использованные здесь обозначения. Пусть M – некоторая точка в диаграмме λ (понимаемой, как часть квадранта $\mathbb{R}_+^2$) с координатами i,j. Назовем число $c(M)=j-i$ *содержанием* точки M. Через $M_1,M_2,...,M_d$ обозначим последовательные вершины внутренних углов диаграммы λ, а через $N_1,N_2,...,N_{d-1}$ – лежащие между ними вершины внешних ее углов. В формуле (3.4.2) $x_k=c(M_k)$, $y_k=c(N_k)$ – содержания для вершин ломаной, ограничивающей диаграмму λ с юго-востока (см. рис 19). Мы пишем R_k вместо $R_{\lambda\Lambda}$, если клетка, отличающая Λ от λ, примыкает к вершине M_k. В дальнейшем нам понадобится вписать диаграмму λ в прямоугольник с вершинами N_0,N_d; их содержания обозначим через y_0,y_d.

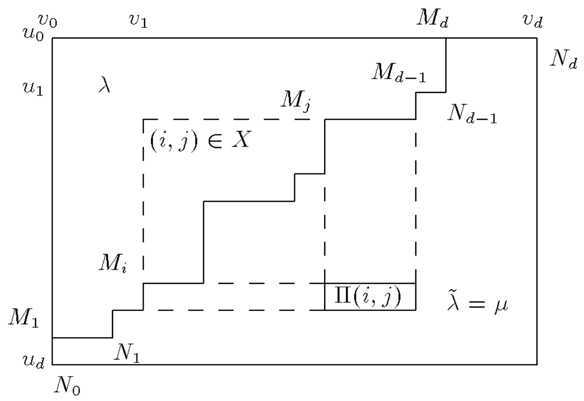


Рис.19 К определению копереходных вероятностей.

Из известной формулы $(n+1)f_\lambda=\sum_{\Lambda:\lambda\nearrow\Lambda}f_\Lambda$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{d}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(x_k-y_i)}{(x_k-x_i)}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{(x_k-y_{i-1})}{(x_k-x_i)}=1. \tag{3.4.3}$$

Пусть $\tilde\lambda$ – диаграмма, дополняющая λ в прямоугольнике (рис.19). Используя формулу крюков, можно записать рекуррентное соотношение (3.4.1) для диаграмм $\tilde\Lambda\nearrow\tilde\lambda$, в форме, аналогичной (3.4.3):

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{(y_d-x_k)(x_k-y_0)}{S}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(x_k-y_i)}{(x_k-x_i)}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{(x_k-y_{i-1})}{(x_k-x_i)}=1, \tag{3.4.4}$$

где $S = \sum_{1\le i\le j\le d}(x_i - y_{i-1})(y_j - x_j)$. Обратно, для доказательства формулы крюков достаточно проверить тождество (3.4.4).

В работе А.М.Вершика [11] дано прямое алгебраическое доказательство формул (3.4.3), (3.4.4). Другое доказательство (аналитическое) нашел Д.Кнут [134] в ответ на задачу Р.Стенли. Познакомившись со статьей [11], А.Н.Кириллов [44] предложил короткие доказательства для (3.4.3), (3.4.4) и родственных тождеств

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{(x_k - y_0)}{(z - y_0)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k - y_i)}{(x_k - x_i)} \prod_{i=k+1}^{d} \frac{(x_k - y_{i-1})}{(x_k - x_i)} = 1 \tag{3.4.5}$$

$$\sum_{k=1}^{d} \frac{(y_d - x_k)}{(y_d - z)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k - y_i)}{(x_k - x_i)} \prod_{i=k+1}^{d} \frac{(x_k - y_{i-1})}{(x_k - x_i)} = 1. \tag{3.4.6}$$

Там же сформулирован q-аналог тождества (3.4.3).

Основной результат работы [102] состоит в построении марковского процесса, вероятности финальных состояний которого суть слагаемые в (3.4.4). Модификация этого алгоритма в [103] имеет в качестве финальных вероятностей слагаемые в сумме (3.4.3).

4.2. Узловые случайные таблицы.

Рассмотрим марковскую меру P в пространстве таблиц Юнга $\mathcal{T}$ с переходными вероятностями

$$p_{\lambda\Lambda} = P\{t \in \mathcal{T} \colon \lambda_{n+1} = \Lambda | \lambda_n = \lambda\}, \tag{3.4.7}$$

где $t = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots)$. Следуя [17], назовем меру P *центральной*, если для любой четверки диаграмм Юнга, для которых $\lambda \nearrow \mu \nearrow \Lambda, \lambda \nearrow \nu \nearrow \Lambda$, выполняется условие

$$p_{\lambda\mu} p_{\mu\Lambda} = p_{\lambda\nu} p_{\nu\Lambda}. \tag{3.4.8}$$

Из определения видно, что для центральной меры вероятность

$$P\{t \in \mathcal{T} \colon \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n\} = \phi(\mu_n) \tag{3.4.9}$$

не зависит от диаграмм $\mu_1, \dots, \mu_{n-1}$.

Эргодические центральные вероятностные меры соответствуют характерам счетной симметрической группы S_∞ или бесконечномерной алгебры Гекке $H_\infty(q)$ при $q > 0$ (см.[17], [19]). Их описание хорошо известно и состоит в следующем. Параметром служит пара невозрастающих последовательностей $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}, \beta = \{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел с условием

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \le 1. \tag{3.4.10}$$

Переходные вероятности для меры, отвечающей паре α, β, задаются формулой

$$\pi_{\lambda\Lambda} = \frac{s_\Lambda(\alpha;\beta)}{s_\lambda(\alpha;\beta)}, \tag{3.4.11}$$

где *расширенные функции Шура* $s_\lambda(\alpha;\beta)$ определяются, например, по формуле Фробениуса ([49], 1.7.6)

$$s_\lambda(\alpha;\beta) = \sum_\rho \frac{1}{z_\rho}\chi^\lambda_\rho \prod_n p_n^{\rho_n}(\alpha;\beta), \tag{3.4.12}$$

в которой $p_1(\alpha;\beta) = 1$ и $p_n(\alpha;\beta) = \sum_i \alpha_i^n + (-1)^{n+1}\sum_i \beta_i^n$ при всех $n \geq 2$. Мера Планшереля соответствует нулевым последовательностям.

В описании неприводимых представлений алгебр Гекке важную роль играют выражения вида $W(r,q) = (1-q^{r+1})\big/(1+q)(1-q^r)$ (см. [33]). Для любой тройки диаграмм $\mu \nearrow \lambda \nearrow \Lambda$ пусть N_m и M_k – вершины, к которым примыкают клетки $\lambda\backslash\mu$ и $\Lambda\backslash\lambda$ соответственно. *Аксиальным расстоянием* называется число $r_{\mu\lambda\Lambda} = c(M_k) - c(N_m) = x_k - y_m$.

Определение. Центральная мера P называется *узловой*, если существует q, при котором сумма

$$\sum_{\Lambda:\lambda\nearrow\Lambda} W(r_{\mu\lambda\Lambda}, q)\pi_{\lambda\Lambda} = z \tag{3.4.13}$$

не зависит от пары $\mu \nearrow \lambda$.

Выбор названия связан с использованием соответствующих узловым мерам характеров алгебры Гекке $H_\infty(q)$ для построения топологических инвариантов зацеплений в $\mathbb{R}^3$. Простое описание узловых эргодических центральных мер имеется в [19]. Перечислим параметры этих мер, пользуясь обозначением $[n] = (1-q^n)/(1-q)$.

Пример 1. Пусть $\alpha = \{(1-q)q^k\}_{k=0}^\infty$; $\beta = 0$. В этом случае

$$s_\lambda(\alpha;\beta) = q^{n(\lambda)}\prod_{b\in\lambda}[h(b)]^{-1}. \tag{3.4.14}$$

Пример 2. Предположим, что $\alpha = 0$; $\beta = \{(1-q)q^k\}_{k=0}^\infty$. Тогда

$$s_\lambda(\alpha;\beta) = q^{n(\lambda')}\prod_{b\in\lambda}[h(b)]^{-1}. \tag{3.4.15}$$

Пример 3. Пусть $0 < q \leq 1$, $\alpha = \{q^k(1-q)/(1-q^m)\}_{k=0}^{m-1}$; $\beta = 0$. Тогда

$$s_\lambda(\alpha;\beta) = \frac{q^{n(\lambda)}}{[m]^{|\lambda|}}\prod_{b\in\lambda}\frac{[m+c(b)]}{[h(b)]}. \tag{3.4.16}$$

Пример 4. Пусть $\alpha = 0$; $\beta = \{q^k(1-q)/(1-q^m)\}_{k=0}^{m-1}$. Здесь

$$s_\lambda(\alpha;\beta) = \frac{q^{n(\lambda')}}{[m]^{|\lambda|}} \prod_{b\in\lambda} \frac{[m-c(b)]}{[h(b)]}. \qquad (3.4.17)$$

По определению ([49], 1.1.5), $n(\mu) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\mu_i$ для диаграммы $(\mu_1, \mu_2, \dots)$. Первые два примера являются специальными случаями (при $t = 0$ и при $t = 1$) двухпараметрического семейства эргодических узловых центральных распределений.

Пример 5. Предположим, что $\alpha = \{(1-t)(1-q)q^k\}_{k=0}^{\infty}$; $\beta = \{t(1-q)q^k\}_{k=0}^{\infty}$ при $0 < q \leq 1, 0 \leq t \leq 1$. В этом случае

$$s_\lambda(\alpha;\beta) = q^{n(\lambda)} \prod_{b\in\lambda} \frac{(1-t)+tq^{c(b)}}{[h(b)]}. \qquad (3.4.18)$$

4.3. Переходные вероятности.

Пусть λ – диаграмма Юнга с вершинами граничной ломаной в точках M_1, N_1, $\dots, N_{d-1}, M_d$ и $x_1 < y_1 < \dots < y_{d-1} < x_d$ – содержания этих точек. Если $\lambda \nearrow \Lambda$ и новая клетка в диаграмме Λ примыкает к k-ой вершине M_k, будем писать $R_k, \dots, c_k$ вместо $R_{\lambda\Lambda}, \dots, c_{\lambda\Lambda}$ в обозначениях переходных вероятностей.

Предложение. *Переходные вероятности для узловых центральных распределений в примерах 1 – 4 п.1.3 можно записать в виде*

$$R_k(q) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-q^{x_k-y_i}}{1-q^{x_k-x_i}} \prod_{i=k+1}^{d} \frac{1-q^{x_k-y_{i-1}}}{1-q^{x_k-x_i}} \qquad (3.4.19)$$

$$C_k(q) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q^{y_i}-q^{x_k}}{q^{x_i}-q^{x_k}} \prod_{i=k+1}^{d} \frac{q^{x_k}-q^{y_{i-1}}}{q^{x_k}-q^{x_i}} \qquad (3.4.20)$$

$$r_k(q) = \frac{(q^{y_0}-q^{x_k})}{(q^{y_0}-1)} R_k(q) \qquad (3.4.21)$$

$$c_k(q) = \frac{(q^{x_k}-q^{y_d})}{(1-q^{y_d})} R_k(q). \qquad (3.4.22)$$

Для семейства из примера 5 переходная вероятность равна

$$R_k(q,t) = (1-t)R_k(q) + tC_k(q). \qquad (3.4.23)$$

Доказательство. Переходные вероятности суть отношения (3.4.11). Формулы (3.4.19) – (3.4.23) получаются при подстановке сюда выражений (3.4.14) – (3.4.18); при этом используются следующие равенства.

Пусть (u, v) – координаты точки M_k. Тогда $n(\Lambda) - n(\lambda) = u = \sum_{k+1}^{d}(x_i - y_{i-1})$ и

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{b\in\lambda}[h(b)]}{\prod_{b\in\Lambda}[h(b)]} &= \prod_{i=1}^{c}\frac{[h_{r+1,i}]}{1+[h_{r+1,i}]}\prod_{j=1}^{r}\frac{[h_{j,c+1}]}{1+[h_{j,c+1}]}\\ &= \prod_{i=1}^{k-1}\frac{1-q^{x_k-y_i}}{1-q^{x_k-x_i}}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{q^{y_{i-1}}-q^{x_k}}{q^{x_i}-q^{x_k}},\end{aligned}$$

откуда следуют формулы (3.4.19) и (3.4.20). Далее, содержание $c(b)$ клетки b не зависит от объемлющей диаграммы, так что, например,

$$\prod_{b\in\Lambda}[m+c(b)]/\prod_{b\in\lambda}[m+c(b)] = [m+c(a)] = [x_k - y_0],$$

поскольку $c(a) = c(M_k) = x_k$ для новой клетки $a = \Lambda\backslash\lambda$ и $m = -y_0$.
Отметим, что

$$C_k(q) = q^{x_k}R_k(q),\ C_{\lambda'\Lambda'}(q) = R_{\lambda\Lambda}(q),\ c_{\lambda'\Lambda'}(q) = r_{\lambda\Lambda}(q). \tag{3.4.24}$$

§5. q-аналог формулы крюков

5.1. q-формула крюков.

Пусть $\mathcal{Y}$ – граф Юнга, описанный во введении. Припишем каждой дуге (ν, μ), $\nu \nearrow \mu$ зависящую от параметра q кратность $m_{\nu\mu}(q)$, полагая

$$m_{\nu\mu}(q) = \frac{[N]q^{-c(a)}}{\sum_{b\in\mu} q^{-c(b)}}, \tag{3.5.1}$$

где $N = |\mu|, c(b)$ – содержание клетки $b \in \mu$ и $a = \mu\backslash\nu$ – клетка, отщепляемая от μ при переходе к ν. Граф $\mathcal{Y}$ с системой кратностей дуг $\{m_{\nu\mu}(q)\}$ обозначим через $\mathcal{Y}(q)$; поскольку $m_{\nu\mu}(3.4.1) = 1$, можно рассматривать $\mathcal{Y}(q)$, как деформацию обычного графа Юнга.

Определим q-аналог $f_\mu(q)$ размерности f_μ рекуррентно, полагая $f_\emptyset(q) \equiv 1$ для пустой диаграммы $\mu = \emptyset$ и

$$f_\mu(q) = \sum_{\nu:\nu\nearrow\mu} f_\nu(q) m_{\nu\mu}(q), \tag{3.5.2}$$

где ν пробегает диаграммы Юнга, непосредственно предшествующие μ в графе $\mathcal{Y}$. Ясно, что $f_\mu(3.4.1) = f_\mu$.

Ниже в п.5.6 будет доказана

Теорема 1. *Для q-размерности $f_\mu(q)$ справедлива q-формула крюков:*

$$f_\mu(q) = q^{n(\mu)} \frac{[N]!}{\prod_{b\in\mu}[h(b)]}, \tag{3.5.3}$$

где $N = |\mu|$, $[k] = 1 + q + \ldots + q^{k-1}$ и $[N]! = [1][2]\ldots[N]$.

Подчеркнем, что q-размерности $f_\mu(q)$ являются полиномами, хотя кратности $m_{\nu\mu}(q)$ зависят от q рационально. Например, $m_{\nu\mu}(q) = q(1+q^2)/(1+q)$ для $\nu = (21)$ и $\mu = (2^2)$.

5.2. Копереходные вероятности.

Обозначим через $g_\mu(q)$ правую часть формулы крюков (3.5.3). Для доказательства теоремы 1 достаточно проверить, что для функций $g_\mu(q)$, как и для $f_\mu(q)$, выполняется рекуррентное соотношение (3.5.2), то есть $\sum_\nu p_{\nu\mu}(q) = 1$ при всех $\mu \neq \emptyset$, где

$$p_{\nu\mu}(q) = \frac{g_\nu(q)}{g_\mu(q)} m_{\nu\mu}(q). \tag{3.5.4}$$

Рассмотрим (перевернутую) диаграмму Юнга μ, как дополнение в прямоугольнике диаграммы λ (рис.19), и пусть $y_0 < x_1 < y_1 < \ldots < y_{d-1} < x_d < y_d$ – введенные в п.4.2 параметры. Выразим через них слагаемые $p_k(q) = p_{\nu\mu}(q)$, считая, что клетка $a = \mu \backslash \nu$ примыкает к точке M_k. Следуя [17], числа $p_{\nu\mu}(q)$ можно назвать *копереходными вероятностями* (для центральных мер графа $\mathcal{Y}(q)$).

Предложение.

$$p_k(q) = \frac{(q^{y_0} - q^{x_k})(q^{x_k} - q^{y_d})}{S(q)} R_k(q), \tag{3.5.5}$$

где $S(q) = \sum_{i=0}^{d} q^{y_i} - \sum_{i=1}^{d} q^{x_i} - q^{y_0+y_d}$.

Доказательство. Пусть $u_d, u_{d-1}, \ldots, u_0; v_0, v_1, \ldots, v_d$ – соответственно номера строк и столбцов для точек $N_0, N_1, \ldots, N_d$. Таким образом, $x_k = v_{k-1} - u_{d-k}$ и $y_k = v_k - u_{d-k}$ при $k = 0, 1, \ldots, d$. Положим также $z_{ji} = v_{j-1} - u_{d-i}$; тогда $z_{kk} = x_k$, $z_{k+1,k} = y_k$ и $z_{d+1,0} = v_d - u_d = y_0 + y_d$. Выражение для $S(q)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S(q) &= \sum_{1 \le i \le j \le d} (q^{z_{j,i-1}} - q^{z_{ji}} - q^{z_{j+1,i-1}} + q^{z_{j+1,i}}) \\ &= \sum_{1 \le i \le j \le d} (q^{-u_{d-i+1}} - q^{-u_{d-i}})(q^{v_{j-1}} - q^{v_j}). \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

Лемма 1.

$$\frac{g_\nu(q)}{g_\mu(q)} = \frac{q^{-x_k+1}}{[N]} \frac{(q^{y_0} - q^{x_k})(q^{x_k} - q^{y_d})}{(1-q)^2} R_k(q).$$

Доказательство. Из определения ясно, что $n(\mu) - n(\nu) = u_d - u_{d-k} - 1$ (это уменьшенный на единицу номер строки клетки $a = \mu \backslash \nu$ в диаграмме μ). Поэтому

$$\frac{g_\nu(q)}{g_\mu(q)} = \frac{q^{u_d - u_{d-k} - 1}}{[N]} \Pi_1 \Pi_2,$$

где

$$\Pi_1 = \prod_{i=1}^{r-1} \frac{[1 + h_{ic}]}{[h_{ic}]} = [x_k - y_0] \prod_{i=1}^{k-1} \frac{[x_k - y_i]}{[x_k - x_i]}$$

$$\Pi_2 = \prod_{j=1}^{c-1} \frac{[1 + h_{jr}]}{[h_{jr}]} = [y_d - x_k] \prod_{i=k+1}^{d} \frac{[y_{i-1} - x_k]}{[x_i - x_k]}.$$

Здесь r, c – соответственно номера строки и столбца клетки $a = \mu \backslash \nu$ в диаграмме μ. Лемма следует теперь из (3.4.19), поскольку $u_{d-k} = \sum_{i=k+1}^{d} (x_i - y_{i-1})$ и $u_d = -y_0$.

Лемма 2.

$$m_{\nu\mu}(q) = q^{x_k - 1} \frac{(1-q)^2 [N]}{S(q)}.$$

Доказательство. Пусть клетка $b \in \mu$ лежит в строке u и столбце v прямоугольника, а r, c – номера ее строки и столбца в диаграмме μ. Если $c(b) = c - r$ – содержание клетки b в диаграмме μ и $\tilde{c}(b) = v - u$, то $c(b) + \tilde{c}(b) = y_0 + y_d = const$, поскольку $c + v = y_d + 1$ и $r + u = -y_0 + 1$. Можем переписать (3.5.1) в виде

$$m_{\nu\mu}(q) = \frac{[N]q^{\tilde{c}(a)}}{\sum_{b\in\mu} q^{\tilde{c}(b)}}.$$

Положим $\Pi(i,j) = \{b \in \mu : u_{d-i} < u \leq u_{d-i+1}, v_{j-1} \leq v < v_j\}$. Тогда

$$\sum_{b\in\Pi(i,j)} q^{\tilde{c}(b)} = q\frac{(q^{-u_{d-i+1}} - q^{-u_{d-i}})(q^{v_{j-1}} - q^{v_j})}{(1-q)^2};$$

сравнивая это с (3.5.6), получаем, что $\sum_{b\in\mu} q^{\tilde{c}(b)} = qS(q)/(1-q)^2$. Поскольку $\tilde{c}(a) = x_k$, лемма доказана.

Предложение непосредственно вытекает из доказанных лемм.

5.3. Алгебраические тождества.

Теорема 1, как показано в п.5.1, означает, что при любом $q > 0$ сумма чисел (3.5.5) равна единице. Поскольку выражения (3.4.19) – (3.4.23) интерпретированы, как вероятности, их суммы также равны единице. Соответствующие алгебраические тождества справедливы при любых (не обязательно целых) параметрах $y_0, x_1, \ldots, x_d, y_d$, при которых они имеют смысл.

Теорема 2. *Пусть вещественные числа $\{x_k\}_{k+1}^d$ попарно различны, $\{y_k\}_{k=0}^d$ - любые, $z = \sum_{k=1}^d x_k - \sum_{k=1}^{d-1} y_k$ и $q > 0$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{d}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1-q^{x_k-y_i}}{1-q^{x_k-x_i}}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{1-q^{x_k-y_{i-1}}}{1-q^{x_k-x_i}} = 1 \tag{3.5.7}$$

$$\sum_{k=1}^{d}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{q^{y_i}-q^{x_k}}{q^{x_i}-q^{x_k}}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{q^{x_k}-q^{y_{i-1}}}{q^{x_k}-q^{x_i}} = 1 \tag{3.5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{(q^{y_0}-q^{x_k})}{(q^{y_0}-q^{z})}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1-q^{x_k-y_i}}{1-q^{x_k-x_i}}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{1-q^{x_k-y_{i-1}}}{1-q^{x_k-x_i}} = 1 \tag{3.5.9}$$

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{(q^{x_k}-q^{y_d})}{(q^{z}-q^{y_d})}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1-q^{x_k-y_i}}{1-q^{x_k-x_i}}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{1-q^{x_k-y_{i-1}}}{1-q^{x_k-x_i}} = 1 \tag{3.5.10}$$

$$\sum_{k=1}^{d}\frac{(q^{y_0}-q^{x_k})(q^{x_k}-q^{y_d})}{S(q)}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1-q^{x_k-y_i}}{1-q^{x_k-x_i}}\prod_{i=k+1}^{d}\frac{1-q^{x_k-y_{i-1}}}{1-q^{x_k-x_i}} = 1, \tag{3.5.11}$$

где $S(q) = \sum_{1\leq i\leq j\leq d}(q^{-u_{d-i+1}} - q^{-u_{d-i}})(q^{v_{j-1}} - q^{v_j})$.

Доказательство. Параметры $\{x_k\}, \{y_k\}$, связанные с диаграммой Юнга λ, – целые, причем

$$y_0 < x_1 < y_1 < \ldots < y_{d-1} < x_d < y_d \tag{3.5.12}$$

и $z = v_0 - u_0 = 0$. При этих условиях формулы (3.5.7) – (3.5.10) уже доказаны в п.4.2. Ниже мы используем алгоритм блуждания по крюкам, чтобы дать для параметров с условием (3.5.12) другую вероятностную интерпретацию тождеств (3.5.7) – (3.5.11).

При сдвиге параметров на константу слагаемые не меняются, что позволяет опустить условие $z = 0$. Поскольку левые части рационально зависят от q^{y_k}, q^{x_k}, порядок (3.5.12) и условие целочисленности также не существенны.

При $q = 1$ получаем формулы (3.4.3) – (3.4.6) из п.4.1.

5.4. Переходные вероятности.

В этом разделе мы опишем марковскую цепь, которая является q-аналогом одной из версий алгоритма блуждания по крюкам (hook walk) из [102],[103] (ср.также [146]). Пусть заданы две последовательности вещественных чисел $(u_0 < u_1 < \ldots < u_d)$ и $(v_0 < v_1 < \ldots < v_d)$. Рассмотрим прямоугольник с вершинами (u_0, v_0),(u_0, v_d), (u_d, v_d),(u_d, v_0) (на рис.19 u-ось направлена вниз, а v-ось – направо). Для точки T с координатами (u, v) обозначим через $c(T) = v - u$ ее содержание. Обозначим через M_k, N_k точки с кординатами (u_{d-k}, v_{k-1}), (u_{d-k}, v_k); тогда $x_k = c(M_k)$, $y_k = c(N_k)$. Возможные состояния для блуждания по крюкам принадлежат множеству $X = \{(i, j) \in \mathbb{Z}\colon 1 \leq i \leq j \leq d\}$. Состояние $(i, j) \in X$ удобно представлять себе в виде точки $T = (u_{d-j}, v_{i-1})$ в прямоугольнике. Назовем *крюком* с вершиной в этой точке объединение $H(i, j) = A \cup L$ двух интервалов: *руки крюка* $A = \{(u_{d-j}, v)\colon v_{i-1} \leq v \leq v_{j-1}\}$, соединяющей вершину T с M_j, и *ноги* $L = \{(u, v_{i-1})\colon u_{d-j} \leq u \leq u_{d-i}\}$, соединяющей T с M_i. *Длина крюка* равна $x_j - x_i$. Заметим, что точка $Q \in H(i, j)$ полностью определяется своим *содержанием* $h = c(Q)$.

Переходные вероятности определяемой марковской цепи зависят от параметра $q > 0$. Для текущего состояния $(i, j) \in X$ выберем точку $Q \in H(i, j)$ случайно, с плотностью $Cq^h dh$, где C – нормировочная константа (при $q = 1$ это показательное распределение вырождается в равномерное). Построим новое состояние (i', j'), зависящее от Q. Здесь имеются две возможности (рис.20):

(A) для $Q \in A$ и $v_{m-1} < v \leq v_m$ положим $(i', j') = (i, m)$,

(L) если $Q \in L$ и $u_{d-m} \leq u < u_{d-m+1}$, то $(i', j') = (m, j)$.

