В. Н. Малоземов, С. М. Машарский

ФОРМУЛА ГЛАССМАНА, БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ВЕЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ[1]

Открытие в 1965 г. быстрого преобразования Фурье (БПФ) явилось мощным стимулом для развития дискретного гармонического анализа [1–3]. В последние годы был разработан новый подход к БПФ, при котором результаты промежуточных вычислений интерпретируются как коэффициенты разложений по некоторым ортогональным базисам [4, 5]. При длине периода N, равной 2^s, в пространстве дискретных периодических сигналов построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов, имеющих блочную структуру. В каждом блоке сигналы различаются лишь сдвигом аргумента. Из блоков, принадлежащих *разным базисам* рекуррентной последовательности, формируются обобщенные вейвлетные базисы. Это значительно расширяет возможности цифровой обработки сигналов.

В данной работе рассматривается более общая ситуация, когда длина периода N равна n^s. Соответствующие обобщения оказались возможными благодаря тому, что удалось разобраться с источником рекуррентных соотношений для базисов. Если в [4, 5] при $N = 2^s$ такие соотношения, по существу, *предъявлялись*, то теперь они *выводятся* на основе различных факторизаций матрицы Фурье порядка $N = n^s$. При этом центральную роль играет формула Глассмана разложения матрицы Фурье порядка $N = mn$ [6]. Эффективные расчетные формулы получаются путем использования индексной техники, когда при умножении разреженной матрицы на вектор убираются все операции с нулевыми элементами матрицы.

Прокомментируем содержание статьи по параграфам. В § 1 приводятся предварительные сведения. Они касаются формулы Глассмана и перестановки reverse, активно используемой в дальнейшем. В § 2 указана факторизация матрицы Фурье порядка $N = n^s$, вывод которой основан на формуле Глассмана. С помощью перестановки reverse получены еще две факторизации матрицы Фурье порядка

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00231).

$N = n^s$, названные соответственно факторизацией по Кули–Тьюки, связанной с прореживанием по времени, и факторизацией по Кули–Тьюки, связанной с прореживанием по частоте.

Факторизации матрицы Фурье из § 2 позволяют построить три рекуррентные последовательности ортогональных базисов в пространстве дискретных периодических сигналов, и на этой основе предложить три варианта быстрого преобразования Фурье порядка $N = n^s$. Этому посвящены § 3–5. В § 6 показано, как формировать обобщенные вейвлетные базисы, опираясь на рекуррентные последовательности ортогональных базисов, имеющих блочную структуру. Отмечается, в частности, что в процессе вычисления коэффициентов разложения по базису Фурье вычисляются коэффициенты разложения и по базису Хаара—Крестенсона.

Аналогичное исследование в случае, когда вместо дискретного преобразования Фурье рассматривается дискретное преобразование Виленкина—Крестенсона, являющееся естественным обобщением дискретного преобразования Уолша, было проведено в работе [7].

На важность операции кронекерова умножения матриц для дискретного гармонического анализа впервые обратил внимание Гуд [8].

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами*. В $\mathbb{C}_N$ обычным способом вводится скалярное произведение и норма:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}\,, \qquad \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Единичным N-периодическим импульсом называется сигнал $\delta_N(j)$, равный 1, когда j делится на N, и равный 0 при остальных $j \in \mathbb{Z}$. В частности, $\delta_1(j) \equiv 1$.

Система сдвигов $\delta_N(j)$, $\delta_N(j-1)$, …, $\delta_N(j-N+1)$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$, так что любой сигнал x допускает представление

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\,\delta_N(j-k) \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Из (1.1) и четности δ_N следует, что при фиксированных $l, l' \in \mathbb{Z}$

$$\big\langle \delta_N(\cdot - l),\, \delta_N(\cdot - l') \big\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_N(j-l)\,\delta_N(l'-j) = \delta_N(l'-l).$$

Положим $u_k(j) = \omega_N^{kj}$, где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из единицы. Сигналы $u_0(j)$, $u_1(j)$, ..., $u_{N-1}(j)$ образуют еще один ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$, который называется *экспоненциальным*. Ортогональность следует из элементарной формулы

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{pj} = \delta_N(p) \qquad \forall p \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Очевидно, что $\|u_k\|^2 = N$ при всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Любой сигнал x можно представить в виде

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, u_k(j) \qquad \forall j \in \mathbb{Z},$$

где $X(k) = N^{-1}\langle x, u_k\rangle$.

1.2. Квадратная матрица F_N порядка N с элементами

$$F_N[k,j] = u_k(j) = \omega_N^{kj}, \qquad k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\},$$

называется матрицей Фурье. Допустим, что $N = mn$, где m, n — натуральные числа, отличные от единицы. Зафиксируем индексы $k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Представив j в виде $j = pn + q$, где $q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $p \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, запишем

$$F_N[k,j] = \omega_N^{k(pn+q)} = \omega_m^{kp}\,\omega_N^{kq}.$$

Введем вектор-строку γ_k с компонентами $\gamma_k(q) = \omega_N^{qk}$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда $F_N[k,j] = \omega_m^{pk}\gamma_k(q)$, так что k-я строка матрицы F_N примет вид

$$F_N[k,\cdot] = \big(\gamma_k,\, \omega_m^{k}\gamma_k,\, \omega_m^{2k}\gamma_k,\, \ldots,\, \omega_m^{(m-1)k}\gamma_k\big).$$

Положив $k = lm + r$, где $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, $l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, придем к формуле

$$F_N[k, \cdot] = \big(\gamma_k,\, \omega_m^r \gamma_k,\, \omega_m^{2r} \gamma_k,\, \ldots,\, \omega_m^{(m-1)r} \gamma_k\big). \tag{1.3}$$

Обозначим через E_n единичную матрицу порядка n и введем две квадратные матрицы порядка N:

$$D_N = \begin{bmatrix} E_n & E_n & E_n & \ldots & E_n \\ E_n & \omega_m E_n & \omega_m^2 E_n & \ldots & \omega_m^{m-1} E_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ E_n & \omega_m^{m-1} E_n & \omega_m^{2(m-1)} E_n & \ldots & \omega_m^{(m-1)^2} E_n \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_N = \begin{bmatrix} \gamma_0 & & & \\ & \gamma_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{m-1} \\ \gamma_m & & & \\ & \gamma_{m+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{2m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{(n-1)m} & & & \\ & \gamma_{(n-1)m+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{nm-1} \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, опираясь на (1.3), что

$$F_N = \Gamma_N D_N. \tag{1.4}$$

Эта формула установлена Глассманом [6].

Поясним правило построения матрицы Γ_N. Возьмем подматрицу, состоящую из n первых столбцов матрицы Фурье F_N. Строки этой подматрицы, индекс k которых при делении на m дает в остатке r, сдвинем на rn позиций вправо. Дополнив полученную матрицу нулями, придем к Γ_N.

1.3. В дальнейшем считаем, что $N = n^s$, где $n \geq 2$, $s \geq 2$ — натуральные числа. Положим $N_\nu = N/n^\nu$, $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$. В частности, $N_0 = N$, $N_s = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = n$, $\Delta_{\nu+1} = N_{s-\nu}$ при $\nu = 0, 1, \ldots, s$.

Число $p \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ можно представить в виде

$$p = p_{\nu-1}n^{\nu-1} + p_{\nu-2}n^{\nu-2} + \ldots + p_0,$$

где $p_k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Обозначим

$$\mathrm{rev}_\nu(p) = p_0 n^{\nu-1} + p_1 n^{\nu-2} + \ldots + p_{\nu-1}.$$

Операция rev_ν сопоставляет числу p число $\mathrm{rev}_\nu(p)$, n-ичный код которого равен перевернутому n-ичному коду числа p. Очевидно, что $\mathrm{rev}_\nu\big(\mathrm{rev}_\nu(p)\big) = p$. По определению $\mathrm{rev}_1(p) = p$ при $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Положим также $\mathrm{rev}_0(0) = 0$.

