УДК 519.677

В. Н. Малозёмов, О. В. Просеков

О БЫСТРОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ МАЛЫХ ПОРЯДКОВ*

1°. Напомним, что дискретное преобразование Фурье (ДПФ) определяется формулой

$$X_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j\, \omega_N^{-kj}\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1\,, \tag{1}$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Быстрое преобразование Фурье (БПФ) основано на приведении формулы (1) к виду [1, с. 429]

$$X = CBA\,x\,. \tag{2}$$

Здесь B — диагональная матрица, ответственная за умножения, A и C — матрицы, элементы которых равны 0, 1 или -1. Матрицы A и C называются соответственно матрицей предсложений и матрицей постсложений.

Факторизация (2) имеет целью минимизировать число умножений. Чтобы минимизировать число сложений, нужно факторизовать матрицы A и C, т. е. перейти к разложению

$$X = C_1 C_2 \ldots C_m\, B\, A_n A_{n-1} \ldots A_1\, x\,, \tag{3}$$

в котором сомножители C_k и A_l обладают следующими свойствами: их элементы по-прежнему равны 0, 1 или -1, но в каждой строке этих сомножителей содержится не более двух отличных от нуля элементов.

Разложение (3) неединственно, поэтому можно ставить дополнительные условия. Например, можно потребовать, чтобы матрицы C_k и A_l были, в основном, симметричными, чтобы значение -1 стояло, по возможности, на диагоналях и т. д. Такие дополнительные условия трудно формализовать. Мы приведём вывод "совершенных" разложений вида (3) при $N = 3, 4, 5, 6$. При этом будут использоваться только элементарные средства.

2°. Введём обозначения

$$a_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j\, \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\, j\right), \qquad b_k = \sum_{j=1}^{N-1} x_j\, \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\, j\right)$$

и перепишем формулу (1) в виде

$$X_k = a_k - i\, b_k\,. \tag{4}$$

Поскольку $a_{N-k} = a_k$, $b_{N-k} = -b_k$, то одновременно

$$X_k = a_{N-k} + i\, b_{N-k}\,. \tag{5}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (номер проекта 01-01-00231)

Формулой (4) следует пользоваться при $k = 0, 1, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor$, а формулой (5) — при $k = \lfloor N/2 \rfloor + 1, \ldots, N-1$. Отметим, что $b_0 = 0$ и $b_{N/2} = 0$ при чётном N.

Рассмотрим частные случаи формул (4), (5).

1) $N = 2 \quad \big(\lfloor N/2 \rfloor = 1,\ b_1 = 0\big)$:

$$X_0 = a_0 = x_0 + x_1\,, \quad X_1 = a_1 = x_0 - x_1\,. \tag{6}$$

2) $N = 3 \quad \big(\lfloor N/2 \rfloor = 1\big)$:

$$\begin{aligned} &X_0 = a_0\,, \\ &X_1 = a_1 - i\,b_1\,, \quad X_2 = a_1 + i\,b_1\,. \end{aligned} \tag{7}$$

3) $N = 4 \quad \big(\lfloor N/2 \rfloor = 2,\ b_2 = 0\big)$:

$$\begin{aligned} &X_0 = a_0\,, && X_2 = a_2\,, \\ &X_1 = a_1 - i\,b_1\,, \quad && X_3 = a_1 + i\,b_1\,. \end{aligned} \tag{8}$$

4) $N = 5 \quad \big(\lfloor N/2 \rfloor = 2\big)$:

$$\begin{aligned} &X_0 = a_0\,, \\ &X_1 = a_1 - i\,b_1\,, \quad && X_3 = a_2 + i\,b_2\,, \\ &X_2 = a_2 - i\,b_2\,, \quad && X_4 = a_1 + i\,b_1\,. \end{aligned} \tag{9}$$

5) $N = 6 \quad \big(\lfloor N/2 \rfloor = 3,\ b_3 = 0\big)$:

$$\begin{aligned} &X_0 = a_0\,, && X_3 = a_3\,, \\ &X_1 = a_1 - i\,b_1\,, \quad && X_4 = a_2 + i\,b_2\,, \\ &X_2 = a_2 - i\,b_2\,, \quad && X_5 = a_1 + i\,b_1\,. \end{aligned} \tag{10}$$

При $N = 2$ формула (6) не нуждается в упрощении. При $N = 3, 4, 5, 6$ далее будут получены разложения вида (3).