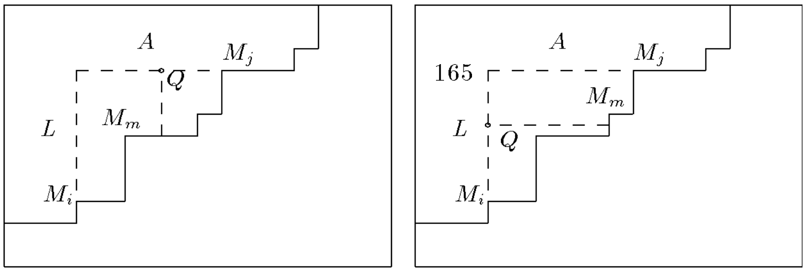


Рис.20 Алгоритм блуждания по крюкам.

Заметим, что разность $(j-i)$, при $i<j$, с вероятностью единица убывает. Спустя не более чем d шагов, блуждание по крюкам достигнет подмножества $X_\infty = \{(i,j) \in X\colon i=j\}$ и финальное состояние (k,k) перестанет меняться. Мы покажем, что числа $R_k(q),\ \ldots,\ p_k(q)$ задают вероятности финальных состояний блуждания по крюкам при подходящих начальных распределениях. Перейдем к описанию этих распределений.

5.5. Начальные распределения.

Свяжем с состоянием $(i,j) \in X$ прямоугольник $\Pi(i,j) = \{(u,v)\colon u_{d-i} \le u < u_{d-i+1}, v_{t-1} \le v < v_t\}$ и будем считать его *q-площадь*

$$S_{ij}(q) = (q^{-u_{d-i+1}} - q^{-u_{d-i}})(q^{v_{j-1}} - q^{v_j}) \tag{3.5.13}$$

статистическим весом этого состояния. Для любого подмножества $Y \subset X$ мы имеем распределение P_Y на Y с вероятностями

$$P_Y(i,j) = S_{ij}(q)/S_Y, \tag{3.5.14}$$

где $S_Y = \sum_{(i,j)\in Y} S_{ij}(q)$. Представляют интерес следующие примеры подмножеств:

a) вершина $\{(1,d)\}$

b) $Y = \{(i,d)\colon 1 \le i \le d\}$

c) $Y = \{(1,j)\colon 1 \le j \le d\}$

d) все X.

Теорема 3. *Пусть $R_k(q)$, $r_k(q)$, $c_k(q)$, $p_k(q)$ – вероятности достижения финального состояния $(k,k) \in X_\infty$ при блуждании по крюкам с начальными распределениями (3.5.14) на множествах из примеров a) – d) соответственно. Тогда справедливы формулы (3.4.19) – (3.4.22) и (3.5.5).*

Из этой теоремы следует тождество (3.5.11) и теорема 1, а также независимое доказательство формул (3.5.7) – (3.5.10) и возможность эффективного моделирования узловых случайных таблиц.

5.6. Доказательство теоремы 3.

Обозначим через $R_k^{(ij)}(q)$, $r_k^{(ij)}(q)$, $c_k^{(ij)}(q)$, $p_k^{(ij)}(q)$ вероятности завершения блуждания по крюкам в состоянии $(k,k) \in X_\infty$ для начальных распределений (3.5.14) соответственно на множествах $Y_R^{(ij)} = \{(i,j)\}$, $Y_r^{(ij)} = \{(s,j)\colon i \le s \le j\}$, $Y_c^{(ij)} = \{(i,t)\colon i \le t \le j\}$ и $Y_p^{(ij)} = \{(s,t)\colon i \le s \le t \le j\}$. Пусть $z_{ij} = v_{i-1} - u_{d-j}$.

Лемма 3. *Справедливы рекуррентные соотношения*

$$\pi_k^{(i,j)}(q) = \frac{q^{x_i} - q^{z_{i,j}}}{q^{x_i} - q^{x_j}} \cdot r_k^{(i+1,j)}(q) + \frac{q^{z_{i,j}} - q^{x_j}}{q^{x_i} - q^{x_j}} \cdot c_k^{(i,j-1)}(q) \tag{3.5.15}$$

$$r_k^{(i,j)}(q) = \frac{q^{y_{i-1}} - q^{x_i}}{q^{y_{i-1}} - q^{z_{i,j}}} \cdot \pi_k^{(i,j)}(q) + \frac{q^{x_i} - q^{z_{i,j}}}{q^{y_{i-1}} - q^{z_{i,j}}} \cdot r_k^{(i+1,j)}(q) \tag{3.5.16}$$

$$c_k^{(i,j)}(q) = \frac{q^{z_{i,j}} - q^{x_j}}{q^{z_{i,j}} - q^{y_j}} \cdot c_k^{(i,j-1)}(q) + \frac{q^{x_j} - q^{y_j}}{q^{z_{i,j}} - q^{y_j}} \cdot \pi_k^{(i,j)}(q) \tag{3.5.17}$$

$$p_k^{(1,j)}(q) = \frac{S_{j-1}(q)}{S_j(q)} p_k^{(1,j-1)}(q) + \frac{(q^{-u_{d-i+1}} - q^{-u_{d-i}})(q^{v_{j-1}} - q^{v_j})}{S_j(q)} r_k^{(1,j)}(q). \tag{3.5.18}$$

Доказательство. Коэффициенты в этих соотношениях представляют собой переходные вероятности на первом шаге блуждания, а сами формулы суть различные варианты формулы полной вероятности. Например, $(q^{x_i} - q^{z_{ij}})/(q^{x_i} - q^{x_j})$ есть вероятность выбора точки Q (при начальном состоянии $T = (i,j)$) на ноге L крюка $H(i,j)$, а $(q^{z_{ij}} - q^{x_j})/(q^{x_i} - q^{x_j})$ – вероятность того, что $Q \in A$.

Лемма 4.

$$R_k^{(ij)}(q) = q^{z_{ij} - x_k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q^{y_i} - q^{x_k}}{q^{x_i} - q^{x_k}} \prod_{i=k+1}^{d} \frac{q^{x_k} - q^{y_{i-1}}}{q^{x_k} - q^{x_i}} \tag{3.5.19}$$

$$r_k^{(ij)}(q) = \frac{(q^{y_{i-1}} - q^{x_k})}{(q^{y_{i-1}} - q^{z_{ij}})} R_k^{(ij)}(q) \tag{3.5.20}$$

$$c_k^{(ij)}(q) = \frac{(q^{x_k} - q^{y_j})}{(q^{z_{ij}} - q^{y_j})} R_k^{ij}(q) \tag{3.5.21}$$

$$p_k^{(1j)}(q) = \frac{(q^{y_0} - q^{x_k})(q^{x_k} - q^{y_j})}{S_j(q)} R_k^{(1j)}(q). \tag{3.5.22}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что (3.5.20) – (3.5.22) можно переписать в виде

$$r_k^{(i+1,j)}(q) = \frac{(q^{x_i} - q^{x_k})}{(q^{x_i} - q^{z_{ij}})} R_k^{(ij)}(q) \tag{3.5.23}$$

$$c_k^{(i,j-1)}(q) = \frac{(q^{x_k} - q^{x_j})}{(q^{z_{ij}} - q^{x_j})} R_k^{ij}(q) \tag{3.5.24}$$

$$p_k^{(1,j-1)}(q) = \frac{(q^{y_0} - q^{x_k})(q^{x_k} - q^{x_j})}{S_{j-1}(q)} R_k^{(1j)}(q). \tag{3.5.25}$$

Здесь используется тот факт, что $y_i - z_{i+1,j} = x_i - z_{ij}$ и $y_{j-1} - z_{i,j-1} = x_j - z_{ij}$.

Применяя (3.5.23) – (3.5.25) и лемму 3, нетрудно вывести лемму 4 индукцией по $(j-i)$. Например, с помощью (3.5.25) и (3.5.20) правую часть в (3.5.18) можно записать в виде

$$\frac{(q^{y_0}-q^{x_k})(q^{x_k}-q^{x_j})}{S_j(q)}R_k^{(1j)}(q)+\frac{(q^{y_0}-q^{x_k})(q^{x_j}-q^{y_j})}{S_j(q)}R_k^{(1j)}(q) \\ =\frac{(q^{y_0}-q^{x_k})(q^{x_k}-q^{y_j})}{S_j(q)}R_k^{(1j)}(q)$$

и формула (3.5.22) доказана.

Теорема 3 непосредственно следует из леммы 4, поскольку $R_k(q)=R_k^{(1d)}(q)$, ..., $p_k(q)=p_k^{(1d)}(q)$.

§6. Многомерные интегралы типа Сельберга

6.1. Варианты интегралов Сельберга.

В старой работе [156] А.Сельберг вычислил интеграл

$$\begin{gathered}\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i<j} |t_i - t_j|^{2\theta} \prod_{i=1}^{m} t_i^{A-1} (1-t_i)^{B-1} \, dt_i = \\ = \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(A+(m-j)\theta)\,\Gamma(B+(m-j)\theta)\,\Gamma(j\theta+1)}{\Gamma(A+B+(2m-j-1)\theta)\,\Gamma(\theta+1)}.\end{gathered} \tag{3.6.1}$$

Как указано в [69], недавно (1987 г.) им был найден еще один многомерный интеграл, берущийся, однако, не по кубу, а по симплексу:

$$\begin{gathered}\int \cdots \int_{t_1+\ldots+t_m \le 1} \prod_{i<j} |t_i - t_j|^{2\theta} (1 - \sum_{j=1}^{m} t_j)^{B-1} \prod_{j=1}^{m} t_j^{A-1} \, dt_j = \\ = \frac{\Gamma(B)}{\Gamma(mA+B+(m-1)m\theta)} \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(A+(m-j)\theta)\,\Gamma(j\theta+1)}{\Gamma(\theta+1)}.\end{gathered} \tag{3.6.2}$$

В этом разделе диссертации вычисляется интеграл, похожий на (3.6.2):

$$\begin{gathered}\int \cdots \int_{t_1+\ldots+t_m = 1} \prod_{i<j} |t_i - t_j|^{2\theta} \prod_{j=1}^{m} t_j^{A-1} \, dt_1 \ldots dt_{m-1} = \\ = \frac{1}{\Gamma(mA+(m-1)m\theta)} \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(A+(m-j)\theta)\,\Gamma(j\theta+1)}{\Gamma(\theta+1)}.\end{gathered} \tag{3.6.3}$$

Прежде всего, выясним связи между интегралами (3.6.1) – (3.6.3).

Предложение. *Интегралы (3.6.2) и (3.6.3) эквивалентны и оба являются следствиями интеграла (3.6.1).*

Доказательство. Об импликации (3.6.1) $\Rightarrow$ (3.6.3) сообщил мне Г.И.Ольшанский. Вот его рассуждения.

Сделаем в интеграле (3.6.1) подстановку $t_j = \tau_j / B$; тогда

$$\begin{gathered}|V(t)|^{2\theta} = |V(\tau)|^{2\theta} \cdot B^{(m-1)m\theta} \prod t_j^{A-1} \, dt_j = \\ = B^{-mA} \prod \tau_j^{A-1} d\tau_j \prod (1-t_j)^{B-1} = \\ = \prod \big(1 - \frac{\tau_j}{B}\big)^{B-1} \to \prod e^{-\tau_j} = e^{-(\tau_1+\ldots+\tau_m)}.\end{gathered}$$

Умножим обе части (3.6.1) на $B^{mA+(m-1)m\theta}$ и перейдем к пределу при $B \to \infty$. С учетом формулы

$$\frac{\Gamma(\alpha+B)}{\Gamma(\beta+B)} \sim B^{\alpha-\beta}; \quad B \to \infty$$

получаем, что

$$\prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(B+(m-j)\theta)}{\Gamma(A+B+(2m-j-1)\theta)} \sim \prod_{j=1}^{m} B^{m\theta-A-2m\theta+\theta} = B^{-(mA+(m-1)m\theta)},$$

и обе части в (3.6.1) имеют пределы. Формула получается такая:

$$\begin{aligned}\underset{\mathbb{R}_+^m}{\int\cdots\int} \prod_{i<j} |t_i-t_j|^{2\theta} \exp\big(-\sum_{j=1}^{m} t_j\big) \prod_{j=1}^{m} t_j^{A-1}\,dt_j = \\ = \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(A+(m-j)\theta)\,\Gamma(j\theta+1)}{\Gamma(\theta+1)}.\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

Теперь сделаем еще одну замену переменных:

$$s = t_1+\ldots+t_m; \quad x_j = \frac{t_j}{s}; \quad j=1, \tag{3.6.5}$$

так что $\sum_{j=1}^{m} x_j = 1$. Якобиан этой замены равен s^{m-1}, так что

$$dt_1\ldots dt_m = s^{m-1}\,ds\,dx_1\ldots dx_{m-1}. \tag{3.6.6}$$

Интеграл (3.6.4) принимает вид

$$\begin{aligned}\underset{\mathbb{R}_+^m}{\int\cdots\int} \prod_{i<j} |t_i-t_j|^{2\theta} \exp\big(-\sum_{j=1}^{m} t_j\big) \prod_{j=1}^{m} t_j^{A-1}\,dt_j = \\ = \int_0^\infty s^{(m-1)m\theta+m(A-1)+(m-1)}\,e^{-s}\,ds\,\times \\ \times \underset{\Delta_m}{\int\cdots\int} \prod_{i<j} |x_i-x_j|^{2\theta} \prod_{j=1}^{m} x_j^{A-1}\,dx_1\ldots dx_{m-1}.\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

Первый множитель в правой части – классическое определение Г-функции,

$$\int_0^\infty s^{mA+(m-1)m\theta-1}\,e^{-s}\,ds = \Gamma(mA+(m-1)m\theta), \tag{3.6.8}$$

и мы получаем (3.6.3). Иначе говоря, (3.6.4) и (3.6.3) эквивалентны.

Перейдем теперь к доказательству эквивалентности интегралов (3.6.2) и (3.6.3). Как и в первой части доказательства, сделаем в (3.6.2) замену переменных (3.6.5).

Симплекс $t_1+\ldots+t_m \le 1$ переходит в прямое произведение отрезка $[0,1]$ и симплекса

$$\Delta_m = \Big\{x \in \mathbb{R}_+^m\colon \sum_{j=1}^{m} x_j = 1\Big\}.$$

Интеграл (3.6.2) распадается в произведение

$$\int_{t_1+\ldots+t_m\le 1}\cdots\int \prod_{i<j}|t_i-t_j|^{2\theta}\,(1-\sum_{j=1}^m t_j)^{B-1}\,\prod_{j=1}^m t_j^{A-1}\,dt_j =$$

$$=\int_0^1 s^{(m-1)m\theta+m(A-1)+(m-1)}\,(1-s)^{B-1}\,ds\times$$

$$\times\int_{\Delta_m}\cdots\int\prod_{i<j}|x_i-x_j|^{2\theta}\prod_{j=1}^m x_j^{A-1}\,dx_1\ldots dx_{m-1}.$$

Остается заметить, что первый множитель в правой части – классический бета - интеграл

$$\int_0^1 s^{mA+(m-1)m\theta-1}\,(1-s)^{B-1}\,ds=\frac{\Gamma(mA+(m-1)m\theta)\,\Gamma(B)}{\Gamma(mA+B+(m-1)m\theta)}.$$

Эквивалентность (3.6.2) и (3.6.3) доказана.

6.2. Мультипликативные марковские цепи на графе Юнга.

Идея нашего вычисления интеграла (3.6.3) состоит в предъявлении специальных центральных мер на графе Юнга и его деформациях, для которых формула (3.6.3) отождествляется с обобщенным пуассоновским представлением ассоциированной гармонической функции. Представляющая мера μ на границе графа будет получена как радиальный предел распределений M_n состояний марковской цепи на n-ом этаже $\mathcal{Y}_n$ графа Юнга. В этом смысле можно сказать, что мы находим интеграл путем явного перехода к пределу в специально подобранных интегральных суммах. Реальная возможность (и даже простота) перехода к пределу для наших распределений M_n связана с их мультипликативностью: вес $M_n(\lambda)$ диаграммы Юнга $\lambda\in\mathcal{Y}_n$ возникает, как произведение несложных однотипных сомножителей по всем клеткам диаграммы λ.

Чтобы сделать основную идею более отчетливой, обратимся сначала к специальному случаю интеграла (3.6.3) при $\theta=1$.

Обозначим через $\mathcal{Y}(m)$ *усеченный* граф Юнга. По определению, он состоит из диаграмм Юнга $\lambda\in\mathcal{Y}$, имеющих не более чем m строк; дуги те же, что и в полном графе Юнга. Граф $\mathcal{Y}(m)$ удобно интерпретировать, как граф ветвления функций Шура s_λ от m независимых переменных:

$$s_{(1)}(x_1,\ldots,x_m)\cdot s_\lambda(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{\Lambda:\,\lambda\nearrow\Lambda}s_\Lambda(x_1,\ldots,x_m). \qquad (3.6.9)$$

Таким образом, этот граф мультипликативен, а его граница $\mathcal{E}(\mathcal{Y}(m))$ легко вычисляется. Она гомеоморфна симплексу

$$\Delta_m=\left\{\alpha_1\ge\ldots\ge\alpha_m\ge 0;\ \sum\alpha_j=1\right\}, \qquad (3.6.10)$$

причем вектору $\alpha \in \Delta_m$ отвечает неотрицательная гармоническая функция

$$\varphi_\alpha(\lambda) = s_\lambda(\alpha_1, \dots \alpha_m); \quad \lambda \in \mathcal{Y}(m). \tag{3.6.11}$$

Особенно интересен пример эргодической центральной марковской цепи на графе $\mathcal{Y}(m)$, отвечающий частотам $\alpha = (1/m, \dots , 1/m) \in \Delta_m$ (можно сказать, что это усеченный аналог меры Планшереля). Для этой цепи переходные вероятности задаются формулой

$$\pi^{(v)}(\lambda, \Lambda) = \frac{m + c(b)}{m} \cdot \mu(\lambda, \Lambda), \tag{3.6.12}$$

где

$$\mu(\lambda, \Lambda) = \frac{d(\Lambda)}{(n+1)\, d(\lambda)} = \prod_{j<k} \frac{x_k - y_j}{x_k - x_j} \prod_{j>k} \frac{x_k - y_{j-1}}{x_k - x_j} \tag{3.6.13}$$

– переходные вероятности истинной меры Планшереля. Распределение состояния на n-ом этаже $\mathcal{Y}_n(m)$ графа $\mathcal{Y}(m)$ определяется формулой

$$M_n(\lambda) = \frac{n!}{m^n} \prod_{b \in \lambda} \frac{m + c(b)}{h^2(b)}, \tag{3.6.14}$$

где $c(b) = j - i$ – содержание клетки b на пересечении i-ой строки и j-ого столбца диаграммы $\lambda \in \mathcal{Y}_n(m)$, а $h(b) = \lambda_i + \lambda'_j - j - i + 1$ – длина крюка этой клетки. Существует интересная однопараметрическая деформация распределений (3.6.14), сохраняющая центральность, но не эргодичность. Переходные вероятности, зависящие от параметра $v > m - 1$, определим формулой

$$\pi(\lambda, \Lambda) = \frac{(m + c(b))\ (v + c(b))}{n + mv} \mu(\lambda, \Lambda). \tag{3.6.15}$$

Корректность определения видна из вычислений моментов переходных распределений меры Планшереля, см. (4.1.18):

$$\begin{gathered} \sum_{\Lambda:\, \lambda \nearrow \Lambda} \mu(\lambda, \Lambda) = 1; \\ \sum_{\Lambda:\, \lambda \nearrow \Lambda} c(\Lambda \setminus \lambda)\, \mu(\lambda, \Lambda) = 0; \\ \sum_{\Lambda:\, \lambda \nearrow \Lambda} c^2(\Lambda \setminus \lambda)\, \mu(\lambda, \Lambda) = |\lambda|. \end{gathered} \tag{3.6.16}$$

Марковская цепь с переходными вероятностями (3.6.15) центральна, так как вероятности всех таблиц Юнга формы λ одинаковы и равны $M_n^{(v)}(\lambda) \,/\, d(\lambda)$, где

$$M_n^{(v)}(\lambda) = \frac{n!}{(mv)_n} \prod_{b \in \lambda} \frac{(m + c(b))\, (v + c(b))}{h^2(b)}. \tag{3.6.17}$$

Исходные формулы (3.6.12), (3.6.14) получаются из (3.6.15), (3.6.17) в пределе $v \to \infty$.

Найдем теперь интегральное представление Пуассона для центральных мер (3.6.15) на графе $\mathcal{Y}(m)$. Напомним, что радиальное вложение графа $\mathcal{Y}(m)$ в его границу Δ_m определяется формулой

$$i(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \left(\frac{\lambda_1}{n}, \dots, \frac{\lambda_m}{n}\right); \quad \lambda \in \mathcal{Y}_n(m). \tag{3.6.18}$$

Предложение. *Рассмотрим последовательность диаграмм* $\lambda^{(n)} \in \mathcal{Y}_n(m)$, *для которой существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} = \alpha_j; \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{3.6.19}$$

Тогда существует и предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{m-1} M_n^{(v)}(\lambda^{(n)}) = C_m \cdot \prod_{i<j} |\alpha_i - \alpha_j|^2 \prod_{j=1}^{m} \alpha_j^{v-m}, \tag{3.6.20}$$

где

$$C_m = \frac{\Gamma(mv)}{0!\,1!\dots(m-1)!} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(v-j+1)}. \tag{3.6.21}$$

Иначе говоря, слабый предел дискретных распределений $i(M_n^{(n)})$ на симплексе Δ_m существует и равен абсолютно непрерывной мере

$$\mu(d\alpha) = C_m \prod_{i<j} |\alpha_i - \alpha_j|^2 \prod_{j=1}^{m} \alpha_j^{v-m}\, d\alpha_1 \dots d\alpha_{m-1}. \tag{3.6.22}$$

Доказательство. Пользуясь известной формулой

$$\prod_{b\in\lambda} \frac{1}{h(b)} = \frac{\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{j=1}(\lambda_i + m - i)!}, \tag{3.6.23}$$

перепишем выражение (3.6.17) в форме

$$M_n^{(v)}(\lambda) = \frac{n!}{(mv)_n} \prod_{1\le i<j\le m} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)^2 \times \prod_{i=1}^{m} \frac{(v-i+1)_{\lambda_i}}{(\lambda_i + m - i)!} \times \prod_{i=1}^{m} \frac{(m-i+1)_{\lambda_i}}{(\lambda_i + m - i)!}.$$

Поскольку

$$\frac{(m-i+1)_{\lambda_i}}{(\lambda_i + m - i)!} = \frac{1}{(m-i)!},$$

можем записать

$$n^{m-1}\cdot M_n^{(v)}(\lambda)=n^{m(m-1)}\prod_{i<j}\frac{(\lambda_i-\lambda_j+j-i)^2}{n^2}\times\frac{(3.4.1)_n\,n^{m-1}}{(mv)_n}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{m}\frac{(v-i+1)_{\lambda_i}}{(m-i+1)_{\lambda_i}}\times\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{(m-i)!}\right)^2\sim$$

$$\sim n^{m^2-m}\cdot n^{m-1}\cdot n^{-mv+1}\cdot n^{m(v-m)}\times\frac{\Gamma(mv)}{\prod(m-i)!}\prod_{i<j}|\alpha_i-\alpha_j|^2\prod_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i^{v-m}}{\Gamma(v-i+1)}.$$

Мы пользуемся в этой выкладке асимптотической формулой

$$\frac{(v)_n}{(u)_n}\sim\frac{\Gamma(u)}{\Gamma(v)}n^{v-u};\quad n\to\infty. \tag{3.6.24}$$

Предложение доказано.

Следствие. Поскольку мера (3.6.22) – вероятностная, мы получили специальный случай интеграла Сельберга (3.6.11) при $\theta=1$.

Более общим образом, выписывая обобщенный интеграл Пуассона для центральной марковской цепи с вероятностями (3.6.15), получаем формулу

$$\begin{aligned}\int\cdots\int_{\tilde\Delta_m} s_\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\prod_{1\le i<j\le m}|\alpha_i-\alpha_j|^2\prod_{j=1}^{m}\alpha_j^{A-1}\,d\alpha_1\dots d\alpha_{m-1}=\\ =\frac{s_\lambda(1,...,1)}{\Gamma(n+mA+m(m-1))}\prod_{j=1}^{m}j!\,\Gamma(\lambda_j+A+m-j).\end{aligned} \tag{3.6.25}$$

6.3. Ветвление полиномов Джека и интеграл Сельберга.

В этом разделе мы выведем общий интеграл (3.6.3) по той же схеме, что и специальный случай $\theta=1$ в предыдущем. Придется, однако, изменить кратности дуг усеченного графа Юнга $\mathcal{Y}(m)$, сделав их зависящими от параметра θ. Воспользуемся для этой цели симметрическими полиномами Джека (см. [111, 112, 106, 159]).

