НАСКОЛЬКО ПЛОХИМ МОЖЕТ БЫТЬ БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО СО СВОЙСТВОМ АППРОКСИМАЦИИ? II.

О.И.Рейнов.

В этой работе мы предлагаем некоторое продолжение предыдущих наших (и не только наших) исследований на тему "Насколько плохим может быть банахово пространство со свойством аппроксимации?" (см. [1]). Ниже приводятся обобщения ряда результатов из [1] и [2]. Поскольку обсуждение проблем, связанных с указанным вопросом, подробно дано в статье [1], то мы сразу приступим к изложению основного материала.

§**1. Предварительные сведения.** Все рассматриваемые пространства банаховы. Норма в пространстве X обозначается через $\|\cdot\|_X$ или просто $\|\cdot\|$, когда не возникает недоразумений; id_X — тождественный оператор в X; $\mathrm{L}(X,Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных отображений из X в Y; $X^*\widehat{\otimes}Y$ — проективное тензорное произведение пространств X^* и Y. Элементы, лежащие в образе канонического отображения $X^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{L}(X,Y)$, называются ядерными операторами. Пространство $\mathrm{N}(X,Y)$ всех ядерных операторов из X в Y с нормой, индуцированной фактор–отображением $X^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{N}(X,Y)$, является банаховым. Для обозначения элементов рассматриваемых пространств мы обычно используем соответствующие маленькие буквы (с индексами или другими атрибутами, если необходимо): $x, x_j \in X, y' \in Y^*$ и т. д. Каждое банахово пространство X обычно будет рассматриваться как (каноническое) подпространство в своем втором сопряженном, но если возникнет необходимость отдельно сказать о естественном вложении пространства X в X^{**}, то мы используем обозначение π_X для этого канонического вложения.

Каждый тензорный элемент $t \in X^*\widehat{\otimes}Y$ допускает (не единственное) проективное тензорное представление вида $t = \sum_{j=1}^\infty x'_j \otimes y_j$, которое для заранее фиксированного числа ε, $\varepsilon > 0$, всегда может быть выбрано таким образом, что $\|t\|_{X^*\widehat{\otimes}Y} \geqslant \sum \|x'_j\|\,\|y_j\| - \varepsilon$; этот тензорный элемент естественным образом порождает линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathrm{L}(Y,X)$: если $U \in \mathrm{L}(Y,X)$, то $\langle t, U\rangle := \operatorname{trace} U\circ t = \operatorname{trace} t\circ U$ (в последнем равенстве следовало бы

Работа выполнена при частичной поддержке Федеральной целевой программой "Интеграция" (грант № 326.53), программой "Поддержка научных школ" (грант 00-15-96-022) и Шведской Королевской Академии наук.

писать более точно: $=\operatorname{trace} t \circ U^t$; мы будем придерживать приведенных выше обозначений, имея в виду, для какого–либо проективного тензорного разложения $t=\sum_{j=1}^{\infty} x'_j \otimes y_j$, формулы $\langle t, U\rangle = \sum\langle x'_j, Uy_j\rangle = \sum\langle U^*x'_j, y_j\rangle$; по сказанному выше, $|\langle t, U\rangle| \leqslant \|U\|\,\|t\|_{X^*\widehat{\otimes} Y}$, причем *равенство, хотя бы на одном* U, *выполняться не обязано*).

Множество $\mathrm{F}(X,Y)$ всех конечномерных операторов из X в Y мы отождествляем с алгебраическим тензорным произведением $X^*\otimes Y$ и снабжаем в этой работе нормой, индуцированной из банахова пространства $\mathrm{L}(X,Y)$; пополнение $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Y$ по этой норме тензорного произведения $X^*\otimes Y$ совпадает, таким образом, с замыканием в $\mathrm{L}(X,Y)$ линейного подпространства всех конечномерных операторов, и каждый оператор из этого замыкания принято называть аппроксимируемым. Обозначим через $\mathrm{K}(X,Y)$ пространство всех компактных (в старой терминологии, "вполне непрерывных") операторов из X в Y. Как известно, $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Y \subset K(X,Y)$, причем обратное включение, вообще говоря, не верно: для фиксированного пространства Y равенство $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Y = K(X,Y)$ (для любого банахова пространства X) имеет место тогда и только тогда, когда пространство Y обладает свойством аппроксимации Гротендика (см. [3]; там же доказано и сформулированное только что утверждение; более простое доказательство можно найти, например, в [4], либо [5]), т.е. свойством $\mathrm{AP}(\mathrm{F})$, — свойством аппроксимации относительно идеала всех конечномерных операторов. Приведем используемые нами определения этого и более общих аппроксимационных свойств (отметим, что понятие свойства компактной аппроксимации впервые, видимо, появилось в работе [6]; тогда как общее определение свойств $\mathrm{AP}(\mathrm{J}), \mathrm{MAP}(J), \dots$ и первые нетривиальные результаты, связанные с ним, приведены впервые в работе автора [1]; через 10 лет после статьи автора появилась работа [7], в которой, в частности, рассматривалось свойство аппроксимации относительно идеала слабо компактных операторов; затем подобные свойства исследовались, например, в [8]).

Пусть $\mathrm{J}(X,Y)$ — линейное подпространство в $\mathrm{L}(X,Y), 1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$.