Операция rev_ν при $\nu \geq 2$ является перестановкой множества $\{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$.

Лемма 1.1. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$\mathrm{rev}_0(0) = 0,$$

$$\mathrm{rev}_\nu(nl + \sigma) = \sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) \tag{1.5}$$

при $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\nu = 1, \ldots, s$.

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (1.5) тривиальна. Пусть $\nu \geq 2$. Имеем $nl + \sigma = l_{\nu-2}n^{\nu-1} + \ldots + l_0 n + \sigma$. Значит,

$$\mathrm{rev}_\nu(nl + \sigma) = \sigma n^{\nu-1} + l_0 n^{\nu-2} + \ldots + l_{\nu-2} = \sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l).$$

Лемма доказана.

1.4. Введем квадратную матрицу R_ν порядка $\Delta_{\nu+1}$ с элементами

$$R_\nu[k, j] = \begin{cases} 1, \text{ если } j = \mathrm{rev}_\nu(k), \\ 0 \text{ при остальных } k, j \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}. \end{cases}$$

В частности, $R_1 = E_n$. Очевидно, что R_ν — симметричная матрица и

$$R_\nu R_\nu = E_{\Delta_{\nu+1}}. \tag{1.6}$$

Действие R_ν определяется так:

$$y = R_\nu x \quad \Leftrightarrow \quad y(k) = x\big(\mathrm{rev}_\nu(k)\big),\ k \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}.$$

В связи с этим матрица R_ν называется *матрицей реверсных перестановок*. Если A — квадратная матрица порядка $\Delta_{\nu+1}$, то умножение $R_\nu A$ ревертирует строки матрицы A, а умножение AR_ν ревертирует столбцы матрицы A.

§ 2. ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ ФУРЬЕ ПО ГЛАССМАНУ И ПО КУЛИ–ТЬЮКИ

2.1. Операция кронекерова умножения $\otimes$ позволяет записать матрицу D_N из (1.4) в виде $D_N = F_m \otimes E_n$, так что

$$F_N = \Gamma_N(F_m \otimes E_n). \tag{2.1}$$

С помощью (2.1) получим более глубокую факторизацию матрицы Фурье F_N при $N = n^s$.

Введем вектор-строки

$$\gamma_k^{(\nu)} = \big(1, \omega_{\Delta_{\nu+1}}^k, \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{2k}, \ldots, \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(n-1)k}\big), \quad k = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1,$$

и из них составим квадратную матрицу $\Gamma_{\Delta_{\nu+1}}$ порядка $\Delta_{\nu+1}$:

$$\Gamma_{\Delta_{\nu+1}} = \begin{bmatrix} \gamma_0^{(\nu)} & & & \\ & \gamma_1^{(\nu)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{\Delta_\nu - 1}^{(\nu)} \\ \gamma_{\Delta_\nu}^{(\nu)} & & & \\ & \gamma_{\Delta_\nu + 1}^{(\nu)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{2\Delta_\nu - 1}^{(\nu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{(n-1)\Delta_\nu}^{(\nu)} & & & \\ & \gamma_{(n-1)\Delta_\nu + 1}^{(\nu)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_{\Delta_{\nu+1} - 1}^{(\nu)} \end{bmatrix}.$$

Напомним, что $N_\nu = N/n^\nu$.

Теорема 2.1. *Для матрицы Фурье F_N при $N = n^s$ справедливо разложение*

$$F_N = H_s H_{s-1} \cdots H_1, \tag{2.2}$$

где $H_\nu = \Gamma_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu}$.

Доказательство. Поскольку $\Delta_{\nu+1} = n\Delta_\nu$, то согласно (2.1) при $\nu \in \{2, \ldots, s\}$ имеем

$$F_{\Delta_{\nu+1}} = \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}(F_{\Delta_\nu} \otimes E_n). \tag{2.3}$$

Покажем, что

$$F_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu} = H_\nu(F_{\Delta_\nu} \otimes E_{N_{\nu-1}}). \tag{2.4}$$

Это легко следует из (2.3) и свойств кронекерова умножения. Действительно,

$$F_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu} = \big(\Gamma_{\Delta_{\nu+1}}(F_{\Delta_\nu} \otimes E_n)\big) \otimes (E_{N_\nu} E_{N_\nu}) =$$

$$= (\Gamma_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu})(F_{\Delta_\nu} \otimes E_n \otimes E_{N_\nu}) = H_\nu(F_{\Delta_\nu} \otimes E_{N_{\nu-1}}).$$

Воспользуемся тем, что $H_s = \Gamma_{\Delta_{s+1}} \otimes E_1 = \Gamma_{\Delta_{s+1}}$. На основании (2.3) и (2.4) получим

$$F_N = F_{\Delta_{s+1}} = \Gamma_{\Delta_{s+1}}(F_{\Delta_s} \otimes E_n) = H_s(F_{\Delta_s} \otimes E_{N_{s-1}}) =$$

$$= H_s H_{s-1}(F_{\Delta_{s-1}} \otimes E_{N_{s-2}}) = \ldots = H_s H_{s-1} \cdots H_2(F_{\Delta_2} \otimes E_{N_1}).$$

Так как $\Gamma_n = F_n$ (случай $\nu = 1$), то

$$F_{\Delta_2} \otimes E_{N_1} = \Gamma_{\Delta_2} \otimes E_{N_1} = H_1.$$

Теорема доказана.

2.2. Выясним структуру матрицы H_ν.

Лемма 2.1. *При $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ справедливо представление*

$$H_\nu[(\sigma\Delta_\nu + l)N_\nu + p,\ (ln + \tau)N_\nu + p] = \omega_n^{\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau}, \tag{2.5}$$

где $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$, $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma, \tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$;

$$H_\nu[k, j] = 0 \ \text{при остальных } (k, j).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем индексы $k, j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ и представим их в виде $k = qN_\nu + p$, $j = q'N_\nu + p'$, где $p, p' \in \{0, 1, \dots, N_\nu - 1\}$, $q, q' \in \{0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$. Так как $H_\nu = \Gamma_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu}$, то по определению кронекерова умножения

$$H_\nu[k, j] = \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}[q, q']E_{N_\nu}[p, p'] = \begin{cases} \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}[q, q'] \text{ при } p = p', \\ 0 \text{ при } p \neq p'. \end{cases}$$

Пусть далее $q = \sigma\Delta_\nu + l$, $q' = l'n + \tau$, где $l, l' \in \{0, 1, \dots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma, \tau \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. По построению матрицы $\Gamma_{\Delta_{\nu+1}}$

$$\Gamma_{\Delta_{\nu+1}}[q, q'] = \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}[\sigma\Delta_\nu + l,\, l'n + \tau] = \begin{cases} \gamma_q^{(\nu)}(\tau) \text{ при } l = l', \\ 0 \text{ при } l \neq l'. \end{cases} \tag{2.6}$$

Значит, ненулевыми являются только те элементы $H_\nu[k, j]$, у которых $k = (\sigma\Delta_\nu + l)N_\nu + p$, $j = (ln + \tau)N_\nu + p$. При этом

$$H_\nu[(\sigma\Delta_\nu + l)N_\nu + p,\, (ln + \tau)N_\nu + p] = \gamma_{\sigma\Delta_\nu + l}^{(\nu)}(\tau) =$$

$$\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(\sigma\Delta_\nu + l)\tau} = \omega_n^{\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau}.$$

Лемма доказана.

2.3. Разложение (2.2) матрицы Фурье F_N назовем *факторизацией по Глассману*. С помощью матриц реверсных перестановок R_ν получим еще два разложения F_N.