Полиномы Джека $P_\lambda(x;\theta)$ можно определить, как предельные случаи полиномов Макдональда $P_\lambda(x;q,t)$ при условии, что $q=1+\varepsilon$, $t=1+\theta\varepsilon$ и $\varepsilon\to0$. Таким образом, единственное, что следует изменить в общем определении §7 гл.II, это формулу для билинейной формы (2.3.1): следует положить

$$<p_\lambda,p_\mu>=\delta_{\lambda\mu}\theta^{-l(\lambda)}z_\lambda, \tag{3.6.26}$$

где $l(\lambda)$ – число ненулевых строк диаграммы Юнга $\lambda=(1^{r_1},2^{r_2},\dots)$ и $z_\lambda=1^{r_1}\,r_1!\,2^{r_2}\,r_2!\,\dots$. Заметим, что полиномы Джека $J_\lambda(x,\theta)$, взятые за основу в статье [159], имеют другую нормировку:

$$\theta^n\,J_\lambda(x;\theta)=P_\lambda(x;\theta)\prod_{b\in\lambda}(a(b)+(l(b)+1)\theta), \tag{3.6.27}$$

где $a(b) = \lambda_i - j$ и $l(b) = \lambda'_j - i$ – соответственно длина руки и ноги крюка с вершиной в клетке $b \in \lambda$ из i-ой строки и j-ого столбца диаграммы λ. При $\theta = 1$ полиномы Джека совпадают с функциями Шура, $P_\lambda(x;1) = s_\lambda(x)$, а при $\theta = 0$ они вырождаются в мономиальные симметрические функции, $P_\lambda(x;0) = m_\lambda(x)$.
Формула Пьери для полиномов Джека имеет вид

$$s_{(1)} \cdot P_\lambda(x;\theta) = \sum_{\lambda:\lambda\nearrow\Lambda} \varkappa_\theta(\lambda,\Lambda) \cdot P_\Lambda(x;\theta), \tag{3.6.28}$$

где кратности определяются формулой

$$\varkappa_\theta(\lambda,\Lambda) = \prod_{ver} \left(\frac{a(b) + (l(b)+2)\,\theta}{a(b) + (l(b)+1)\,\theta}\right)\left(\frac{a(b)+1+l(b)\,\theta}{a(b)+1+(l(b)+1)\,\theta}\right). \tag{3.6.29}$$

Произведение $\prod_{ver}$ берется по всем клеткам столбца диаграммы λ, расположенного строго над вновь присоединяемой клеткой $b = \Lambda \setminus \lambda$. Начало графа ветвления полиномов Джека показано на рис.10.
Для размерностей графа Джека имеется формула крюков, обобщающая обычную формулу из [92]:

$$d(\lambda) = \frac{n!}{\prod_{b\in\lambda}(a(b)+1+l(b)\theta)}. \tag{3.6.30}$$

Эта формула получена Р.Стенли [159]; при $\theta = 1$ она вырождается в формулу крюков для размерностей графа Юнга.
Граница графа Джека $J^{(\theta)}$ не зависит от выбора параметра $\theta > 0$ и отождествляется с симплексом (3.6.27) из п.6.2. Напротив, ядро Пуассона от θ зависит и задается полиномами Джека:

$$\Phi(\lambda;\alpha) = P_\lambda(\alpha;\theta); \quad \lambda \in \mathcal{Y}(m), \alpha \in \Delta_m. \tag{3.6.31}$$

Следуя схеме предыдущего раздела, мы должны теперь определить зависящий от параметра θ аналог переходных вероятностей (3.6.15), задающий центральные марковские цепи на графах Джека $J^{(\theta)}$. Замечательно, что для этого можно воспользоваться следующей простой и наглядной идеей, одновременно придающей содержательную интерпретацию формальному параметру θ.
Будем рассматривать наряду с диаграммой Юнга $\lambda \in \mathcal{Y}$ ее сжатые варианты $\lambda(\theta)$, которые получаются путем сохранения всех горизонтальных размеров (длин строк) и умножения всех вертикальных размеров (длин столбцов) на параметр θ. Например, если $\lambda = (7^2, 4^4, 1^2)$ и $\theta = 1/2$, то $\lambda(1/2) = (7, 4^2, 1)$. В общем случае прямоугольная диаграмма $\lambda(\theta)$ уже не является диаграммой Юнга, однако ее минимумы $x_k(\theta)$ и максимумы $y_k(\theta)$ биективно соответствуют минимумам и

максимумам x_k, y_k исходной диаграммы Юнга λ. Заметим, что для сжатой диаграммы $\lambda(\theta)$ *содержанием* клетки (или, лучше сказать, точки) с координатами i, j следует считать величину

$$c_\theta(b) = (j-1) - (i-1)\theta. \tag{3.6.32}$$

При $\theta = 1$ оно совпадает с обычным содержанием. Будем обозначать содержание внешних и внутренних угловых клеток сжатой диаграммы $\lambda(\theta)$ через $x_k(\theta)$, $y_k(\theta)$ соответственно.

Воспользуемся для переходных вероятностей прежней формулой (3.6.32), но примененной не к диаграмме Юнга λ, а к ее сжатому варианту $\lambda(\theta)$. Это возможно, т.к. благодаря теореме 32 мы располагаем определением переходных вероятностей для любых прямоугольных диаграмм. Итак, положим

$$\mu_k(\theta) = \prod_{j<k} \frac{x_k(\theta) - y_j(\theta)}{x_k(\theta) - x_j(\theta)} \prod_{j>k} \frac{x_k(\theta) - y_{j-1}(\theta)}{x_k(\theta) - x_j(\theta)} \tag{3.6.33}$$

(это планшерелевские переходные вероятности для сжатой диаграммы $\lambda(\theta)$) и пусть

$$\pi_k(\theta) = \frac{(x_k(\theta) + m\theta)\,(x_k(\theta) + v)}{n\theta + mv\theta} \cdot \mu_k(\theta), \tag{3.6.34}$$

где $k = 1, 2, \ldots, d$ пробегает номера внешних углов диаграммы λ.

Из общей леммы о независимости первых трех моментов переходного распределения от формы прямоугольной диаграммы непосредственно следует, что формула (3.6.34) задает вероятностное распределение.

Пользуясь формулой (3.6.29) для кратностей дуг графа $J^{(\theta)}$ нетрудно убедиться, что марковская цепь с переходными вероятностями (3.6.34) центральна на соответствующем усеченном графе $J^{(\theta)}(m)$. При этом распределение состояния на n-ом этаже $J_n^{(\theta)}(m)$ задается формулой

$$M_n(\lambda) = \frac{n!}{(mv)_n} \prod_{b\in\lambda} \frac{(c_\theta(b) + m\theta)\,(v + c_\theta(b))}{(a + (1+l)\theta)\,(1 + a + l\theta)},$$

где $(x)_n = x\,(x+1)\ldots(x+n-1)$ – символ Похгаммера.

Переход к пределу при $n \to \infty$ совершается так же, как выше в формуле (3.6.20).

Предложение. *Пусть $v = A + (m-1)\theta$, $A > 0$ и для последовательности диаграмм Юнга $\lambda^{(n)}$ существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} = \alpha_j; \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.6.35}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n^{m-1}\, M_n^{(m,A)}(\lambda^{(n)}) = C_m(\theta) \prod_{1\le i<j\le m} |\alpha_i-\alpha_j|^{2\theta} \prod_{j=1}^{m} \alpha_j^{A-1}, \tag{3.6.36}$$

где нормировочная константа $C_m(\theta)$ *имеет вид*

$$C_m(\theta) = \frac{\Gamma(mA+m(m-1)\,\theta)\,\Gamma^m(\theta)}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(A+(m-j)\,\theta)\,\Gamma(j\,\theta)}. \tag{3.6.37}$$

Следствие. Предельная мера с плотностью (3.6.36) – вероятностная. Таким образом, мы получили интегралы Сельберга (3.6.2) и (3.6.3).

Выписывая обобщенный интеграл Пуассона для центральной марковской цепи с переходными вероятностями (3.6.34) на графе Джека $\mathcal{J}^{(\theta)}(m)$, получаем тождество

$$\int\cdots\int_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_m\ge 0\\ \alpha_1+\dots+\alpha_m=1}} P_\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_m;\theta) \prod_{1\le i<j\le m}|\alpha_i-\alpha_j|^{2\theta}\prod_{j=1}^{m}\alpha_j^{A-1}\,d\alpha_1\dots d\alpha_{m-1} =$$

$$= \frac{P_\lambda(\overbrace{1,\dots,1}^{m\ \text{раз}};\theta)}{\Gamma(n+mA+m(m-1)\theta)} \prod_{j=1}^{m} \frac{\Gamma(\lambda_j+A+(m-j)\,\theta)\,\Gamma(j\theta+1)}{\Gamma(\theta+1)}.$$

Глава IV

ДИАГРАММЫ ЮНГА В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА

§1. Прямоугольные диаграммы и рациональные дроби

В этом параграфе мы расширяем совокупность диаграмм Юнга $\mathcal{Y}$ до множества прямоугольных диаграмм $\mathcal{D}_0$. Мотивировкой служит тот факт, что прямоугольные диаграммы доставляют удобное и наглядное средство для изображения пар перемежающихся последовательностей вещественных чисел. Забегая вперед заметим, что в проблеме моментов Маркова прямоугольные диаграммы соответствуют *каноническим* мерам (термин Крейна – Нудельмана).

Для дальнейшего важно, что планшерелевские переходные вероятности, первоначально определенные только для диаграмм Юнга на основе теории представлений симметрических групп, столь же естественно определяются для любых прямоугольных диаграмм. Мы показываем, что моменты переходных распределений задаются расширенными симметрическими функциями, введенными ранее при формулировке теоремы Тома.

1.1. Прямоугольные диаграммы и перемежающиеся последовательности.

Пусть $v = \omega(u)$ – непрерывная кусочно-линейная функция (рис.21), для которой

(i) $\quad \omega'(u) = \pm 1$

(ii) $\quad \omega(u) = |u - z|$ для некоторого $z \in \mathbb{R}$ и достаточно больших $|u|$.

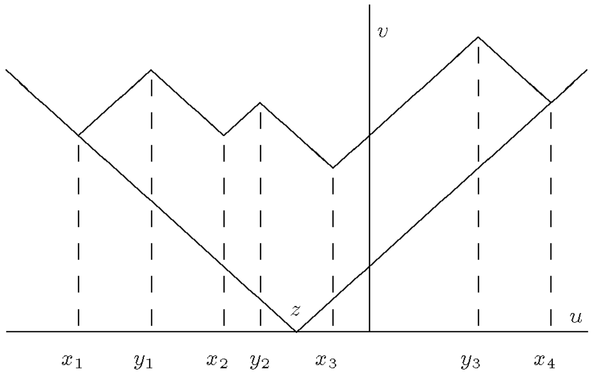


Рис.21 Прямоугольная диаграмма.

Будем называть подобные функции *прямоугольными диаграммами*, а число $z = z(\omega)$ – *центром* диаграммы ω. После смещения и поворота на 45^0 подграфик

$$D_\omega = \{(u, v) \colon |u - z| \leq v < \omega(u)\} \tag{4.1.1}$$

(см. рис.7) становится похож на диаграмму Юнга; это обстоятельство будет дальше использоваться и объясняет выбор термина. По определению, *площадью диаграммы* называется площадь $A = A(\omega)$ ее подграфика (4.1.1).

Мы воспользуемся прямоугольными диаграммами, чтобы сделать более наглядным относительное положение пары перемежающихся последовательностей. Если диаграмма ω задана, обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно, $y_1, \ldots, y_{n-1}$) точки локальных минимумов (максимумов) диаграммы ω. Эти последовательности взаимно разделяются:

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n. \tag{4.1.2}$$

Центр прямоугольной диаграммы с экстремумами (4.1.2) находится в точке $z = \sum x_k - \sum y_k$, а ее площадь равна

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (y_i - x_i)(x_j - y_{j-1}) \tag{4.1.3}$$

(за единицу площади принимается квадрат $\{|u| \le v < 2 - |u|\}$).
Обратно, для любой пары разделяющихся последовательностей (4.1.2) существует единственная прямоугольная диаграмма ω, имеющая их в качестве своих экстремумов. Действительно, возьмем за центр точку

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \tag{4.1.4}$$

и определим значения ω в точках изломов, полагая $\omega(x_1) = z - x_1$ и далее рекуррентно:

$$\omega(y_k) - \omega(x_k) = y_k - x_k, \quad \omega(x_{k+1}) - \omega(y_k) = y_k - x_{k+1} \tag{4.1.5}$$

при $k = 1, \ldots, n-1$. Тогда $\omega(x_n) = x_n - z$ и оба условия (i), (ii) в определении прямоугольной диаграммы выполняются. Единственность диаграммы с заданными экстремумами гарантируется условием (ii).
Помимо наглядности, диаграммное представление перемежающихся последовательностей имеет еще одно, более существенное, достоинство: очевидным образом определяются предельные диаграммы, характеризующие асимптотику взаимного разделения. Мы вернемся к этой теме в §5, 7.
Зафиксируем на будущее отрезок $[a, b]$ и обозначим через $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0[a, b]$ множество диаграмм, для которых $\omega(u) = |u - z|$ при $u \notin [a, b]$.
Диаграммы Юнга представляют собой специальный случай прямоугольных диаграмм, так что $\mathcal{Y} \subset \mathcal{D}_0$. Помимо условий (i), (ii) они характеризуются такими дополнительными требованиями:

(iii) все точки экстремумов $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ – целые;
(iv) центр находится в нуле, $z = 0$.

1.2. Переходная мера прямоугольной диаграммы.

Рассмотрим прямоугольную диаграмму $\omega \in \mathcal{D}_0$ с перемежающимися экстремумами

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n \tag{4.1.6}$$

и определим (положительные) веса меры μ в точках x_k как

$$\mu_k = \prod_i (x_k - y_i) / \prod_{i \ne k} (x_k - x_i), \tag{4.1.7}$$

$k = 1, \ldots, n$. Эти числа суть коэффициенты разложения дроби

$$\frac{\prod(u - y_i)}{\prod(u - x_i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{u - x_k} \tag{4.1.8}$$

на простейшие. Умножая обе части на u и переходя к пределу при $u \to \infty$ получаем, что $\sum \mu_k = 1$. Таким образом, мы приходим к дискретному вероятностному распределению.

Определение. Вероятностную меру μ, заданную нагрузками μ_k в точках x_k; $k = 1, \dots, n$ назовем *переходным распределением* прямоугольной диаграммы.

Важно подчеркнуть, что условие (4.1.6) перемежаемости нулей и полюсов рациональной дроби (4.1.8) необходимо и достаточно для того, чтобы все коэффициенты μ_k были положительны.

Предложение. Формула (4.1.8) устанавливает взаимно - однозначное соответствие между множеством $\mathcal{D}_0$ прямоугольных диаграмм (или, что то же, множеством перемежающихся последовательностей (4.1.6)) и множеством $\mathcal{M}_0$ дискретных вероятностных распределений с конечным носителем на вещественной прямой.

По распределению $\{\mu_k, x_k\}_{k=1}^n$ вторая последовательность $\{y_k\}$ восстанавливается, как совокупность корней полинома

$$\prod_{k=1}^{n-1}(u - y_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \prod_{i \neq k}(u - x_i). \tag{4.1.9}$$

Поскольку диаграммы Юнга – частный случай прямоугольных диаграмм, мы можем применить к ним данное выше определение переходной меры. В п.1.4 мы убедимся, что оно равносильно определению переходного распределения процесса планшерелевского роста, что и мотивирует расширительное использование термина.

В п.3.2 мы покажем, что установленная в (4.1.7), (4.1.9) биекция между подмножествами $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{M}_0$ продолжается по непрерывности до гомеоморфизма пополненных пространств $\mathcal{D}[a, b]$ на $\mathcal{M}[a, b]$. Для этого нам понадобятся моменты переходных распределений.

1.3. Моменты, как симметрические функции.

Обозначим через h_n обычные моменты дискретного вероятностного распределения $\{\mu_k, x_k\}_{k=1}^d$:

$$h_n = \sum_{k=1}^{d} x_k^n \, \mu_k. \tag{4.1.10}$$

Аналогичным образом, введем *моменты прямоугольной диаграммы*, с экстремумами в точках $\{x_k\}_{k=1}^d$, $\{y_k\}_{k=1}^{d-1}$, полагая

$$p_n = \sum_{k=1}^{d} x_k^n - \sum_{k=1}^{d-1} y_k^n. \tag{4.1.11}$$

Производящие функции моментов имеют вид

$$H(u) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, u^n = \sum_k \frac{\mu_k}{1 - u x_k} \tag{4.1.12}$$

и

$$S(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n}\, u^n = \ln \frac{\prod(1 - u y_i)}{\prod(1 - u x_i)}. \tag{4.1.13}$$

Из определяющей формулы (4.1.8) следует, что эти функции связаны соотношением

$$\sum_k \frac{\mu_k}{1 - u x_k} = \frac{\prod(1 - u y_i)}{\prod(1 - u x_i)}, \tag{4.1.14}$$

которое можно также переписать в форме

$$H(u) = e^{S(u)}. \tag{4.1.15}$$

Тождество (4.1.15) – одно из основных в теории симметрических функций (см.[49]). В этом контексте

$$h_n = h_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 \le \dots \le i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}$$

– полные однородные симметрические функции, а

$$p_n = p_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i^n$$

– степенные суммы Ньютона. Производящая функция для полиномов h_n имеет вид

$$H(u) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, u^n = \prod_i \frac{1}{1 - x_i u}.$$

Каждый симметрический многочлен от переменных $x = \{x_i\}$ допускает естественное расширение до многочлена от двух последовательностей аргументов $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$. Возникающие таким образом *расширенные симметрические функции* оказываются полезны в разнообразных ситуациях (λ-кольца, характеры группы подстановок $\mathfrak{S}_\infty$, см.[17]), в том числе в связи с прямоугольными диаграммами. Напомним их определения.

Расширенные степенные суммы определяются как

$$p_n(x; -y) = \sum_i x_i^n - \sum_i y_i^n, \tag{4.1.16}$$

а *расширенные полные однородные симметрические функции* выражаются через них стандартным образом:

$$h_n(x;-y) = \sum_{\rho} \prod_{k\geq 1} \frac{p_k^{r_k}(x;-y)}{k^{r_k}\, r_k!}, \tag{4.1.17}$$

где $\rho = (1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots)$ пробегает разбиения числа $n = \sum_{k\geq 1} k\, r_k$. Производящая функция для этих полиномов равна

$$H(u^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x;-y)\, u^{-n} = \frac{\prod(1-y_i/u)}{\prod(1-x_i/u)}.$$

Сравнивая это с формулой (4.1.14), переписанной в виде

$$\sum_k \frac{\mu_k}{1-x_k/u} = \frac{\prod(1-y_i/u)}{\prod(1-x_i/u)}, \tag{4.1.14}$$

получаем следующий результат.

Предложение. *Пусть $\omega \in \mathcal{D}_0$ – прямоугольная диаграмма, построенная по перемежающимся последовательностям $x = \{x_k\}$, $y = \{y_k\}$ и μ^ω – соответствующее переходное распределение. Тогда их моменты являются расширенными симметрическими многочленами от $x, -y$:*

$$p_n = p_n(x;-y); \quad h_n = h_n(x;-y). \tag{4.1.18}$$

Например, $h_1 = p_1 = \sum x_i - \sum y_i = z$ – центр диаграммы ω и среднее значение для меры μ, а $h_2 - h_1^2 = (p_2 - p_1^2)/2 = A$ – площадь диаграммы и дисперсия меры.

1.4. Связь с планшерелевским ростом диаграмм Юнга.

Мера Планшереля M бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_\infty$ определяется в §1 главы 3 как марковская цепь на графе Юнга $\mathcal{Y}$, заданная переходными вероятностями

$$p_{\lambda\Lambda} = \frac{\dim\Lambda}{(N+1)\dim\lambda}; \qquad \lambda\in\mathcal{Y}_N, \quad \lambda \nearrow \Lambda. \tag{4.1.19}$$

Условимся писать μ_k вместо $p_{\lambda\Lambda}$, если клетка, отличающая Λ от λ, находится над минимумом x_k диаграммы Юнга λ.

Предложение. *Переходное распределение меры Планшереля для диаграммы Юнга λ имеет веса*

$$\mu_k = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{x_k - y_i}{x_k - x_i} \prod_{i=k+1}^{n} \frac{x_k - y_{i-1}}{x_k - x_i}. \tag{4.1.20}$$

Таким образом, оно совпадает с переходной мерой диаграммы λ в смысле определения (4.1.8).

Доказательство опирается на формулу крюков, из которой следует, что

$$p_{\lambda\Lambda} = \prod h_{ij}(\lambda) / \prod h_{ij}(\Lambda). \tag{4.1.21}$$

Вычислим это отношение. Пусть r – номер строки и c – номер столбца новой клетки в диаграмме Λ. Поскольку для клеток вне r-ой строки или c-ого столбца длины крюков в диаграммах λ, Λ одинаковы, можно переписать (4.1.21) в виде

$$\mu_k = \prod_{i=1}^{c-1} \frac{h_{ri}}{h_{ri}+1} \prod_{j=1}^{r-1} \frac{h_{jc}}{h_{jc}+1}.$$

Множитель $\prod h_{ri}/(h_{ri}+1)$ распадается на произведения вида

$$\frac{x_k - y_m}{x_k - y_m + 1} \cdot \frac{x_k - y_m + 1}{x_k - y_m + 2} \cdots \frac{x_k - x_m - 1}{x_k - x_m} = \frac{x_k - y_m}{x_k - x_m},$$

откуда

$$\prod_{i=1}^{c-1} \frac{h_{ri}}{h_{ri}+1} = \prod_{m=1}^{k-1} \frac{x_k - y_m}{x_k - x_m}.$$

Аналогично,

$$\prod_{j=1}^{r-1} \frac{h_{jc}}{h_{jc}+1} = \prod_{m=k+1}^{n} \frac{x_k - y_{m-1}}{x_k - x_m}.$$

Итак, для диаграмм Юнга определение (4.1.8) через рациональные дроби в точности эквивалентно общегрупповому определению планшерелевских переходных вероятностей (4.1.19).

§2. Континуальные диаграммы и R-функции

Цель этого параграфа – пополнить пространство прямоугольных диаграмм $\mathcal{D}_0$ их равномерными пределами, которые мы называем континуальными диаграммами. Показано, что определение переходного распределения прямоугольной диаграммы распространяется по непрерывности на произвольные континуальные диаграммы. При этом установленная в §1 биекция между множествами $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{M}_0$ становится частью биективного соответствия между пространством всех диаграмм $\mathcal{D}$ и пространством $\mathcal{M}$ вероятностных распределений на вещественной прямой. Для установления этого соответствия применяется метод моментов.

2.1. Определение континуальных диаграмм.

Следуя [118] (см.также [12]) будем называть *диаграммами* непрерывные функции $v = \omega(u)$, обладающие двумя свойствами (рис.22):

(i) $|\omega(u_1) - \omega(u_2)| \le |u_1 - u_2|$;

(ii) $\omega(u) = |u - z|$ для некоторого $z \in \mathbb{R}$ и достаточно больших $|u|$.

Число $z = z(\omega)$ из условия (ii) назовем *центром диаграммы* ω; *площадь диаграммы* $A = A(\omega)$ определяется как площадь области

$$D_\omega = \{(u, v) \colon |u| \le v < \omega(u)\}, \tag{4.2.1}$$

т.е.

$$A(\omega) = \frac{1}{2} \int (\omega(u) - |u - z|)\, du \tag{4.2.2}$$

(за единицу площади принимается квадрат $\{|u| \le v < 2 - |u|\}$).

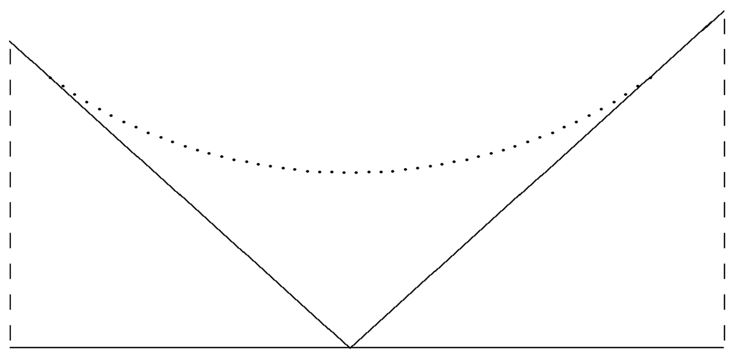


Рис.22 Континуальная диаграмма.

Зафиксируем отрезок $[a, b]$ и обозначим через $\mathcal{D} = \mathcal{D}[a, b]$ множество диаграмм, для которых $\omega(u) = |u - z|$ при $u \notin [a, b]$. Пространство $\mathcal{D}$ снабдим топологией равномерной сходимости.

Заметим, что если не фиксировать заранее промежуток $[a,b]$, то определение следует несколько изменить. По определению, последовательность диаграмм сходится, $\omega_n \to \omega$, если $\omega_n(u) \to \omega(u)$ равномерно по $u \in \mathbb{R}$ и существует такое $c > 0$, что $\omega_n(u) = |u|$ при $|u| > c$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Диаграмма ω называется *прямоугольной*, если она кусочно - линейна и $\omega'(u) = \pm 1$ при (почти) всех $u \in \mathbb{R}$ (см. рис.21). Прямоугольная диаграмма полностью определяется координатами своих минимумов $x_1, \ldots, x_n$ и максимумов $y_1, \ldots, y_{n-1}$, которые образуют пару перемежающихся последовательностей:

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n. \tag{4.2.3}$$

Обратно, любая пара перемежающихся последовательностей (4.2.3) однозначно определяет прямоугольную диаграмму ω с соответствующими экстремумами и центром в точке $z = \sum x_k - \sum y_k$. Площадь прямоугольной диаграммы равна

$$A = \sum_{1 \le i < j \le n} (y_i - x_i)(x_j - y_{j-1}).$$

Отметим, что подмножество $\mathcal{D}_0$ прямоугольных диаграмм плотно в $\mathcal{D}$.