Напомним [1], что банахово пространство Y обладает свойством λ-$\mathrm{MAP}(\mathrm{J})$, (λ-метрической аппроксимации относительно J), если для всякого компакта $K\subset Y$ и любого $\varepsilon>0$ существует оператор $R\in \mathrm{J}(Y,Y)$ такой, что $\|R\|\leqslant\lambda$ и $\sup_K\|Ry-y\|<\varepsilon$. Мы условимся писать $Y\in\lambda$-$\mathrm{MAP}(\mathrm{J})$, если Y обладает свойством λ-$\mathrm{MAP}(\mathrm{J})$. Если $\lambda<+\infty$ и $Y\in\lambda$-$\mathrm{MAP}(\mathrm{J})$, то Y обладает свойством $\mathrm{BAP}(\mathrm{J})$. Если $Y\in+\infty$-$\mathrm{MAP}(\mathrm{J})$, то Y обладает свойством $\mathrm{AP}(\mathrm{J})$.

Ниже мы, в основном, в качестве J будем рассматривать замкнутые операторные идеалы в банаховых пространствах (напомним, что операторный идеал J называется замкнутым, если для любой пары банаховых пространств X, Y линейное пространство $\mathrm{J}(X,Y)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathrm{L}(X,Y)$; норма в замкнутом идеале индуцируется обычно из L, и так будет всюду в этой работе).

В случае $\mathrm{J}=\mathrm{K}$ мы получаем различные свойства компактной аппроксимации CAP, C-$\mathrm{MCAP}, \dots$ [5], [6], [1]; для $\mathrm{J}=\mathrm{F}$ — соответствующие гротендиковские аппроксимационные условия [3].

Впервые тот факт, что свойства AP(F) и BAP(F) не равносильны между собой, установили Т. Фигель и У. Б. Джонсон [9]; неравносильность свойств AP(J) и BAP(J) для ряда других операторных идеалов J, таких как, например, идеалы компактных и слабо компактных операторов, впервые получена в работе автора [1] (позже, в 1996 г., появилась статья [10], в которой ее авторы, не зная о результатах работы [1], передоказали соответствующую теорему из [1] об идеале компактных операторов, получив несколько более сильный результат, о чем будет еще сказано ниже).

Удобные характеристики рассматриваемых аппроксимационных свойств в терминах функционалов на некоторых операторных пространствах дает

Лемма 1 [1]. *Пусть* $1 \leqslant \lambda < \infty$ *и* $j : Y^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{J}(Y,Y)^*$ *— естественное отображение* (пространство $\mathrm{J}(Y,Y)$ снабжено обычной операторной нормой). *Если* J *— операторный идеал, то пространство* Y *обладает свойством* λ-MAP(J) *тогда и только тогда, когда* $\|j^{-1}\| \leqslant \lambda$. *Таким образом,*

$$Y \in \lambda\text{-}\mathrm{MAP(J)} \iff \lambda^{-1}\|z\|_{Y^*\widehat{\otimes}Y} \leqslant \|j(z)\|_{\mathrm{J}(Y,Y)^*} \leqslant \|z\|_{Y^*\widehat{\otimes}Y} \quad \forall\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y$$

т.е. j *является* λ*-изометрическим вложением. Это равносильно также тому, что для каждого банахова пространства* X *естественное отображение* $X^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{J}(X,Y)^*$ *есть* λ*-изометрическое вложение.*

В случае $\lambda = +\infty$ имеет место

Лемма 2 [1]. *Эквивалентны утверждения:*

1) $Y \notin \mathrm{AP(J)}$;

2) $\exists\, z \in Y^*\widehat{\otimes}Y:\ \mathrm{trace}\, z = 1,\ \mathrm{trace}\, z \circ \Phi = 0\ \forall\, \Phi \in \mathrm{J}(Y,Y)$;

3) *естественное отображение* $j : Y^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{J}(Y,Y)^*$ *не взаимно однозначно.*

Все это равносильно также тому, что для каждого банахова пространства X *естественное отображение* $X^*\widehat{\otimes}Y \to \mathrm{J}(X,Y)^*$ *инъективно.*

Для наших целей важно знать сопряженное пространство к пространствам вида $\mathrm{J}(X,Y)$ в одном частном случае, который мы сейчас и рассмотрим. Именно, А. Гротендик [3] ввел в рассмотрение так называемые интегральные операторы в нормированных пространствах (мы будем о них говорить, как об интегральных по Гротендику операторах) и связал с пространствами своих интегральных операторов сопряженные пространства к пространствах конечномерных непрерывных линейных отображений. Оператор $T : X \to Y$ есть интегральный оператор (в смысле А. Гротендика), если суперпозиция $\pi_Y T : X \to Y \to Y^{**}$ допускает факторизацию вида

$$X \xrightarrow{\ A\ } C(K) \xrightarrow{\ j\ } L_1(K,\mu) \xrightarrow{\ B\ } Y^{**},$$

где K — некоторый компакт, μ — вероятностная мера Радона на нем, j — оператор "тождественного вложения" и A, B — непрерывные операторы. Норма в пространстве $\mathrm{I}(X,Y)$ вводится следующим образом:

$$i(T) = \inf \|A\|\,\|B\|.$$

Каждый ядерный оператор $T : X \to Y$ является интегральным, причем $\|T\|_{\mathrm{I}(X,Y)} \leqslant \|T\|_{\mathrm{N}(X,Y)}$.