Нам потребуется очевидное соотношение для произведения матриц:

$$A[P, L] \times B[L, Q] = \sum_{l \in L} A[P, l] \times B[l, Q]\,. \tag{11}$$

Выведем из (11) два следствия. Пусть π — перестановка множества L. Тогда

$$A[P, L] \times B[L, Q] = \sum_{l \in L} A[P, \pi(l)] \times B[\pi(l), Q]\,.$$

Это значит, что произведение AB не изменится, если у матрицы A переставить столбцы и соответствующим образом у матрицы B переставить строки.

Теперь возьмём ненулевые числа c_l при $l \in L$. Имеем

$$A[P, L] \times B[L, Q] = \sum_{l \in L} \Big(A[P, l] \times \big[c_l^{-1}\big]\Big) \times \Big(\big[c_l\big] \times B[l, Q]\Big)\,.$$

Таким образом, произведение AB не изменится, если l-й столбец матрицы A поделить на c_l, а l-ю строку матрицы B умножить на c_l.

3°. Обратимся к случаю $N=3$. Перепишем соотношения (7) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} . \tag{12}$$

Положим $\theta = 2\pi/3$. Поскольку

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 + x_1 + x_2 \,, \\ a_1 &= x_0 + \cos\theta\,(x_1 + x_2)\,, \\ b_1 &= \sin\theta\,(x_1 - x_2)\,, \end{aligned}$$

то

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} . \tag{13}$$

Матрица в правой части (13) имеет блочно-диагональную структуру. Факторизуем верхний блок. Для этого приведём его к диагональному виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} .$$

Отсюда следует, что

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{14}$$

Подставив (14) в (13), получим

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} .$$

Возращаясь к (12), приходим к окончательной формуле

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta - 1 \\ -i\,\sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} . \tag{15}$$

Разложение (15) можно представить в виде $X = A_1 A_2^T\, B\, A_2 A_1\, x$, где A_1 — симметричная матрица.

Приведём графическую схему алгоритма (15):

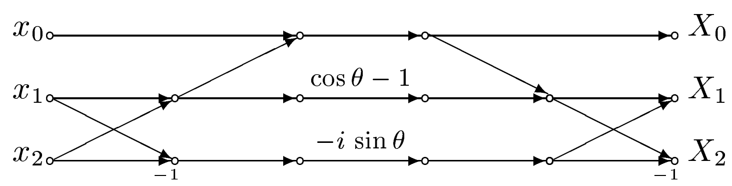

Схема 1

4°. Аналогичным образом можно разобраться со случаем $N = 6$. Согласно (10) имеем

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} . \tag{16}$$

Положим $\theta = \pi/3$. Поскольку

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \,, \\ a_1 &= x_0 - x_3 - \cos\theta \, (-x_1 + x_2 + x_4 - x_5) \,, \\ a_2 &= x_0 + x_3 - \cos\theta \, (x_1 + x_2 + x_4 + x_5) \,, \\ a_3 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \,, \\ b_2 &= \sin\theta \, (x_1 - x_2 + x_4 - x_5) \,, \\ b_1 &= \sin\theta \, (x_1 + x_2 - x_4 - x_5) \,, \end{aligned}$$

то

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 - x_5 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 \\ x_0 - x_3 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 \\ x_1 + x_2 - x_4 - x_5 \end{bmatrix} . \tag{17}$$

Матрица в правой части (17) имеет блочно-диагональную структуру. Факторизуем верхний блок. Для этого приведём его к диагональному виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\cos\theta & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Отсюда следует, что

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\cos\theta & 0 & 1\\ 1 & 0 & -\cos\theta & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\cos\theta-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\cos\theta-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}. \qquad (18)$$

Далее

$$\begin{bmatrix}x_0+x_3\\ -x_1+x_2+x_4-x_5\\ x_1+x_2+x_4+x_5\\ x_0-x_3\\ x_1-x_2+x_4-x_5\\ x_1+x_2-x_4-x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_0\\ x_1+x_5\\ x_2+x_4\\ x_3\\ x_2-x_4\\ x_1-x_5\end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Объединив (16)–(19), придём к окончательной формуле

$$\begin{bmatrix}X_0\\ X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4\\ X_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix}1\\ -\cos\theta-1\\ -\cos\theta-1\\ 1\\ -i\sin\theta\\ -i\sin\theta\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Разложение (20) можно представить в виде $X = A_1 A_3^T\, B\, A_3 A_2 A_1\, x$, где A_1, A_2 — симметричные матрицы.