2.2. R-функция диаграммы.

Для диаграммы $\omega \in \mathcal{D}[a,b]$ рассмотрим функцию $\sigma(u) = \frac{1}{2}(\omega(u) - |u|)$. Эта функция обладает следующими свойствами:

$$|\sigma(u_1) - \sigma(u_2)| \le |u_1 - u_2|,$$

$$\sigma'(u) = \frac{1}{2}\begin{cases} \omega'(u) + 1 \ge 0 & \text{при } u < 0 \\ \omega'(u) - 1 \le 0 & \text{при } u > 0, \end{cases}$$

$$\max_u \sigma(u) = \omega(0)/2,$$

$$\sigma(-\infty) = z/2; \quad \sigma(\infty) = -z/2.$$

Дифференциал $d\sigma(u) = \sigma'(u)\,du$ задает абсолютно непрерывный *заряд диаграммы* с носителем в интервале $[a,b]$; полная вариация заряда равна $|d\sigma| = \omega(0)$.

Определение. *R-функция диаграммы* $\omega \in \mathcal{D}[a,b]$ задается формулой

$$R_\omega(u) = \frac{1}{u} \exp \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-u} = \frac{1}{u} \exp \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(\omega(t) - |t|)}{t-u}. \tag{4.2.4}$$

Эта функция определена и голоморфна вне интервала $[a,b]$.

Пример 1. Пусть $\omega = \Omega$, где

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}), & \text{если } |u| \le 2 \\ |u|, & \text{если } |u| \ge 2; \end{cases} \tag{4.2.5}$$

тогда $R_\Omega(u) = (u - \sqrt{u^2 - 4})/2$ при $u \geq 2$.

Пример 2. Пусть диаграмма $\omega = \omega_p$ с центром в точке $z = p - q$ (где $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$) линейна на интервале $[-1, 1]$, то есть

$$\omega_p(u) = \begin{cases} 1 - uz & \text{при } |u| \leq 1 \\ |u - z| & \text{при } |u| \geq 1. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Тогда

$$d\sigma(t) = \begin{cases} q\, du & \text{при } -1 < u < 0 \\ -p\, du & \text{при } 0 < u < 1 \end{cases}$$

и $R_\omega(u) = (u + 1)^{-q}(u - 1)^{-p}$ при $u \geq 1$.

Пример 3. Пусть ω – прямоугольная диаграмма с центром z, построенная по паре перемежающихся последовательностей (4.2.3). Для любой гладкой функции f справедлив следующий вариант формулы Ньютона – Лейбница:

$$\int f'(t)\, d\sigma(t) = f(0) + \sum f(y_k) - \sum f(x_k). \tag{4.2.7}$$

Действительно, из $x_1 < 0 < x_n$ следует, что при некотором k либо $y_{k-1} \leq 0 \leq x_k$, либо $x_k \leq 0 \leq y_k$. В первом случае обе части (4.2.7) равны

$$\sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{y_i} f'(t)\, dt - \int_0^{x_k} f'(t)\, dt - \sum_{k+1}^{n} \int_{y_{i-1}}^{x_i} f'(t)\, dt;$$

второй случай аналогичен.

Найдем R-функцию прямоугольной диаграммы.

Лемма. *Пусть прямоугольная диаграмма построена по корням полиномов*

$$P(u) = \prod_{k=1}^{n} (u - x_k), \quad Q(u) = \prod_{k=1}^{n-1} (u - y_k).$$

Тогда $R(u) = Q(u)/P(u)$.

Доказательство: достаточно применить (4.2.7) к функции $f(t) = \ln(u - t)$.

2.3. Переходная мера континуальной диаграммы.

Обозначим через $\mathcal{M} = \mathcal{M}[a, b]$ пространство вероятностных мер на отрезке $[a, b]$, снабженное слабой топологией и пусть $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ – плотное подмножество мер с конечным носителем.

Определение. *R-функцией меры* $\mu \in \mathcal{M}[a, b]$ назовем ее преобразование Коши – Стилтьеса

$$R_\mu(u) = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{u - t}. \tag{4.2.8}$$

Как и R-функция диаграммы, она определена и голоморфна вне отрезка $[a, b]$. Пример: для дискретной меры $\mu \in \mathcal{M}_0$ с нагрузками μ_k в точках x_k (где $k = 1, \ldots, n$)

$$R_\mu(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{u - x_k}. \tag{4.2.9}$$

Определение. Вероятностную меру μ назовем *переходной мерой* диаграммы ω, если их R-функции совпадают:

$$R_\mu(u) = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{u - t} = \frac{1}{u} \exp \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(\omega(t) - |t|)}{t - u} = R_\omega(u). \tag{4.2.10}$$

Теорема ([118],[47]). *Для любой диаграммы $\omega \in \mathcal{D}[a, b]$ переходная мера $\mu = \mu^{(\omega)}$ существует, единственна и сосредоточена на отрезке $[a, b]$. Отображение $\omega \mapsto \mu^{(\omega)}$ устанавливает гомеоморфизм пространства $\mathcal{D}[a, b]$ на $\mathcal{M}[a, b]$.*

Предпошлем доказательству теоремы несколько примеров.

Пример 1. Распределение $d\mu(u) = (2\pi)^{-1}\sqrt{4 - u^2}\, du$ с полукруговой плотностью на отрезке $[-2, 2]$ является переходной мерой для диаграммы Ω (пример 1, п.2.2), поскольку при $u \geq 2$

$$R_\mu(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4 - t^2}\, dt}{u - t} = (u - \sqrt{u^2 - 4})/2.$$

Пример 2. Переходной мерой для 'треугольной' диаграммы из примера 2, п.2.2 служит бета-распределение с плотностью

$$\phi_p(u) = \frac{\sin \pi p}{\pi} (1 + u)^{-q} (1 - u)^{-p}$$

на отрезке $[-1, 1]$. Действительно, из основного интегрального представления гипергеометрической функции и тождества

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \pi / \sin \pi p = \pi / \sin \pi q$$

имеем:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\phi_p(t)\, dt}{u - t} = \frac{1}{u + 1} F(1, p; 1; \frac{2}{u + 1}) = (u + 1)^{-q} (u - 1)^{-p}.$$

Пример 3. Сравнивая (2.2.4) и (4.2.9) заключаем, что переходная мера μ для прямоугольной диаграммы ω дискретна, причем определяющее соотношение (4.2.10) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{u - x_k} = \frac{\prod (u - y_k)}{\prod (u - x_k)}. \tag{4.2.11}$$

Нагрузки μ_k меры μ располагаются в минимумах x_k диаграммы ω и совпадают с коэффициентами разложения рациональной дроби в сумму простейших дробей. Левая и правая части в (4.2.11) определяют друг друга однозначно; при этом положительность коэффициентов μ_k равносильна свойству перемежаемости экстремумов (4.2.3). Выпишем переходные формулы явно:

$$\mu_k = \frac{\prod_i (x_k - y_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)} \tag{4.2.12}$$

и

$$\prod_{k=1}^{n-1}(u - y_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \prod_{i\neq k}(u - x_i). \tag{4.2.13}$$

Покажем, что биекция, установленная этими формулами между подмножествами $\mathcal{D}_0$ и $\mathcal{M}_0$, продолжается по непрерывности до гомеоморфизма $\mathcal{D}[a,b]$ на $\mathcal{M}[a,b]$. Для этого удобно перейти к моментам.

2.4. Моменты континуальной диаграммы.

Конечная мера μ на отрезке $[a,b]$ однозначно определяется своей моментной последовательностью $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, где

$$h_m = h_m(\mu) = \int_a^b t^m \, d\mu(t) \tag{4.2.14}$$

(этот факт известен, как единственность решения степенной проблемы моментов Хаусдорфа). При этом слабая сходимость мер $\mu_n \to \mu$ равносильна сходимости моментов: $h_k(\mu_n) \to h_k(\mu)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathbb{R}^\infty$ – пространство последовательностей с топологией покоординатной сходимости. Тогда (4.2.14) задает гомеоморфизм пространства $\mathcal{M}[a,b]$ на замкнутое подмножество $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathbb{R}^\infty$ моментных последовательностей. Последовательности из $\tilde{\mathcal{M}}$ можно охарактеризовать серией алгебраических неравенств, выражающих через моменты неотрицательность интегралов $\int_a^b (b-t)^k (t-a)^m \, d\mu(t)$, но нам это не понадобится.

Производящая функция моментов меры μ задается рядом

$$H(u) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\mu)\, u^{-n}, \tag{4.2.15}$$

сходящимся при достаточно больших $|u|$. Производящая функция и R - функция распределения μ,

$$R(u) = \int \frac{d\mu(t)}{u-t},$$

связаны соотношением $H(u) = u\,R(u)$, то есть

$$H(u) = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{1 - t/u}. \tag{4.2.16}$$

Опишем теперь моментное вложение пространства диаграмм $\mathcal{D}$ в $\mathbb{R}^\infty$. По определению, *моментами диаграммы* $\omega \in \mathcal{D}[a,b]$ назовем числа $\{p_n\}_{n=1}^\infty$, где

$$p_m = p_m(\omega) = -\frac{m}{2} \int_a^b t^{m-1}\, d(\omega(t) - |t|) = -m \int_a^b t^{m-1}\, d\sigma(t). \tag{4.2.17}$$

Назовем ряд

$$S(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{p_n(\omega)}{n} u^{-n} \tag{4.2.18}$$

производящей функцией моментов диаграммы ω. Этот ряд сходится при достаточно больших $|u|$, причем

$$S(u) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(\omega(t) - |t|)}{t - u} = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t - u}. \tag{4.2.19}$$

Отображение $\omega \mapsto \{p_n(\omega)\}_{n=1}^\infty$ задает гомеоморфизм пространства $\mathcal{D}[a,b]$ на замкнутое подмножество $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}^\infty$. Действительно, поскольку полная вариация заряда $|d\sigma| = \omega(0)$ равномерно ограничена для $\omega \in \mathcal{D}[a,b]$, сходимость моментов эквивалентна слабой сходимости зарядов. Ввиду условия равномерной липшицевости (i) из определения диаграммы, отсюда следует равномерная сходимость диаграмм на промежутке $[a,b]$ (а следовательно, и на всей прямой).
Соотношение

$$H(u) = \sum_{n=0}^\infty h_n\, u^{-n} = \exp \sum_{n=1}^\infty \frac{p_n}{n} u^{-n} = \exp S(u) \tag{4.2.20}$$

задает гомеоморфизм $\mathrm{Exp}\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, переводящий последовательность $\{p_n\}$ в $\{h_n\}$ (h_n и p_n выражаются друг через друга полиномиально). Из (4.2.16), (4.2.19) и (4.2.11) следует, что $\mathrm{Exp}(\tilde{\mathcal{D}}_0) = \tilde{\mathcal{M}}_0$, причем отображение Exp переводит моменты диаграммы ω в моменты распределения $\mu = \mu^{(\omega)}$. Поскольку множество $\tilde{\mathcal{D}}_0$ моментных последовательностей прямоугольных диаграмм плотно в $\tilde{\mathcal{D}}$ и соответствующее множество $\tilde{\mathcal{M}}_0$ для мер с конечным носителем плотно в $\tilde{\mathcal{M}}$, заключаем, что $\mathrm{Exp}(\tilde{\mathcal{D}}) = \tilde{\mathcal{M}}$ и теорема п.2.3 доказана. Обозначим построенный гомеоморфизм через $\mathrm{Exp}_{a,b}\colon \mathcal{D}[a,b] \to \mathcal{M}[a,b]$.
Центр и площадь диаграммы выражаются через ее моменты следующим образом:

$$z = p_1, \quad A = \frac{1}{2}(p_2 - p_1^2). \tag{4.2.21}$$

Для z это получается из (4.1.18), а для A – интегрированием по частям:

$$A = \frac{1}{2}\int(\omega(u) - |u-z|)\,du = -\frac{1}{2}\int u\,d(\omega(u) - |u-z|) =$$
$$= -\int u\,d\sigma(u) - \frac{1}{2}\int u\,d(|u| - |u-z|) = \frac{p_2}{2} - \frac{z^2}{2}.$$

2.5. Поведение диаграмм при сдвигах и подобиях.

Если прямоугольная диаграмма ω построена по паре последовательностей (1.1.2), то (при $c > 0$) функция

$$\tilde{\omega}(u) = \frac{1}{c}\omega(cu+b) \tag{4.2.22}$$

тоже является прямоугольной диаграммой и отвечает наборам

$$\tilde{x}_k = \frac{x_k - b}{c}, \quad \tilde{y}_k = \frac{y_k - b}{c}. \tag{4.2.23}$$

Ее центр смещен в точку $\tilde{z} = (z-b)/c$, площадь $\tilde{A} = A/c^2$ сжата в c^2 раз, а заряд и R-функция задаются формулами

$$d\tilde{\sigma}(u) = \frac{1}{c}d\sigma(cu+b),$$

$$\tilde{R}(u) = c\,R(cu+b). \tag{4.2.24}$$

Все эти формулы (кроме, разумеется, (4.2.23)) остаются верны и для произвольных (непрерывных) диаграмм.

2.6. Вычисления для закона арксинуса и полукругового распределения.

Из всех диаграмм для нас важнейшей является

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u\arcsin\frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}), & \text{если } |u| \le 2 \\ |u|, & \text{если } |u| \ge 2. \end{cases}$$

Эта диаграмма имеет центр в нуле и единичную площадь.

Предложение. *Моменты диаграммы Ω равны*

$$p_{2m-1} = 0, \quad p_{2m} = \binom{2m}{m}; \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{4.2.25}$$

Доказательство. Запишем определение моментов p_n в виде

$$p_n = -\int \sigma'(u)\,du^n.$$

Ввиду четности функции Ω все ее нечетные моменты равны нулю. Поскольку $\Omega'(u) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{u}{2}$ для $|u| \le 2$, при четном $n = 2m$ имеем

$$p_{2m} = -2\int_{\mathbb{R}+} \sigma'(u)\, du^{2m} = \int_0^2 \left(1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{u}{2}\right) du^{2m}.$$

Замена переменной $u = 2\sin\varphi$ и интегрирование по частям дают

$$p_{2m} = 2^{2m}\int_0^{\pi/2} (1 - 2\varphi/\pi)\, d\sin^{2m}\varphi = 2^{2m-1}\pi\int_0^{\pi/2} \sin^{2m}\varphi\, d\varphi = \\ = \frac{2^{2m}(2m-1)!!}{(2m)!!} = \frac{(2m)!}{m!\, m!}.$$

Предложение доказано.

Следствие. *Производящая функция диаграммы Ω равна*

$$S_\Omega(x) = \ln(x/2) + \ln(x - \sqrt{x^2 - 4}). \qquad (4.2.26)$$

Доказательство. Используя биномиальное тождество

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} x^{2m}$$

находим, что производная левой части равна

$$S'_\Omega(x) = -\frac{1}{x}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-2m} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

и совпадает с производной правой части. Нетрудно проверить, что пределы обеих частей (4.2.26) при $x \to \infty$ равны нулю и поэтому также совпадают.

Вычислим теперь характеристики полукругового закона.

Предложение. *Для полукругового распределения*

$$d\mu(u) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - u^2}\, du, \quad |u| \le 2 \qquad (4.2.27)$$

моменты имеют вид

$$h_{2m+1} = 0, \quad h_{2m} = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}; \quad m = 0, 1, 2, \dots . \qquad (4.2.28)$$

Производящая функция моментов полукругового распределения равна

$$H(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \sqrt{1 - (2/x)^2}\right), \quad x > 2. \qquad (4.2.29)$$

Доказательство. Ясно, что нечетные моменты равны нулю. Замена переменной $u = 2\sin\varphi$ дает

$$h_{2m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} u^{2m}\sqrt{4-u^2}\,du = \frac{2^{2m+2}}{\pi}\int_0^{\pi/2}(\sin^{2m}\varphi - \sin^{2m+2}\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \frac{2^{2m+2}}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} - \frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\right) = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.$$

Из биномиального тождества имеем

$$\frac{1}{s}(1-\sqrt{1-s^2}) = \frac{s}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\frac{s^{2m}}{m+1}.$$

Используя подстановку $s = 2/x$ и доказанную формулу (4.2.28), получаем

$$H(x) = \sum_{m=0}^{\infty} h_{2m}\,x^{-2m} = \frac{x^2}{2}\left(1-\sqrt{1-(2/x)^2}\right).$$

Следствие. *Для диаграммы Ω переходной мерой служит полукруговой закон* (4.2.27):

$$d\mu_\Omega(u) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-u^2}\,du, \quad |u| \le 2. \tag{4.2.30}$$

Заметим, что числа $c_m = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$ часто встречаются в комбинаторных задачах и известны как *числа Каталана.*

В некоторых случаях вместо производящей функции (4.2.15) удобнее использовать R-функцию

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\,x^{-(n+1)} = \int\frac{d\mu(u)}{x-u}. \tag{4.2.31}$$

Для диаграммы Ω эта функция равна

$$R_\Omega(x) = \frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-4}). \tag{4.2.32}$$

§3. Соответствие М.Г.Крейна

В этом параграфе мы описываем биекцию между континуальными диаграммами и вероятностными мерами, возникающую как непрерывное продолжение соответствия между диаграммой Юнга и ее переходным распределением в процессе планшерелевского роста. Затем мы приводим альтернативные описания этого же соответствия, обнаруженные разными авторами в совершенно иных задачах. Одно из наиболее известных основано на идеях М.Г.Крейна, и мы условимся называть нашу биекцию *соответствием Крейна.*

Связь диаграммного подхода с другими описаниями полезна в обоих направлениях: она позволяет обобщить комбинаторные результаты о подстановках и, с другой стороны, использовать свойства преобразования Крейна в асимптотических задачах теории представлений симметрических групп.

В п.3.1 дано аксиоматическое описание соответствия Крейна, а в пп.3.2 - 3.3 приведено описание проблем моментов Хаусдорфа и Маркова и относящееся к их связи оригинальное построение из книги [47]. Выше в §2 мы получили нашу биекцию путем предельного перехода от меры Планшереля симметрической группы. В п.3.4 она возникает в статистической задаче о распределениях интегралов по случайным мерам Дирихле, а в п.3.5 мы отмечаем немногие явные формулы для соответствия Крейна.

В п.3.6 показано, что переходные вероятности меры Планшереля группы $\mathfrak{S}_\infty$ стремятся, с ростом диаграммы Юнга, к распределению с полукруговой плотностью. Здесь существенно используется теорема из [12], [138] о предельной форме больших случайных диаграмм.

3.1. Аксиоматическое описание соответствия.

Обозначим через $\mathcal{M} = \mathcal{M}[a, b]$ пространство вероятностных мер на отрезке $[a, b]$, снабженное слабой топологией и пусть $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ – плотное подмножество мер с конечным носителем.

Определение. *R-функцией меры $\mu \in \mathcal{M}[a, b]$* назовем функцию

$$R_\mu(u) = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{u-t}. \tag{4.3.1}$$

Как и R-функция диаграммы она определена и голоморфна вне отрезка $[a, b]$.

Пример: для дискретной меры $\mu \in \mathcal{M}_0$ с нагрузками μ_k в точках x_k (где $k = 1, \dots, n$)

$$R_\mu(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{u-x_k}. \tag{4.3.2}$$

Напомним, что R-функцией диаграммы $\omega \in \mathcal{D}$ мы называем производящую функцию ее моментов

$$R_\omega(u) = \frac{1}{u}\, \exp \frac{1}{2} \int \frac{d(\omega(t) - |t|)}{t - u}. \tag{4.3.3}$$

Для прямоугольной диаграммы $\omega \in \mathcal{D}_0$ R-функцию можно записать в виде

$$R_\omega(u) = \frac{\prod(u - y_k)}{\prod(u - x_k)}, \tag{4.3.4}$$

где $x_1 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < x_n$ – экстремумы этой диаграммы.

Согласно теореме п.2.3 биективное соответствие между диаграммами $\omega \in \mathcal{D}$ и их переходными мерами $\mu = \mu^\omega \in \mathcal{M}$ можно аксиоматически определить тождеством

$$R_\omega(u) = \frac{1}{u} \exp \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(\omega(t) - |t|)}{t - u} = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{u - t} = R_\mu(u), \tag{4.3.5}$$

справедливым для значений u вне основного промежутка $[a, b]$. Для прямоугольных диаграмм оно сводится к формуле

$$\frac{\prod(u - y_k)}{\prod(u - x_k)} = \sum_k \frac{\mu_k}{u - x_k}. \tag{4.3.6}$$

Таким образом, тождество (4.3.5) обобщает разложение рациональной дроби на простейшие.

3.2. Проблема моментов А.А.Маркова.

Проблема моментов Хаусдорфа состоит в описании множества моментных последовательностей

$$h_n = \int_0^1 t^n\, d\mu(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{4.3.7}$$

где μ – произвольная борелевская мера на отрезке (и в восстановлении меры по ее моментам). Решение этой задачи хорошо известно. В менее известной проблеме моментов Маркова требуется описать множество моментных последовательностей

$$p_n = \int_0^1 t^n\, dr(t) \tag{4.3.8}$$

при условии, что мера $dr(t) = r'(t)\, dt$ абсолютно непрерывна и имеет ограниченную плотность $0 \le r'(t) \le 1$.

Для наших целей основной интерес представляет связь проблем Хаусдорфа и Маркова: вторая нетривиальным образом сводится к первой [47]. Для этого введем производящую функцию моментов

$$S(u) = \int_0^1 \frac{dr(t)}{t - u} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}\, u^{-n} \tag{4.3.9}$$

и заметим, что в силу сделанных предположений $-\pi < \operatorname{Im} S(u) < 0$. Поэтому экспонента $H(u) = \exp S(u)$ является резольвентной функцией, то есть голоморфна в верхней полуплоскости и $\operatorname{Im} H(u) \leq 0$ при $\operatorname{Im} u > 0$. Из известного интегрального представления таких функций следует, что существует и единственна вероятностная мера μ, для которой

$$\exp \int_0^1 \frac{dr(t)}{t-u} = \int_0^1 \frac{d\mu(t)}{1-t/u}. \tag{4.3.11}$$

Моменты из проблемы Маркова нетрудно выразить через моменты построенной меры μ, переписав определяющее соотношение (4.3.11) в виде

$$\exp \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}\, u^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\, u^{-n}. \tag{4.3.12}$$

Тем самым описание моментных последовательностей Маркова сведено к хорошо изученной проблеме Хаусдорфа.

Связь между мерами dr и $d\mu$ особенно упрощается в специальном случае, когда плотность $r'(t)$ равна единице на подинтервалах $(0, x_1)$, ..., (y_{n-1}, x_n) и нулю на дополнительных интервалах (x_1, y_1), ..., $(x_n, 1)$. Тогда функция $H(u)$ рациональна, а мера μ сводится к нагрузкам величины

$$\mu_k = \prod_i (x_k - y_i) / \prod_{i \neq k} (x_k - x_i) \tag{4.3.13}$$

в точках x_k; $k = 1, \ldots, n$. Определяющее тождество (4.3.11) задает разложение функции $H(u)/u$ на простейшие дроби:

$$\frac{\prod u - y_i}{\prod u - x_i} = \sum_k \frac{\mu_k}{u - x_k}. \tag{4.3.14}$$

В этой работе мы используем диаграммы вместо плотностей $r'(u)$ в проблеме моментов Маркова. Приведем для сравнения вывод формулы (4.3.11) из [47].

3.3. Формула Крейна – Нудельмана.

Доказательство в [47] опирается на теоремы о представлениях резольвентных функций. Говорят, что функция $R(u)$ принадлежит классу $\mathcal{R}[a, b]$, если

1) она голоморфна при $\operatorname{Im} u > 0$

2) $\operatorname{Im} R(u) \geq 0$ при $\operatorname{Im} u > 0$

3) $R(u) \geq 0$ при $u < a$ и $R(u) \leq 0$ при $u > b$.

Известно ([47], теорема П6), что такие функции представимы в виде

$$R(u) = \int_a^b \frac{d\mu(t)}{t - u},$$

где μ – неотрицательная мера на $[a, b]$; это представление однозначно.

Функция $H(u)$ принадлежит классу $\mathcal{S}[a, b]$, если

1) она голоморфна при $\operatorname{Im} u > 0$

2) $\operatorname{Im} H(u) \geq 0$ при $\operatorname{Im} u > 0$

3) $H(u) \geq 0$ при $u < a$ и при $u > b$.

Как следует из [47], теорема П7, этот класс совпадает с классом функций вида

$$H(u) = (b - u) \int_a^b \frac{d\mu(t)}{t - u}, \tag{4.3.14}$$

где μ – однозначно определенная неотрицательная мера на $[a, b]$.

Таким образом, формула

$$H(u) = (b - u)\, R(u) \tag{4.3.15}$$

устанавливает биекцию между классами $\mathcal{S}[a, b]$ и $\mathcal{R}[a, b]$.

Перепишем левую часть (4.3.5) в виде

$$\frac{1}{u} \exp \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d(\omega(t) - |t|)}{t - u} = \frac{1}{u - b} \exp \int_a^b \frac{dr(t)}{t - u}$$

где $r(t) = \frac{1}{2}(\omega(t) + t)$. Поскольку для $u = \xi + i\eta$ имеем $\operatorname{Im}(t - u)^{-1} = \eta/((t - \xi)^2 + \eta^2)$ и

$$0 < \operatorname{Im} \int_a^b \frac{dr(t)}{t - u} < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta\, dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2} = \pi$$

при $\eta > 0$, функция $H(u) = \exp S(u)$, где $S(u) = \int (t - u)^{-1}\, dr(t)$, принадлежит классу $\mathcal{S}[a, b]$ и (4.3.5) следует из (4.3.15).

3.4. Распределение средних по случайным мерам Дирихле.

Вместо диаграммы $\omega \in \mathcal{D}$ иногда удобнее рассматривать функцию

$$\tau(u) = \frac{1}{2}(1 + \omega'(u)), \tag{4.3.16}$$

интерпретируя ее как функцию распределения знакопеременной меры (заряда). Мы называем τ *зарядом Релея* диаграммы ω. Диаграмма восстанавливается по своему заряду Релея по формуле

$$\omega(u) = \int_{-\infty}^{u} \tau(u)\, du + \int_u^{\infty} (1 - \tau(u))\, du.$$

Для прямоугольной диаграммы $\omega \in \mathcal{D}_0$ заряд составлен из единичных нагрузок в точках минимумов x_k и отрицательных единичных нагрузок -1 в точках максимумов y_k.