Банахово пространство, сопряженное к пространству $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Y$, канонически отождествляется с пространством $\mathrm{I}(Y, X^{**})$: для любых операторов $U \in X^*\widehat{\widehat{\otimes}}Y$ и $T \in \mathrm{I}(Y, X^{**})$ вполне корректно определен след $\operatorname{trace} TU$ (суперпозиция TU однозначно определяет тензор из пространства $X^*\widehat{\otimes}X^{**}$), причем $|\operatorname{trace} UT| \leqslant \|U\|\,\|T\|_{\mathrm{I}(Y,X^{**})}$. Если J — какой-либо замкнутый идеал операторов, то необходимо $\mathrm{F} \subset \mathrm{J}$ и, следовательно, $\|\cdot\|_{\mathrm{I}} \leqslant \|\cdot\|_{\mathrm{J}^*}$.

Пусть $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Напомним, что T — строго сингулярный оператор, если ни на каком бесконечномерном подпространстве в X он не действует как изоморфизм; T — вполне непрерывный оператор, если слабо сходящиеся последовательности он переводит в сильно сходящиеся, или, что равносильно (см. [11]), если он переводит слабо фундаментальные последовательности в сходящиеся по норме; T — условно слабо компактный, если для каждой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ из $\{Tx_n\}$ можно извлечь слабо фундаментальную подпоследовательность; $T \in \mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$, если $T^* \in \mathrm{RN}$, т.е. T^* переводит векторные меры m ограниченной вариации в меры, представимые интегралом Бохнера по $\mathrm{Var}(m)$. Определения инъективных и сюръективных операторных идеалов см. в [11] (отметим лишь, что примерами одновременно инъективных и сюръективных операторных идеалов могут служить идеалы компактных и слабо компактных операторов). Мы говорим, что банахово пространство X вполне сепарабельно, если как оно, так и все его сопряженные пространства сепарабельны.

Применим использованные нами методы из статей [1] и [2] (лифтинга и перенормировок) к исследованию свойства компактной аппроксимации и, более того, к исследованию свойств аппроксимации относительно произвольного операторного идеала в банаховых пространствах [1], а также для доказательства некоторых результатов, анонсированных в [12] — теорема 1.3 и теорема 1.4 (доказательства этих теорем так и не были опубликованы ранее; отметим, что в то время мы намеревались привести совершенно другие доказательства этих фактов).

Напомним одно из центральных утверждений из [13]:

Лемма 3 ([13], следствие 1). *Для всякого сепарабельного банахова пространства G существуют сепарабельное банахово пространство Z с базисом и линейный гомоморфизм $\varphi : Z^{**} \to G$ такие, что Z^{**} имеет базис (и, следовательно, сепарабельно), подпространство φ^*G^* дополняемо в Z^{***} и ядро гомоморфизма φ есть $\pi_Z Z$.*

§2. Основная теорема и следствия

Вот наш центральный результат.

Теорема 1. *Пусть J — какой-либо замкнутый инъективный и сюръективный идеал операторов, содержащийся в идеале слабо компактных операторов. Пусть, далее, сепарабельное банахово пространство G не обладает свойством $\mathrm{AP(J)}$ и Z, φ — из леммы 3, так что, в частности,*

1) *Z^{**} имеет базис; $Z^{**}/Z \cong G$ и $Z^{***} \cong \varphi^* G^* \oplus \pi_Z Z$ (следовательно, пространство Z вполне сепарабельно, если G таково).*

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует оператор $t_1 \in \mathrm{L}(Z^{**}/Z, Z)$ такой, что

2.0) *оператор $t_1 : Z^{**}/Z \to Z^{**}$ — ядерный;*

2.1) *$t_1(Z^{**}/Z) \subset Z$ и оператор t_1, рассматриваемый как отображение из Z^{**}/Z в $Z(=\pi_Z Z)$, не является ядерным;*

3) $\mathrm{trace}\, \varphi \circ t_1 = 1$;

4) *для любого $\alpha \geqslant 1$ существует эквивалентная норма $|||\cdot|||_\alpha$ на Z^{**} (не зависящая от ε), с которой пространство $W_\alpha := (Z^{**}, |||\cdot|||_\alpha)$ обладает свойствами:*

a) $W_\alpha \in \alpha$-MAP; $W_\alpha \notin \beta$-MAP(J), $\forall \beta < \alpha$;

b) $\|\varphi\|_{\mathrm{L}(W_\alpha, Z^{**}/Z)} \leqslant 1/\alpha$;

c) $\|t_1\|_{\mathrm{N}(Z^{**}/Z, W_\alpha)} \geqslant \alpha$;

d) $|\,\mathrm{trace}\, U \circ t_1| \leqslant \|U\|(1+\varepsilon)$ *для каждого $U \in \mathrm{J}(W_\alpha, Z^{**}/Z)$; таким образом, $t_1 \in \mathrm{J}(W_\alpha, Z^{**}/Z)^*$, причем в этом сопряженном пространстве $\|t_1\| \leqslant 1+\varepsilon$; тем более $\|t_1\|_{\mathrm{I}(Z^{**}/Z, W_\alpha)} \leqslant 1+\varepsilon$;*