Обозначим

$$U_1 = H_1 = F_n \otimes E_{N_1};$$

$$G_{\Delta_{\nu+1}} = R_\nu\Gamma_{\Delta_{\nu+1}}(R_{\nu-1} \otimes E_n),$$

$$U_\nu = G_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu}, \quad \nu = 2, \dots, s.$$

Теорема 2.2. *При $N = n^s$ матрица Фурье F_N допускает представление*

$$F_N = R_sU_sU_{s-1}\cdots U_1. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $H_s = \Gamma_{\Delta_{s+1}}$, то

$$U_s = G_{\Delta_{s+1}} = R_sH_s(R_{s-1} \otimes E_n).$$

Отсюда с учетом (1.6) следует, что

$$H_s = R_s U_s (R_{s-1} \otimes E_n)^{-1} = R_s U_s (R_{s-1} \otimes E_n).$$

Согласно (2.2) имеем

$$F_N = R_s U_s (R_{s-1} \otimes E_n) H_{s-1} \cdots H_1. \tag{2.8}$$

Покажем, что при $\nu = s-1, s-2, \ldots, 2$

$$(R_\nu \otimes E_{N_\nu}) H_\nu = U_\nu (R_{\nu-1} \otimes E_{N_{\nu-1}}). \tag{2.9}$$

Действительно,

$$(R_\nu \otimes E_{N_\nu}) H_\nu = (R_\nu \otimes E_{N_\nu})(\Gamma_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu}) =$$

$$= (R_\nu \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}) \otimes E_{N_\nu} = \big(G_{\Delta_{\nu+1}}(R_{\nu-1} \otimes E_n)\big) \otimes (E_{N_\nu} E_{N_\nu}) =$$

$$= (G_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu})(R_{\nu-1} \otimes E_n \otimes E_{N_\nu}) = U_\nu (R_{\nu-1} \otimes E_{N_{\nu-1}}).$$

Вернемся к формуле (2.8). Учитывая (2.9), получаем

$$F_N = R_s U_s U_{s-1} (R_{s-2} \otimes E_{N_{s-2}}) H_{s-2} \cdots H_1 = \ldots =$$

$$= R_s U_s U_{s-1} \cdots U_2 (R_1 \otimes E_{N_1}) H_1.$$

Остается принять во внимание, что $R_1 = E_n$ и $H_1 = U_1$.

Теорема доказана.

Лемма 2.2. *При $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ имеют место равенства*

$$U_\nu[(ln+\sigma)N_\nu + p,\, (ln+\tau)N_\nu + p] = \omega_n^{\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\tau\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)}, \tag{2.10}$$

где $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$, $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma, \tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$;

$$U_\nu[k, j] = 0 \ \textit{при остальных} \ (k, j).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu = 1$ формула (2.10) принимает вид

$$U_1[\sigma N_1 + p,\, \tau N_1 + p] = \omega_n^{\sigma\tau},$$

$$p \in \{0, 1, \ldots, N_1 - 1\}, \quad \sigma, \tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Ее справедливость следует из (2.5) (при $\nu = 1$) и равенства $U_1 = H_1$. В дальнейшем считаем, что $\nu \in \{2, \ldots, s\}$.

Зафиксируем $k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ и запишем $k = qN_\nu + p$, $j = q'N_\nu + p'$, где $p, p' \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$, $q, q' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$. По определению кронекерова умножения матриц

$$U_\nu[k, j] = G_{\Delta_{\nu+1}}[q, q']E_{N_\nu}[p, p']. \tag{2.11}$$

Пусть $q = ln + \sigma$, $q' = l'n + \tau$, где $\sigma, \tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $l, l' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$. Покажем, что

$$G_{\Delta_{\nu+1}}[ln + \sigma,\, l'n + \tau] = \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}[\mathrm{rev}_\nu(ln + \sigma),\, n\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l') + \tau]. \tag{2.12}$$

Действительно, по определению $G_{\Delta_{\nu+1}}$

$$G_{\Delta_{\nu+1}}[ln + \sigma,\, l'n + \tau] = \sum_{r=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{s=0}^{n-1} \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}[\mathrm{rev}_\nu(ln + \sigma),\, rn + s]\times$$

$$\times R_{\nu-1}[r, l']E_n[s, \tau] = \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}[\mathrm{rev}_\nu(ln + \sigma),\, n\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l') + \tau].$$

Согласно (1.5), (2.6) и (2.12) получаем

$$G_{\Delta_{\nu+1}}[ln + \sigma,\, l'n + \tau] = \Gamma_{\Delta_{\nu+1}}[\sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l),\, n\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l') + \tau] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \gamma^{(\nu)}_{\sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l)}(\tau) \ \text{ при } l = l' \\ 0 \ \text{ при } l \neq l' \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_n^{\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\tau\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)} \ \text{ при } l = l', \\ 0 \ \text{ при } l \neq l'. \end{array} \right.$$

Теперь из (2.11) следует, что элемент $U_\nu[k, j]$ отличен от нуля только в случае $p = p'$ и $l = l'$. При этом справедлива формула (2.10). Лемма доказана.

2.4. Положим $T_\nu = R_s U_\nu R_s$.

Теорема 2.3. *Для матрицы Фурье F_N при $N = n^s$ справедливо разложение*

$$F_N = T_s T_{s-1} \cdots T_1 R_s. \tag{2.13}$$

Доказательство легко следует из (2.7) и (1.8). Действительно,

$$F_N = R_s U_s U_{s-1} \cdots U_1 = (R_s U_s R_s)(R_s U_{s-1} R_s) \cdots (R_s U_1 R_s) R_s =$$

$$= T_s T_{s-1} \cdots T_1 R_s.$$

Лемма 2.3. *При $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ имеют место равенства*

$$T_\nu[l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1},\, l + \tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}] = \omega_n^{\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau}, \tag{2.14}$$

где $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$, $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma, \tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$;

$$T_\nu[k, j] = 0 \ \textit{при остальных}\ (k, j).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu = 1$ формула (2.14) принимает вид

$$T_1[\sigma + pn,\, \tau + pn] = \omega_n^{\sigma\tau},$$

$$p \in \{0, 1, \ldots, N_1 - 1\}, \quad \sigma, \tau \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Для ее проверки воспользуемся определением T_1, формулами (1.5) при $\nu = s$ и (2.10) при $\nu = 1$. Получим

$$T_1[\sigma + pn,\, \tau + pn] = U_1[\mathrm{rev}_s(\sigma + pn),\, \mathrm{rev}_s(\tau + pn)] =$$

$$= U_1[\sigma\Delta_s + \mathrm{rev}_{s-1}(p),\, \tau\Delta_s + \mathrm{rev}_{s-1}(p)] =$$

$$= U_1[\sigma N_1 + \mathrm{rev}_{s-1}(p),\, \tau N_1 + \mathrm{rev}_{s-1}(p)] = \omega_n^{\sigma\tau},$$

что и требовалось установить. В дальнейшем считаем, что $\nu \in \{2, \ldots, s\}$.