Моменты диаграммы ω совпадают с моментами ее заряда Релея τ,

$$p_m = -\frac{m}{2} \int t^{m-1}\, d(\omega(t) - |t|) = \int t^m \, d\tau(t).$$

Определяющее тождество (4.3.5) принимает форму

$$e^{-\int \ln(1-uz)\, d\tau(u)} = \int \frac{d\mu(u)}{1-uz}. \tag{4.3.17}$$

Характеристическое свойство заряда Релея указано в формуле (3.2) из введения, §4.

Третий подход к соответствию Крейна связан со случайными мерами Дирихле, возникающими в задачах непараметрической статистики (см. [91]). В качестве простого примера рассмотрим дискретное вероятностное распределение τ с нагрузками $\tau_1, \dots, \tau_n$ в точках вещественной оси $x_1, \dots, x_n$. С ним связана вероятностная мера на $(n-1)$-мерном симплексе

$$\Delta_n = \left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n_+ \colon \sum \alpha_k = 1\right\},$$

заданная *плотностью Дирихле*

$$\frac{\Gamma(\tau_1 + \ldots + \tau_n)}{\Gamma(\tau_1)\ldots\Gamma(\tau_n)}\, \alpha_1^{\tau_1 - 1}\, \alpha_2^{\tau_2 - 1} \ldots \alpha_n^{\tau_n - 1}. \tag{4.3.16}$$

Обозначим через μ распределение вероятностей линейного функционала

$$X(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \alpha_k \tag{4.3.17}$$

на симплексе Δ_n. Известно (см. [80, 82]), что исходное распределение τ связано с распределением μ как раз по формуле Крейна (4.3.17).

Совершенно аналогично, с каждой вероятностной мерой τ на отрезке вещественной прямой можно связать (см. [131], гл.9) случайный *процесс Дирихле*, реализациями которого являются случайные вероятностные меры. Ожидаемое значение

$$X = \int x \, d\alpha(x) \tag{4.3.18}$$

по случайной мере α является случайной величиной; обозначим ее распределение через μ. Тогда τ и μ связаны по формуле (4.3.17).

Известно (см. [82]), что случайная величина X конечна с вероятностью единица тогда и только тогда, когда

$$\int \ln(1 + |t|)\, \tau(dt) < \infty.$$

Еще один общий факт состоит в следующем: если положительный заряд τ имеет ненулевую дисперсию, то распределение случайной величины X абсолютно непрерывно.

Приведем ряд частных примеров, заимствованных из [82].

Пример 1. Пусть заряд τ задается нагрузками $1-\theta, \theta$ в точках $0, 1$. Тогда случайная величина (4.3.18) имеет бета-распределение $\beta(1-\theta, \theta)$. В этом примере диаграмма ω треугольна, ср. пример 2 в п.2.2.

Пример 2. Предположим, что τ – равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Тогда величина ξ распределена с плотностью

$$\frac{e}{\pi}(1-x)^{-1+x}\ x^{-x}\ \sin \pi x; \quad 0 < x < 1.$$

Пример 3. Возьмем в качестве τ функцию распределения случайной величины $e^C\,/\,(1+e^C)$, где C имеет распределение Коши. Тогда распределение величины (4.3.18) равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Пример 4. Если τ – распределение Коши, то переходная мера μ также является распределением Коши. Это свойство характеризует распределение Коши однозначно.

Пример 5. Предположим, что τ – дискретная вероятностная мера с нагрузками τ_k в точках x_k; $k = 1, \ldots, n$. Тогда переходное распределение μ задается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\pi \sum_{x_k < x} \tau_k\right) \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|^{-\tau_k}$$

на любом отрезке $[a, b]$, содержащем носитель τ. В этом примере, обобщающем пример 1 выше и пример 2 из п.2.2, диаграмма ω кусочно - линейна и выпукла.

3.5. Явные формулы.

Для диаграмм общего вида $\omega \in \mathcal{D}$ переходная мера $\mu = \mu^{(\omega)}$ определена тождеством (4.3.3) неявно. Хотелось бы иметь явные формулы, подобные формуле (4.2.12) в случае прямоугольных диаграмм.

Аппроксимируя диаграмму $\omega \in \mathcal{D}$ прямоугольными диаграммами и переходя к пределу в (4.2.12), нетрудно получить следующее выражение для нагрузок дискретной части переходной меры:

$$\mu^{(\omega)}\{t\} = \exp \int_a^b \frac{d\sigma_t(u)}{u - t}, \tag{4.3.19}$$

где $\sigma_t(u) = (\omega(u) - |u - t|)/2$.

Приведем также гипотетическую формулу для плотности $\varphi^{(\omega)}$ абсолютно непрерывной компоненты переходной меры $d\mu^{(\omega)(t)} = \varphi^{(\omega)}(t)\,dt$ диаграммы ω:

$$\varphi^{(\omega)}(t) = \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi \omega'(t)}{2}\ \frac{\exp \frac{1}{2} \int_a^b \frac{d\omega(u)}{u-t}}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}. \tag{4.3.20}$$

3.6. Полукруговой закон для переходных распределений процесса планшерелевского роста.

В §2 главы 3 было показано, что в результате случайного роста почти все диаграммы Юнга приобретают (после нормировки площади) единую универсальную форму, близкую к диаграмме Ω. Более точно, справедлива

Теорема ([12], [138]). *Для почти всех по мере Планшереля M случайных таблиц $t = (\lambda_1, \dots, \lambda_N, \dots) \in \mathcal{T}$ равномерно по $u \in \mathbb{R}$ существует предел*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \lambda_N(u\sqrt{N}) = \Omega(u).$$

Используя непрерывность соответствия между диаграммами и переходными вероятностями, можно переформулировать этот результат в виде "полукругового закона" для переходных вероятностей меры Планшереля.

Следствие. *Пусть μ_N – переходное распределение, отвечающее диаграмме Юнга λ_N. Тогда для почти всех по мере Планшереля случайных таблиц $t = (\lambda_1, \dots, \lambda_N, \dots) \in \mathcal{T}$ предел*

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\{\tau\colon \tau < u\sqrt{N}\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{u} \sqrt{4-\tau^2}\, d\tau \qquad (4.3.21)$$

существует при всех $|u| \le 2$.

Доказательство непосредственно следует из предыдущей теоремы, непрерывности соответствия Крейна и вычислений в п.2.6.

§4. Процесс усадки отрезка

Здесь описан вероятностный алгоритм сжатия отрезка $I = [a, b]$, определяемый заданной на нем диаграммой $\omega \in \mathcal{D}[a, b]$. Он представляет собой марковский процесс перехода от подынтервала $[\alpha, \beta] \subset I$ к меньшему подынтервалу; реализацией процесса служит последовательность $\{[\alpha_n, \beta_n]\}_{n=0}^{\infty}$ сужающихся промежутков. С вероятностью единица пересечение $\bigcap[\alpha_n, \beta_n]$ содержит единственную точку X. Основной результат состоит в том, что распределение случайной величины X совпадает с переходной мерой $\mu^{(\omega)} = \mathrm{Exp}(\omega)$, определенной в §2.

Начнем с простейшей ситуации, когда диаграмма ω прямоугольна.

4.1. Дискретный случай.

Рассмотрим пару перемежающихся последовательностей

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n \tag{4.4.1}$$

и определим (положительные) веса меры μ в точках x_k как

$$\mu_k = \prod_i (x_k - y_i) / \prod_{i \neq k} (x_k - x_i), \tag{4.4.2}$$

$k = 1, \ldots, n$. Эти числа суть коэффициенты разложения дроби

$$\frac{\prod(u - y_i)}{\prod(u - x_i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{u - x_k} \tag{4.4.3}$$

на простейшие. Умножая обе части на u и переходя к пределу при $u \to \infty$ замечаем, что $\sum \mu_k = 1$.

Существует изящная марковская цепь – *процесс усадки* – финальные вероятности которой равны (4.4.2). Ее пространство состояний конечно и состоит из всевозможных отрезков вида $[x_i, x_j]$, где $1 \leq i \leq j \leq n$. В качестве исходного состояния берется максимальный интервал $[x_1, x_n]$.

Предположим, что текущим состоянием является отрезок $[x_i, x_j]$. Чтобы перейти к следующему состоянию, выберем на $[x_i, x_j]$ равномерно распределенную случайную точку γ. Она попадает в один из подынтервалов, на которые разбивают отрезок $[x_i, x_j]$ числа (4.4.1); при этом возможны два случая:

$$\gamma \in [x_k, y_k] \quad \text{или} \quad \gamma \in [y_{k-1}, x_k] \tag{4.4.4}$$

при некотором k. По определению, в первом случае новым состоянием служит отрезок $[x_i, x_k]$, во втором – $[x_k, x_j]$. На каждом шаге процесса края отрезка сближаются; не позже чем на n-ом шаге отрезок вырождается в точку и процесс останавливается.

Предложение. *Вероятность остановки процесса усадки в финальном состоянии* $[x_k, x_k]$ *равна* μ_k.

Доказательство. Для любой тройки $i \le k \le j$ пусть $\mu_k^{(ij)}$ – вероятность остановки в состоянии $[x_k, x_k]$ при условии начала процесса на интервале $[x_i, x_j]$, а $R_k^{(ij)}$, $L_k^{(ij)}$ – вероятности придти к $[x_k, x_k]$, начиная процесс соответственно на интервалах $[y_{i-1}, x_j]$ и $[x_i, y_j]$. По формуле полной вероятности

$$\mu_k^{(ij)} = \frac{z_{ij} - x_i}{x_j - x_i}\, R_k^{(i+1,j)} + \frac{x_j - z_{ij}}{x_j - x_i}\, L_k^{(i,j-1)},$$

где $z_{ij} = \sum_{s=i}^{j} x_s - \sum_{s=i}^{j-1} y_s$. Применим формулу полной вероятности еще раз:

$$R_k^{(ij)} = \frac{x_i - y_{i-1}}{z_{ij} - y_{i-1}}\, \mu_k^{(ij)} + \frac{z_{ij} - x_i}{z_{ij} - y_{i-1}}\, R_k^{(i+1,j)},$$

$$L_k^{(ij)} = \frac{x_j - z_{ij}}{y_j - z_{ij}}\, L_k^{(i,j-1)} + \frac{y_j - x_j}{y_j - z_{ij}}\, \mu_k^{(ij)}.$$

Эти формулы выражают числа $\mu_k^{(ij)}$, $R_k^{(ij)}$, $L_k^{(ij)}$ через аналогичные величины с меньшими значениями $j - i$. Начиная с очевидных значений $\mu_k^{(kk)} = R_k^{(kk)} = L_k^{(kk)} = 1$, получаем индукцией по $j - i$, что

$$\mu_k^{(ij)} = \prod_{s=i}^{k-1} \frac{x_k - y_s}{x_k - x_s} \prod_{t=k+1}^{j} \frac{x_k - y_{t-1}}{x_k - x_t},$$

$$R_k^{(ij)} = \frac{x_k - y_{i-1}}{z_{ij} - y_{i-1}}\, \mu_k^{(ij)} = \frac{x_k - x_{i-1}}{z_{i-1,j} - x_{i-1}} \mu_k^{(i-1,j)},$$

$$L_k^{(ij)} = \frac{y_j - x_k}{y_j - z_{ij}}\, \mu_k^{(ij)} = \frac{x_{j+1} - x_k}{x_{j+1} - z_{i,j+1}}\, \mu_k^{(i,j+1)}.$$

При $i = 1, j = n$ первая формула дает (4.4.2), что и требовалось доказать.

Алгоритм усадки является одним из вариантов известного в комбинаторике подстановок процесса блуждания по крюкам; q-аналог этого алгоритма построен в [36], см. также §7 главы 3.

4.2. Усадка отрезка в общем случае.

Выше мы построили, в терминах параметров (4.4.1) прямоугольной диаграммы, случайную величину, распределенную в соответствии с ее переходной мерой. В случае общей диаграммы $\omega \in \mathcal{D}[a, b]$ конструкция аналогична, но процесс имеет континуальное множество состояний, а случайная величина X с распределением

$\mu^{(\omega)}$ возникает в пределе неограниченно растущего числа итераций. Перейдем к точному описанию общего процесса усадки.

По определению, состояниями процесса служат всевозможные замкнутые подынтервалы $[\alpha, \beta] \subset I$ в основном интервале $I = [a, b]$. За начальное состояние принимается интервал $[a, b]$. Каждый шаг процесса является результатом двух независимых случайностей: 1) разрезания текущего отрезка $[\alpha, \beta]$ случайной промежуточной точкой γ и 2) выбора одной из образовавшихся частей $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$ в качестве нового состояния.

Распределение случайной точки γ всегда одинаковое – равномерное на соответствующем отрезке $[\alpha, \beta]$. Управляющая процессом диаграмма $\omega \in \mathcal{D}[a, b]$ определяет только вероятности q, p выбрать соответственно левый или правый из отрезков $[\alpha, \gamma]$, $[\gamma, \beta]$. По определению, эти вероятности равны

$$q = (1 + \omega'(\gamma))/2, \quad p = (1 - \omega'(\gamma))/2. \tag{4.4.5}$$

В результате итераций этой процедуры образуется счетная цепочка вложенных интервалов

$$[a, b] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset \ldots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \ldots , \tag{4.4.6}$$

края которых с вероятностью единица стремятся к общему пределу

$$X = \lim \alpha_n = \lim \beta_n. \tag{4.4.7}$$

Теорема. *Пусть X – случайная величина (4.4.7), определяемая описанным выше процессом усадки. Если этот процесс задается (по формуле (4.4.5)) диаграммой ω, то распределение X совпадает с переходной мерой $\mu^{(\omega)}$ этой диаграммы.*

В специальном случае треугольной диаграммы ω_p из примера 2 п.2.2 вероятности (4.4.5) постоянны и не зависят от текущего состояния $[\alpha, \beta]$. Предельная величина X имеет бета-распределение с плотностью

$$f(x) = \frac{\sin \pi p}{\pi} (1 + x)^{-q} (1 - x)^{-p}.$$

Простейший случай $p = q = 1/2$ заслуживает отдельной формулировки.

Следствие. *Рассмотрим случайную последовательность интервалов*

$$[-1, 1] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset \ldots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \ldots ,$$

определенную по следующему правилу: интервал $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$ получается из интервала $[\alpha_n, \beta_n]$ путем разбиения его равномерно распределенной случайной точкой на две части и независимого выбора, с равными вероятностями, одной из *частей. Тогда предел $X = \lim \alpha_n = \lim \beta_n$ п.н. существует и имеет распределение с обратной полукруговой плотностью*

$$\phi(u) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

на отрезке $[-1, 1]$.

Приведем альтернативное описание процесса усадки, сближающее его с блужданием по крюкам из [36].

Для любой точки O, находящейся над графиком диаграммы $v = \omega(u)$ проведем прямые с наклоном ± 1; пусть они пересекаются с графиком в точках M_α, M_β, имеющих абсциссы $\alpha < \beta$. Объединение $H_{\alpha,\beta}$ отрезков $M_\alpha O$ (ноги) и OM_β (руки) назовем *крюком* с вершиной в точке O. Крюк вполне определяется отрезком $[\alpha, \beta]$, над которым он расположен (рис.23).

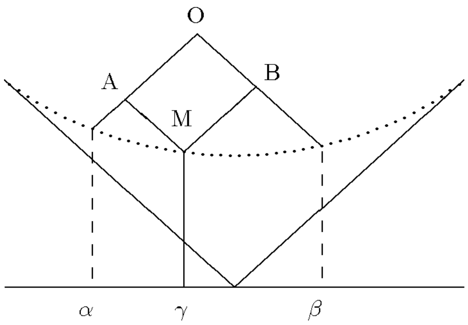


Рис.23 Связь hook walk и процесса усадки отрезка.

Процесс блуждания по крюкам начинается с крюка $H_{a,b}$ над исходным промежутком $[a, b]$. На сторонах крюка выбирается равномерно распределенная случайная точка, которой отвечает крюк H_{α_1,β_1}, затем на этом крюке независимо выбирается вершина крюка H_{α_2,β_2} и т.д. Эквивалентность блуждания по крюкам и процесса усадки отрезков видна из следующего замечания.

Пусть M – точка на графике $v = \omega(u)$ с абсциссой $u \in [\alpha, \beta]$. Обозначим через B точку руки крюка $H_{\alpha,\beta}$ на пересечении с прямой $V = \omega(u) + (U - u)$, через A – точку ноги того же крюка на прямой $V = \omega(u) - (U - u)$ (рис.23) и пусть

$$r(u) = \frac{u - \omega(u)}{2}, \quad l(u) = \frac{u + \omega(u)}{2}. \tag{4.4.8}$$

Тогда абсциссы точек A, B равны соответственно $r(\alpha) + l(u)$ и $r(u) + l(\beta)$. Если точка A (соответственно, B) распределена на ноге (руке) крюка $H_{\alpha,\beta}$ равномерно, то u имеет распределение с плотностью $l'(u)$ (соответсвенно $r'(u)$). Поскольку

$l'(u) = (1+\omega'(u))/2 = q$ и $r'(u) = (1-\omega'(u))/2 = p$, эквивалентность процессов усадки и блуждания по крюкам очевидна.

Говоря неформально, удобно понимать $dr(u)$, как меру освещенности графика диаграммы с северо-востока, а $dl(u)$ – как меру освещенности северо-западным светом. Эти две меры встречались в наших рассмотрениях и раньше. Действительно, $\tau = l'(u)$ – это функция распределения заряда Релея, а плотность $f(u) = r'(u)$ фигурирует в $(0,1)$-проблеме моментов Маркова, см. [47].

4.3. Доказательство теоремы.

Обозначим через $\mu_{\alpha,\beta}$ распределение, возникающее в результате процесса усадки, если за исходный отрезок берется $[\alpha,\beta]$. Пусть также R (соответственно, L) – распределение случайной величины (4.4.7) при условии, что при первом делении отрезка $[a,b]$ в процессе усадки берется обязательно правый (левый) отрезок. Распределения L, R можно записать, усредняя меры $\mu_{\alpha,\beta}$:

$$L = \frac{1}{b-z}\int_a^b \mu^{a,x}\, dl(x), \tag{4.4.9}$$

$$R = \frac{1}{z-a}\int_a^b \mu^{x,b}\, dr(x). \tag{4.4.10}$$

Определяющее свойство распределения $\mu = \mu_{a,b}$, отражающее рекуррентный характер процесса усадки, выражается тождеством

$$\mu = \frac{b-z}{b-a}\,L + \frac{z-a}{b-a}\,R. \tag{4.4.11}$$

Для доказательства теоремы п.4.2 мы проверим, что (4.4.11) выполняется и для переходных распределений $\mu^{\alpha,\beta}$, соответствующих ограничениям $\omega^{\alpha,\beta}$ диаграммы ω на подынтервалы $[\alpha,\beta]\subset I$.

Итак, пусть $\mu^{\alpha,\beta} = \mathrm{Exp}_{\alpha,\beta}(\omega^{\alpha,\beta})$ – переходная мера ограничения и возьмем вместо (4.4.9) интеграл

$$L = \frac{1}{b-z}\int_a^b \mu^{a,x}\, dl(x). \tag{4.4.12}$$

Лемма 1. *Мера L абсолютно непрерывна относительно μ, а ее плотность линейна:*

$$\frac{dL(u)}{d\mu(u)} = \frac{b-u}{b-z}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\phi_t(x) = \int_a^x \frac{t-x}{t-u}\, d\mu^{a,x}(u) = \exp\int_a^x \frac{dl(u)}{u-t};$$

ее дифференциал равен

$$d\phi_t(x) = \frac{\phi_t(x)}{x-t}\, dl(x) = \left(\int_a^x \frac{d\mu^{a,x}(u)}{u-t}\right)\, dl(x).$$

По смыслу интеграла (4.4.12) преобразование Стилтьеса меры $(b-z)dL(u)$ равно

$$(b-z)\int_a^b \frac{dL(u)}{t-u} = \int_a^b \left(\int_a^x \frac{d\mu^{a,x}(u)}{t-u}\right)\, dl(x) = -\int_a^b d\phi_t(x) = 1-\phi_t(b).$$

Оно совпадает с преобразованием Стилтьеса для меры $(b-u)\, d\mu(u)$:

$$\int_a^b \frac{b-u}{t-u}\, d\mu(u) = 1 - \int_a^b \frac{t-b}{t-u}\, d\mu(u) = 1-\phi_t(b)$$

и лемма вытекает из теоремы обращения для интеграла Стилтьеса.

Лемма 2. *Определим меру R как интеграл распределений $\mu^{x,b}$:*

$$R = \frac{1}{z-a}\int_a^b \mu^{x,b}\, dr(x).$$

Тогда R абсолютно непрерывна относительно $\mu = \mu^{a,b}$ и имеет плотность

$$\frac{dR(u)}{d\mu(u)} = \frac{u-a}{z-a}.$$

Доказательство этой леммы аналогично, с заменой функции $\phi_t(x)$ на

$$\psi_t(x) = \int_x^b \frac{x-t}{u-t}\, d\mu^{x,b}(u) = \exp\int_x^b \frac{dr(u)}{t-u}.$$

Из лемм 1, 2 видно, что переходные меры $\mu^{\alpha,\beta}$, определяемые одной и той же диаграммой ω на различных подынтервалах, связаны интегральным соотношением

$$\mu^{a,b} = \frac{1}{b-a}\int_a^b \mu^{a,x}\, dl(x) + \frac{1}{b-a}\int_a^b \mu^{x,b}\, dr(x), \tag{4.4.13}$$

эквивалентным определяющему уравнению (4.4.11). Теорема доказана.

§5. Дифференциальная модель роста диаграмм Юнга

5.1. Идея дифференциальной модели.

Исходной точкой для этого параграфа является результат об асимптотике случайного роста диаграмм Юнга, полученный в [12], [138]. Там рассматривался марковский процесс с дискретным временем, состояниями которого служат всевозможные диаграммы Юнга. На каждом шаге процесса к текущей диаграмме случайным образом добавляется одна клетка, а определение переходных вероятностей мотивировано асимптотическими задачами теории представлений симметрических групп, см. [17]. Имея в виду теоретико-представленческое происхождение процесса, будем называть его *процессом планшерелевского роста.*

В процессе роста диаграммы ее площадь неограниченно растет. После равномерного сжатия диаграммы, приводящего площадь к единице, край диаграммы все более напоминает непрерывную кривую. Суть утверждения, найденного и доказанного в [12], [138] состоит в следующем: в ходе процесса планшерелевского роста почти все диаграммы (после нормировки площади) становятся равномерно близки к общей универсальной кривой. В естественных координатах уравнение этой кривой имеет вид

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u \arcsin \frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}), & \text{если } |u| \le 2 \\ |u|, & \text{если } |u| \ge 2. \end{cases} \tag{4.5.1}$$

На рис.8 приведен ее график вместе со случайной стоклеточной диаграммой Юнга, полученной при компьютерном моделировании процесса планшерелевского роста.

В течение пятнадцати лет появление кривой (4.5.1) представлялось частным изолированным результатом. В настоящее время положение изменилось: оказалось, что та же кривая естественно появляется в разнообразных задачах одномерной математической физики и теории функций (см. [118], [38], [37]). Как показано в [38], кривая (4.5.1) задает единую асимптотику разделения корней для широкого класса ортогональных многочленов (включая классические многочлены Чебышева, Эрмита и Лагерра). Она же определяет типичный характер разделения частот при наложении случайной линейной связи в широком классе механических линейных систем (см. [38]). Ниже установлены новые характеризации кривой (4.5.1), сближающие два контекста, где она замечена: при случайном планшерелевском росте диаграмм Юнга и в задачах одномерной матфизики.

Основная идея состоит в замене исходного случайного процесса с дискретным временем на детерминированный процесс с непрерывным временем, имеющий, однако, прежнюю асимптотику при $t \to \infty$.

Исключение случайности, грубо говоря, происходит так. Пусть в определенном состоянии процесса планшерелевского роста к диаграмме Юнга могут добавиться клетки в местах $x_1, \dots, x_n$ с вероятностями $\mu_1, \dots, \mu_n$. Тогда вместо того чтобы случайно присоединять целую клетку в одно из этих мест, мы хотели бы добавить одновременно в каждое из этих мест x_k долю клетки, пропорциональную соответствующей вероятности μ_k.

Чтобы реализовать эту идею, мы существенно расширяем запас состояний, рассматривая диаграммы Юнга и предельные кривые типа (4.5.1) на общих основаниях. Точное определение возникающих на этом пути континуальных диаграмм приведено в §2. Расширенное пространство диаграмм $\mathcal{D}$ представляет собой бесконечномерный компакт, канонически гомеоморфный пространству вероятностных мер на отрезке.

Соответствие, сопоставляющее диаграмме $\omega \in \mathcal{D}$ вероятностное распределение μ_ω отнюдь не является очевидным. В неявной форме оно использовалось в связи с проблемой моментов Маркова [47] (ср. [37]). Однако в нашем контексте отображение $\omega \mapsto \mu_\omega$ возникает весьма естественно: если $\omega \in \mathcal{Y}$ – диаграмма Юнга (возможно, сжатая), то μ_ω – ее переходное распределение в процессе планшерелевского роста. На общие диаграммы $\omega \in \mathcal{D}$ соответствие $\omega \mapsto \mu_\omega$ однозначно продолжается по непрерывности (см. [118] и §3). Еще одна интерпретация соответствия $\omega \mapsto \mu_\omega$ связана с разложением рациональных дробей на простейшие (§2).