5) *если $t := t_1 \circ \varphi \in Z^{***}\widehat{\otimes} Z^{**}$, $W := Z^{**}$ и W_α — пространство их 4), то*

a) $\mathrm{trace}\ t = 1$,

b) $1/\alpha \leqslant \|\,t\,\|_{\mathrm{I}(W_\alpha, W_\alpha)} \leqslant \|\,t\,\|_{\mathrm{J}^*(W_\alpha, W_\alpha)} \leqslant (1+\varepsilon)\,1/\alpha$,

c) $1 \leqslant \|\,t\,\|_{\mathrm{N}(W_\alpha, W_\alpha)} \leqslant (1+\varepsilon)$,

d) $\|\,t\,\|_{\mathrm{I}(W, W_\alpha)} \leqslant \|\,t\,\|_{\mathrm{J}^*(W, W_\alpha)} \leqslant 1+\varepsilon$,

e) $\|\,t\,\|_{\mathrm{N}(W, W_\alpha)} \geq c\,\alpha$ *для некоторой абсолютной постоянной $c > 0$.*

Доказательство. Оно будет представлять из себя некоторую комбинацию методов, примененных в работах [9], [1], [14] ("метод перенормировок") и в [15], [14] ("метод лифтинга").

Итак, пусть Z — банахово пространство Линденштраусса, построенное согласно лемме 3 по пространству G, так что пространство $F := Z^{**}/Z$ не обладает свойством AP(J). Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$, используя лифтинг из F в Z^{**}, мы можем найти тензорный элемент $t_1 \in F^*\widehat{\otimes} Z^{**}$ с тем свойством, что $\mathrm{trace}(U\varphi) \circ t_1 = 0$ для любого J-оператора $U : F \to F$ и

$$(\star) \qquad t_1(F) \subset \pi_Z Z,\ \mathrm{trace}\, \varphi \circ t_1 = 1 \geqslant (1+\varepsilon)^{-1/3} \|\varphi \circ t_1\|_{F^*\widehat{\otimes} F} \geqslant (1+\varepsilon)^{-1} \|t_1\|_{F^*\widehat{\otimes} Z^{**}}$$

(в частности, тензорный элемент $\varphi \circ t_1$, где $\varphi : Z^{**} \to F$ — фактор отображение, порождает нулевой оператор).

Более подробно: пусть $t_0 \in F^*\widehat{\otimes} F$ — такой тензор

$$t_0 = \sum_{j=1}^{\infty} f_j' \otimes f_j,$$

что $\mathrm{trace}\, t_0 = 1 \geqslant (1+\varepsilon)^{-1/3} \|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes} F}$, $\sum_j \|f_j'\|\,\|f_j\| \leqslant (1+\varepsilon)^{1/3} \|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes} F}$ и $\mathrm{trace}\, U \circ t_0 = \sum_j \langle f_j', U f_j\rangle = 0$ для каждого J-оператора $U \in \mathrm{L}(F, F)$ (лемма 2). Поскольку φ есть факторотображение и, в частности, переводит единичный шар из Z^{**} на единичный шар пространства F, то найдется последовательность $\{z_j''\} \in Z^{**}$ такая, что $\|z_j''\| \leqslant (1+\varepsilon)^{1/3}\,\|f_j\|$ и $\varphi(z_j'') = f_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots$. Положим $t_1 := \sum_j f_j' \otimes z_j'' \in F^*\widehat{\otimes} Z^{**}$. Так как в Z^{**} имеется свойство аппроксимации, то след тензорного элемента $t := t_1 \circ \varphi \in Z^{***}\widehat{\otimes} Z^{**}$ (отождествимого в данном случае с соответствующим оператором) корректно определен и равен

$$\operatorname{trace} t_1 \circ \varphi \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\langle \varphi^* f_j', z_j''\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\langle f_j', \varphi z_j''\rangle \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\langle f_j', f_j\rangle \;=\; \operatorname{trace} t_0 \;=\; 1.$$

Поэтому также $\operatorname{trace}\varphi\circ t_1 = 1$. С другой стороны, $\widetilde{U \circ t_0} = 0$ для любого $U \in \mathrm{J}(F,F)$, так как $\operatorname{trace}(VU)\circ t_0 = 0$ для всех $V \in \mathrm{L}(F,F)$ и $U \in \mathrm{J}(F,F)$. Следовательно, для таких U имеет место равенство $\widetilde{(U\varphi)\circ t_1} = 0$, что, вместе с предыдущим, дает соотношения из $(\star)$:

$$\|t_1\|_{F^*\widehat{\otimes} Z^{**}} = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} f_j' \otimes z_j''\right\| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)^{1/3}\sum_{j=1}^{\infty}\|f_j'\|\,\|f_j\| \leqslant (1+\varepsilon)^{2/3}\,\|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes} F} = (1+\varepsilon)^{2/3}\,\|\varphi\circ t_1\|_{F^*\widehat{\otimes} F} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Мы покажем, что пространство Z и тензорный элемент t_1 удовлетворяют всем условиям теоремы.

