УДК 621.391 : 519.72

В. Н. Малозёмов, К. Ю. Цветков

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАХ СИГНАЛ–ФИЛЬТР[1]

Понятие оптимальной пары сигнал–фильтр распространяется на тот случай, когда вместо циклической свертки используется n-свертка. Строятся n-оптимальные n-ичные сигналы при всех $n = 2, 3, \ldots$

§1. Введение

Среди дискретных периодических сигналов с заданной энергией оптимальным считается тот, которому соответствует фильтр подавления боковых лепестков (ФПБЛ) с минимальной по энергии импульсной характеристикой. Оптимальный сигнал вместе с оптимальным ФПБЛ образуют оптимальную пару сигнал–фильтр.

Если на отсчеты сигнала не накладывать никаких ограничений, то оптимальная пара сигнал–фильтр допускает следующую характеризацию [1]: оптимальный сигнал должен быть дельта-коррелированным, а соответствующий ему ФПБЛ — согласованным.

В данной работе понятие оптимальной пары распространяется на тот случай, когда вместо циклической свертки используется n-свертка [2, 3]. Определяются дельта-n-коррелированные сигналы и согласованные n-фильтры и доказывается, что в n-оптимальной паре сигнал должен быть дельта-n-коррелированным, а n-ФПБЛ — согласованным. На основе функций Виленкина–Крестенсона и конструкции Франка строятся дельта-n-коррелированные n-ичные сигналы с периодом $N = n^{2s}$ при всех $n = 2, 3, \ldots$ Последний результат является существенным. Чтобы оценить это, отметим, например, что среди бинарных сигналов с периодом N при $N > 4$ не существует дельта-коррелированных [1] (но существуют дельта-2-коррелированные с периодом $N = 2^{2s}$).

§2. Предварительные сведения

2.1. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ множество комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы этого множества будем называть *сигналами*. В $\mathbb{C}_N$ обычным способом вводятся операции умножения на комплексное число, сложения и умножения двух сигналов. А именно,

$$\begin{aligned} y = cx \quad &\Longleftrightarrow \quad y(j) = cx(j), \;\; j \in \mathbb{Z}; \\ y = x_1 + x_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad y(j) = x_1(j) + x_2(j), \;\; j \in \mathbb{Z}; \\ y = x_1 x_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad y(j) = x_1(j) x_2(j), \;\; j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

В результате $\mathbb{C}_N$ становится коммутативной алгеброй с единицей. Единицей является сигнал $\mathbb{1}$, все отсчеты которого равны единице.

Обратный к x сигнал x^{-1} определяется из условия $xx^{-1} = \mathbb{1}$. Очевидно, что сигнал x имеет обратный (обратим) тогда и только тогда, когда все его отсчеты $x(j)$ отличны от нуля. В этом случае $x^{-1}(j) = [x(j)]^{-1}$, $j \in \mathbb{Z}$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 01-01-00231).

Наряду с сигналом x рассматриваются сигналы $\operatorname{Re} x$, $\operatorname{Im} x$, $\overline{x}$, $|x|$. Они определяются покомпонентно. Например, $|x|(j) = |x(j)|$, $j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $x\overline{x} = |x|^2$.

2.2. *Фильтром* с импульсной характеристикой $h \in \mathbb{C}_N$ будем называть оператор циклической свертки $\mathcal{L} : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ вида $\mathcal{L}(x) = x * h$. Если обозначить $y = \mathcal{L}(x)$, то

$$y(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)h(j-k), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Напомним определение функции взаимной корреляции R_{xy} сигналов x и y:

$$R_{xy}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(j+k)\,\overline{y}(k), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Функция R_{xx} называется автокорреляционной функцией сигнала x.

Фильтр $\mathcal{L}$ с импульсной характеристикой h называется *согласованным* с сигналом x, если

$$\mathcal{L}(x) := x * h = R_{xx}. \tag{2.1}$$

Согласованный фильтр существует. Например, можно положить $h(j) = \overline{x}(-j)$, $j \in \mathbb{Z}$. В этом случае

$$[x * h](j) = \sum_{k=0}^{N-1} x\big((k-j)+j\big)\,\overline{x}(k-j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k+j)\,\overline{x}(k) = R_{xx}(j).$$

Выясним вопрос о единственности согласованного фильтра.