История роста диаграммы общего вида (аналог таблицы Юнга) задается кривой $\omega(\cdot, t)$, $1 < t < \infty$ в пространстве $\mathcal{D}$. При этом предполагается, что с ростом t диаграммы $\omega(\cdot, t)$ монотонно возрастают (по включению подграфиков). Бесконечно тонкий слой, лежащий между графиками диаграмм $\omega(u, t_0)$ и $\omega(u, t_0 + dt)$ задает одномерное распределение с плотностью $C\,\omega_t'(u, t_0)$ (где C – нормировочная константа), которое естественно интерпретировать как касательный вектор к таблице $\omega(\cdot, t)$ в точке $t = t_0$. Приравнивая касательное и переходное распределения мы приходим к основному динамическому уравнению

$$d\mu_{\omega(\cdot,t)}(u) = C\,\omega_t'(u, t)\,dt. \tag{4.5.2}$$

Более замкнутая форма уравнения (4.5.2) приведена ниже в (4.5.10).

Смысл уравнения (4.5.2) состоит в том, что диаграмма $\omega(\cdot, t)$ в каждый момент времени растет в направлении своей переходной меры. Поэтому можно ожидать, что асимптотика решений уравнения (4.5.2) связана с асимптотикой случайного плншерелевского роста. Наш основной результат (теорема п.5.6) полностью подтверждает эти ожидания: диаграмма Ω из (4.5.1) является, с точностью до подобия, неподвижной точкой уравнения (4.5.2), а все прочие решения асимптотически притягиваются к этой точке.

В ходе анализа мы переписываем уравнение (4.5.2) в эквивалентных формах. Удивительным образом, одним из уравнений равносильных (4.5.2) оказывается квазилинейное уравнение первого порядка

$$R'_t + RR'_x = 0, \tag{4.5.3}$$

описывающее свободное движение одномерной среды невзаимодействующих частиц. Это одно из простейших уравнений, иллюстрирующих нелинейные эффекты и в частности, появление ударных волн. В терминах уравнения (4.5.3), кривой (4.5.1) соответствует автомодельное решение

$$R(x,t) = r(x/\sqrt{t})/\sqrt{t},$$

где

$$r(x) = (x - \sqrt{x^2 - 4})/2. \tag{4.5.4}$$

Из основной теоремы сдедует, что если исходная волна $R(x,1)$ аналитична на бесконечности, то в ходе эволюции в силу уравнения (4.5.3) ее форма в окрестности точки $x = \infty$ сближается, при $t \to \infty$, с формой автомодельного решения (4.5.4).

План изложения следующий.

В п.5.2 определяется континуальный аналог таблиц Юнга, а затем в п.5.3 вводится дифференциальное уравнение, управляющее ростом континуальных диаграмм. Далее доказаны три теоремы, характеризующие диаграмму Ω. В п.5.4 показано, что эта диаграмма задает единственное автомодельное решение основного уравнения. Согласно п.5.6, это решение является аттрактором и асимптотически притягивает все прочие решения. В п.5.5 утверждается, что Ω является единственной, с точностью до подобия, диаграммой, для которой переходное распределение совпадает с радиальным (определенным в п. 5.5 из простых геометрических соображений).

5.2. Континуальные таблицы.

Общие континуальные диаграммы, как и диаграммы Юнга, можно упорядочить по включению подграфиков: $\omega_1 \prec \omega_2$, если $D_{\omega_1} \subset D_{\omega_2}$. Назовем *таблицей* любое непрерывное отображение со значениями в $\mathcal{D}$, определенное и строго возрастающее на некотором интервале $[t_0, \infty)$. Таким образом, таблица представляет собой семейство диаграмм $\omega(\cdot, t)$, монотонно возрастающих по аргументу t. Все эти диаграммы имеют общий центр $z(t) = z$; не умаляя общности будем считать, что $z = 0$. Площадь $A(t)$ непрерывно возрастает с ростом t, нам будет удобно принять ее в дальнейшем за параметр, полагая $A(t) = t$.

Если задана таблица $\omega(u,t)$, обозначим через $\sigma(u,t) = (\omega(u,t) - |u|)/2$ соответствующие заряды (см. п. 2.2 из §2). Учитывая соглашения о выборе параметра t и о нормировке площади, заключаем, что

$$\int \sigma(u,t)\,du = A(t) = t. \tag{4.5.5}$$

Определение. Функцию $T(u,t) = \sigma'_t(u,t)$ назовем *касательной плотностью* таблицы $\{\omega(\cdot,t)\}_{t\geq t_0}$ в точке $\omega(\cdot,t)$.

Дифференцируя (4.5.5) по параметру t получаем, что $T(u,t)$ действительно является плотностью вероятностного распределения, которое мы также называем касательным:

$$\int T(u,t)\,du = A'(t) = 1. \tag{4.5.6}$$

Найдем моменты касательного распределения.

Лемма. *Пусть $p_n(t)$ – моменты диаграммы $\omega(u,t)$ в таблице $\{\omega(\cdot,t)\}_{t\geq t_0}$. Тогда моменты касательной плотности можно записать в виде*

$$\int_{\mathbb{R}} u^n T(u,t)\,du = \frac{p'_{n+2}(t)}{(n+1)(n+2)}. \tag{4.5.7}$$

Доказательство. По определению касательной плотности,

$$\int u^n\,T(u,t)\,du = \frac{d}{dt}\int u^n\sigma(u,t)\,du$$

и лемма вытекает из равенств

$$\int u^n\sigma(u,t)\,du = -\int \frac{u^{n+1}}{n+1}\,d\sigma(u,t) = \frac{p_{n+2}(t)}{(n+1)(n+2)}.$$

5.3. Основное динамическое уравнение.

Рассмотрим растущую диаграмму, то есть таблицу $\{\omega(\cdot,t)\}_{t\geq t_0}$, и пусть $\mu_t = \mu_{\omega(\cdot,t)}$ – переходная мера диаграммы $\omega(u,t)$. Потребуем, чтобы диаграмма $\omega(u,t)$ росла в направлении своего переходного распределения:

$$d\mu_t(u) = T(u,t)\,du. \tag{4.5.8}$$

Соотношение (4.5.8) следует понимать как эволюционное уравнение в бесконечномерном фазовом пространстве диаграмм $\mathcal{D}$, где соответствие $\omega \mapsto \mu_\omega$ задает каноническое векторное поле (точнее, поле задано на подмножестве диаграмм с абсолютно непрерывной переходной мерой).

Используя определение переходной меры, можно переписать (4.5.8) в замкнутом виде:

$$\int \frac{\sigma_t'(u,t)\,du}{1-u/x} = \exp\int \frac{\sigma_u'(u,t)\,du}{u-x} \quad \text{при достаточно больших } x.$$

Укажем еще две формы записи основного динамического уравнения (4.5.8) – в терминах моментов диаграммы $p_n = p_n(\omega)$ и в терминах производящей функции

$$R(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)\,x^{-(n+1)} \tag{4.5.9}$$

(при фиксированном t эта функция совпадает с R-функцией из §3, формула (4.3.3)).

Предложение. *Следующие формы записи основного динамического уравнения эквивалентны:*

$$\int \frac{\sigma_t'(u,t)\,du}{1-u/x} = \exp\int \frac{\sigma_u'(u,t)\,du}{u-x}, \tag{4.5.10}$$

$$\frac{p_{n+2}'(t)}{n+2} = (n+1)\,h_n(t); \quad n = 0, 1, \dots\,, \tag{4.5.11}$$

$$R_t'(x,t) + R(x,t)\,R_x'(x,t) = 0. \tag{4.5.12}$$

Доказательство. Эквивалентность (4.5.10) и (4.5.11) следует из леммы п.5.2. Рассмотрим ряд

$$S(x,t) = \sum_{n\ge 0} \frac{p_{n+2}(t)}{n+2}\,x^{-(n+2)}.$$

Поскольку $p_1(t) = z = 0$, из (4.3.5) получаем $S(x,t) = \ln(xR(x,t))$, откуда

$$S_t'(x,t) = R^{-1}(x,t)\,R_t'(x,t).$$

Сравнивая ряды

$$-R_x'(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,h_n\,x^{-(n+2)},$$

$$S_t'(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{n+2}'(t)}{n+2}\,x^{-(n+2)},$$

получаем, что (4.5.11) и (4.5.12) также равносильны.

Заметим, что (4.5.12) является одним из простейших примеров квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка и используется, среди прочего, для демонстрации нелинейных эффектов типа опрокидывания гребней и возникновения ударных волн. В одной из многочисленных интерпретаций (4.5.12) рассматривается как уравнение свободного движения среды невзаимодействующих частиц. В этом случае $R(x,t)$ понимается как скорость частицы, находящейся в точке x в момент времени t.

5.4. Автомодельные решения.

Для любой диаграммы ω единичной площади $A(\omega) = 1$ формула

$$\omega(u,t) = \sqrt{t}\,\omega(u/\sqrt{t}), \quad t > 0 \tag{4.5.13}$$

задает таблицу. Будем называть таблицы такого вида *автомодельными*. Покажем, что единственное автомодельное решение основного динамического уравнения порождается диаграммой Ω.

Теорема. *Пусть $\omega(u)$ – произвольная диаграмма единичной площади $A(\omega) = 1$ и $\omega(u,t) = \sqrt{t}\omega(u/\sqrt{t})$ – соответствующая автомодельная таблица. Если ее заряд $\sigma(u,t)$ удовлетворяет уравнению (4.5.10), то $\omega(u) = \Omega(u)$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение (4.5.10) в эквивалентной форме (4.5.12). Легко проверяется, что моменты $p_n(t)$ диаграммы $\omega(u,t)$ выражаются через моменты p_n исходной диаграммы $\omega(u)$ в виде

$$p_n(t) = t^{n/2}p_n.$$

В силу однородности формул (4.1.17), имеем аналогичное соотношение для моментов переходных мер: $h_n(t) = t^{n/2}h_n$. Таким образом, функция (4.5.9) равна $R(x,t) = R(x/\sqrt{t})/\sqrt{t}$. Подстановка в уравнение (4.5.12) дает, после несложной выкладки, соотношение

$$(xR(x))' = \left(R^2(x)\right)',$$

так что $xR(x)$ и $R^2(x)$ отличаются на константу. Сравнивая свободные члены заключаем, что $R^2(x) - xR(x) + 1 = 0$. Единственное решение этого уравнения, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$ совпадает с производящей функцией диаграммы Ω. Теорема доказана.

Неформально говоря, мы показали, что $\Omega(u)$ – единственная диаграмма, которая в ходе роста в направлении собственной переходной меры остается самоподобной (т.е., с точностью до подобия, не меняет форму).

Для автомодельных таблиц

$$\omega_t'(u,t) = (\omega(u,t) - u\omega_u'(u,t))/2t. \tag{4.5.14}$$

Выражение в правой части определяется диаграммой $\omega(u) = \omega(u,t)$ при фиксированном значении t и имеет простой геометрический смысл, обсуждаемый в следующем разделе.

5.5. Радиальное распределение диаграммы.

Для заданной пары аргументов $\alpha < \beta$ обозначим через M_α, M_β расположенные над ними точки графика диаграммы ω и пусть $A_{\alpha\beta}$ – площадь криволинейного сектора, ограниченного лучами OM_α, OM_β (здесь O – точка начала координат) и дугой графика $M_\alpha M_\beta$ (см. рис.24).

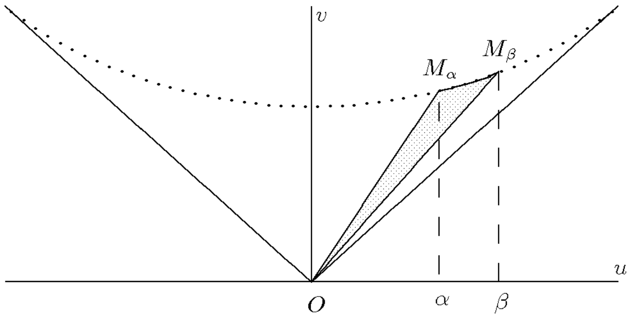


Рис.24 Радиальное распределение диаграммы.

Лемма.

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\int_\alpha^\beta (\omega(u) - u\omega'(u))\,du = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\sigma(u) - u\sigma'(u))\,du.$$

Доказательство. Рассмотрим луч, выходящий из начала координат O под углом θ и пересекающий график диаграммы в точке M. Обозначим через $r(\theta)$ длину отрезка OM и через u абсциссу точки M; u и θ взаимно определяют друг друга: $\theta = \theta(u)$. Интегрирование в полярных координатах дает $A_{\alpha\beta} = -1/4\int_{\theta(\alpha)}^{\theta(\beta)} r^2(\theta)\,d\theta$. Делая замену переменных $\theta = \theta(u)$, имеем $\operatorname{ctg}\theta = u/\omega(u)$, откуда

$$[\omega(u) - u\omega'(u)]\,du = \omega^2(u)\,d(u/\omega(u)) = -\omega^2(u)\sin^{-2}\theta\,d\theta = -r^2(\theta)\,d\theta.$$

Второе утверждение леммы непосредственно следует из определения заряда диаграммы.

Определим *радиальную плотность* диаграммы $\omega \in \mathcal{D}$, полагая

$$\rho(u) = \frac{1}{2A(\omega)}(\sigma(u) - u\sigma'(u)). \qquad (4.5.15)$$

Из леммы следует, что

$$\int \rho(u)\,du = 1,$$

так что радиальная плотность задает вероятностное распределение. Мы и его называем радиальным.

Предложение. *Пусть p_n – моменты диаграммы $\omega \in \mathcal{D}$. Тогда моменты ее радиального распределения равны*

$$\int u^n \rho(u)\, du = \frac{p_{n+2}}{2(n+1)A(\omega)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{4.5.16}$$

Доказательство:

$$\int u^n(\sigma(u) - u\sigma'(u))\, du = -\int (u^{n+1} + \frac{u^{n+1}}{n+1})\, d\sigma(u) = \frac{p_{n+2}}{n+1}.$$

В качестве производящей функции моментов радиального распределения можно (при условии $p_1 = z = 0$) взять

$$xS'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+2} x^{-(n+2)}. \tag{4.5.17}$$

Теорема. *Предположим, что переходное распределение диаграммы ω равно ее радиальному распределению, $d\mu_\omega(u) = \rho_\omega(u)\, du$. Тогда ω, с точностью до подобия, совпадает с диаграммой Ω при всех $u \in \mathbb{R}$:*

$$\omega(u) = \sqrt{A}\Omega(u/\sqrt{A}), \tag{4.5.18}$$

где $A = A(\omega)$.

Доказательство. Выразим равенство моментов рассматриваемых распределений, $p_{n+2}/2(n+1)A = h_n$, в терминах функции $R(x) = \sum_{n\geq 0} h_n\, x^{-(n+1)}$. Используя (4.5.17), имеем:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+2}\, x^{-(n+2)} = xS'(x) = (xR(x))'/R(x)$$

(поскольку $xR(x) = \exp S(x)$). Сопоставляя это с разложением

$$R'(x) = -\sum_{n\geq 0}(n+1)h_n x^{-(n+2)},$$

получаем $(xR)'/R = 2AR'$ или $(xR)' = (AR^2)'$. Таким образом, $AR^2 - xR + C = 0$ для подходящей константы C. Сравнивая младшие члены разложений

$$xR(x) = 1 + t/x^2 + \dots \quad \text{и} \quad AR^2(x) = A/x^2 + \dots ,$$

находим, что $C = 1$, так что

$$AR^2(x) - xR(x) + 1 = 0.$$

Окончательно, $R(x) = (x - \sqrt{x^2 - 4A})/2A$ при $x > 2\sqrt{A}$ (поскольку $R(x) \to 0$ при $x \to +\infty$). Остается заметить, что

$$R(x) = \frac{1}{2\sqrt{A}}(x/\sqrt{A} - \sqrt{x^2/A - 4}) = \frac{1}{\sqrt{A}} R_\Omega(x/\sqrt{A})$$

совпадает с аналогичной производящей функцией правой части в (4.5.18).

Заметим, что согласно (4.5.14) касательные распределения автомодельной таблицы на каждой ее диаграмме совпадают с радиальным распределением последней. Нетрудно проверить, что это условие характеризует класс автомодельных таблиц. Можно интерпретировать этот факт как "второй закон Кеплера для поперечного роста деревьев". Действительно, пусть график диаграммы ω задает профиль поперечного разреза древесного ствола. Чтобы его форма, с точностью до подобия, сохранялась, интенсивность прирастания новых клеток на каждом участке должна быть пропорциональна площади сектора, опирающегося на этот участок.

5.6. Асимптотика общего решения.

В п.5.4 мы показали, что диаграмма Ω является, с точностью до подобия, единственной неподвижной точкой основного динамического уравнения (4.5.8). Проверим теперь, что эта точка является устойчивой (притягивающей для всех прочих решений). Более точно: каждое решение $\omega(u,t)$ уравнения (4.5.8) (с произвольными начальными данными) после нормировки площади равномерно стремится, при $t \to \infty$, к диаграмме $\Omega(u)$.

Теорема. *Предположим, что заряд $\sigma(u,t)$ таблицы $\omega(u,t)$ удовлетворяет уравнению (4.5.10). Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \omega(u\sqrt{t}, t) = \Omega(u) \tag{4.5.19}$$

равномерно по $u \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Моменты $\tilde{p}_n(t)$ нормализованной диаграммы $\tilde{\omega}(u,t) = \omega(u\sqrt{t},t)/\sqrt{t}$ легко выразить через моменты диаграммы $\omega(u,t)$:

$$\tilde{p}_n(t) = t^{-n/2} p_n(t).$$

Найдем их асимптотику при $t \to \infty$, используя уравнение (4.5.11).

Лемма. *Если для функций $p_n(t)$ при $n = 1, 2, \dots$ справедливы соотношения*

$$\frac{p'_{n+2}(t)}{n+2} = (n+1) \sum_{\rho\vdash n} \prod_{k\geq 1} \left(\frac{p_k(t)}{k}\right)^{\rho_k} \Big/ \rho_k! \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.5.20}$$

то существуют такие константы $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что*

$$t^{-n/2}p_n(t) = p_n + o(t^{-1}) \tag{4.5.21}$$

при $t \to \infty$.

Доказательство. Первые уравнения системы (4.5.20) имеют вид

$$\begin{aligned}
&p_3'/3 = 0\\
&p_4'/4 = 3(p_1^2 + p_2)/2\\
&p_5'/5 = 4(p_1^3 + 3p_1p_2 + 2p_3)/6\\
&p_6'/6 = 5(p_1^4 + 6p_1^2p_2 + 3p_2^2 + 8p_1p_3 + 6p_4)/24.
\end{aligned}$$

Последовательно их решая, находим:

$$\begin{aligned}
&p_3(t) = c_3 = o(t^{1/2})\\
&p_4(t) = 6t^2 + c_4 = 6t^2 + o(t)\\
&p_5(t) = \frac{4\cdot 5}{3}c_3t + c_5 = o(t^{3/2})\\
&p_6(t) = 20t^3 + \frac{5\cdot 6}{4}c_4t + c_6 = 20t^3 + o(t^2),
\end{aligned}$$

где c_k – произвольные постоянные. Ввиду однородности правой части (4.5.20) лемма легко получается по индукции.

Для доказательства теоремы остается убедиться, что предельные значения p_n в (4.5.21) совпадают с моментами диаграммы Ω. Удобнее всего это сделать, перейдя к уравнению (4.5.12).

Если функция $\tilde{R}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{h}_n(t)x^{-(n+1)}$ построена по нормализованной диаграмме $\tilde{\omega}(u,t) = \omega(u\sqrt{t},t)/\sqrt{t}$, то

$$R(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\tilde{R}(\frac{x}{\sqrt{t}},t).$$

Подстановка в уравнение (4.5.12) приводит, после несложных выкладок, к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}(x\tilde{R} - \tilde{R}^2) = 2t\frac{\partial \tilde{R}}{\partial t}. \tag{4.5.22}$$

Запишем функцию $\tilde{R}$ в виде

$$\tilde{R}(x,t) = \hat{R}(x) + \bar{R}(x,t), \tag{4.5.23}$$

где $\hat{R}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}h_nx^{-(n+1)}$, причем коэффициенты h_n связаны с p_n обычным образом. Тогда по лемме

$$\lim_{t\to\infty}\bar{R}(x,t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}t\bar{R}_x'(x,t) = 0.$$

Подставляя (4.5.23) в уравнение (4.5.22) и переходя к пределу при $t \to \infty$, получаем, что $x\hat{R} - \hat{R}^2 = \mathrm{const}$ и доказательство завершается, как и в теоремах пп.5.4, 5.5 квадратным уравнением $\hat{R}^2(x) - x\hat{R}(x) + 1 = 0$ и формулой для производящей функции переходной меры диаграммы Ω.

§6. Планшерелевский рост и полукруговая диффузия

Переходным распределением закона арксинуса Ω из формулы (4.5.1) служит полукруговое распределение с плотностью $\sqrt{4-u^2}\,/\,2\pi$. В этой работе закон арксинуса появлялся неоднократно и в различных контекстах. Точно также полукруговой закон встречается во многих ситуациях, из которых мы здесь выделяем лишь две: полукруговой закон Вигнера для спектров случайных матриц и свободную теорию вероятностей Д.Войкулеску. В этом параграфе мы прослеживаем связь между законом арксинуса и полукруговым законом более внимательно.

6.1. Полукруговой закон Вигнера.

Еще один контекст, где фигурирует кривая Ω, связан со спектральной теорией случайных матриц и полукруговым законом Вигнера.

Пусть $A^{(n)}$ – симметрическая матрица порядка n с характеристическим полиномом

$$P_n(x) = \prod_k (x - x_k) = \det(xE - A^{(n)}).$$

Обозначим через $\mu^{(n)}$ дискретное распределение, имеющее равные нагрузки $\mu_k^{(n)} = 1/n$ в характеристических корнях x_k; $k = 1, \ldots, n$. Через

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\#\{k\colon x_k < x\}$$

обозначим функцию распределения меры $\mu^{(n)}$, а через $F(x)$ – функцию распределения меры $d\mu(u) = (2\pi)^{-1}\sqrt{4-u^2}\,du$ на интервале $[-2, 2]$. Нас интересует ситуация, когда матрица $A^{(n)}$ случайна; в соответсвии с этим полином P_n, его корни, мера $\mu^{(n)}$ и функция F_n также случайны.

Теорема (см.[55]). *Пусть матричные элементы $a_{ij}^{(n)}$ при $i \le j$ независимы, одинаково распределены и $E(a_{ij}^{(n)}) = 0$, $D(a_{ij}^{(n)}) = 1$. Тогда для любого $\epsilon > 0$*

$$P\{\sup_x |F_n(x\sqrt{n}) - F(x)| < \epsilon\} \to 1 \qquad (4.6.1)$$

при $n \to \infty$.

Этот результат допускает переформулировку в терминах диаграмм. Как и выше, обозначим через $x_1, \ldots, x_n$ характеристические корни матрицы $A^{(n)}$ а через $y_1, \ldots, y_{n-1}$ – перемежающиеся с ними экстремумы характеристического многочлена $P_n(x)$ матрицы $A^{(n)}$. Пусть $\bar{\omega}_n$ – прямоугольная диаграмма, построенная по наборам $x_1 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < x_n$.

Предложение. *В условиях теоремы*

$$P\{\sup_u |\frac{1}{\sqrt{n}}\bar{\omega}_n(u\sqrt{n}) - \Omega(u)| < \epsilon\} \to 1 \tag{4.6.2}$$

при любом $\epsilon > 0$ *и* $n \to \infty$.

Эквивалентность этого результата и теоремы Вигнера есть следствие замечательного соответствия Крейна, существующего между диаграммами и вероятностными мерами. Действительно, поскольку

$$\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}, \tag{4.6.3}$$

диаграмме $\bar{\omega}_n$, построенной по нулям и экстремумам многочлена, отвечает равномерное распределение на его корнях и (4.6.2) эквивалентно (4.6.1).

6.2. Малые колебания и диаграмма жесткости.

Рассмотрим устойчивую механическую систему с n степенями свободы, совершающую малые колебания вблизи положения равновесия. Ее потенциальная энергия квадратична и задается симметричной положительно определенной матрицей A. Квадраты собственных частот суть собственные числа $x_1, \dots, x_n$ этой матрицы. В результате наложения линейной связи собственные частоты смещаются и занимают промежуточные положения между исходными частотами, так что

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n, \tag{4.6.4}$$

где $y_1, \dots, y_{n-1}$ – собственные числа ограничения матрицы A на соответствующую гиперплоскость. Назовем *диаграммой жесткости* прямоугольную диаграмму ω_n, изображающую (см. п.1.1) характер разделения квадратов частот линейной системы (4.6.4) при наложении связи.

Пусть теперь система (т.е. матрица A) и линейная связь (гиперплоскость $h \subset \mathbb{R}^n$) выбираются случайно. Оказывается, что при широких условиях имеет место *самоусредняемость* (см.[55]): с ростом числа степеней свободы случайная диаграмма жесткости стремится (в подходящем масштабе) к неслучайной диаграмме. Покажем, что этим пределом служит как раз диаграмма Ω.

Теорема. *Пусть* ω_n *– диаграмма жесткости случайной симметричной матрицы* $A^{(n)}$ *порядка* n *по отношению к случайной гиперплоскости* $h \subset \mathbb{R}^n$. *Предположим, что нормаль к* h *равномерно распределена на единичной сфере в* $\mathbb{R}^n$, *а матричные элементы* $a_{ij}^{(n)}$, $i \le j$ *независимы от* h *и между собой и одинаково распределены со средним* $E(a_{ij}^{(n)}) = 0$ *и дисперсией* $D(a_{ij}^{(n)}) = 1$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} E\omega_n(u\sqrt{n}) = \Omega(u) \tag{4.6.5}$$

равномерно по $u \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Проведем сначала усреднение по связи h.