Приведём графическую схему алгоритма (20):

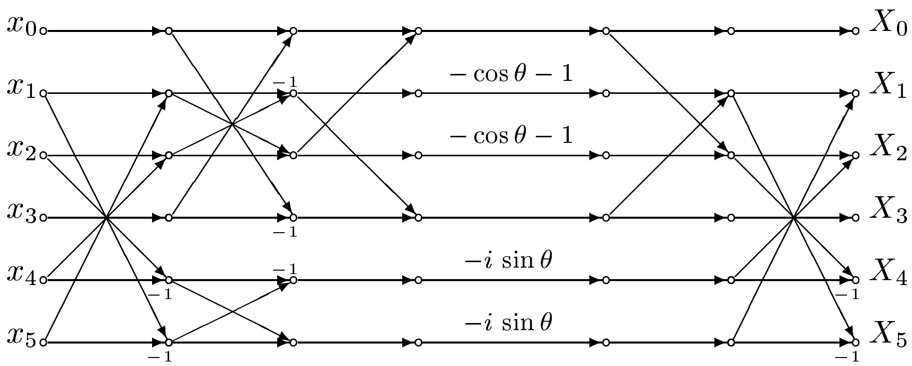

Схема 2

5°. Перейдём к случаю $N = 4$. Согласно (8) имеем

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \end{bmatrix} . \tag{21}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 , \\ a_1 &= x_0 - x_2 , \\ a_2 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3 , \\ b_1 &= x_1 - x_3 , \end{aligned}$$

то

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_0 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} . \tag{22}$$

Объединив (21) и (22), получим

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} . \tag{23}$$

Формулу (23) можно упростить, если перемножить первые две матрицы в правой её части:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} . \tag{24}$$

Продолжим преобразования. В правой части (24) у первой матрицы переставим второй и третий столбцы и у второй матрицы переставим соответственно вторую и третью строки, после чего у второй матрицы переставим второй и третий столбцы и у третьей матрицы переставим соответственно вторую и третью строки. Придём к окончательной формуле

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Приведём графическую схему алгоритма (25):

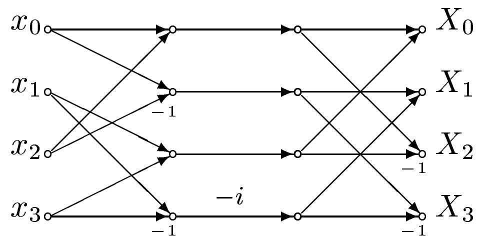

Схема 3

6°. Рассмотрим случай $N = 5$. Согласно (9) имеем

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Обозначим $\theta = 2\pi/5$. Поскольку

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4\,, \\ a_1 &= x_0 + \cos\theta\,(x_1 + x_4) + \cos 2\theta\,(x_2 + x_3)\,, \\ a_2 &= x_0 + \cos 2\theta\,(x_1 + x_4) + \cos\theta\,(x_2 + x_3)\,, \\ b_2 &= \sin 2\theta\,(x_1 - x_4) - \sin\theta\,(x_2 - x_3)\,, \\ b_1 &= \sin\theta\,(x_1 - x_4) + \sin 2\theta\,(x_2 - x_3)\,, \end{aligned}$$

то

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \\ 1 & \cos 2\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 - x_4 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Матрица в правой части (27) имеет блочно-диагональную структуру. Изучим вопрос о факторизации соответствующих блоков в общем виде.