Нам потребуется дискретное преобразование Фурье (ДПФ) $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$, сопоставляющее сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\omega_N^{-kj}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Сигнал X называется *спектром* сигнала x.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть $x \in \mathbb{C}_N$ — сигнал с обратимым спектром. Тогда импульсная характеристика h согласованного с x фильтра определяется единственным образом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем сигнал h, удовлетворяющий условию (2.1). Обозначим через X и H спектры сигналов x и h соответственно. По теореме о свертке $XH = \mathcal{F}_N(R_{xx})$. Согласно теореме Винера–Хинчина, $\mathcal{F}_N(R_{xx}) = X\overline{X}$. Поскольку $X(k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $H = \overline{X}$. По формуле обращения

$$h(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{X}(k)\,\omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Теперь имеем

$$\overline{h}(-j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\,\omega_N^{kj} = x(j),$$

откуда следует, что $h(j) = \overline{x}(-j),\ j \in \mathbb{Z}$. ▲

З а м е ч а н и е. Пусть у спектра X сигнала x имеются нулевые компоненты. Тогда согласованный с x фильтр неединствен. Положим

$$H(k) = \begin{cases} \overline{X}(k), & \text{если } X(k) \neq 0, \\ c_k, & \text{если } X(k) = 0, \end{cases}$$

где c_k — произвольные комплексные числа. Формула обращения

$$h(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k)\, \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

дает аналитическое представление импульсных характеристик всех согласованных с сигналом x фильтров.

2.3. Нам потребуется единичный N-периодический импульс δ_N — сигнал, у которого $\delta_N(j) = 1$, если j делится на N, и $\delta_N(j) = 0$ при остальных $j \in \mathbb{Z}$.

Обозначим через $\widetilde{R}_{xx} = \big(R_{xx}(0)\big)^{-1} R_{xx}$ нормированную автокорреляционную функцию сигнала x. Если

$$\widetilde{R}_{xx} = \delta_N, \tag{2.2}$$

то сигнал x называется *дельта-коррелированным.* Нетрудно описать все множество таких сигналов. Для этого переведем равенство (2.2) в спектральную область. Учитывая, что $\mathcal{F}_N(R_{xx}) = |X|^2$ и $\mathcal{F}_N(\delta_N) = \mathbb{1}$, получаем $\big(R_{xx}(0)\big)^{-1}|X|^2 = \mathbb{1}$. Значит,

$$|X(k)| \equiv \sqrt{R_{xx}(0)} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

Приходим к следующему заключению.

П р е д л о ж е н и е 2. *Для того, чтобы ненулевой сигнал x был дельта-коррелированным, необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление*

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где c_k — произвольные ненулевые коэффициенты, по модулю равные между собой (т. е. лежащие на некоторой окружности комплексной плоскости с центром в нуле).

Отметим, что если $|X(k)| \equiv \sqrt{A} > 0$, то $R_{xx}(0) = A$. Действительно, согласно равенству Парсеваля

$$R_{xx}(0) = \sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 = A.$$

2.4. Обозначим через $E(x)$ энергию сигнала x, т. е.

$$E(x) = \sum_{j=0}^{N-1} |x(j)|^2.$$

В силу равенства Парсеваля
$$E(x) = N^{-1} E(X), \tag{2.3}$$
где $X = \mathcal{F}_N(x)$.

Ненулевому сигналу x сопоставим *фильтр подавления боковых лепестков* (ФПБЛ). Его импульсная характеристика h определяется из условия
$$x * h = E(x)\, \delta_N. \tag{2.4}$$
Перепишем равенство (2.4) в спектральной области: $XH = E(x)\, \mathbb{1}$. Видим, что ФПБЛ существует тогда и только тогда, когда сигнал x имеет обратимый спектр. При этом $H = E(x)\, X^{-1}$ и
$$h(j) = N^{-1} E(x) \sum_{k=0}^{N-1} [X(k)]^{-1}\, \omega_N^{kj}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

ФПБЛ полностью устраняет влияние отражений сигнала x любой интенсивности с запаздыванием на $l \in 1 : N-1$, поскольку
$$x(\cdot - l) * h = E(x)\, \delta_N(\cdot - l).$$