Лемма. *Пусть $P_n(x) = \prod(x - x_i)$ – характеристический многочлен матрицы A порядка n, $h \subset \mathbb{R}^n$ – случайная гиперплоскость с равномерно распределенной по единичной сфере нормалью и $Q_n(x) = \prod(x - y_i)$ – характеристический многочлен матрицы $A_h = pAp$ (здесь p – ортогональный проектор на h). Тогда*

$$E(Q_n) = \frac{1}{n} P_n'. \tag{4.6.6}$$

Доказательство. Разложим дробь Q_n/P_n на простейшие:

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{x - x_k}.$$

Нетрудно видеть, что $\mu_k = \xi_k^2$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – вектор нормали к h. Ввиду однородности распределения ξ имеем

$$E(\mu_1) = \ldots = E(\mu_n) = 1/n,$$

поскольку $\sum \mu_k = 1$. Остается сослаться на (4.6.3).

Теорема следует теперь из полукругового закона в формулировке (4.6.2).

6.3. Свободная свертка вероятностных распределений.

В серии статей и монографии [167] Д.Войкулеску построил содержательный аналог теории вероятностей, название которого еще не достаточно устоялось. Мы называем здесь теорию Войкулеску *свободной теорией вероятностей.* Основой этой теории служит аналог обычной свертки двух распределений μ, ν, названный в [167] *свободной сверткой* и обозначаемый через $\mu \boxplus \nu$.

Задачу, приводящую к определению свободной свертки, можно сформулировать так. Пусть G – свободная группа с двумя образующими, а U_1, U_2 – унитарные операторы в $l^2(G)$, отвечающие левым сдвигам на эти образующие. Через $\xi = \delta_{g,e}$ обозначим вектор из $l^2(G)$, заданный δ-функцией в единице группы. Рассмотрим функции $X_1 = \varphi_1(U_1)$, $X_2 = \varphi_2(U_2)$ от операторов U_1, U_2 и пусть μ_1, μ_2 их спектральные меры, т.е.

$$< f(X_j)\xi, \xi >= \int f(x)\, d\mu_j(x)$$

для любого полинома f. Как заметил Войкулеску, спектральная мера суммы $X_1 + X_2$ зависит только от спектральных мер слагаемых. Это распределение $\mu = \mu_1 \boxplus \mu_2$ и называется свободной сверткой распределений μ_1, μ_2.

В работе [166] Войкулеску дал чисто аналитическую трактовку свободной свертки. Ключевым понятием здесь является т.н. $\mathcal{R}$-преобразование.
Следуя [166], обозначим через

$$G(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x} \tag{4.6.7}$$

преобразование Коши – Стилтьеса меры μ, которое служит производящей функцией моментов $m_1, m_2, \dots$ этой меры:

$$G(z) = z^{-1} + m_1 z^{-2} + m_2 z^{-3} + \dots . \tag{4.6.8}$$

Тогда существует ряд

$$\mathcal{R}_\mu(z) = r_1 + r_2 z + r_3 z^2 + \dots , \tag{4.6.9}$$

для которого

$$\mathcal{R}(G(z)) = z - \frac{1}{G(z)} . \tag{4.6.10}$$

Ряд (4.6.9) называется $\mathcal{R}$-*преобразованием* меры μ. По отношенинию к свободной свертке он играет роль логарифма преобразования Фурье. Действительно, как показал Войкулеску в [166], $\mathcal{R}$-преобразование аддитивно по отношению к свободной свертке мер:

$$\mathcal{R}_{\mu \boxplus \nu}(z) = \mathcal{R}_\mu(z) + \mathcal{R}_\nu(z). \tag{4.6.11}$$

Другой полезный факт из [166] состоит в том, что тождество (4.6.11) можно принять за косвенное определение свободной свертки.
По аналогии с обычной теорией вероятности, коэффициенты $r_1, r_2, \dots$ ряда (4.6.9) можно было бы назвать *свободными семиинвариантами*. Первые три из них совпадают с семиинвариантами в классической теории. Разница впервые возникает для коэффицента r_4, который отличается от классического семиинварианта

$$s_4 = m_4 - 4m_1 m_3 - 3m_2^2 + 12 m_1^2 m_2 - 6 m_1^4$$

на квадрат дисперсии: $r_4 = s_4 + (m_2 - m_1^2)^2$.
Серьезное отличие свободной свертки от обычной состоит в ее *нелинейности*: распределительный закон для операции $\boxplus$ не справедлив. Разумеется, коммутативность и ассоциативность по-прежнему имеются.
Выдающуюся роль в свободной теории вероятностей играют полукруговые распределения

$$d\mu_t(x) = \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2}\, dx; \quad |x| \le 2t. \tag{4.6.12}$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{R}$-преобразование для них равно

$$\mathcal{R}_t(z) = t\, z.$$

Отсюда следует, что

$$\mu_s \boxplus \mu_t = \mu_{s+t}; \quad s,t \geq 0, \tag{4.6.13}$$

так что распределения (4.6.12) образуют полугруппу по отношению к свободной свертке.

Определим *полукруговую диффузию*, как поток в пространстве мер $\mathcal{M}$, заданный формулой

$$\nu \mapsto \nu_t = \nu \boxplus \mu_t; \quad t > 0. \tag{4.6.14}$$

В той же статье [166] Войкулеску показал, что преобразование Коши – Стилтьеса

$$G(z,t) = \int \frac{d\nu_t(x)}{z-x} \tag{4.6.15}$$

диффундирующей меры ν_t удовлетворяет уравнению Бюргерса:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + G\frac{\partial G}{\partial z} = 0.$$

Поскольку преобразование (4.6.7) определяет меру μ однозначно, можно сказать, что уравнение Бюргерса доставляет адекватное аналитическое описание процесса полукруговой диффузии.

6.4. Полукруговая диффузия и планшерелевский рост диаграмм Юнга.

Рассмотрим прямоугольную диаграмму $\omega \in \mathcal{D}_0$ с экстремумами в точках

$$x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n \tag{4.6.16}$$

и определим ее малое возмущение ω_t, $t > 0$. По определению, диаграмма $\omega_t \in \mathcal{D}_0$ получается из ω путем добавления над каждой точкой минимума x_k маленькой квадратной клеточки площади $\nu_k t$, где ν_k – планшерелевские переходные вероятности,

$$\nu_k = \prod_{j<k} \frac{x_k - y_j}{x_k - x_j} \prod_{j>k} \frac{x_k - y_{j-1}}{x_k - x_j}\,. \tag{4.6.17}$$

Таким образом (см. рис.13), прямоугольная диаграмма ω_t имеет минимумы в точках

$$x_k^{\pm} = x_k \pm \sqrt{\nu_k t} \tag{4.6.18}$$

и максимумы в точках y_k, x_k. Рассмотрим производящую функцию моментов диаграммы ω_t. Согласно общей формуле (4.1.14), эта рациональная дробь имеет вид

$$R(x,t) = \frac{\prod(x-y_k)\,\prod(x-x_k)}{\prod(x-x_k^-)\,\prod(x-x_k^+)} = \frac{\prod(x-y_k)\,\prod(x-x_k)}{\prod((x-x_k)^2-\nu_k\,t)}. \tag{4.6.19}$$

Предложение. *Для функции $R(x,t)$, заданной формулой (4.6.19), справедливо тождество*

$$\frac{\partial R}{\partial t}(x,0) + R(x,0)\,\frac{\partial R}{\partial x}(x,0) \equiv 0. \tag{4.6.20}$$

Доказательство. Перепишем формулу (4.6.19) в следующей форме:

$$R(x,t) = R(x,0)\prod_k\left(1-\frac{\nu_k t}{(x-x_k)^2}\right)^{-1} = R(x,0)\,\left(1+t\,\sum\frac{\nu_k}{(x-x_k)^2}+o(t)\right).$$

Поскольку

$$\sum_k\frac{\nu_k}{(x-x_k)^2} = -\frac{\partial R(x,0)}{\partial x}+o(t),$$

отсюда следует, что

$$R(x,t)-R(x,0) = -tR(x,0)\frac{\partial R(x,0)}{\partial x}+o(t)$$

и (4.6.20) получается в пределе $t\to 0$.

Итак, мы проверили, что если прямоугольная диаграмма ω_t растет в соответствии с планшерелевскими вероятностями (4.6.17), то ее переходное распределение ν_t инфинитезимально (при малых t) эволюционирует по формуле (4.6.15), т.е. диффундирует в силу свободной свертки с полугруппой (4.6.12). Связующим звеном служит уравнение Бюргерса.

Проследим более внимательно за поведением переходной меры ν_t прямоугольной диаграммы ω_t. Мы явно опишем дискретное приближение $\tilde\nu_t$ к мере ν_t и покажем, что при $t\to 0$ эти две меры, с точностью до малых порядка $o(t)$, совпадают.

По определению, мера $\tilde\nu_t$ имеет в точках $x_k^\pm = x_k \pm \sqrt{\nu_k t}$ нагрузки

$$\nu_k^\pm = \frac{1}{2}(\nu_k \pm \Delta_k\sqrt{\nu_k t}), \tag{4.6.21}$$

где

$$\Delta_k = \sum_{j\neq k}\frac{\nu_j}{x_k-x_j};\quad k=1,\dots,n. \tag{4.6.22}$$

Предложение. *Обозначим через*

$$\tilde R(x,t) = \sum_{k=1}^n\frac{\nu_k^+}{x-x_k^+}+\sum_{k=1}^n\frac{\nu_k^-}{x-x_k^-} \tag{4.6.23}$$

преобразование Коши – Стилтьеса меры $\tilde{\nu}_t$ и напомним, что аналогичное преобразование для переходной меры ν_t диаграммы ω_t выражается формулой (4.6.19). Тогда

$$R(x,t) = \tilde{R}(x,t) + o(t). \tag{4.6.24}$$

Доказательство. Перепишем общее слагаемое в (4.6.23) следующим образом:

$$\frac{\nu_k^+}{x - x_k^+} + \frac{\nu_k^-}{x - x_k^-} = \frac{(x - x_k)\,\nu_k + \Delta_k\,\nu_k\,t}{(x - x_k)^2 - \nu_k t} =$$
$$= \frac{\nu_k}{x - x_k}\left(1 - \frac{\nu_k t}{(x - x_k)^2}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\Delta_k t}{(x - x_k)} + o(t)\right) =$$
$$= \frac{\nu_k}{x - x_k}\left(1 + \left(\frac{\Delta_k}{x - x_k} + \frac{\nu_k}{(x - x_k)^2}\right)t + o(t)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{R}(x,t) = R(x,0) + \tilde{C}\cdot t + o(t), \tag{4.6.25}$$

где

$$\tilde{C} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta_k \nu_k}{(x - x_k)^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k^2}{(x - x_k)^3}. \tag{4.6.26}$$

Ранее мы видели, что для функции $R(x,t)$ справедливо аналогичное равенство

$$R(x,t) = R(x,0) + C\cdot t + o(t), \tag{4.6.27}$$

где

$$C = \sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k}{(x - x_k)}\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k}{(x - x_k)^2}. \tag{4.6.28}$$

Чтобы убедиться, что $C = \tilde{C}$, вычтем из обеих частей второе слагаемое в (4.6.26); мы придем к формуле

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta_k\,\nu_k}{(x - x_k)^2} = \sum_{i\neq j}\frac{\nu_i}{(x - x_i)}\frac{\nu_j}{(x - x_j)^2}. \tag{4.6.29}$$

Остается доказать тождество (4.6.29). Подставляя из (4.6.22) значения Δ_k, можем переписать (4.6.29) в форме

$$\sum_k \frac{\nu_k}{(x - x_k)^2}\sum_{j\neq k}\frac{\nu_j}{(x_k - x_j)} = \sum_k \frac{\nu_k}{(x - x_k)^2}\sum_{j\neq k}\frac{\nu_j}{(x - x_j)}\,. \tag{4.6.30}$$

Поскольку

$$\frac{\nu_j}{x_k - x_j} - \frac{\nu_j}{x - x_j} = \frac{(x - x_k)\,\nu_j}{(x_k - x_j)\,(x - x_j)},$$

можно перейти от (4.6.30) к формуле

$$\sum_k \frac{\nu_k}{x - x_k} \sum_{j \neq k} \frac{\nu_j}{(x_k - x_j)\,(x - x_j)} = 0. \tag{4.6.31}$$

Используя тождество

$$\frac{1}{x - x_k} - \frac{1}{x - x_j} = \frac{x_k - x_j}{(x - x_k)\,(x - x_j)},$$

перепишем (4.6.31) окончательно в виде

$$\sum_{k \neq j} \frac{\nu_k\,\nu_j}{(x_k - x_j)^2} \left(\frac{1}{x - x_k} - \frac{1}{x - x_j} \right) = 0. \tag{4.6.32}$$

Но в этой форме формула очевидна, и предложение доказано.

Из формулы (4.6.21) становится понятным характер переноса масс исходного дискретного распределения ν в ходе полукруговой диффузии за малое время t. Стоит отметить ряд отличий от обычной гауссовской диффузии:

(1) каждая масса ν_k распадается на две почти равные точечные массы $\nu_k^{\pm}$

(2) эти последние расходятся как $x_k \pm \sqrt{\nu_k t}$, т.е. тяжелые частицы разлетаются быстрее

(3) барицентр $(\nu_k^+\,x_k^+ + \nu_k^-\,x_k^-)\,/\,(\nu_k^+ + \nu_k^-)$ расходящихся масс $\nu_k^{\pm}$ имеет порядок $\Delta_k t$; момент равен $\nu_k t + o(t)$

(4) частицы не уходят на бесконечность за конечное время, т.е. носители мер $\nu_t, \tilde{\nu}_t$ компактны.

6.5. Диффузионное уравнение в теории Войкулеску.

Покажем, на уровне эвристических рассуждений, что уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(x)\,d\nu_t(x) = \frac{1}{2} \int \int \frac{f'(x) - f'(y)}{x - y}\,d\nu_t(x)\,d\nu_t(y) \tag{4.6.33}$$

можно интерпретировать, как диффузионное уравнение в свободной теории вероятностей. К сожалению, из-за нелинейного характера свободной свертки это уравнение выглядит несколько сложнее обычного.

Вычислим среднее значение пробной функции f по дискретной мере $\tilde{\nu}$ заданной формулами (4.6.21), (4.6.22). Поскольку

$$f(x_k^+)\,\nu_k^+ + f(x_k^-)\,\nu_k^- = \nu_k \left(f(x_k) + f'(x_k)\,\Delta_k\,t + \frac{f''(x_k)}{2}\,\nu_k\,t + o(t) \right),$$

получаем, что при $t = 0$ производная от среднего равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \left. \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{\pm})\,\nu_k^{\pm} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{f'(x_i) - f'(x_j)}{x_i - x_j}\,\nu_i\,\nu_j$$

и мы приходим к интегральной сумме для интеграла в правой части (4.6.32).

§7. Асимптотика разделения корней ортогональных многочленов

Основная цель этого параграфа – показать, что для широкого класса ортогональных многочленов (включая классические полиномы Якоби, Эрмита и Лагерра) имеет место единая универсальная асимптотика взаимного разделения корней. Подчеркнем, что речь здесь идет не о распределении самих корней, а именно о характере их взаимного разделения.

План параграфа следующий: в пп.7.1-7.2 мы формулируем основной результат, а в пп.7.3-7.4 приводим его доказательство. В п.7.5 найдены некоторые оценки, уточняющие основную теорему в случае полиномов Чебышева.

7.1. Разделение корней ортогональных многочленов.

Рассмотрим многочлены

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k), \quad P_{n-1}(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(x - y_k),$$

принадлежащие семейству многочленов, ортогональных по некоторой мере $d\mu(x)$. Хорошо известно ([56]), что для их корней выполняется условие разделения (4.1.2). Например, в таблице 1 указаны (для $n = 15, 16$) корни многочленов Чебышева II рода

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin\arccos x},$$

многочленов Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$$

и многочленов Лагерра

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right).$$

На рис. 11 (см. введение) изображены соответствующие прямоугольные диаграммы.

Бросается в глаза, что диаграммы разделения корней на этих рисунках похожи (с точностью до параметров положения). Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, поверх диаграмм наложен, в соответствующем масштабе, график функции

$$\Omega(u) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(u\arcsin\frac{u}{2} + \sqrt{4-u^2}), & \text{если } |u| \le 2 \\ |u|, & \text{если } |u| \ge 2. \end{cases} \tag{4.7.1}$$

Отметим, что площадь $A = A(\Omega)$ подграфика $\{(u,v)\colon |u| \le v < \Omega(u)\}$ для этой функции равна единице.

Таблица 1

Корни многочленов (степеней 16 и 15)

Чебышева		Эрмита		Лагерра	
x_n	y_n	x_n	y_n	x_n	y_n
−0.98297	−0.98079	−6.63088	−6.36395	0.08765	0.09331
−0.93247	−0.92388	−5.47223	−5.19009	0.46270	0.49269
−0.85022	−0.83147	−4.49296	−4.19621	1.14106	1.21560
−0.73901	−0.70711	−3.60087	−3.28908	2.12928	2.26995
−0.60263	−0.55557	−2.76025	−2.43244	3.43709	3.66762
−0.44574	−0.38268	−1.95198	−1.60671	5.07802	5.42534
−0.27366	−0.19509	−1.16383	−0.79913	7.07034	7.56592
−0.09227	0.00000	−0.38676	0.00000	9.43831	10.12023
0.09227	0.19509	0.38676	0.79913	12.21422	13.13028
0.27366	0.38268	1.16383	1.60671	15.44153	16.65441
0.44574	0.55557	1.95198	2.43244	19.18016	20.77648
0.60263	0.70711	2.76025	3.28908	23.51591	25.62389
0.73901	0.83147	3.60087	4.19621	28.57873	31.40752
0.85022	0.92388	4.49296	5.19009	34.58340	38.53068
0.93247	0.98079	5.47223	6.36395	41.94045	48.02608
0.98297		6.63088		51.70116	

Впервые функция Ω возникла в [12], [138] в связи с одной задачей асимптотической теории представлений симметрической группы (описание предельной формы больших диаграмм Юнга дано в §2 главы 3). Мы покажем, что именно эта функция задает асимптотику разделения корней для широкого класса семейств ортогональных многочленов.

7.2. Линейные рекуррентные соотношения.

Для дальнейшего удобно использовать другой стандартный подход к теории ортогональных многочленов, при котором они возникают, как решения разностных уравнений (см., например, [2]).

Рассмотрим линейное разностное уравнение второго порядка

$$\phi_{n+1} + b_{n+1}\,\phi_n + c_n^2\,\phi_{n-1} = u\,\phi_n; \quad n \geq 1 \tag{4.7.2}$$

со спектральным параметром u, и пусть $\phi_n = P_n(u)$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ – единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$P_0(u) = 1, \quad P_1(u) = u - b_1. \tag{4.7.3}$$

Очевидно, что $P_n(u)$ – приведенный многочлен степени n. Предполагая, что $c_n^2 > 0$ при всех $n \geq 1$, нетрудно убедиться, что корни многочленов $P_n(u)$ вещественны и просты, причем корни соседних многочленов $P_{n-1}(u), P_n(u)$ перемежаются (см.[2], глава 4). Теорема Фавара (см.[52], глава 8.6) гарантирует существование меры, относительно которой многочлены ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(u)\, P_n(u)\, d\mu(u) = 0 \quad \text{при } m \neq n. \tag{4.7.4}$$

Обратно, многочлены, ортогональные по некоторой мере, удовлетворяют линейному рекуррентному соотношению (4.7.2).
Рассмотрим семейство ортогональных многочленов $\{P_n(u)\}_{n=0}^{\infty}$, заданное линейным рекуррентным соотношением

$$P_n(u) + (b_n - u)P_{n-1}(u) + c_n^2 P_{n-2}(u) = 0. \tag{4.7.5}$$

Хорошо известно, что корни последовательных полиномов

$$P_{n-1}(u) = \prod_{i=1}^{n-1}(u - y_i), \quad P_n(u) = \prod_{i=1}^{n}(u - x_i) \tag{4.7.6}$$

взаимно разделяются: $x_1 < y_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$. Свяжем с парой многочленов (4.7.6) непрерывную кусочно-линейную функцию $v = \omega_n(u)$ (мы называем ее диаграммой) для которой

$$\begin{gathered} \omega_n'(u) = \operatorname{sign}\frac{P_{n-1}(u)}{P_n(u)}; \\ \omega_n(u) = |u - z_n| \quad \text{при достаточно больших } |u|, \end{gathered} \tag{4.7.7}$$

где $z_n = \sum x_i - \sum y_i$. Корни многочлена P_n являются минимумами для ω_n, а корни многочлена P_{n-1} – ее максимумы (рис. 21).
Центральным результатом параграфа является

Теорема. *Пусть ортогональные полиномы $P_n(u)$ заданы уравнением (4.7.2) вместе с начальными условиями (4.7.3) и пусть ω_n – прямоугольная диаграмма, задающая взаимное разделение корней многочленов $P_{n-1}(u), P_n(u)$. Предположим, что для коэффициентов в (4.7.2) существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{c_n} = 0. \tag{4.7.8}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n}\, \omega_n(u\, c_{n-1} + b_n) = \Omega(u) \tag{4.7.9}$$

равномерно по $u \in \mathbb{R}$, где функция Ω задана формулой (4.7.1).

В [118] этот результат был установлен в меньшей общности: вместо условий (4.7.8) там предполагалось, что

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c > 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0. \tag{4.7.10}$$

Пусть $d\mu$ – мера, относительно которой ортогонально семейство $\{P_n\}$. Для выполнения условия (4.7.10) достаточно, чтобы носителем $d\mu(u)$ служил отрезок $[-1,1]$, а функция $\ln\mu'(\cos\theta)$ была интегрируема на интервале $[0,\pi]$. Напротив, заключение теоремы заведомо ложно, если носитель меры $d\mu$ несвязен. Классические многочлены Эрмита и Лагерра занимают промежуточное положение: для них условия (4.7.8) выполнены, а условия (4.7.10) нарушаются.

Известно [56], что если $c = 1$ в (4.7.10), то существует единая предельная плотность распределения корней,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{i\colon x_i < u\} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{u} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |u| \le 1.$$

Для полиномов Эрмита предельная плотность будет другой:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{i\colon \frac{x_i}{\sqrt{2n}} < u\} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{u} \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad |u| \le 1,$$

однако асимптотика взаимного разделения в обоих случаях одинакова. Таким образом, наш результат является более универсальным (но и более грубым) чем теоремы о предельном распределении корней ортогональных многочленов.

7.3. Уравнение для предельной R - функции.

Пусть $R_n(u) = P_{n-1}(u)/P_n(u)$ – R-функция диаграммы ω_n. Разделив обе части тождества

$$P_{n+1}(u) = (u - b_{n+1})P_n(u) - c_n^2 P_{n-1}(u)$$

на $P_n(u)$, получаем рекуррентное соотношение для R-функций:

$$\frac{1}{R_{n+1}(u)} = u - b_{n+1} - c_n^2\, R_n(u). \tag{4.7.11}$$

Используя формулы из п.2.5, перейдем к приведенным функциям, то есть к R-функциям

$$\tilde{R}_n(u) = c_{n-1}\, R_n(uc_{n-1} + b_n), \quad \tilde{R}_{n+1}(u) = c_n\, R_{n+1}(uc_n + b_{n+1})$$

диаграмм $\tilde{\omega}_n(u) = \omega_n(uc_{n-1} + b_n)\,/\,c_{n-1}$, $\tilde{\omega}_{n+1}(u) = \omega_{n+1}(uc_n + b_{n+1})\,/\,c_n$; после замены u на $(u - b_{n+1})/c_n$ формула (4.7.11) примет вид

$$\frac{1}{\tilde{R}_{n+1}(u)} = u - \frac{c_n}{c_{n-1}}\tilde{R}_n\left(\frac{uc_n + \Delta_n}{c_{n-1}}\right),$$

где $\Delta_n = b_{n+1} - b_n$.

Предположим, что предел

$$\tilde{R}(u) = \lim_{n\to\infty} \tilde{R}_n(u) \tag{4.7.12}$$

существует при достаточно больших $|u|$. Тогда в силу условий (4.7.8) на коэффициенты получаем уравнение

$$\tilde{R}^2(u) - u\,\tilde{R}(u) + 1 = 0, \tag{4.7.13}$$

откуда $\tilde{R}(u) = \frac{1}{2}(u - \sqrt{u^2-4}) = R_\Omega(u)$ (знак перед корнем выбран из условия $\tilde{R}(\infty) = \lim \tilde{R}_n(\infty) = 0$).

Чтобы обосновать существование предела (4.7.12), проследим за поведением коэффициентов Тейлора на бесконечности.

7.4. Коэффициенты Тейлора.