Так как $1 = \operatorname{trace}\varphi\circ t_1 = \operatorname{trace} t_1\circ\varphi \leqslant \|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes} F} \leqslant 1+\varepsilon$, то мы получаем, что $1 = \operatorname{trace} t_0 \leqslant \|t_0\|_{F^*\widehat{\otimes} F} \leqslant 1+\varepsilon$.

Для произвольного фиксированного числа $\alpha \geqslant 1$ мы определим эквивалентную норму на Z^{**} следующим образом: $|||z''||| = |||z''|||_\alpha = \max\{\|z''\|;\, \alpha d(z'', \pi_Z Z)\}$, где $d(z'', \pi_Z Z) = \inf_{z\in Z}\|z'' - \pi_Z z\|$. Положим $W_\alpha = (Z^{**}, |||\cdot|||)$ (ниже мы часто будем отождествлять W_α и Z^{**} как линейные пространства).

Так как $\|z''\| \leqslant |||z''||| \leqslant \alpha\|z''\|$, то для тождественного отображения $j = j_\alpha : W_\alpha \to Z^{**}$ имеем: $\|j\| \leqslant 1$ и $\|j^{-1}\| \leqslant \alpha$. Пространство Z^{**} обладает свойством метрической аппроксимации MAP, поэтому $W_\alpha \in \alpha$-MAP. Для упрощения дальнейшего чтения, удобно иметь перед глазами следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} W_\alpha & \xrightarrow{j} & Z^{**} & \xrightarrow{t} & \pi_Z Z \subset Z^{**} & \xrightarrow{j^{-1}} & W_\alpha & \xrightarrow{R} & W_\alpha \\ & & \searrow^{\varphi} & & \nearrow^{t_1} & & & & \\ & & & F & & & & & \end{array}$$

Если $z'' \in Z^{**}$, то $\|\varphi(z'')\| = d(z'', Z) \leqslant \alpha^{-1}\,|||\,z''\,|||$, т.е. $\|\varphi\|_{\mathrm{L}(W_\alpha,F)} \leqslant 1/\alpha$, что доказывает $4b$). Следовательно,

$$\|\,t\,\|_{\mathrm{N}(W_\alpha,W_\alpha)} = \|j^{-1}\circ t_1\circ\varphi\|_{\mathrm{N}(W_\alpha,W_\alpha)} \leqslant$$
$$\|j^{-1}\|\,\|t_1\|_{\mathrm{N}(F,Z^{**})}\,\|\,\varphi\,\|_{\mathrm{L}(W_\alpha,F)} \leqslant 1+\varepsilon.$$

С другой стороны, $\|t\|_{\mathrm{N}(W_\alpha,W_\alpha)} \ge \mathrm{trace}\ t = 1$. Это доказывает выполнение условия 5c).

Для доказательства утверждения 5b) рассмотрим J-оператор $R \in \mathrm{J}(W_\alpha, W_\alpha)$, $|||R||| \leqslant 1$. Так как $t_1(F) \subset \pi_Z Z$ и $|||\cdot||| = ||\cdot||$ на $\pi_Z Z$, то мы получаем

$$
\begin{aligned}
|\,\mathrm{trace}\ R \circ t| = |\,\mathrm{trace}\ R \circ t_1 \circ \varphi| \leqslant ||R\pi_Z\|_{\mathrm{L}(Z,W_\alpha)}\ \|t_1 \circ \varphi\|_{\mathrm{J}^*(\pi_Z Z, W_\alpha)} \\
\leqslant \alpha^{-1}\, \|t_1\|_{\mathrm{J}^*(\pi_Z Z,F)} \leqslant \alpha^{-1}\, \|t_1\|_{F^*\widehat{\otimes} Z^{**}} \leqslant \alpha^{-1}\,(1+\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\|\, t\,\|_{\mathrm{J}^*(W_\alpha,W_\alpha)} \leqslant \alpha^{-1}(1+\varepsilon)$. Далее,

$$
\begin{aligned}
1 \leqslant \|\,t\,\|_{\mathrm{N}(Z^{**},Z^{**})} = \|\,t\,\|_{\mathrm{I}(Z^{**},Z^{**})} \\
\leqslant \|\,j\,\|_{\mathrm{L}(W_\alpha,Z^{**})}\ \|\,t\,\|_{\mathrm{I}(W_\alpha,W_\alpha)}\ \|j^{-1}\|_{\mathrm{L}(Z^{**},W_\alpha)} \leqslant \alpha\,\|\,t\,\|_{\mathrm{I}(W_\alpha,W_\alpha)}
\end{aligned}
$$

(первое равенство в этих соотношениях вытекает из того факта, что $Z^{**} \in \mathrm{MAP}$). Это доказывает 5b).