2.5. Рассмотрим экстремальную задачу: среди сигналов с заданной энергией найти такие, у которых импульсная характеристика ФПБЛ имеет *наименьшую* энергию. Эту задачу можно формализовать следующим образом:

(P1) *Минимизировать* $[E(x)]^{-1} E(h)$ *при ограничениях*
$$x * h = E(x)\, \delta_N; \;\; E(x) = A; \;\; x, h \in \mathbb{C}_N.$$

Перепишем задачу (P1) в более компактном виде
$$\begin{gathered} \gamma := A^{-1} E(h) \to \min, \\ x * h = A\, \delta_N; \;\; E(x) = A; \;\; x, h \in \mathbb{C}_N. \end{gathered} \tag{2.5}$$
Решение этой задачи (x_*, h_*) называется оптимальной парой сигнал–фильтр.

Предложение 3 [1]. *Минимальное значение γ в задаче (2.5) равно единице. Оно достигается на любом дельта-коррелированном сигнале x с $E(x) = A$. При этом оптимальным ФПБЛ является согласованный фильтр.*

Доказательство. Переведем задачу (2.5) в спектральную область. Согласно (2.3) получим
$$\begin{gathered} \gamma := (AN)^{-1} E(H) \to \min, \\ XH = A\, \mathbb{1}; \;\; (AN)^{-1} E(X) = 1. \end{gathered}$$
Спектр H можно исключить. Учитывая, что $H = AX^{-1}$, запишем
$$\begin{gathered} \gamma := \frac{A}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^{-2} \to \min, \\ \frac{1}{AN} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^{2} = 1. \end{gathered}$$

Обозначим $a_k = |X(k)|^2$. В силу классического неравенства между средним гармоническим и средним арифметическим имеем

$$\frac{1}{A}\,\frac{N}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k^{-1}} \leq \frac{1}{A}\,\frac{\sum_{k=0}^{N-1} a_k}{N} = 1. \tag{2.6}$$

В левой части неравенства (2.6) стоит величина γ^{-1}, и она не превосходит единицы. Значит, γ не меньше единицы. Равенство единице достигается только тогда, когда все a_k равны между собой. Поскольку $\sum_{k=0}^{N-1} a_k = AN$, то $a_k \equiv A$, так что $|X(k)| \equiv \sqrt{A}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Принимая во внимание Предложение 2, приходим к следующему выводу: выполняется неравенство $\gamma \geq 1$; равенство $\gamma = 1$ достигается на всех дельта-коррелированных сигналах x с $E(x) = A$ и только на них.

Что касается оптимальных ФПБЛ для указанных сигналов x, то это необходимо согласованные фильтры. Действительно, в силу дельта-коррелированности $R_{xx} = R_{xx}(0)\,\delta_N = E(x)\,\delta_N$. С другой стороны, по условию задачи (P1), $x * h = E(x)\,\delta_N$. Следовательно, $x * h = R_{xx}$, что в соответствии с (2.1) и означает, что h есть импульсная характеристика согласованного с x фильтра. ▲

Аналогичные результаты будут получены в случае, когда циклический сдвиг заменяется n-ичным сдвигом и дискретное преобразование Фурье — дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона. Но для этого потребуется некоторая подготовка.

§3. Гармонический анализ в базисе Виленкина–Крестенсона

3.1. Будем считать, что $N = n^s$, где n и s — натуральные числа, отличные от единицы. Число j из множества $T_s = \{0, 1, \dots, n^s - 1\}$ можно представить его n-ичным кодом. Запись $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_n$ означает, что $j = j_{s-1}n^{s-1} + j_{s-2}n^{s-2} + \ldots + j_0$, где $j_\nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ при всех $\nu = 0, 1, \dots, s-1$. На множестве T_s вводятся операции n-ичного сложения $\underset{n}{\oplus}$ и n-ичного умножения $\underset{n}{\otimes}$. Эти операции выполняются по модулю n в каждом n-ичном разряде. Точнее,

$$\begin{aligned} p = j \underset{n}{\oplus} k \iff p_\nu = \langle j_\nu + k_\nu \rangle_n, \ \ \nu = 0, 1, \dots, s-1; \\ r = j \underset{n}{\otimes} k \iff r_\nu = \langle j_\nu\, k_\nu \rangle_n, \ \ \nu = 0, 1, \dots, s-1. \end{aligned}$$

Здесь $\langle q \rangle_n = q - \lfloor q/n \rfloor n$ — вычет целого числа q по модулю n. Очевидно, что $\langle q \rangle_n \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Любое число $k \in T_s$ имеет противоположное k^* с n-ичными компонентами $k_\nu^* = \langle -k_\nu \rangle_n$, $\nu = 0, 1, \dots, s-1$. По определению $j \underset{n}{\ominus} k = j \underset{n}{\oplus} k^*$. Нетрудно проверить, что

$$(j \underset{n}{\ominus} k) \underset{n}{\oplus} k = j, \qquad (j \underset{n}{\oplus} k) \underset{n}{\ominus} k = j. \tag{3.1}$$

Единицей в T_s является число с n-ичным кодом $(1, \dots, 1)_n$. Обратное к $j \in T_s$ число j^{-1} существует тогда и только тогда, когда все компоненты j_ν n-ичного кода числа j взаимно просты с n. В силу взаимной простоты j_ν и n существует единственное число $p_\nu \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, такое, что $\langle j_\nu\, p_\nu \rangle_n = 1$. Обратное число j^{-1} имеет код $(p_{s-1}, p_{s-2}, \dots, p_0)_n$.

Отметим, что отображение $j \to j \underset{n}{\oplus} l$ при любом $l \in T_s$ является перестановкой множества T_s. То же самое можно сказать об отображении $j \to j \underset{n}{\otimes} l$ в случае, когда число $l \in T_s$ имеет обратное l^{-1}.

3.2. Пусть j, k принадлежат T_s и $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$, $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \ldots, k_0)_n$. Функции

$$v_k(j) = \prod_{\nu=0}^{s-1} \omega_n^{k_\nu j_\nu}, \quad k = 0, 1, \ldots, n^s - 1,$$

определенные на T_s, называются дискретными функциями Виленкина–Крестенсона [3, 4].

Из определения следует, что $v_k(j) = v_j(k)$, $v_k(j \underset{n}{\ominus} l) = v_k(j)\,\overline{v_k}(l)$, $v_k(j)\,v_l(j) = v_m(j)$, где $m = k \underset{n}{\oplus} l$. Справедливо также условие ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} v_k(j)\,\overline{v_l}(j) = N\,\delta_N(k-l). \tag{3.2}$$

При $l = 0$ равенство (3.2) принимает вид

$$\sum_{j=0}^{N-1} v_k(j) = N\,\delta_N(k). \tag{3.3}$$

3.3. Обозначим через $\mathbb{C}(T_s)$ множество функций из $\mathbb{C}_N$, рассматриваемых на основном периоде T_s. Дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона называется отображение $\mathcal{W}_N : \mathbb{C}(T_s) \to \mathbb{C}(T_s)$, сопоставляющее сигналу x сигнал $X^{(n)} = \mathcal{W}_N(x)$ с компонентами

$$X^{(n)}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{v_k}(j), \quad k \in T_s. \tag{3.4}$$

Предложение 4. *Имеет место формула обращения*

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^{(n)}(k)\,v_k(j), \quad j \in T_s. \tag{3.5}$$

Это следует из (3.4) и (3.2). Действительно,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^{(n)}(k)\,v_k(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\overline{v_k}(l) \Big)\, v_k(j) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \Big\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v_j(k)\,\overline{v_l}(k) \Big\} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\delta_N(j-l) = x(j).$$

Предложение 5. *Справедливо равенство Парсеваля*

$$E(x) = N^{-1} E(X^{(n)}). \tag{3.6}$$

Доказательство. Согласно (3.5) и (3.4)

$$E(x) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{x}(j) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Big(\sum_{k=0}^{N-1} X^{(n)}(k)\, v_k(j) \Big)\, \overline{x}(j) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^{(n)}(k) \sum_{j=0}^{N-1} \overline{x}(j)\, v_k(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^{(n)}(k)\, \overline{X^{(n)}(k)} = N^{-1} E(X^{(n)}). \quad \blacktriangle$$

Возьмем число $l \in T_s$, имеющее обратное l^{-1}. Наряду с сигналом x рассмотрим сигнал $y(j) = x(j \underset{n}{\otimes} l),\ j \in T_s$.

Предложение 6. *Дискретные преобразования Виленкина–Крестенсона* $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$ *сигналов* x, y *связаны соотношением*

$$Y^{(n)}(k) = X^{(n)}(k \underset{n}{\otimes} l^{-1}), \quad k \in T_s. \tag{3.7}$$

Доказательство. Имеем

$$Y^{(n)}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j \underset{n}{\otimes} l)\, \overline{v_k}\big((j \underset{n}{\otimes} l) \underset{n}{\otimes} l^{-1}\big) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \overline{v_k}(j \underset{n}{\otimes} l^{-1}).$$

Однако

$$v_k(j \underset{n}{\otimes} l^{-1}) = \prod_{\nu=0}^{s-1} \omega_n^{k_\nu j_\nu l_\nu^{-1}} = \prod_{\nu=0}^{s-1} \omega_n^{\langle k_\nu l_\nu^{-1} \rangle_n j_\nu} = v_m(j),$$

где $m = k \underset{n}{\otimes} l^{-1}$. Значит, $Y^{(n)}(k) = X^{(n)}(m)$, что равносильно (3.7). $\blacktriangle$

3.4. Сигнал $z = x \underset{n}{\circledast} y$ с компонентами

$$z(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, y(j \underset{n}{\ominus} k), \quad j \in T_s,$$

называется n-сверткой сигналов x и y. Функция

$$R_{xy}^{(n)}(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(j \underset{n}{\oplus} k)\, \overline{y}(k), \quad j \in T_s,$$

называется функцией взаимной n-корреляции сигналов x и y.

Обозначим $X^{(n)} = \mathcal{W}_N(x),\ Y^{(n)} = \mathcal{W}_N(y)$.

Теорема об n-свертке. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{W}_N(x \underset{n}{\circledast} y) = X^{(n)}\, Y^{(n)}. \tag{3.8}$$

Теорема об n-корреляции. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{W}_N(R_{xy}^{(n)}) = X^{(n)}\,\overline{Y^{(n)}}. \tag{3.9}$$

Проверим, например, (3.9). Согласно (3.1) имеем

$$\big[\mathcal{W}_N(R_{xy}^{(n)})\big](k) = \sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(j \underset{n}{\oplus} l)\,\overline{y}\big((l \underset{n}{\oplus} j) \underset{n}{\ominus} j\big)\Big)\,\overline{v_k}(j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1}\Big(\sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\overline{y}(l \underset{n}{\ominus} j)\Big)\,\overline{v_k}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{j=0}^{N-1} \overline{y}(l \underset{n}{\ominus} j)\,\overline{v_k}\big(l \underset{n}{\ominus} (l \underset{n}{\ominus} j)\big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} x(l) \sum_{j=0}^{N-1} \overline{y}(j)\,\overline{v_k}(l \underset{n}{\ominus} j) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l)\,\overline{v_k}(l) \sum_{j=0}^{N-1} \overline{y}(j)\,v_k(j) = X^{(n)}(k)\,\overline{Y^{(n)}(k)}.$$

Мы воспользовались формулой $v_k(l \underset{n}{\ominus} j) = v_k(l)\,\overline{v_k}(j)$ и тем фактом, что отображение $j \to l \underset{n}{\ominus} j$ является перестановкой множества T_s.

Функция $R_{xx}^{(n)}$ называется n-автокорреляционной функцией сигнала x. Из (3.9) следует, что

$$\mathcal{W}_N(R_{xx}^{(n)}) = |X^{(n)}|^2. \tag{3.10}$$

§4. Оптимальные n-фильтры подавления боковых лепестков

4.1. Назовем *n-фильтром* с импульсной характеристикой h оператор $\mathcal{L} : \mathbb{C}(T_s) \to \mathbb{C}(T_s)$ вида $\mathcal{L}(x) = x \underset{n}{\circledast} h$; n-фильтр, *согласованный* с сигналом x, определяется условием

$$\mathcal{L}(x) := x \underset{n}{\circledast} h = R_{xx}^{(n)}.$$

Нетрудно описать все множество согласованных n-фильтров. Для этого положим

$$H^{(n)}(k) = \begin{cases} \overline{X^{(n)}}(k), & \text{если } X^{(n)}(k) \neq 0, \\ c_k, & \text{если } X^{(n)}(k) = 0, \end{cases}$$

где c_k — произвольные комплексные числа. Формула обращения

$$h(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H^{(n)}(k)\,v_k(j), \quad j \in T_s,$$

дает аналитическое представление импульсных характеристик всех n-фильтров, согласованных с сигналом x. В частности, можно взять

$$h(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{X^{(n)}}(k)\,v_k(j), \quad j \in T_s.$$

В этом случае $h(j) = \overline{x}(j^*)$. Доказательство указанных фактов проводится по схеме п. 2.2 со ссылкой на формулы (3.8) и (3.10). Используется также равенство $\overline{v_k}(j) = v_k(j^*)$.

4.2. Обозначим через $\widetilde{R}_{xx}^{(n)} = \bigl(R_{xx}^{(n)}(0)\bigr)^{-1} R_{xx}^{(n)}$ нормированную n-автокорреляционную функцию сигнала x. Если

$$\widetilde{R}_{xx}^{(n)}(j) = \delta_N(j) \quad \forall\, j \in T_s, \tag{4.1}$$

то сигнал x называется *дельта-n-коррелированным.*

Предложение 7. *Для того, чтобы ненулевой сигнал x был дельта-n-коррелированным, необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление*

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, v_k(j), \quad j \in T_s, \tag{4.2}$$

где c_k — произвольные ненулевые коэффициенты, по модулю равные между собой.

Доказательство. Необходимость. Из равенства (4.1) в силу (3.10) следует, что $|X^{(n)}(k)|^2 = R_{xx}^{(n)}(0)$ при всех $k \in T_s$. Остается учесть, что в (4.2) $c_k = X^{(n)}(k)$.

Достаточность. Имеем $|X^{(n)}(k)| = \sqrt{A} > 0$ при всех $k \in T_s$. Согласно (3.10), $\mathcal{W}_N(R_{xx}^{(n)}) = A\,\mathbb{1}$. Формула обращения и (3.3) приводят к равенству $R_{xx}^{(n)} = A\,\delta_N$. В частности, при $j = 0$ получаем $R_{xx}^{(n)}(0) = A$. Окончательно, $\widetilde{R}_{xx}^{(n)} = \delta_N$, что и гарантирует дельта-n-коррелированность сигнала x. ▲

4.3. Ненулевому сигналу x сопоставим *n-фильтр подавления боковых лепестков* (n-ФПБЛ). Его импульсная характеристика h определяется из условия

$$x \underset{n}{\circledast} h = E(x)\,\delta_N. \tag{4.3}$$

Перепишем (4.3) в эквивалентном виде: $X^{(n)} H^{(n)} = E(x)\,\mathbb{1}$. Ясно, что n-ФПБЛ существует тогда и только тогда, когда сигнал x имеет обратимый спектр Виленкина–Крестенсона $X^{(n)}$. При этом $H^{(n)} = E(x)\,[X^{(n)}]^{-1}$ и

$$h(j) = N^{-1} E(x) \sum_{k=0}^{N-1} [X^{(n)}(k)]^{-1}\, v_k(j), \quad j \in T_s.$$

4.4. Рассмотрим экстремальную задачу, аналогичную (P1):

(P2) *Минимизировать* $[E(x)]^{-1} E(h)$ *при ограничениях*

$$x \underset{n}{\circledast} h = E(x)\,\delta_N; \;\; E(x) = A; \;\; x, h \in \mathbb{C}(T_s).$$

Более компактная запись этой задачи имеет вид

$$\begin{gathered} \gamma := A^{-1} E(h) \to \min, \\ x \underset{n}{\circledast} h = A\,\delta_N; \;\; E(x) = A; \;\; x, h \in \mathbb{C}(T_s). \end{gathered} \tag{4.4}$$

Предложение 8. *Минимальное значение γ в задаче (4.4) равно единице. Оно достигается на любом дельта-n-коррелированном сигнале x с $E(x) = A$. При этом оптимальным n-ФПБЛ является согласованный n-фильтр.*

Доказательство мы опускаем, поскольку оно отличается от доказательства Предложения 3 лишь заменой дискретного преобразования Фурье на дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона.

§5. Сигнал Франка–Крестенсона

По-прежнему считаем, что $N = n^s$. Зафиксируем перестановку π множества T_s, отображение $\tau : T_s \to T_s$ и ненулевые комплексные числа $a(k)$, $k \in T_s$. По образцу [5] введем на множестве T_{2s} сигнал Франка–Крестенсона

$$\varphi(kn^s + j) = a(k)\, v_{\pi(k)}\big(j \underset{n}{\oplus} \tau(k)\big), \quad k, j \in T_s. \tag{5.1}$$

Обозначим $\Phi = \mathcal{W}_{N^2}(\varphi)$.

П р е д л о ж е н и е 9. *Справедливо равенство*

$$\Phi(pN + q) = N\, a(q')\, v_q\big(\tau(q')\big)\, \overline{v_p}(q'), \quad p, q \in T_s, \tag{5.2}$$

где $q' = \pi^{-1}(q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $k' = \pi(k)$. Тогда

$$\Phi(pN + q) = \sum_{k,j=0}^{N-1} \varphi(kN + j)\, \overline{v_{pN+q}}(kN + j) =$$

$$= \sum_{k,j=0}^{N-1} a(k) \prod_{\nu=0}^{s-1} \omega_n^{k'_\nu (j_\nu + [\tau(k)]_\nu) - p_\nu k_\nu - q_\nu j_\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a(k)\, v_{k'}\big(\tau(k)\big)\, \overline{v_p}(k) \sum_{j=0}^{N-1} v_{k'}(j)\, \overline{v_q}(j).$$

Согласно (3.2) имеем

$$\Phi(pN + q) = N \sum_{k=0}^{N-1} a(k)\, v_{k'}\big(\tau(k)\big)\, \overline{v_p}(k)\, \delta_N(k' - q).$$

В последней сумме отлично от нуля только одно слагаемое при $k' = q$, что соответствует $k = \pi^{-1}(q) = q'$. Значит,

$$\Phi(pN + q) = N\, a(q')\, v_q\big(\tau(q')\big)\, \overline{v_p}(q').$$

Предложение доказано. ▲

С л е д с т в и е. *Если* $|a(k)| \equiv r > 0$ *при всех* $k \in T_s$, *то сигнал Франка–Крестенсона* φ *вида* (5.1), *определенный на множестве* $T_{2s} = \{0, 1, \dots, n^{2s} - 1\}$, *является дельта-n-коррелированным.*

Действительно, согласно (5.2), $|\Phi(pN + q)| = N\, |a(q')| = Nr$. Остается сослаться на Предложение 7.

Количество дельта-n-коррелированных сигналов можно еще увеличить, если воспользоваться Предложением 6, согласно которому наряду с φ дельта-n-коррелированными будут сигналы

$$x(j) = \varphi(j \underset{n}{\otimes} l), \quad j \in T_{2s},$$

при условии, что число $l \in T_{2s}$ имеет обратное l^{-1}.

§6. Оптимальные n-ичные сигналы

6.1. Обозначим $\Omega_n = \{1, \omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}$. Сигнал x назовем n-ичным, если $x(j) \in \Omega_n$ при всех $j \in \mathbb{Z}$.

Переформулируем задачу (P2) для n-ичных сигналов при $N = n^{2s}$. Учитывая, что энергия любого n-ичного сигнала равна N, приходим к следующей экстремальной задаче:

(P3) *Минимизировать* $N^{-1}E(h)$ *при ограничениях*

$$x(j) \in \Omega_n \ \forall\, j \in T_{2s}; \ \ x \underset{n}{\circledast} h = N\,\delta_N; \ \ x, h \in \mathbb{C}(T_{2s}).$$

Решение этой задачи зависит от существования среди n-ичных сигналов дельта-n-коррелированных сигналов. Они и будут оптимальными сигналами, которые вместе с согласованными n-фильтрами образуют решение задачи (P3).

П р е д л о ж е н и е 10. *Сигнал Франка–Крестенсона φ вида* (5.1) *при $a(k) \in \Omega_n$ для всех $k \in T_s$ является оптимальным для задачи* (P3). *При этом импульсная характеристика h оптимального n-ФПБЛ так же, как и φ, будет n-ичным сигналом.*

Простое доказательство Предложения 10, основанное на Предложении 8, следствии из Предложения 9, определении функций Виленкина–Крестенсона и формуле $h(j) = \overline{\varphi}(j^*)$, мы опускаем.

6.2. Особый интерес представляет случай $n = 2$, когда $\Omega_2 = \{1, -1\}$ и $T_s = \{0, 1, \ldots, 2^s - 1\}$. Дискретные сигналы, принимающие только два значения $+1$ или -1, называются *бинарными.*

При $n = 2$ функции Виленкина–Крестенсона имеют вид

$$v_k(j) = \prod_{\nu=0}^{s-1} (-1)^{k_\nu\, j_\nu}, \quad k, j \in T_s,$$

т.е. становятся функциями Уолша. По аналогии с (5.1) введем сигнал Франка–Уолша

$$\psi(k\,2^s + j) = a(k)\, v_{\pi(k)}\big(j \underset{2}{\oplus} \tau(k)\big), \quad k, j \in T_s. \tag{6.1}$$

В качестве следствия из Предложения 10 получаем такой результат:

П р е д л о ж е н и е 11. *Сигнал Франка–Уолша ψ вида* (6.1) *с $a(k) = \pm 1$ для всех $k \in T_s$ является оптимальным для задачи* (P3) *при $n = 2$. При этом импульсная* *характеристика h оптимального 2-ФПБЛ совпадает с ψ, т. е. $h(j) = \psi(j)$ при всех $j \in T_{2s}$.*

В проверке нуждается только утверждение об h. Имеем

$$h(j) = \overline{\psi}(j^*) = \psi(j).$$

Мы воспользовались бинарностью сигнала ψ и равенством $j^* = j$, справедливым при $n = 2$.

§7. Заключительные замечания

Связь между n-ичным сдвигом и функциями Виленкина–Крестенсона не является случайной.

Предложение 12. *При $N = n^s$ функции Виленкина–Крестенсона v_0, v_1, ..., v_{N-1} образуют полный набор собственных функций оператора n-ичного сдвига $\mathcal{P}_l(x) = x(\cdot \underset{n}{\ominus} l)$ при $l \in \{1, \dots, N-1\}$.*

Действительно,

$$[\mathcal{P}_l(v_k)](j) = v_k(j \underset{n}{\ominus} l) = v_k(j)\,\overline{v_k}(l),$$

т. е. $\mathcal{P}_l(v_k) = \overline{v_k}(l)\, v_k$ при всех $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Справедлив более глубокий результат.

Предложение 13. *При $N = n^s$ функции Виленкина–Крестенсона v_0, v_1, ..., v_{N-1} образуют полный набор собственных функций любого n-фильтра $\mathcal{L}(x) = x \underset{n}{\circledast} h$.*

Доказательство. Имеем

$$[\mathcal{L}(v_k)](j) = \sum_{l=0}^{N-1} v_k(l)\, h(j \underset{n}{\ominus} l) =$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} v_k\big(j \underset{n}{\ominus} (j \underset{n}{\ominus} l)\big)\, h(j \underset{n}{\ominus} l) = \sum_{l=0}^{N-1} v_k(j \underset{n}{\ominus} l)\, h(l) =$$

$$= v_k(j) \sum_{l=0}^{N-1} h(l)\, \overline{v_k}(l) = v_k(j)\, H(k),$$

где $H = \mathcal{W}_N(h)$. Таким образом,

$$\mathcal{L}(v_k) = H(k)\, v_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \tag{7.1}$$

откуда и следует требуемое заключение. Более того, формула (7.1) показывает, что собственным значением, соответствующим собственной функции v_k, является k-я компонента спектра Виленкина–Крестенсона импульсной характеристики h n-фильтра $\mathcal{L}$. ▲

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ипатов В. П.* Периодические дискретные сигналы с оптимальными корреляционными свойствами. М.: Радио и связь, 1992.

2. *Трахтман А. М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. М.: Сов. радио, 1972.

3. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.

4. *Малозёмов В. Н., Машарский С. М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона// Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.

5. *Малозёмов В. Н., Машарский С. М., Цветков К. Ю.* Сигнал Франка и его обобщения // Пробл. передачи информ. 2001. Т. 37. Вып. 2. С. 18–26.

ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

V. N. Malozemov and K. Yu. Tsvetkov
ON OPTIMAL SIGNAL–FILTER PAIRS