Поскольку $T_\nu[k, j] = U_\nu[\mathrm{rev}_s(k), \mathrm{rev}_s(j)]$, то элемент $T_\nu[k, j]$ отличен от нуля только тогда, когда

$$\mathrm{rev}_s(k) = (ln + \sigma)N_\nu + p, \quad \mathrm{rev}_s(j) = (ln + \tau)N_\nu + p,$$

или $k = \mathrm{rev}_s(lN_{\nu-1} + \sigma N_\nu + p)$, $j = \mathrm{rev}_s(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p)$. При этом

$$T_\nu[k, j] = \omega_n^{\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\tau\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)}. \tag{2.15}$$

Пусть $l = l_{\nu-2}n^{\nu-2} + \ldots + l_0$, $p = p_{s-\nu-1}n^{s-\nu-1} + \ldots + p_0$. Тогда

$$lN_{\nu-1} + \sigma N_\nu + p = l_{\nu-2}n^{s-1} + \ldots + l_0 n^{s-\nu+1} + \sigma n^{s-\nu} +$$

$$+ p_{s-\nu-1}n^{s-\nu-1} + \ldots + p_0,$$

так что

$$\operatorname{rev}_s(lN_{\nu-1}+\sigma N_\nu+p)=p_0n^{s-1}+\ldots+p_{s-\nu-1}n^\nu+\sigma n^{\nu-1}+$$
$$+l_0n^{\nu-2}+\ldots+l_{\nu-2}=n^\nu(p_0n^{s-\nu-1}+\ldots+p_{s-\nu-1})+\sigma\Delta_\nu+$$
$$+\operatorname{rev}_{\nu-1}(l)=\Delta_{\nu+1}\operatorname{rev}_{s-\nu}(p)+\sigma\Delta_\nu+\operatorname{rev}_{\nu-1}(l).$$

Аналогично

$$\operatorname{rev}_s(lN_{\nu-1}+\tau N_\nu+p)=\Delta_{\nu+1}\operatorname{rev}_{s-\nu}(p)+\tau\Delta_\nu+\operatorname{rev}_{\nu-1}(l).$$

Положим $p'=\operatorname{rev}_{s-\nu}(p),\ l'=\operatorname{rev}_{\nu-1}(l)$. В этом случае формулу (2.15) можно переписать так:

$$T_\nu[l'+\sigma\Delta_\nu+p'\Delta_{\nu+1},\,l'+\tau\Delta_\nu+p'\Delta_{\nu+1}]=\omega_n^{\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\tau l'},$$

что равносильно (2.14). Лемма доказана.

2.5. Замечательной особенностью всех трех разложений (2.2), (2.7) и (2.13) матрицы Фурье является то, что строки сомножителей H_ν, U_ν, T_ν, в них входящих, ортогональны. Проверим это.

Обозначим через F_N^* матрицу, сопряженную с F_N. В силу (1.2) $F_NF_N^*=NE_N$.

Лемма 2.4. *При $\nu\in\{1,\ldots,s\}$ выполняются соотношения*

$$H_\nu H_\nu^*=U_\nu U_\nu^*=T_\nu T_\nu^*=nE_N. \tag{2.16}$$

Доказательство. При $\nu=1$ имеем

$$H_1H_1^*=(F_n\otimes E_{N_1})(F_n^*\otimes E_{N_1})=(F_nF_n^*)\otimes E_{N_1}=$$
$$=nE_n\otimes E_{N_1}=nE_N.$$

Поскольку $U_1=H_1$, то и $U_1U_1^*=nE_N$.

Пусть $\nu\in\{2,\ldots,s\}$. Согласно (2.4)

$$H_\nu=(F_{\Delta_{\nu+1}}\otimes E_{N_\nu})(F_{\Delta_\nu}^{-1}\otimes E_{N_{\nu-1}})=\Delta_\nu^{-1}(F_{\Delta_{\nu+1}}\otimes E_{N_\nu})(F_{\Delta_\nu}^*\otimes E_{N_{\nu-1}}),$$

поэтому

$$H_\nu H_\nu^*=\Delta_\nu^{-2}(F_{\Delta_{\nu+1}}\otimes E_{N_\nu})(F_{\Delta_\nu}^*\otimes E_{N_{\nu-1}})(F_{\Delta_\nu}\otimes E_{N_{\nu-1}})(F_{\Delta_{\nu+1}}^*\otimes E_{N_\nu})=$$

$$= \Delta_\nu^{-1}(F_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu})(F^*_{\Delta_{\nu+1}} \otimes E_{N_\nu}) = nE_N.$$

Далее, формула (2.9) верна не только при $\nu \in \{2, \ldots, s-1\}$, но и при $\nu = s$. Учитывая это, запишем

$$U_\nu = (R_\nu \otimes E_{N_\nu})H_\nu(R_{\nu-1} \otimes E_{N_{\nu-1}}).$$

Теперь равенство $U_\nu U_\nu^* = nE_N$ проверяется аналогично предыдущему. Равенство $T_\nu T_\nu^* = nE_N$ при $\nu \in \{1, \ldots, s\}$ следует из представления $T_\nu = R_s U_\nu R_s$. Лемма доказана.

2.6. Напомним, что разложение (2.2) матрицы Фурье было названо факторизацией по Глассману. Разложения (2.7) и (2.13) назовем *факторизациями по Кули–Тьюки, связанными соответственно с прореживанием по времени и прореживанием по частоте.* Необходимые на этот счет пояснения будут даны в § 4, 5.

§ 3. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. ОСНОВНОЙ ВАРИАНТ

3.1. На основе разложения (2.2) матрицы Фурье F_N при $N = n^s$ построим в $\mathbb{C}_N$ последовательность ортогональных базисов $\{h_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, так, чтобы $h_0(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $h_s(k;j) = u_k(j) = \omega_n^{kj}$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Сигналы $h_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $h_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-столбца $h_\nu = \big(h_\nu(0), h_\nu(1), \ldots, h_\nu(N-1)\big)^\top$. Положим

$$h_\nu = H_\nu H_{\nu-1} \cdots H_1\, h_0. \tag{3.1}$$

Согласно (2.2), $h_s = F_N h_0$, так что при $k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$

$$h_s(k;j) = \sum_{l=0}^{N-1} F_N[k,l]\delta_N(j-l) = F_N[k,j] = \omega_N^{kj}.$$

Разберемся с промежуточными базисами $h_1, \ldots, h_{s-1}$. Обозначим $Q_\nu = H_\nu H_{\nu-1} \cdots H_1$. В силу (2.16) $Q_\nu Q_\nu^* = n^\nu E_N$. Это означает, что строки матрицы Q_ν попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен n^ν. Учитывая, что $h_\nu = Q_\nu h_0$, приходим к следующему выводу.

Теорема 3.1. *При каждом* $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$ *сигналы*

$$h_\nu(0),\ h_\nu(1),\ \ldots,\ h_\nu(N-1) \tag{3.2}$$

образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$. *При этом* $\|h_\nu(k)\|^2 = n^\nu$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

3.2. Согласно (3.1), $h_\nu = H_\nu h_{\nu-1}$. Формула (2.5) позволяет записать развернутую схему перехода от базиса $h_{\nu-1}$ к базису h_ν:

$$h_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$h_\nu\big((l + \sigma\Delta_\nu)N_\nu + p\big) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau} h_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p), \tag{3.3}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = 1$ формула (3.3) принимает вид

$$h_1(\sigma N_1 + p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} h_0(\tau N_1 + p), \tag{3.4}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Теорема 3.2. *Справедливо равенство*

$$h_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{lq}\, h_0(qN_\nu + p), \tag{3.5}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ формула (3.5) совпадает с (3.4), если в последней заменить σ на l. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν.

Возьмем индекс $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ и представим его в виде $l = \sigma\Delta_\nu + l'$, где $l' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. На основании (3.3) и индукционного предположения запишем

$$h_\nu(lN_\nu + p) = h_\nu\big((l' + \sigma\Delta_\nu)N_\nu + p\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l'\tau} h_{\nu-1}(l'N_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_{\Delta_\nu}^{l'q}\, h_0(qN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(l'+\sigma\Delta_\nu)nq}\, h_0\big((nq+\tau)N_\nu + p\big) =$$

$$= \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{lq'}\, h_0(q'N_\nu + p).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Имеют место тождества*

$$h_\nu(0;\, j) = \delta_{N_\nu}(j), \quad \nu = 0, 1, \ldots, s; \tag{3.6}$$

$$h_\nu(\sigma N_1;\, j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu), \tag{3.7}$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s;$$

$$h_\nu(lN_\nu + p;\, j) = h_\nu(lN_\nu;\, j - p), \tag{3.8}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1.$$

Действительно, согласно (3.5)

$$h_\nu(0;\, j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - qN_\nu) = \delta_{N_\nu}(j).$$

Далее

$$h_\nu(\sigma N_1;\, j) = h_\nu\big((\sigma\Delta_\nu)N_\nu;\, j\big) = \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\sigma\Delta_\nu q'} \delta_N(j - q'N_\nu) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_n^{\sigma(nq+\tau)} \delta_N\bigl(j - (nq+\tau)N_\nu\bigr) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \delta_N(j - \tau N_\nu - qN_{\nu-1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu).$$