Для доказательства 5d) заметим, что если $R \in \mathrm{J}(W_\alpha, Z^{**})$ — произвольный оператор единичной нормы, то так же, как и выше, мы получаем

$$
\begin{aligned}
|\,\mathrm{trace}\ R \circ t| \leqslant ||R\pi_Z\|_{\mathrm{J}(Z,Z^{**})}\ \|t_1 \circ \varphi\|_{\mathrm{J}^*(\pi_Z Z,Z^{**})} \\
\leqslant \|t_1\|_{\mathrm{J}^*(\pi_Z Z,F)}\ \|\,\varphi\,\|_{\mathrm{L}(Z^{**},F)} \leqslant \|t_1\|_{F^*\widehat{\otimes} Z^{**}} \leqslant (1+\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Теперь докажем 5e) и 4c). Поскольку $\|\,\varphi\,\|_{\mathrm{L}(W_\alpha,F)} \leqslant 1/\alpha$ то

$$
\|t_1\|_{\mathrm{N}(F,W_\alpha)} \equiv \|j^{-1}t_1\|_{\mathrm{N}(F,W_\alpha)} \ge \alpha\,|\,\mathrm{trace}\ \varphi \circ j^{-1} \circ t_1| = \alpha\,|\,\mathrm{trace}\ \varphi \circ t_1| = \alpha.
$$

Отметим, что так как подпространство $\varphi^*(F^*)$ дополняемо в пространстве Z^{***}, то естественное отображение $F^*\widehat{\otimes}W_\alpha \to Z^{***}\widehat{\otimes}W_\alpha$ индуцированное оператором φ^* есть изоморфное вложение; так что $\|\,t\,\|_{\mathrm{N}(Z^{**},W_\alpha)} \ge c\alpha$.

Нам осталось лишь показать, что для полученных объектов верно утверждение 4d) (в силу произвольности числа ε и соответствующего выбора элемента t_1, из 4d), 4c) и леммы 1 вытекает второе утверждение в 4a)).

Пусть U — J-оператор из W_α в $F = Z^{**}/Z$. Так как тождественное вложение $i : Z \to W_\alpha = (Z^{**}, |||\cdot|||_\alpha)$ изометрично, то $\|Ui\| \leqslant \|U\|$. Положим $S = U - (Ui)^{**}j$, где $j : W_\alpha \to Z^{**}$ — тождественное отображение. Так как оператор U слабо компактен, то $(Ui)^{**}j \subset F$. Поэтому (в силу инъективности идеала J) S — J-оператор из W_α в F и $S|_{i(Z)} \equiv 0$. Следовательно (в силу сюръективности идеала J), S индуцирует J-оператор $S_1 : F \to F$, $S = S_1\varphi j$, причем $\mathrm{trace}\, S_1\circ(\varphi\circ t_1) = \mathrm{trace}\, S\circ t_1$. Поскольку $\varphi\circ t_1$ обращается в нуль на J-операторах из F в F, то $\mathrm{trace}\, S_1\circ(\varphi\circ t_1) = 0$ и, следовательно, $\mathrm{trace}\,((Ui)^{**}j)\circ t_1 = \mathrm{trace}\, U \circ t_1$. Далее,

$$
|\,\mathrm{trace}(Ui)^{**}j \circ t_1| \leqslant \|(Ui)^{**}\|\ \|j \circ t_1\|_{\mathrm{N}(F,Z^{**})} \leqslant (1+\varepsilon)\,\|U\|.
$$

Следовательно, $|\,\mathrm{trace}\, U \circ t_1| \leqslant (1+\varepsilon)\,\|U\|$. ■

Действуя также как в конце работы [1], мы из теоремы 1 получаем следующие дополнения к основным результатам работы [1] (см. теоремы 2.3 и 2.4 в [1]). Отметим, что мы здесь впервые приводим обещанное в [12] доказательство анонсированной там теоремы 1.4 (это часть нашего следствия 2 ниже).

Следствие 1. *Существуют сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор U из E в F такие, что*

(i) E^* сепарабельно и $F \subset c_0$ (таким образом, $U^* \in \mathrm{RN}(E, F)$);

(ii) E имеет свойство аппроксимации;

(iii) каково бы не было положительное число C, оператор U не может быть аппроксимирован в топологии τ_c компактной сходимости вполне непрерывными операторами с нормами не больше, чем C.

Доказательство. Применим теорему 1 к случаю, когда G — подпространство в c_0 без CAP . Пусть $\{U_\beta\}$ — ограниченная сеть компактных операторов из W_α в $F = Z^{**}/Z$, сходящаяся поточечно к $\Psi := \alpha\, \varphi$. Тогда $\operatorname{trace} U_\beta \circ t_1 \to \operatorname{trace} \Psi \circ t_1 = \alpha$ и $\alpha = \lim_\beta |\operatorname{trace} U_\beta \circ t_1| \leqslant \overline{\lim}_\beta \|U_\beta\|$. Поэтому оператор Ψ не принадлежит замыканию в τ_c множества компактных операторов, нормы которых $< \alpha$, тогда как $\|\Psi\| \leqslant 1$. Остается заметить, что если U — вполне непрерывный оператор, то U компактен, так как пространство $F \cong G \subset c_0$ почти рефлексивно (тождественный оператор в нем условно слабо компактен). ■

Следствие 2. *Существуют сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор U из E в F такие, что*

(i) $F \subset l^1$ (таким образом, $U \in \mathrm{RN}(E, F)$);

(ii) E имеет свойство аппроксимации;

(iii) каково бы не было положительное число C, оператор U не может быть аппроксимирован в топологии τ_c компактной сходимости операторами с нормами не больше, чем C, и такими, что либо

a) они являются строго сингулярными, либо

b) они являются условно слабо компактными, либо

c) сопряженные к ним являются операторами Радона-Никодима.