Предложение. *Справедливы формулы*

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & b & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}(a+b)-1\\ \frac{1}{2}(a-b)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ b & -a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix}a-b\\ -(a+b)\\ b\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & b\\ 1 & b & a\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u &= x + (y+z)\,,\\ v &= x + a\,(y+z) + (b-a)\,z\,,\\ w &= x + a\,(y+z) + (b-a)\,y\,. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} v + w &= 2\,x + (a+b)\,(y+z)\,,\\ v - w &= (a-b)\,(y-z)\,, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} v &= x + \tfrac{1}{2}\big((a+b)\,(y+z) + (a-b)\,(y-z)\big)\,,\\ w &= x + \tfrac{1}{2}\big((a+b)\,(y+z) - (a-b)\,(y-z)\big)\,. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}(a+b) & \frac{1}{2}(a-b)\\ 1 & \frac{1}{2}(a+b) & -\frac{1}{2}(a-b)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x\\ y+z\\ y-z\end{bmatrix}. \tag{30}$$

Вместе с тем,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}(a+b) & \frac{1}{2}(a-b)\\ 1 & \frac{1}{2}(a+b) & -\frac{1}{2}(a-b)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2}(a+b)-1 & \frac{1}{2}(a-b)\\ 1 & \frac{1}{2}(a+b)-1 & -\frac{1}{2}(a-b)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} =\\ &\qquad = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}(a+b)-1\\ \frac{1}{2}(a-b)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{31}$$

Объединив (30) и (31), придём к равенству

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(a+b)-1 \\ \frac{1}{2}(a-b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

равносильному (28).

Пусть теперь

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u &= (a-b)\,x + b\,(x+y)\,, \\ v &= b\,(x+y) - (a+b)\,y\,. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & 0 & b \\ 0 & -(a+b) & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} a-b \\ -(a+b) \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

что равносильно (29). Предложение доказано. □

Вернёмся к формуле (27). Согласно (28) и (29)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ 1 & \cos 2\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 2\theta) - 1 \\ \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} i\,\sin\theta & -i\,\sin 2\theta \\ -i\,\sin 2\theta & -i\,\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} i\,(\sin 2\theta + \sin\theta) \\ i\,(\sin 2\theta - \sin\theta) \\ -i\,\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

На основании (26) и (27) получаем

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 2\theta) - 1 \\ \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta) \\ i\,(\sin 2\theta + \sin\theta) \\ i\,(\sin 2\theta - \sin\theta) \\ -i\,\sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 + x_4 \\ x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 - x_4 \end{bmatrix}. \qquad (32)$$

Продолжим факторизацию, принимая во внимание, в частности, что во второй матрице из правой части (32) шестой столбец равен сумме четвёртого и пятого, а в четвёртой матрице шестая строка равна сумме четвёртой и пятой. В результате придём к окончательной формуле

$$
\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \operatorname{diag} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos 2\theta) - 1 \\ \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 2\theta) \\ i(\sin 2\theta + \sin\theta) \\ i(\sin 2\theta - \sin\theta) \\ -i \sin 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (33)
$$

Разложение (33) можно представить в виде $X = A_1 A_2 A_3^T \, B \, A_3 A_2 A_1 \, x$, где A_1, A_2 — симметричные матрицы.

Приведём графическую схему алгоритма (33):

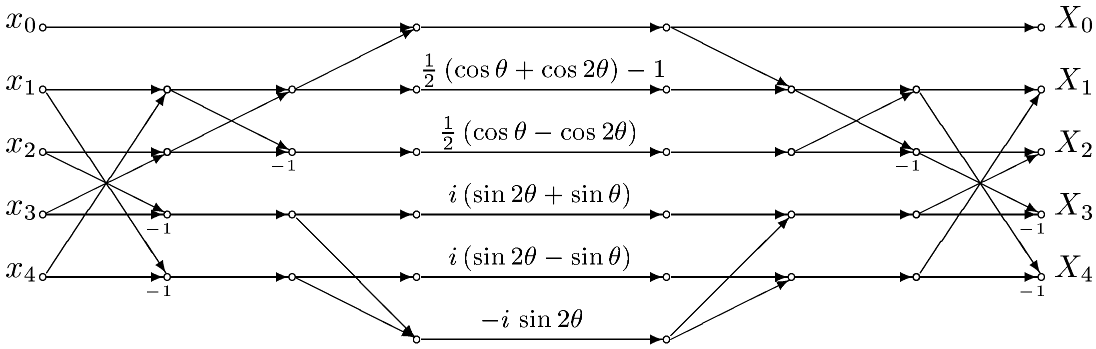

Схема 4

Литература

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. М., 1989. 448 с.

(Richard E. Blahut, Fast Algorithms for Digital Signal Processing. Addison-Wesley, 1985)