Запишем соотношение (4.7.11) в форме

$$\frac{1}{R_{n+1}(u - \Delta_n + b_{n+1})} = u - \Delta_n - c_n^2\, R_n(u + b_n).$$

и рассмотрим степенной ряд

$$R_n(u + b_n) = \sum_{k\geq 0} \frac{r_k^{(n)}}{u^{k+1}}.$$

Поскольку

$$R_{n+1}(u - \Delta_n + b_{n+1}) = \sum_{k\geq 0} \frac{r_k^{(n+1)}}{(u-\Delta_n)^{k+1}} = \sum_{k\geq 0} \frac{\rho_k^{(n+1)}}{u^{k+1}},$$

где

$$r_k^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \rho_{k-i}^{(n+1)} \Delta^i, \tag{4.7.14}$$

получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов:

$$\rho_{k+1}^{(n+1)} = \rho_k^{(n+1)}\,\Delta_n + c_n^2 \left(\rho_{k-1}^{(n+1)}\, r_0^{(n)} + \ldots + \rho_0^{(n+1)}\, r_{k-1}^{(n)}\right) \tag{4.7.15}$$

при $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Примеры:

$\rho_0^{(n+1)} = 1,$	$r_0^{(n+1)} = 1,$
$\rho_1^{(n+1)} = \Delta_n,$	$r_1^{(n+1)} = 0,$
$\rho_2^{(n+1)} = c_n^2 + \Delta_n^2,$	$r_2^{(n+1)} = c_n^2,$
$\rho_3^{(n+1)} = 2\Delta_n c_n^2 + \Delta_n^3,$	$r_3^{(n+1)} = -\Delta_n c_n^2,$
$\rho_4^{(n+1)} = c_n^4 + c_n^2 c_{n-1}^2 + 3\Delta_n^2 c_n^2 + \Delta_n^4,$	$r_4^{(n+1)} = c_n^4 + c_n^2 c_{n-1}^2 + \Delta_n^2 c_n^2.$

Более общо, из (4.7.14), (4.7.15) следует

Лемма. *Коэффициенты $r_k^{(n+1)}$ суть однородные многочлены степени k от первых $k-1$ переменных из ряда $c_n, \Delta_n, c_{n-1}, \Delta_{n-1}, \dots$.*

Следствие. *В условиях теоремы существуют пределы $\lim_{n\to\infty} \tilde{r}_k^{(n)} = C_k$, где $\tilde{r}_k^{(n)} = r_k^{(n)}/c_n^k$ – коэффициенты Тейлора приведенной R-функции*

$$\tilde{R}_n(u) = \sum_{k\geq 0} \tilde{r}_k^{(n)}/u^{k+1}.$$

Отметим, что предельные коэффициенты $C_{2k} = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ суть числа Каталана. Они же служат коэффициентами в разложении $R_\Omega(u) = C_0/u + C_2/u^3 + \dots$ для R-функции диаграммы Ω. Из сходимости R-функций $\lim \tilde{R}_n(u) = R_\Omega(u)$ следует равномерная сходимость диаграмм $\lim \tilde{\omega}_n(u) = \Omega(u)$ и теорема доказана.

7.5. Разделение корней полиномов Чебышева.

В этом разделе мы даем прямое доказательство теоремы п.7.2 в специальном случае многочленов Чебышева второго рода. Оно содержит простую оценку для скорости сходимости в (4.7.9).

Предложение. *Пусть $x_k = -\cos\frac{\pi k}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$ – корни многочленов Чебышева* II *рода $U_n(x)$ и $y_k = -\cos\frac{\pi k}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$ – корни $U_{n-1}(x)$. Обозначим через ω_n прямоугольную диаграмму, описывающую перемежающиеся последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$. Тогда*

$$|\omega_n(u) - \Omega(u)| = O(1/n) \tag{4.7.16}$$

при $n \to \infty$ равномерно по $u \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Достаточно проверить (4.7.16) при $u = x_k$ и при $u = y_k$. Из определения (4.7.1) видно, что

$$\Omega(y_k) = -y_k + \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi k}{n} - \frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}\right). \tag{4.7.17}$$

По описанию (4.1.4) диаграммы ω_n имеем

$$\omega(y_k) = 2z_k - (y_k - z) = -y_k + 2z_k; \qquad \text{где } z_k = \sum_{i=1}^{k}(y_i - x_i).$$

Свертывая сумму косинусов по формуле

$$1 + 2\sum_{j=1}^{k}\cos jv = \sin(k+\frac{1}{2})v\Big/\sin\frac{1}{2}v,$$

находим, что

$$2z_k = \frac{\sin(2k+1)\alpha_{n+1}}{\sin\alpha_{n+1}} - \frac{\sin(2k+1)\alpha_n}{\sin\alpha_n},$$

где $\alpha_n = \pi/2n$. По формуле полного приращения получаем (пренебрегая ошибкой порядка $O(1/n^2)$), что

$$2z_k = \frac{2}{\pi}\left[\sin(\frac{\pi k}{n} + \alpha_n) - (\frac{\pi k}{n} + \alpha_n)\,\cos(\frac{\pi k}{n} + \alpha_n)\right].$$

Сравнение с (4.7.17) завершает доказательство (для $u = x_k$ оно аналогично).

Литература

References

1. Арнольд В.И., *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974, 431 с.
2. Аткинсон Ф., *Дискретные и непрерывные граничные задачи*, Мир, М., 1968, 749 с.
3. Атья М., *Лекции по K-теории*, Мир, М., 1967, 261 с.
4. Ахиезер Н.И., *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, ФМ, М., 1961, 310 с.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции,* т.**2**, М., 1966, 295 с.
6. Бирман М.Ш., Яфаев Д.Р., *Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие*, Алгебра и анализ, **4** (1992), 1-44.
7. Ван дер Варден Б.Д., *Алгебра*, Наука, М., 1976, 623 с.
8. Вейль Г., *Классические группы, их инварианты и представления*, ИЛ, М., 1947, 408 с.
9. Вершик А.М., *Симметрические группы высокой степени*, Докл. АН СССР, **206** (1972).
10. Вершик А.М., *Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп*, Докл. АН СССР, **218** (1974), 749-752.
11. Вершик А.М., *Формула крюков и связанные с ней тождества*, Записки семинаров ЛОМИ, **172** (1989), 3-20.
12. Вершик А.М., Керов С.В., *Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга*, ДАН СССР, **233** (1977), 1024-1027.
13. Вершик А.М., Керов С.В., *Асимптотическая теория характеров симметрической группы*, Функциональный анализ и его приложения, **15-4** (1981), 15-27.
14. Вершик А.М., Керов С.В., *Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы*, Докл. АН СССР, **257** (1981), 1037-1040.
15. Вершик А.М., Керов С.В., *Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы*, Докл. АН СССР, **267** (1982), 272-276.
16. Вершик А.М., Керов С.В., *K-функтор (группа Гротендика) бесконечной симметрической группы*, Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. Зап. семин. ЛОМИ, **123** (1983), 126-151.
17. Вершик А.М., Керов С.В., *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0-функтор*, Итоги науки. Современные проблемы математики. Новейшие достижения, **26** (1985), 3-56.
18. Вершик А.М., Керов С.В., *Асимптотика максимальной и типичной размерности неприводимых представлений симммметрической группы*, Функц. анализ и его прил., **19-1** (1985), 25-36.
19. Вершик А.М., Керов С.В., *Характеры и реализации представлений бесконечномерной алгебры Гекке и инварианты узлов*, Докл. АН СССР, **301** (1988), 777-780.
20. Вершик А.М., Шмидт А.А., *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрической группы*, Теория вероятностей, **22** (1977), 72-88.
21. Вершик А.М., Шмидт А.А., *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрической группы*, Теория вероятностей, **23** (1978), 42-54.
22. Вулих Б.З., *Введение в теорию конусов в нормированных пространствах*, КГУ, Калинин, 1977, 84 с.
23. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г., *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*, ГИТТЛ, М.- Л., 1950, 359 с.
24. Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984, 466 с.
25. Гнеденко Б.В., *Курс теории вероятностей*, Физматгиз, М., 1969, 400 с.
26. Джеймс Г., *Теория представлений симметрических групп*, Мир, М., 1982, 214 с.
27. Диксмье Ж., *C^*-алгебры и их представления*, Наука, М., 1974, 399 с.
28. Дынкин Е.Б., *Марковские процессы*, Физматгиз, М., 1963.
29. Желобенко Д.П., *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, М., 1970, 664 с.
30. Керов С.В., *О полиномиальных группах размерностей*, Теория операторов и теория функций, т.**1**, ЛГУ, Л., 1983, 185-194.

31. Керов С.В., *Распределение типов симметрии тензоров высокой степени*, Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика - 8. Записки научных семинаров ЛОМИ, **155** (1986), 181-186.
32. Керов С.В., *Случайные таблицы Юнга*, Теория вероятностей и ее применения, **3** (1986), 627-628.
33. Керов С.В., *Реализация $*$-представлений алгебр Гекке и ортогональная форма Юнга*, Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. Зап. научн. семин. ЛОМИ, **161** (1987), 155-172.
34. Керов С.В., *Комбинаторные примеры в теории AF-алгебр.*, Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика - 10. Записки научных семинаров ЛОМИ, **172** (1989), 55-67.
35. Керов С.В., *Функции Холла-Литтлвуда и ортогональные многочлены*, Функциональный анализ и его приложения, **25-1** (1991), 78-81.
36. Керов С.В., q-*аналог алгоритма блуждания по крюкам и случайные таблицы Юнга*, Функциональный анализ и его приложения, **26-3** (1992), 35-45.
37. Керов С.В., *Переходные вероятности континуальных диаграмм Юнга и проблема моментов Маркова*, Функциональный анализ и его приложения, **27-2** (1993), 32-49.
38. Керов С.В., *Асимптотика разделения корней ортогональных многочленов*, Алгебра и анализ, **5-5** (1993), 68-86.
39. Керов С.В., *Планшерелевский рост диаграмм Юнга и асимптотика перемежающихся последовательностей*, Докл. Российской Академии Наук, **333-1** (1993), 8-10.
40. Керов С.В., *Дифференциальная модель роста диаграмм Юнга*, Труды СПб математического общества, **4** (1995).
41. Керов С.В., Кириллов А.Н., Решетихин Н.Ю., *Комбинаторика, анзац Бете и представления симметрической группы*, Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика - 8. Записки научных семинаров ЛОМИ, **155** (1986), 50-64.
42. Керов С.В., Оревкова О.А., *Случайные процессы с общими копереходными вероятностями*, Записки научных семинаров ЛОМИ, **184** (1990), 169-181.
43. Кириллов А.А., *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972, 336 с.
44. Кириллов А.Н., *Тождество Лагранжа и формула крюков*, Записки семинаров ЛОМИ, **172** (1989), 78–87.
45. Кнут Д., *Искусство программирования для ЭВМ,* т.**3**, Мир, М., 1978, 844 с.
46. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В., *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980, 383 с.
47. Крейн М.Г., Нудельман А.А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*, Наука, М., 1973, 551 с.
48. Лансевицкий И.Л., *Об ортогональности полиномов Фейера – Сеге*, Докл. АН СССР, **31** (1941), 199-200.
49. Макдональд И., *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985, 222 с.
50. Мурнаган Ф. Д., *Теория представлений групп*, ИЛ., М., 1950.
51. Назаров М., *Фактор - представления бесконечной спин - симметрической группы*, Успехи мат. наук, **43** (1988), 221-222.
52. Натансон Г.И., *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М., 1949.
53. Ольшанский Г.И., *Унитарные представления (G,K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$*, Алгебра и анализ, **1-4** (1989), 178 - 209.
54. Окуньков А., *Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы*, Функциональный анализ и его приложения, **28-2** (1994), 31-40.
55. Пастур Л.А., *Спектры случайных самосопряженных операторов*, Успехи математических наук, **28-3** (1973), 1-67.
56. Сеге Г., *Ортогональные многочлены*, М., 1962, 500 с.
57. Фаддеев Д.К., *Алгебра*, Наука, М., 1985, 416 с.
58. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения,* **1, 2**, Мир, М., 1967; 498, 752 с.
59. Фелпс Р., *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968, 112 с.
60. Фельдхейм Е., *Об обобщенных полиномах Лежандра*, Изв. АН СССР, сер. мат., **5** (1941), 241-248.

61. Фробениус Г., *Теория характеров и представлений групп*, ГНТИ Украины, Харьков, 1937, 214 с.
62. Хамермеш М., *Теория групп и ее применение к физическим проблемам*, Мир, М., 1966, 587 с.
63. Эндрюс Г., *Теория разбиений*, Мир, М., 1982, 255 с.
64. Aissen M., Edrei A., Schoenberg I.J. and Whitney A., *On the generating functions of totally positive sequences*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **37** (1951), 303-306.
65. Al-Salam Waleed, Allaway W.R., and Askey R., *Sieved ultraspherical polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., **284** (1984), 39-55.
66. Aomoto K., *Jacobi Polynomials Associated with Selberg Integrals*, SIAM J. Math. Anal., **18** (1987), 545-549.
67. Askey R. and Ismail Mourad E.-H., *A generalization of ultraspherical polynomials*, Studies in Pure Math., (1983), Birkhäuser, Basel and Boston, MA, 55-78.
68. Askey R., Regev A., *Maximal Degrees for Young Diagrams in a Strip*, Europ. J. Combinatorics, **5** (1984), 189-191.
69. Askey R., Richards D., *Selberg's Second Beta Integral and an Integral of Mehta*, Probability, Statistics and Mathematics, Papers in Honor of Samuel Karlin, (1989), Academic Press, 27-39.
70. Askey R. and Wilson J., *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., **54** (1985, No. 319).
71. Bercovici H., Voiculescu D., *Lévy - Hinčin type theorems for multiplicative and additive free convolution*, Pacific Journal of Mathematics, **153-2** (1992), 217-248.
72. Blackadar R., Bruce E., *A simple C^*-algebra with no nontrivial projection*, Proc. Amer. Math. Soc., **78** (1980), 504-508.
73. Boyer R., *Infinite traces of AF-algebras and characters of $U(\infty)$*, J. Oper. Theory, **9** (1983), 205-236.
74. Bratteli O., *Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **171** (1972), 195-234.
75. Bratteli O., *The center of approximately finite dimensional C^*-algebras*, J. Funct. Anal., **21** (1976), 195-202.
76. Bratteli O., *Structure space of approximately finite dimensional C^*-algebras*, J. Funct. Anal., **16** (1974), 192-204.
77. Bratteli O., Elliott G., *Structure space of approximately finite-dimensional C^* - algebras. II*, J. Funct. Anal., **30** (1978), 74-82.
78. Bratteli O., Elliott G.A., Herman R.H., *On the possible temperatures of a dynamical system*, Comm. Math. Phys., **74** (1980), 281-295.
79. Chihara T.S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials* (1978), Gordon and Breach, NY - London - Paris, 249.
80. Cifarelli D.M., Regazzini E., *Some Remarks on the Distribution Functions of Means of a Dirichlet Process*, Ann. of Stat., **18** (1990), 1-42.
81. Diaconis P., *Group Representations in Probability and Statistics* (1988), Inst.of Math. Stat., Hayward, 198.
82. Diaconis P., Kemperman J., *Some New Tools for Dirichlet Priors*, Preprint (1994).
83. Dooley A., *The special theory of posets and its applications to C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **224** (1976), 143-155.
84. Edrei A., *On the Generating Function of Totally Positive Matrices, II*, J. d'Anal. Math., **2** (1952), 104-109.
85. Edrei A., *On the Generating Function of a Doubly Infinite Totally Positive Sequence*, Trans. Amer. Math. Soc., **74** (1953), 367-383.
86. Effros E., *Dimensions and C^*-algebras*, CBMS Regional Conf. Series, **46** (1981), Providence.
87. Effros E.G., Handelman D.E., Chao – Liang Shen, *Dimension groups and their affine representations*, Amer. J. Math., **102** (1980), 385-407.
88. Elliott G., *On the classification of inductive limits of sequences of semi-simple finite dimensional algebras*, J. Alg., **38** (1976), 29-44.
89. Farahat H.K., Highman G., *The centres of symmetric group rings*, Proc. Roy. Soc., A **250** (1959), 212-221.

90. Fejer L., *Abschätzungen für die Legendreshen und verwandte Polynome*, Math.Z., **24** (1925), 285-294.
91. Ferguson T.S., *Prior Distributions on Spaces of Probability Measures*, Ann. of Stat., **2** (1974), 615-629.
92. Frame J. S., Robinson G. de B., Thrall R. M., *The hook graphs of the symmetric group*, Canad. J. Math., **6** (1954), 316-324.
93. Freyd P. et al., *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. AMS, **12** (1985), 239-246.
94. Fuchs L., *Riezs groups*, Ann. scuola norm. sup. Pisa, **19** (1965), 1-34.
95. Geissinger L., *Hopf algebras of symmetric functions and class functions*, Lect. Notes in Math., **579** (1977), 168-181.
96. Giordano T., Putnam I.F., Skau C.F., *Topological Orbit Equivalence and C^*-crossed products*, Trondheim Univ. Preprint Mathematics 11/1993, Norway, **11** (1993), 1-81.
97. Glimm J., *On a certain class of operator algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **95** (1960), 318-340.
98. Goodearl K., *Algebraic representations of Choquet simplexes*, J. Pure Appl. Algebras, **11** (1977), 11-130.
99. Goodearl K., *Partially ordered Grothendieck groups*, Proc. Symp. on Alg. and Appl., **XII** (1981), 27 p.
100. Goodearl K., Handelman D., *Rank functions and K_0 of regular rings*, J. Pure Appl. Algebras, **7** (1976), 195-216.
101. Goulden I.P., Jackson D.M., *Symmetric functions and Macdonald's result for top connexion coefficients in the symmetric group*, Preprint, (1992), 1-16.
102. Greene C., Nijenhuis A., Wilf H., *A Probabilistic Proof of a Formula for the Number of Young Tableaux of a Given Shape*, Adv. Math., **31** (1979), 104-109.
103. Greene C., Nijenhuis A., Wilf H., *Another Probabilistic Method in the Theory of Young Tableaux*, J. Comb. Th. (A), **37** (1984), 127-135.
104. Hall P., *The algebra of partitions*, Proc. 4th Canadian Math. Congress, (1959), 147-159.
105. Hammersley J., *A Few seedlings of research*, Proc. of Sixth Berkeley Symp. of Math. Stat. and Probability, (1970).
106. Hanlon P., *Jack symmetric functions and some combinatorial properties of Young symmetrizers*, J. Combin Theory, Ser. A, **47** (1988), 37-70.
107. Handelman D., *K_0 of von Neumann and AF C^*-algebras*, Quart. J. Math., **29** (1978), 427-441.
108. Handelman D.E., *Positive polynomials, convex integral polytopes, and a random walk problem*, Springer Lect. Notes in Math., **1282**.
109. Handelman D., e^f, University of Ottawa, Preprint, (1991), 1-9.
110. Hopf E., *The Partial Differential Equation $u_t + u\,u_x = \mu\,u_{xx}$*, Comm. Pure and Appl. Math., **3** (1950), 201-230.
111. Jack H., *A class of symmetric polynomials with a parameter*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, **69** (1969-70), 1-17.
112. James A.T., *Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices*, Ann. of Math. (2), **74** (1961), 456-469.
113. James G., Kerber A., *The Representation Theory of the Symmetric Group,* in: Encyclopedia of Mathematics its Applications **16** (1981), Addison - Wesley Publ. Company, London.
114. Jones V., *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. (2), **126** (1987), 335-388.
115. Kaimanovich V.A., Vershik A.M., *Random walks on discrete groups: boundary and entropy*, The Annals of Prob., **11** (1983), 457-490.
116. Karlin S., *Total Positivity* **1** (1968), Stanford Univ. Press, Stanford, 576.
117. Kerov S.V., *A q-analog of the hook walk algorithm for random Young tableaux*, Preprint of the Centre de Recherches Mathématiques, Montréal, **CRM-1748** (1991), 1-16.
118. Kerov S., *Separation of roots of orthogonal polynomials and the limiting shape of generic large Young diagrams*, Preprint, **8** (1992), University of Trondheim, 1-23.
119. Kerov S.V., *Generalized Hall-Littlewood Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials*, Advances in Sov. Math., **9** (1992), 67-94.
120. Kerov S.V., *A q-analog of the Hook Walk Algorithm for Random Young Tableaux*, J. of Algebraic Combinatorics, **2** (1993), 383-396.

121. Kerov S.V., *Gaussian limit for the Plancherel measure of the symmetric group*, C.R. Acad. Sci. Paris, **316** (1993), 303-308.
122. Kerov S.V., *The Asymptotics of Interlacing Sequences and the Growth of Continuous Diagrams*, Zapiski Nauchn. Seminarov POMI. Differential Geometry, Lie Groups and Mechanics - XIII, **205** (1993), 21-29.
123. Kerov S.V., *Asymptotics of Large Random Young Diagrams*, 6th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Abstracts (1994), DIMACS, Rutgers Univ., 285-294.
124. Kerov S.V., Olshanski G.I., *Polynomial functions on the set of Young diagrams*, Comptes Rend. Acad. Sci. Paris, **319** (1994), 121-126.
125. Kerov S., Olshanski G., Vershik A., *Harmonic Analysis on the Infinite Symmetric Group*, C. Rend. Acad. Sci. Paris, **316** (1993), 773-778.
126. Kerov S.V., Versik A.M., *Characters, factor-representations and K-functor of the infinite symmetric group*, Proc. of the International Conference on Operator Algebras and Group Representations, **1** (1980), 23-32.
127. Kerov S.V., Vershik A.M., *The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson – Shensted – Knuth algorithm*, SIAM J. of Alg. Discr. Math., **7** (1986), 116-127.
128. Kerov S.V., Versik A.M., *The Grothendieck Group of the Infinite Symmetric Group and Symmetric Functions with the Elements of the K_0-functor theory of AF-algebras*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7** (1990), Gordon and Breach, 36-114.
129. Kingman J.F.C., *The representation of partition strucrures*, J. London Math. Soc., **18** (1978), 374-380.
130. Kingman J.F.C., *Random partitions in population genetics*, Proc. R. Soc. Lond., **A 361** (1978), 1-20.
131. Kingman J.F.C., Poisson Processes (1993), Clarendon Press, Oxford, 104.
132. Krieger W., *On dimension functions and topological Markov chains*, Invent. math., **56** (1980), 239-250.
133. Knuth D., *Permutations, Matrices and Generalized Young Tableaux*, Pacific J. Math., **34-3** (1970), 709-714.
134. Knuth D., *An Identity Involving Sums and Products*, The Amer. Math. Mon., **97** (1990), 256-257.
135. Lazar A., Taylor D., *Approximately finite-dimensional C^*-algebras and Bratteli diagrams*, Trans. Amer. Math. Soc., **259** (1980), 599-620.
136. Littlewood D.E., *The Theoty of Group Characters and Matrix Representations of Groups* (1940), Oxford Univ. Press.
137. Littlewood D.E., *On certain symmetric functions*, Proc. London Math. Soc., **43** (1961), 485-498.
138. Logan B. F., Shepp L. A., *A variational problem for random Young tableaux*, Adv. Math., **26** (1977), 206-222.
139. Macdonald I.G., *Symmetric functions (2),*, Preprint, 1989.
140. Macdonald I.G., *A new class of symmetric functions*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, Actes 20^e Séminaire Lothariengien, (1988), 131-171.
141. McKay J., *The largest degrees of irreducible characters of the symmetric group*, Math. Comp., **45** (1977), 624-631.
142. Mehta M.L., *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*, 1967.
143. Morris A.O., *A survey on Hall-Littlewood functions and their applications to representation theory*, Lecture Notes in Math., 579 (1977), Springer-Verlag, 136-154.
144. Nevanlinna R.H., *Eindeutige Analytisce Funktionen* (1953), Springer - Verlag, Berlin.
145. Pimsner M., Popa S., *On the EXT-group of an AF-algebra I, II*, Rev. Rom. Math. Pure Appl., **23** (1978), 251-267;; **24** (1979), 1085-1088.
146. Pittel B., *On Growing a Random Young Tableau*, J. Comb. Th. (A) **41** (1986), 278-285.
147. Poincaré A., Comptes Rend. Acad. Sci. de France, **97** (1883), 1418.
148. Ram A., Wenzl H., *Matrix units for centralizer algebras*, UCSD preprint (1989), 1-12.
149. Regev A., *Asymptotic values for degrees associated with strips of Young diagrams*, Adv.Math., **41** (1981), 115-136.
150. Renault J., *A groupoid approach to C^*-algebras*, Lect. Notes Math., **793** (1980), 1-169.
151. Richards D.St.P., *Analogs and extensions of Selberg's integrals*, IMA volumes in math. and its appl., **18** (1989), 109-137.

152. Robinson G. de B., *On the Representations of the Symmetric Groups*, Amer. J. Math., **60** (1938), 745-760.
153. Robinson G. de B., *Representation Theory of the Symmetric Group*, Edinburgh, Univ. Press, 1961.
154. Rogers L.G., *Second memoir on the expasion of certain infinite products*, Proc. London Math. Soc., **25** (1894), 318-343.
155. Schur I., *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, Crelle's J., **139** (1911), 155-250.
156. Selberg A., *Bemerkninger om et multipelt integral*, Norsk Matematisk Tidsskrift, **26** (1944), 71-78.
157. Shensted C., *Longest Increasing and Decreasing Subsequences*, Canad. J. Math., **13** (1961), 179-191.
158. Stanley R., *Theory and Application of Plane Partitions, Parts 1, 2*, Studies in Appl. Math., **50** (1971), 167-187, 259-279.
159. Stanley R.P., *Some Combinatorial Properties of Jack Symmetric Functions*, Advances in Math., **77** (1989), 76-115.
160. Strătilă S., Voiculescu D., *Represntations of AF-Algebras and of the Group $U(\infty)$*, Lect. Notes Math., **486** (1975), 1-169.
161. Thoma E., *Die unzerlegbaren, Positiv-definiten Klassen-funktionen der abzahlbar unendlichen, symmetrischen Gruppe*, Math. Z., **85** (1964), 40-61.
162. Thoma E., *Eine Charakterisierung diskreter Gruppen vom Typ I*, Inventiones Math., **6** (1968), 190-196.
163. Ulam S., *Monte Carlo calculations in problems of Mathematical Physics Modern Math. for the Engineers* (1961), N.Y. McGr-Hill.
164. Viennot G., *Une theorie combinatoire des polynomes orthogonaux generaux* (1983), UQAM, Montreal, 187.
165. Voiculescu D., *Sur les representations factorielles finies de $U(\infty)$ et autre groupes semblants*, C.r. Acad. sci., sér A, **279** (1974), 945-946.
166. Voiculescu D., *Addition of Certain Non-commuting Random Variables*, J. of Functional Analysis, **66-3** (1986), 323-346.
167. Voiculescu D.V., Dykema K.J., Nica A., *Free Random Variables*, Amer. Math. Soc., Providence, 1993.
168. Young A., *On quantitative substitutional analysis IX*, Proc. London Math. Soc., **54** (1952), 219-253.