Доказательство. Применим теорему 1 к случаю, когда G — подпространство в l^1 без CAP . Пусть $\{U_\beta\}$ — ограниченная сеть компактных операторов из W_α в $F = Z^{**}/Z$, сходящаяся поточечно к $\Psi := \alpha\, \varphi$. Тогда $\operatorname{trace} U_\beta \circ t_1 \to \operatorname{trace} \Psi \circ t_1 = \alpha$ и $\alpha = \lim_\beta |\operatorname{trace} U_\beta \circ t_1| \leqslant \overline{\lim}_\beta \|U_\beta\|$. Поэтому оператор Ψ не принадлежит замыканию в τ_c множества компактных операторов, нормы которых $< \alpha$, тогда как $\|\Psi\| \leqslant 1$. Остается заметить, что если U — строго сингулярный (либо условно слабо компактный, либо лежащий в $\mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$) оператор, то U компактен по теореме Розенталя, так как $F \cong G \subset l^1$ и обладает свойством Шура. ■

Отметим также следующие утверждения, показывающее, что аппроксимационная оценка в теореме 4 [16] точна даже в случае, если в этом утверждении заменить аппроксимацию конечномерными операторами на аппроксимации операторами из более широких классов (эта теорема утверждает, что при некоторых ограничениях на операторы $U : X \to Y, V : Y \to Z$ суперпозиция VU аппроксимируется в топологии τ_c компактной сходимости конечномерными операторами с нормами $\leqslant \|VU\|\, \|P\|$, где P — проектор из X^{**} на X; а именно, от операторов достаточно требовать, например, чтобы выполнялись включения $U \in \mathrm{RN}$ и $V \in \mathrm{AP}$).

Перед тем как сформулировать интересующие нас факты, удобно ввести некоторые новые определения и обозначения. Пусть $\mathrm{I}(X,Y)$ — линейное подпространство в $\mathrm{L}(X,Y)$, $1 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$.

Определение. Оператор $T \in \mathrm{L}(X,Y)$ обладает свойством λ-MAP(I), (λ-*метрической аппроксимации относительно* I), если для всякого компакта $K \subset Y$ и любого $\varepsilon > 0$ существует оператор $R \in \mathrm{I}(X,Y)$ такой, что $\|R\| \leqslant \lambda$ и $\sup_K \|Ry-y\| < \varepsilon$. Мы условимся писать $T \in \lambda$-MAP(I), если T обладает свойством λ-MAP(I). Если $\lambda < +\infty$ и $T \in \lambda$-MAP(I), то T обладает свойством BAP(I). Если $T \in +\infty$-MAP(I), то T обладает свойством AP(I).

Следствие 3. *Для любого $\alpha \geqslant 1$ существуют вполне сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор $T : E \to F$ такие, что E α-дополняемо в E^{**}, пространство F рефлексивно, $T \in \alpha$-MAP, но $T \notin \beta$-MAP(K) при $\beta < \alpha$.*

Доказательство. Применив теорему 1 к пространству $G \subset l^3$ без свойства CAP [6], положим $E = W_\alpha, F = Z^{**}/Z, T = \varphi$. Также как и при доказательстве следствия 1 мы видим, что $T \notin \beta$-MAP(K) при $\beta < \alpha$. С другой стороны, пространство $E = W_\alpha$ α-изометрично сопряженному пространству Z^{**} с базисом; поэтому E, во-первых, обладает свойством α-MAP и, во-вторых, E α-дополняемо в своем втором сопряженном E^{**} (поскольку всякое сопряженное банахово пространство X^* 1-дополняемо в X^{**}). ■

Если применить теорему 1 аналогичным образом к пространству $G \subset l^1$ без свойства CAP (здесь то же самое, что и без свойств аппроксимации относительно условно слабо компактных или строго сингулярных операторов), то мы получим

Следствие 4. *Для любого $\alpha \geqslant 1$ существуют сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор $T : E \to F$ такие, что E α-дополняемо в $E^{**}, T \in \alpha$-MAP, но $T \notin \beta$-MAP(J) при $\beta < \alpha$, где J — любой из идеалов строго сингулярных, либо условно слабо компактных, либо $\mathrm{RN}^{\mathrm{dual}}$-операторов.*

Если же применить теорему 1 аналогичным образом к пространству $G \subset c_0$ без свойства CAP (здесь — то же самое, что и без свойств аппроксимации относительно идеала вполне непрерывных операторов), то мы получим

Следствие 5. *Для любого $\alpha \geqslant 1$ существуют сепарабельные банаховы пространства E и F и оператор $T : E \to F$ такие, что E α-дополняемо в $E^{**}, T \in \alpha$-MAP, но $T \notin \beta$-MAP(C_c) при $\beta < \alpha$, где C_c — идеал вполне непрерывных операторов.*

Наконец, если мы возьмем в качестве пространства G рефлексивное пространство без свойства аппроксимации, обладающее свойством CAP (см. [17]), то по аналогии с [10] получим следующее усиление нашего следствия 2 (которое формулируется отдельно в силу того, что при его доказательстве дополнительно используется факт существования банахова пространства без свойства AP, но со свойством CAP; напомним, что в [10, теорема 1] построен пример вполне сепарабельного банахова пространства со свойством аппроксимации, без свойства BAP(K), все сопряженные к которому, однако, обладают метрическим свойством MAP(K)).