Для доказательства (3.8) отметим, что

$$h_\nu(lN_\nu;\, j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{lq} \delta_N(j - qN_\nu),$$

поэтому

$$h_\nu(lN_\nu;\, j-p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{lq} \delta_N(j - p - qN_\nu) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{lq} h_0(qN_\nu + p;\, j) = h_\nu(lN_\nu + p;\, j).$$

3.3. Любой сигнал x можно разложить по ортогональному базису (3.2) при каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k)\, h_\nu(k). \tag{3.9}$$

Здесь $x_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, h_\nu(k)\rangle$. В частности,

$$x_0(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \delta_N(j-k) = x(k).$$

Согласно (3.3)

$$x_\nu\bigl((l+\sigma\Delta_\nu)N_\nu+p\bigr) = n^{-\nu} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l\tau} \bigl\langle x,\, h_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\tau N_\nu+p)\bigr\rangle =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l\tau}\, x_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p).$$

Приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (3.9):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu\big((l+\sigma\Delta_\nu)N_\nu+p\big) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l\tau}\, x_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\tau N_\nu+p), \tag{3.10}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ появляются коэффициенты $x_s(\sigma N_1 + l)$ при $l = 0, 1, \ldots, N_1 - 1$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$, или $x_s(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$. По определению

$$x_s(k) = n^{-s}\langle x, h_s(k)\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{h_s(k;j)} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\omega_N^{-kj} = N^{-1}\langle x, u_k\rangle = X(k).$$

Таким образом, при $\nu = s$ получаем коэффициенты разложения сигнала x по экспоненциальному базису. Попутно вычисляются коэффициенты разложений по всем промежуточным базисам h_ν.

Схему (3.10) назовем *основным вариантом быстрого преобразования Фурье при $N = n^s$*.

3.4. Формула (3.10) допускает обращение:

$$x_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\, x_\nu\big((l+\sigma\Delta_\nu)N_\nu + p\big), \tag{3.11}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Действительно, согласно (1.2)

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\, x_\nu\big((l+\sigma\Delta_\nu)N_\nu + p\big) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma\tau}\sum_{\delta=0}^{n-1}\omega_n^{-\sigma\delta}\,\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l\delta}\,x_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\delta N_\nu+p) =$$

$$= \sum_{\delta=0}^{n-1}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l\delta}\,x_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\delta N_\nu+p)\left\{\frac{1}{n}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\omega_n^{\sigma(\tau-\delta)}\right\} =$$

$$= \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l\tau}\,x_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\tau N_\nu+p),$$

что равносильно (3.11).

С помощью (3.11) восстанавливаются значения (отсчеты) сигнала $x = x(j)$ из $\mathbb{C}_N$, представленного в виде

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,u_k = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\,h_s(k).$$

Проведя вычисления по формуле (3.11), получим $x(j) = x_0(j)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

§ 4. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, СВЯЗАННОЕ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

4.1. В пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ построим еще одну последовательность ортогональных базисов $\{g_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$. Для этого воспользуемся разложением (2.7) матрицы Фурье. Положим $g_0(k;j) = \delta_N(j-k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Сигналы $g_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $g_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-столбца $g_\nu = \big(g_\nu(0), g_\nu(1), \ldots, g_\nu(N-1)\big)^\top$ и определим его следующим образом:

$$g_\nu = U_\nu U_{\nu-1}\cdots U_1\,g_0. \tag{4.1}$$

Согласно (2.7) и (1.6), $g_s = R_s F_N g_0$, так что

$$g_s(k;j) = \omega_N^{j\,\mathrm{rev}_s(k)}, \qquad k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}. \tag{4.2}$$

Разберемся с промежуточными базисами $g_1, \ldots, g_{s-1}$. Обозначим $Q_\nu = U_\nu U_{\nu-1}\cdots U_1$. В силу (2.16) $Q_\nu Q_\nu^* = n^\nu E_N$. Это означает, что строки матрицы Q_ν попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен n^ν. Учитывая, что $g_\nu = Q_\nu g_0$, приходим к такому заключению.

Теорема 4.1. *При каждом* $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$ *сигналы*

$$g_\nu(0),\ g_\nu(1),\ \ldots,\ g_\nu(N-1) \tag{4.3}$$

образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$. *При этом* $\|g_\nu(k)\|^2 = n^\nu$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

4.2. Согласно (4.1), $g_\nu = U_\nu g_{\nu-1}$. Формула (2.10) позволяет записать развернутую схему перехода от базиса $g_{\nu-1}$ к базису g_ν:

$$g_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$g_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu + p\big) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\tau\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)} g_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p), \tag{4.4}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = 1$ формула (4.4) принимает вид

$$g_1(\sigma N_1 + p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} g_0(\tau N_1 + p), \tag{4.5}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Теорема 4.2. *Справедливо равенство*

$$g_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{q\,\mathrm{rev}_\nu(l)}\, g_0(qN_\nu + p), \tag{4.6}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu = 1$ формула (4.6) совпадает с (4.5), если в последней заменить σ на l. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν.

Возьмем индекс $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ и представим его в виде $l = nl' + \sigma$, где $l' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$. Согласно (4.4) и индукционному предположению имеем

$$g_\nu(lN_\nu + p) = g_\nu\big((nl' + \sigma)N_\nu + p\big) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\tau\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l')}\, g_{\nu-1}(l'N_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\tau\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l')} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_{\Delta_\nu}^{q\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l')}\, g_0(qN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(nq+\tau)[\mathrm{rev}_{\nu-1}(l') + \sigma\Delta_\nu]}\, g_0\big((nq + \tau)N_\nu + p\big).$$

На основании (1.5)

$$\mathrm{rev}_{\nu-1}(l') + \sigma\Delta_\nu = \mathrm{rev}_\nu(nl' + \sigma) = \mathrm{rev}_\nu(l).$$

Учитывая это, получаем

$$g_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(nq+\tau)\,\mathrm{rev}_\nu(l)}\, g_0\big((nq + \tau)N_\nu + p\big) =$$

$$= \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{q'\,\mathrm{rev}_\nu(l)}\, g_0(q'N_\nu + p).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Имеют место тождества*

$$g_\nu(0;\, j) = \delta_{N_\nu}(j), \quad \nu = 0, 1, \ldots, s; \tag{4.7}$$

$$g_\nu(\sigma N_\nu;\, j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu), \tag{4.8}$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, n - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s;$$

$$g_\nu(lN_\nu + p;\, j) = g_\nu(lN_\nu;\, j - p), \tag{4.9}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s - 1.$$

При доказательстве (4.8) нужно учесть, что $\mathrm{rev}_\nu(\sigma) = \sigma\Delta_\nu$ при $\sigma = 0, 1, \ldots, n-1$. В остальном проверка тождеств (4.7)–(4.9) аналогична проверке тождеств (3.6)–(3.8).

4.3. Любой сигнал x можно разложить по ортогональному базису (4.3) при каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k)\, g_\nu(k). \tag{4.10}$$

Здесь $x_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, g_\nu(k)\rangle$. На основании (4.4) приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (4.10):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu\big((nl + \sigma)N_\nu + p\big) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-\tau\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)}\, x_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p), \tag{4.11}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ согласно (4.2) получаем

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\, g_s(k; j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\, \omega_N^{j\,\mathrm{rev}_s(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} x_s\big(\mathrm{rev}_s(k)\big)\, \omega_N^{jk}.$$

Значит, $X(k) = x_s\big(\mathrm{rev}_s(k)\big)$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

В случае $n = 2$ (при $N = 2^s$) схема (4.11) соответствует алгоритму Кули–Тьюки с прореживанием по времени для вычисления дискретного преобразования Фурье [4]. На этом основании в общем случае $N = n^s$ схему (4.11) назовем *быстрым преобразованием Фурье, связанным с прореживанием по времени.*

4.4. Формула (4.11) допускает обращение:

$$x_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\tau N_\nu+p) = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\tau\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)} \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, x_\nu\bigl((nl+\sigma)N_\nu+p\bigr), \quad (4.12)$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Это доказывается так же, как (3.11).

С помощью (4.12) можно восстановить значения сигнала $x = x(j)$ по его коэффициентам Фурье $X(k) = N^{-1}\langle x, u_k\rangle$. Для этого достаточно положить $x_s(k) = X\bigl(\mathrm{rev}_s(k)\bigr),\ k = 0, 1, \ldots, N-1$. Проведя вычисления по формуле (4.12), получим $x(j) = x_0(j),\ j = 0, 1, \ldots, N-1$.

§ 5. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, СВЯЗАННОЕ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ

5.1. Обратимся к разложению (2.13) матрицы Фурье и построим в пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$ третью последовательность ортогональных базисов $\{f_\nu(k;j)\}_{k=0}^{N-1},\ \nu = 0, 1, \ldots, s$. Положим $f_0(k;j) = \delta_N\bigl(j - \mathrm{rev}_s(k)\bigr),\ k = 0, 1, \ldots, N-1$. Сигналы $f_\nu(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $f_\nu(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-столбца $f_\nu = \bigl(f_\nu(0), f_\nu(1), \ldots, f_\nu(N-1)\bigr)^\top$ и определим его следующим образом:

$$f_\nu = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_1\, f_0. \quad (5.1)$$

Согласно (2.13), $f_s(k;j) = \omega_N^{kj},\ k, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Разберемся с промежуточными базисами $f_1, \ldots, f_{s-1}$.

Обозначим $Q_\nu = T_\nu T_{\nu-1} \cdots T_1$. В силу (2.16) $Q_\nu Q_\nu^* = n^\nu E_N$. Это означает, что строки матрицы Q_ν попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен n^ν. По определению $f_\nu = Q_\nu f_0$, так что

$$f_\nu(k;j) = \sum_{l=0}^{N-1} Q_\nu[k,l]\, \delta_N\bigl(j - \mathrm{rev}_s(l)\bigr) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} Q_\nu[k, \operatorname{rev}_s(l)]\, \delta_N(j-l).$$

Принимая во внимание указанные факты, приходим к такому заключению.

Теорема 5.1. *При каждом* $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$ *сигналы*

$$f_\nu(0),\ f_\nu(1),\ \ldots,\ f_\nu(N-1) \tag{5.2}$$

образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$*. При этом* $\|f_\nu(k)\|^2 = n^\nu$ *при всех* $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

5.2. Согласно (5.1), $f_\nu = T_\nu f_{\nu-1}$. Формула (2.14) позволяет записать развернутую схему перехода от базиса $f_{\nu-1}$ к базису f_ν:

$$f_0(k) = \delta_N\big(\cdot - \operatorname{rev}_s(k)\big), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$f_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau}\, f_{\nu-1}\big(l + (np+\tau)\Delta_\nu\big), \tag{5.3}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = 1$ формула (5.3) принимает вид

$$f_1(np + \sigma) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} f_0(np + \tau), \tag{5.4}$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1.$$

Теорема 5.2. *Справедливо равенство*

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_\nu(q)}\, f_0(q + p\Delta_{\nu+1}), \tag{5.5}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\nu = 1$ формула (5.5) совпадает с (5.4), если в последней заменить σ на l. Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν.

Возьмем индекс $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ и представим его в виде $l = l' + \sigma\Delta_\nu$, где $l' \in \{0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1\}$, $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. На основании (5.3) и индукционного предположения запишем

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = f_\nu(l' + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l'\tau} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_{\Delta_\nu}^{l' \operatorname{rev}_{\nu-1}(q)} f_0\bigl(q + (np + \tau)\Delta_\nu\bigr) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(l' + \sigma\Delta_\nu)[n \operatorname{rev}_{\nu-1}(q) + \tau]} f_0(q + \tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}).$$

Пусть $q = q_{\nu-2}n^{\nu-2} + \ldots + q_0$. Тогда

$$n \operatorname{rev}_{\nu-1}(q) + \tau = q_0 n^{\nu-1} + \ldots + q_{\nu-2}n + \tau = \operatorname{rev}_\nu(\tau\Delta_\nu + q).$$

Значит,

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_\nu(q + \tau\Delta_\nu)} f_0\bigl((q + \tau\Delta_\nu) + p\Delta_{\nu+1}\bigr) =$$

$$= \sum_{q'=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l \operatorname{rev}_\nu(q')} f_0(q' + p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Имеют место тождества*

$$f_\nu(0; j) = \delta_{N_\nu}(j), \quad \nu = 0, 1, \ldots, s; \tag{5.6}$$

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu; j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu), \tag{5.7}$$

$$\sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s;$$

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu\bigl(l; j - \operatorname{rev}_{s-\nu}(p)\bigr), \tag{5.8}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s-1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что при $q \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$

$$\operatorname{rev}_s(q) = N_\nu \operatorname{rev}_\nu(q). \tag{5.9}$$

Действительно, пусть $q = q_{\nu-1}n^{\nu-1} + \ldots + q_0$. Тогда

$$\operatorname{rev}_s(q) = q_0 n^{s-1} + q_1 n^{s-2} + \ldots + q_{\nu-1} n^{s-\nu} =$$

$$= n^{s-\nu}(q_0 n^{\nu-1} + q_1 n^{\nu-2} + \ldots + q_{\nu-1}) = N_\nu \operatorname{rev}_\nu(q).$$

Учитывая (5.5) и (5.9), запишем

$$f_\nu(0;\, j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} f_0(q;\, j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N\big(j - \operatorname{rev}_s(q)\big) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N\big(j - N_\nu \operatorname{rev}_\nu(q)\big) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \delta_N(j - qN_\nu) = \delta_{N_\nu}(j),$$

что соответствует (5.6).

При $\nu = 1$ формула (5.7) выводится непосредственно:

$$f_1(\sigma\Delta_1;\, j) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\, \delta_N\big(j - \operatorname{rev}_s(q)\big) = \sum_{q=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma q}\, \delta_N(j - qN_1).$$

Возьмем $\nu \in \{2, \ldots, s\}$. При $\sigma \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ имеем

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\sigma \operatorname{rev}_\nu(q)}\, f_0(q) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu - 1} \omega_n^{\sigma \operatorname{rev}_\nu(\tau\Delta_\nu + q')}\, f_0(\tau\Delta_\nu + q').$$

Поскольку

$$\operatorname{rev}_\nu(\tau\Delta_\nu + q') = \operatorname{rev}_\nu(\tau n^{\nu-1} + q'_{\nu-2}n^{\nu-2} + \ldots + q'_0) =$$

$$= q'_0 n^{\nu-1} + \ldots + q'_{\nu-2} n + \tau,$$

то

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu;\, j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu -1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_N\bigl(j - \mathrm{rev}_s(\tau\Delta_\nu + q')\bigr).$$

Воспользуемся тем, что

$$\mathrm{rev}_s(\tau\Delta_\nu + q') = q'_0 n^{s-1} + \ldots + q'_{\nu-2} n^{s-\nu+1} + \tau n^{s-\nu} =$$

$$= \tau N_\nu + N_{\nu-1}\mathrm{rev}_{\nu-1}(q').$$

Получим

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu;\, j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \sum_{q'=0}^{\Delta_\nu -1} \delta_N(j - \tau N_\nu - q' N_{\nu-1}) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu),$$

что соответствует (5.7).

Переходя к проверке тождества (5.8), отметим, что при $p \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$, $q \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ и $\nu \in \{1, \ldots, s-1\}$

$$\mathrm{rev}_s(q + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \mathrm{rev}_s(p_{s-\nu-1} n^{s-1} + \ldots + p_0 n^\nu + q_{\nu-1} n^{\nu-1} + \ldots + q_0) =$$

$$= q_0 n^{s-1} + \ldots + q_{\nu-1} n^{s-\nu} + p_0 n^{s-\nu-1} + \ldots + p_{s-\nu-1} =$$

$$= N_\nu\, \mathrm{rev}_\nu(q) + \mathrm{rev}_{s-\nu}(p).$$

Поэтому

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1};\, j) = \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\,\mathrm{rev}_\nu(q)}\, \delta_N\bigl(j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p) - N_\nu \mathrm{rev}_\nu(q)\bigr) =$$

$$= \sum_{q=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{lq}\, \delta_N\bigl(j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p) - qN_\nu\bigr).$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$f_\nu(l + p\Delta_{\nu+1};\, j) = f_\nu\bigl(l;\, j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\bigr).$$

5.3. Любой сигнал x можно разложить по ортогональному базису (5.2) при каждом $\nu \in \{0, 1, \ldots, s\}$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu(k)\, f_\nu(k). \tag{5.10}$$

Здесь $x_\nu(k) = n^{-\nu}\langle x, f_\nu(k)\rangle$. На основании (5.3) приходим к рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (5.10):

$$x_0(k) = x\bigl(\mathrm{rev}_s(k)\bigr), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{-l\tau}\, x_{\nu-1}\bigl(l + (np+\tau)\Delta_\nu\bigr), \tag{5.11}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ получаем

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\, f_s(k; j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_s(k)\, \omega_N^{kj}.$$

Значит, $x_s(k) = X(k)$ при $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

В случае $n = 2$ (при $N = 2^s$) схема (5.11) соответствует алгоритму Кули–Тьюки с прореживанием по частоте для вычисления дискретного преобразования Фурье [5]. На этом основании в общем случае $N = n^s$ схему (5.11) назовем *быстрым преобразованием Фурье, связанным с прореживанием по частоте.*

5.4. Формула (5.11) допускает обращение:

$$x_{\nu-1}\bigl(l + (np+\tau)\Delta_\nu\bigr) = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\tau}\sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, x_\nu(l + \sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \tag{5.12}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad l = 0, 1, \ldots, \Delta_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$\nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Это доказывается так же, как (3.11).

С помощью (5.12) можно восстановить значения сигнала $x = x(j)$ по его коэффициентам Фурье $X(k) = x_s(k)$. Проведя вычисления по формуле (5.12), получим $x(j) = x_0\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

§ 6. ВЕЙВЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

6.1. В § 3–5 были построены три последовательности ортогональных базисов $\{h_\nu\}_{\nu=0}^{s}$, $\{g_\nu\}_{\nu=0}^{s}$, $\{f_\nu\}_{\nu=0}^{s}$ в пространстве $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$. Обратим внимание на индексы базисных сигналов в формулах (3.3), (4.4), (5.3) перехода от базиса $(\nu-1)$-го уровня к базису ν-го уровня:

$$\begin{aligned} \big\{h_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\tau N_\nu+p)\big\} &\;\to\; \big\{h_\nu\big((l+\sigma\Delta_\nu)N_\nu+p\big)\big\}, \\ \big\{g_{\nu-1}(lN_{\nu-1}+\tau N_\nu+p)\big\} &\;\to\; \big\{g_\nu\big((nl+\sigma)N_\nu+p\big)\big\}, \\ \big\{f_{\nu-1}\big(l+(np+\tau)\Delta_\nu\big)\big\} &\;\to\; \big\{f_\nu(l+\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1})\big\}, \end{aligned}$$

$$p = 0,1,\ldots,N_\nu-1, \quad l = 0,1,\ldots,\Delta_\nu-1, \quad \tau,\sigma = 0,1,\ldots,n-1,$$
$$\nu = 1,\ldots,s.$$

Можно считать, что во всех трех случаях базисы $(\nu-1)$-го уровня разбиты на Δ_ν блоков, помеченных индексом l; в каждом таком блоке содержится $N_{\nu-1}$ сигналов, определяемых парой индексов (p,τ). В соответствии с (3.3), (4.4), (5.3) блок $(\nu-1)$-го уровня с индексом l порождает n блоков ν-го уровня, определяемых парой индексов (l,σ), $\sigma = 0,1,\ldots,n-1$; каждый такой блок содержит N_ν сигналов, помеченных индексом p. Как следует из (3.8), (4.9), (5.8), сигналы, входящие в указанные блоки, различаются между собой лишь сдвигом аргумента.

Описанная схема ветвления при $N = 9$ $(n = 3,\ s = 2)$ представлена на рис. 1. Квадратами выделены блоки. Число внутри квадрата показывает, сколько сигналов содержится в данном блоке.

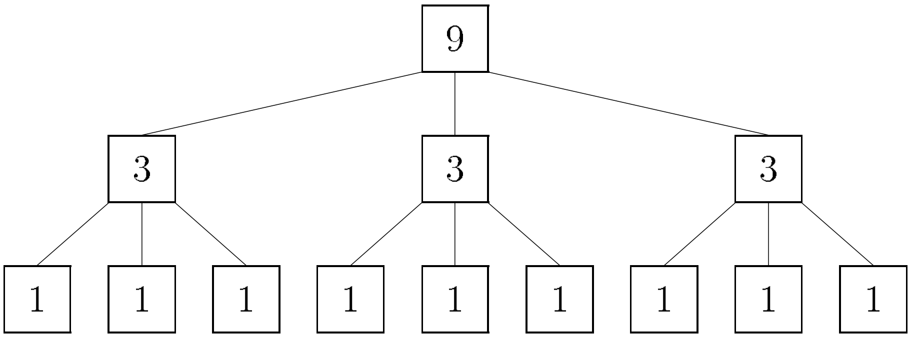

Рис. 1

Количество ортогональных базисов в $\mathbb{C}_N$ можно значительно увеличить, если использовать вертикальную составляющую. Это демонстрируется на рис. 2 при $N = 27$ ($n = 3$, $s = 3$). Сигналы, находящиеся в висячих блоках, во всех четырех примерах образуют ортогональные базисы. Действительно, ортогональность сигналов ν-го уровня известна. Сигналы каждого висячего блока $(\nu + 1)$-го уровня являются линейными комбинациями сигналов некоторого блока ν-го уровня и поэтому они ортогональны сигналам из остальных блоков ν-го уровня.

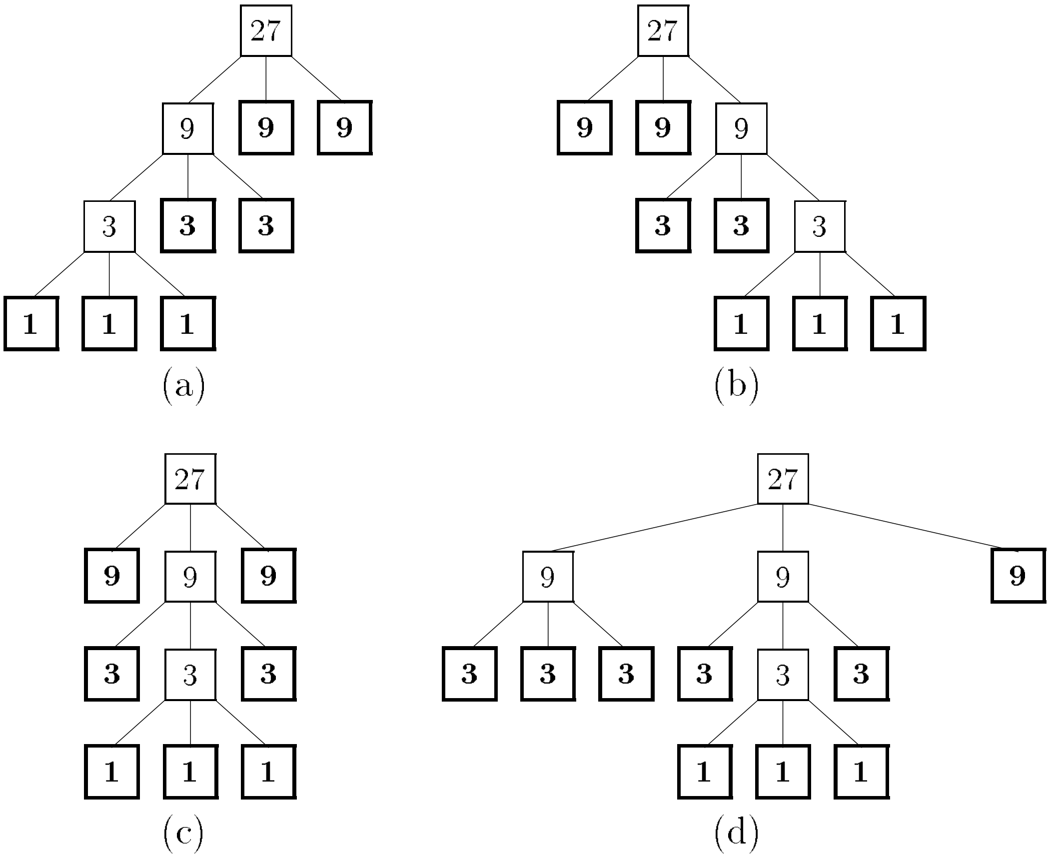

Рис. 2

Ортогональные базисы в $\mathbb{C}_N$ при $N = n^s$, сформированные из блоков всех уровней $\nu = 1, \ldots, s$, будем называть *обобщенными вейвлетными базисами.* Далее мы детально рассмотрим обобщенные вейвлетные базисы, соответствующие схеме ветвления (a) на рис. 2.

6.2. Запишем соотношения (3.3) при $l = 0$:

$$h_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1;$$

$$h_\nu(\sigma N_1 + p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, h_{\nu-1}(\tau N_\nu + p),$$
$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Сигналы

$$\begin{aligned} \{h_s(0);\ \ h_\nu(\sigma N_1 + p),\ \ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,& \\ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \ \nu = s, s-1, \ldots, 1\}& \end{aligned} \tag{6.1}$$

образуют ортогональный вейвлетный базис в $\mathbb{C}_N$.

Соотношения (4.4) при $l = 0$ принимают вид

$$g_0(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$
$$g_\nu(\sigma N_\nu + p) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, g_{\nu-1}(\tau N_\nu + p), \tag{6.2}$$
$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Сигналы

$$\begin{aligned} \{g_s(0);\ \ g_\nu(\sigma N_\nu + p),\ \ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,& \\ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \ \nu = s, s-1, \ldots, 1\}& \end{aligned} \tag{6.3}$$

также образуют ортогональный вейвлетный базис в $\mathbb{C}_N$.

Запишем соотношения (5.3) при $l = 0$:

$$f_0(k) = \delta_N\big(\cdot - \mathrm{rev}_s(k)\big), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$
$$f_\nu(\sigma \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, f_{\nu-1}(\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}),$$
$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

И здесь сигналы

$$\begin{aligned} \{f_s(0);\ \ f_\nu(\sigma \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}),\ \ p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1,& \\ \sigma = 1, \ldots, n-1,\ \ \nu = s, s-1, \ldots, 1\}& \end{aligned} \tag{6.4}$$

образуют ортогональный вейвлетный базис в $\mathbb{C}_N$.

Теорема 6.1. *Все три вейвлетные базиса* (6.1), (6.3), (6.4) *идентичны по составу элементов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3.6), (4.7), (5.6) имеем

$$h_s(0;\, j) = g_s(0;\, j) = f_s(0;\, j) = \delta_1(j) \equiv 1.$$

Далее, в силу (3.7), (4.8), (5.7)

$$h_\nu(\sigma N_1;\, j) = g_\nu(\sigma N_\nu;\, j) = f_\nu(\sigma\Delta_\nu;\, j) = \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau}\, \delta_{N_{\nu-1}}(j - \tau N_\nu),$$

$$\sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Остается учесть, что на основании (3.8), (4.9), (5.8)

$$h_\nu(\sigma N_1 + p;\, j) = h_\nu(\sigma N_1;\, j - p),$$

$$g_\nu(\sigma N_\nu + p;\, j) = g_\nu(\sigma N_\nu;\, j - p),$$

$$f_\nu(\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1};\, j) = f_\nu\big(\sigma\Delta_\nu;\, j - \mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\big),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 1, \ldots, n-1, \quad \nu = s-1, \ldots, 1.$$

При $\nu = s$ последние соотношения тривиальны. Теорема доказана.

6.3. Наиболее удобным для использования является базис (6.3). В работе [7] он был получен из других соображений и назван *базисом Хаара—Крестенсона, связанным с прореживанием по времени.* Возьмем сигнал x и разложим его по ортогональному базису (6.3):

$$x = x_s(0)\, g_s(0) + \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{N_\nu - 1} x_\nu(\sigma N_\nu + p)\, g_\nu(\sigma N_\nu + p). \qquad (6.5)$$

Здесь $x_s(0) = N^{-1}\langle x,\, g_s(0)\rangle = \dfrac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j)$ и

$$x_\nu(\sigma N_\nu + p) = n^{-\nu}\langle x,\, g_\nu(\sigma N_\nu + p)\rangle.$$

Принимая во внимание (6.2), запишем

$$x_\nu(\sigma N_\nu + p) = n^{-\nu} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau}\, \langle x,\, g_{\nu-1}(\tau N_\nu + p)\rangle =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \, x_{\nu-1}(\tau N_\nu + p).$$

При этом

$$x_0(k) = \langle x, \, g_0(k) \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \, \delta_N(j-k) = x(k).$$

Приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложения (6.5):

$$x_0(k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$x_\nu(\sigma N_\nu + p) = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{n-1} \omega_n^{-\sigma\tau} \, x_{\nu-1}(\tau N_\nu + p), \tag{6.6}$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \sigma = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Коэффициенты $x_\nu(p)$, $p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1$, соответствующие индексу $\sigma = 0$, используются для вычисления коэффициентов $(\nu + 1)$-го уровня.

Естественно, что соотношения (6.6) совпадают с (4.11) при $l = 0$. Общий факт заключается в том, что таблицы $\{x_\nu(k)\}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, вычисленные по формулам (3.10), (4.11), (5.11), наряду с коэффициентами разложений по базисам h_ν, g_ν, f_ν соответственно содержат коэффициенты всех вейвлетных разложений.

6.4. Формула (6.6) допускает обращение:

$$x_{\nu-1}(\tau N_\nu + p) = \sum_{\sigma=0}^{n-1} \omega_n^{\sigma\tau} \, x_\nu(\sigma N_\nu + p),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_\nu - 1, \quad \tau = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Это позволяет вычислить значения сигнала x, заданного в виде (6.5), на основном периоде, а именно: $x(k) = x_0(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Схема (6.6) называется *быстрым преобразованием Хаара—Крестенсона, связанным с прореживанием по времени.*

Указатель литературы

1. Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput. 1965. Vol. 19. P. 297–301.

2. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. Пер. с англ. М., 1983. 264 с.

3. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Пер. с англ. М., 1989. 448 с.

4. Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Новый подход к алгоритму Кули–Тьюки // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 3. С. 57–60.

5. Малоземов В. Н., Третьяков А. А. Алгоритм Кули–Тьюки и дискретное преобразование Хаара // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 3. С. 31–34.

6. Glassman J. A. A generalization of the Fast Fourier Transform // IEEE Trans. on Computers. 1970. Vol. 19. P. 105–116.

7. Малоземов В. Н., Машарский С. М. Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина—Крестенсона // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.

8. Good I. J. The interaction algorithm and practical Fourier analysis // J. Royal Stat. Soc. Ser. B. 1958. Vol. 20. P. 361–372.