Следствие 6. *Для любого* $\alpha \geqslant 1$ *существуют вполне сепарабельные банаховы пространства* E *и* F *и оператор* $T : E \to F$ *такие, что* E α*-дополняемо в* E^{**}, *пространство* F *рефлексивно,* $T \in \alpha$-MAP, *но* $T \notin \beta$-CAP *при* $\beta < \alpha$; *при этом, все сопряженные к* E *пространства* $E^*, E^{**}, \ldots$ *обладают свойством* MAP(K).

Следствие 7. *Пусть* J *— замкнутый инъективный и сюръективный идеал операторов, содержащийся в идеале слабо компактных операторов. Если* Z *— такое сепарабельное банахово пространство, что* $Z^{**} \in$ AP *и* $Z^{**}/Z \notin$ AP(J), *то естественное вложение* $\pi_Z : Z \to Z^{**}$ *факторизуется через сепарабельное пространство* X *со свойством аппроксимации, не обладающее свойством ограниченной аппроксимации относительно* J.

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 тот факт, что подпространство $\varphi^*(F^*)$ дополняемо в пространстве Z^{***}, использовался только в одном месте, а именно, при установлении свойства 5e) (см. конец доказательства). Далее, то, что в условиях теоремы 1 второе сопряженное к Z пространство имеет свойство метрической аппроксимации, было нужно лишь для замечания того факта, что получаемое после перенормировки пространство W_α обладает соответствующим свойством аппроксимации. Существенно наличие в пространстве Z^{**} свойства аппроксимации Гротендика было использовано лишь в одном месте — в начале доказательства (где отмечалось, что следы операторов типа оператора t из доказательства теоремы корректно определены).

Поэтому вся остальная (и основная) часть доказательства теоремы проходит в рассматриваемой сейчас нами ситуации, и наше утверждение, по существу, получается при доказательстве теоремы 1: если $W_1, W_2, \ldots$ — пространства, построенные в этом доказательстве (для $\alpha = 1, 2, \ldots$), то, по определению нормы $|||\cdot|||_\alpha$, для каждого $\alpha = 1, 2, \ldots$ тождественное включение $i_\alpha : Z \to W_\alpha$ есть изометрическое вложение, и норма тождественного отображения $j_\alpha : W_\alpha \to Z^{**}$ не превосходит 1. Положим $X = (\sum_{n=1}^\infty W_n)_{l_1}$ и определим операторы $A : Z \to X$ и $B : X \to Z^{**}$ соотношениями

$$Az = \left\{\frac{1}{2^n}\, i_n z\right\}_{n=1}^\infty \qquad \text{и} \qquad B\,\{w_n\}_{n=1}^\infty = \sum_{n=1}^\infty j_n w_n.$$

Тогда $\|Az\| = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\|z\| = \|z\|$, $\|B\| \leqslant 1$, $BAz = B\{2^{-n}\, i_n z\} = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} j_n i_n z = \pi_Z z.$ ■

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Рейнов О.И., *Насколько плохим может быть банахово пространство со свойством аппроксимации?*, Матем. заметки **33** (1983), вып. 6, 833-846.
2. Reinov Oleg, *On non-nuclear operators with nuclear adjoints*, Estonian Acad. Sci. Phis. Math. **45** (1996), no. 2/3, 226-233.
3. Grothendieck A., *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955), pp. 196 + 140.
4. Diestel J., Uhl J.J., *Vector measures*, Math. Survey 15, Amer. Math. Soc., Providence RI. **15** (1977).

5. Lindenstrauss J., Tzafriri L., *Classical Banach spaces I: Sequence spaces*, Springer-Verlag, Berlin – Heldelberg – New York, 1977.
6. Szankowski A., *Subspaces without approximation property*, Israel J. Math. **30** (1978), 123–130.
7. Grønbæck N., Willis G.A., *Approximate identities in Banach algebras of compact operators*, Canadian Math. Bul. **36** (1993), 45–53.
8. Lima A., Nygaard O., Oja E., *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*, Israel J. Math. **119** (2000), 325–348.
9. Figiel T., Johnson W.B., *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 197–200.
10. Casazza P.G., Jarchow H., *Self-induced compactness in Banach spaces*, Proceedings of the Edinburg Mathematical Society. Section A **126** (1996), 355–362.
11. Пич А., *Операторные идеалы*, Москва: Мир, 1982, 536 с.
12. Reinov O.I., *A survey of some results in connection with Grothendieck approximation property*, Math. Nachr. **119** (1984), 257-264.
13. Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279–284.
14. Рейнов О.И., *Аппроксимационные свойства и некоторые классы операторов*, в кн. Проблемы математического анализа, вып. 23, Новосибирск: Научная книга, 2001, pp. 147-205.
15. Оя Э., Рейнов О., *Контрпример А.Гротендику*, Известия АН Эстонской ССР **37** (1988), 14-17.
16. Рейнов О.И., *Операторы типа RN в банаховых пространствах*, Сиб. матем. журн. **19** (1978), 4 857-865.
17. Willis G.A., *The compact pproximation property does not imply the approximation property*, Studia Math. **103** (1992), 99-108.

E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru