УДК 533.6.011.72 : 519.857

ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ПОТЕРЬ ПОЛНОГО ДАВЛЕНИЯ[1]

В.Н.Малоземов, А.В.Омельченко

Задача о торможении сверхзвукового потока до дозвуковых скоростей с минимальными потерями полного давления возникла в сороковых годах прошлого века в связи с проблемой конструирования эффективных сверхзвуковых воздухозаборников [1, 2]. В России данной проблемой занимался Г.И.Петров, в Германии – К.Осватич. В их исследованиях было установлена целесообразность торможения потока в системе из нескольких косых и замыкающего прямого скачков уплотнения. Оказалось, что в такой системе потери полного давления всегда меньше потери полного давления на одиночном прямом скачке. При этом для заданного числа скачков всегда можно подобрать их интенсивности так, чтобы потери полного давления были минимальными. Г.И.Петров в своих работах исследовал также поведение полного давления в системе, состоящей из n косых и замыкающего звукового скачков. Как оказалось, последнее обеспечивает лучшее восстановление полного давления [1].

Интенсивности косых скачков в оптимальных системах в работах Г.И.Петрова определялись численно. Из результатов расчетов следовало, что эти интенсивности должны быть примерно равны между собой. К.Осватич решал задачу об оптимальном восстановлении полного давления аналитически. Он показал, что в точке, подозрительной на экстремум, интенсивности косых скачков должны быть равны между собой. Однако явный вид решения в его работах получен не

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00-15-96106 и 01-01-00231).

был. Такое решение было предъявлено в работе [3], опубликованной в 1995 году. В статье [4] было установлено, что в точке, подозрительной на экстремум, выполняются достаточные условия строгого локального минимума. Однако вопрос о глобальной оптимальности и единственности полученного решения оставался открытым.

В данной работе авторы исходят из того, что задача построения оптимальной для полного давления ударно-волновой системы, состоящей из нескольких косых скачков уплотнения, является дискретной задачей оптимального управления. С использованием метода динамического программирования находится глобально оптимальное и единственное решение этой задачи. Исследуется поведение оптимальной системы при увеличении числа скачков до бесконечности.

1. Рассматривается плоское стационарное сверхзвуковое течение совершенного невязкого газа с последовательно расположенными скачками уплотнения. Как показано, например, в работе [3], при фиксированных числе Маха набегающего потока M_0 и показателе адиабаты $\gamma \in (1, 2]$ отношение полного давления за системой к полному давлению невозмущенного потока выражается через интенсивности $J_k = p_k/p_{k-1}$ скачков уплотнения по формуле

$$I_n^{(p_0)} = \prod_{k=1}^{n} \left\{ J_k \left[\frac{J_k + \varepsilon}{J_k\,(1 + \varepsilon J_k)} \right]^{\lambda} \right\}, \qquad \lambda = \frac{1+\varepsilon}{2\,\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}. \quad (1)$$

Вместо числа Маха в ударно-волновых системах удобнее работать с газодинамической функцией $\mu = 1 + \varepsilon(\mathrm{M}^2 - 1)$. Отношение значений этой функции за скачком и до него связано с интенсивностью k-го скачка J_k соотношением [3]

$$\frac{\mu_k}{\mu_{k-1}} = \varphi(J_k), \qquad \varphi(t) = \frac{t + \varepsilon}{t(1 + \varepsilon t)}. \quad (2)$$

Условие неубывания энтропии накладывает ограничение $J_k \geq 1$ на интенсивность k-го скачка. Кроме того, для существования $(k+1)$-го скачка, $k = 1, \ldots, n-1$, необходимо, чтобы поток за k-м скачком оставался сверхзвуковым $(\mu_k \geq 1)$. Это условие выполняется в случае

$J_k \le A(\mu_{k-1})$, где

$$A(t) = \frac{t-1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{(t-1)^2}{4\varepsilon^2} + t}.$$

За последним скачком поток станет дозвуковым, если интенсивность J_n удовлетворяет неравенствам

$$A(\mu_{n-1}) \le J_n \le B(\mu_{n-1}), \qquad B(t) = \frac{(1+\varepsilon)t - 1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, в общем случае

$$J_k \in U_k(\mu_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Под оптимальной для полного давления ударно-волновой системой понимается система, доставляющая максимальное значение целевой функции (1) при ограничениях (2), (3):

$$I_n^{(p_0)} := \prod_{k=1}^{n} \left\{ J_k \left[\varphi(J_k)\right]^{\lambda} \right\} \;\rightarrow\; \sup, \tag{4}$$

$$\mu_k = \mu_{k-1}\varphi(J_k), \qquad 1 \le J_k \le A(\mu_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, n-1;$$
$$A(\mu_{n-1}) \le J_n \le B(\mu_{n-1}).$$

Видим, что задача построения оптимальной ударно-волновой системы относится к дискретным задачам оптимального управления [5]. Роль управляющих параметров в этой задаче играют интенсивности J_k входящих в систему скачков, а роль фазовых переменных, определяющих состояние системы, – значения μ_k. Последовательно расположенные скачки уплотнения переводят сверхзвуковой поток из начального состояния $\mu_0 \ge 1$ в конечное состояние $\mu_n \le 1$. При этом гиперболичность уравнений, описывающих такого рода течения, определяет эволюционный характер этого перехода, превращая исследуемую экстремальную задачу в дискретную задачу оптимального управления.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *При всех* $\mu_0 \geq 1$ *и* $n \geq 2$ *единственное решение задачи (4) определяется так:*

$$J_1^* = J_2^* = \ldots = J_n^* =: J^*, \qquad J^* = A(\mu_0^{1/n}).$$

Приведем схему доказательства теоремы 1.

2. Функция $\varphi(t)$ с производной

$$\varphi'(t) = -\frac{\varepsilon(1+2\varepsilon t+t^2)}{[t(1+\varepsilon t)]^2}$$

строго убывает на полуоси $(0,+\infty)$ от $+\infty$ до 0, причем $\varphi(1)=1$, $\varphi'(1) = -\lambda^{-1}$. Уравнение $\varphi(t) = \mu^{-1}$ при $\mu > 0$ имеет единственное решение $t = A(\mu)$. Подставив его в уравнение, получим равенство

$$\varphi(A(\mu)) = \mu^{-1}, \qquad \mu > 0. \tag{5}$$

Из соотношений $\mu_k = \mu_{k-1}\varphi(J_k)$, $1 \leq J_k \leq A(\mu_{k-1})$ следует, что $\mu_{k-1} \geq \mu_k \geq 1$, так что $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1} \geq 1$.

Функция $h(t) = t[\varphi(t)]^\lambda$ с производной

$$h'(t) = -\frac{(1-\varepsilon)(t-1)^2}{2(t+\varepsilon)(1+\varepsilon t)}[\varphi(t)]^\lambda$$

также строго убывает на $(0,+\infty)$ от $+\infty$ до 0. Применительно к задаче (4) это означает, в частности, что наилучшим значением для J_n будет $J_n = A(\mu_{n-1})$. При таком J_n, согласно (5), $\mu_{n-1}\varphi(J_n) = 1$ и $\mu_0 \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi(J_k) = 1$. Целевая функция задачи (4) принимает вид $\mu_0^{-\lambda} A(\mu_{n-1}) \prod\limits_{k=1}^{n-1} J_k$. Отбросив положительный сомножитель $\mu_0^{-\lambda}$, придем к экстремальной задаче

$$A(\mu_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} J_k \to \sup, \tag{6}$$

$$\mu_k = \mu_{k-1}\varphi(J_k), \qquad 1 \leq J_k \leq A(\mu_{k-1}), \qquad k = 1,\ldots,n-1.$$

Особенность ограничений задачи (6) заключается в том, что если $J_k = A(\mu_{k-1})$ при некотором $k \in \{1,\ldots,n-2\}$, то необходимо $J_{k+1} = \ldots = J_{n-1} = A(\mu_{n-1}) = 1$.

3. Запишем задачу (6) при $n = 2$:

$$Q_2(J_1) := A(\mu_1)J_1 \ \to \sup_{J_1 \in [1, A(\mu_0)]}, \qquad \mu_1 = \mu_0 \varphi(J_1). \tag{7}$$

Продифференцируем целевую функцию:

$$Q_2'(J_1) = A + J_1 A'(\mu_1)\mu_1'(J_1). \tag{8}$$

Согласно (5)

$$\mu_1 = \frac{A(1+\varepsilon A)}{A+\varepsilon}. \tag{9}$$

После дифференцирования этого тождества получаем

$$A'(\mu_1) = \frac{(A+\varepsilon)^2}{\varepsilon(1+2\varepsilon A + A^2)}. \tag{10}$$

Далее согласно определению μ_1 и (9)

$$\mu_1'(J_1) = \mu_1 \frac{\varphi'(J_1)}{\varphi(J_1)} = -\varepsilon\, \frac{A(1+\varepsilon A)}{A+\varepsilon} \cdot \frac{1+2\varepsilon J_1 + J_1^2}{J_1(J_1+\varepsilon)(1+\varepsilon J_1)}. \tag{11}$$

Подставив (10) и (11) в (8), придем к формуле

$$Q_2'(J_1) = A\, \frac{1+2\varepsilon J_1 + J_1^2}{(J_1+\varepsilon)(1+\varepsilon J_1)} \left[\frac{(J_1+\varepsilon)(1+\varepsilon J_1)}{1+2\varepsilon J_1 + J_1^2} - \frac{(A+\varepsilon)(1+\varepsilon A)}{1+2\varepsilon A + A^2} \right]. \tag{12}$$

Введем обозначение

$$\chi(t) = \frac{(t+\varepsilon)(1+\varepsilon t)}{1+2\varepsilon t + t^2}.$$

Тогда (12) можно переписать так:

$$Q_2'(J_1) = \frac{A}{\chi(J_1)} \left[\chi(J_1) - \chi(A(\mu_1)) \right].$$

Функция $\chi(t)$ с производной

$$\chi'(t) = \frac{(1-\varepsilon^2)(1-t^2)}{(1+2\varepsilon t + t^2)^2},$$

отрицательной при $t > 1$, строго убывает на полуоси $[1, +\infty)$. Когда J_1 изменяется от 1 до $A(\mu_0)$, величина μ_1 изменяется от μ_0 до 1, а величина $A(\mu_1)$ – от $A(\mu_0)$ до $A(1) = 1$. Значит, разность $\chi(J_1) - \chi(A(\mu_1))$ обращается в ноль на $[1, A(\mu_0)]$ в единственной точке J_1^*, причем при $J_1 < J_1^*$ эта разность положительна, а при $J_1 > J_1^*$ – отрицательна. Отсюда следует, что J_1^* – единственное решение задачи (7).

Для нахождения J_1^* нужно решить уравнение $A(\mu_1) = J_1$. Это делается с помощью эквивалентных переходов

$$A(\mu_1) = J_1 \;\Leftrightarrow\; \mu_1^{-1} = \varphi(J_1) \;\Leftrightarrow\; \varphi(J_1) = \mu_0^{-1/2} \;\Leftrightarrow\; J_1 = A(\mu_0^{1/2}).$$

Таким образом, $J_1^* = A(\mu_0^{1/2})$.

4. Совершим индукционный переход от $n-1$ к n, $n \geq 3$. В задаче (6) зафиксируем $J_1 \in [1, A(\mu_0)]$ и $\mu_1 = \mu_0 \varphi(J_1)$. В оставшейся $(n-1)$-скачковой системе по индукционному предположению оптимальными параметрами будут $J_2^* = \ldots = J_{n-1}^* =: J^*$, $J^* = A(\mu_1^{1/(n-1)})$. Задача (6) принимает вид

$$Q_n(J_1) := J_1 [J^*(\mu_1)]^{n-1} \;\to \sup_{J_1 \in [1, A(\mu_0)]} . \tag{13}$$

Продифференцируем целевую функцию:

$$Q_n'(J_1) = (J^*)^{n-1} + (n-1)\, J_1\, (J^*)^{n-2} \frac{dJ^*}{d\mu_1} \frac{d\mu_1}{dJ_1}. \tag{14}$$

Поскольку $\varphi(J^*) = \mu_1^{-1/(n-1)}$, то $\mu_1 = [\varphi(J^*)]^{-n+1}$. После дифференцирования последнего тождества получим

$$\frac{dJ^*}{d\mu_1} = -\frac{[\varphi(J^*)]^n}{(n-1)\varphi'(J^*)}. \tag{15}$$

Вместе с тем,

$$\frac{d\mu_1}{dJ_1} = -\varepsilon\, [\varphi(J^*)]^{-n+1} [J_1\, \chi(J_1)]^{-1}. \tag{16}$$

Подставив (15) и (16) в (14), придем к формуле

$$Q_n'(J_1) = \frac{(J^*)^{n-1}}{\chi(J_1)} \left[\chi(J_1) - \chi(J^*(\mu_1))\right].$$

Теперь так же, как в случае $n = 2$, показывается, что функция $Q_n(J_1)$ имеет на $[1, A(\mu_0)]$ единственную точку максимума J_1^*, которая является единственным на $[1, A(\mu_0)]$ корнем уравнения $J^*(\mu_1) = J_1$. Запишем цепочку эквивалентных переходов

$$J^*(\mu_1) = J_1 \;\Leftrightarrow\; \varphi(J_1) = \mu_1^{-1/(n-1)} \;\Leftrightarrow\; \varphi(J_1) = \mu_0^{-1/n} \;\Leftrightarrow\; J_1 = A(\mu_0^{1/n}).$$

Получаем $J_1^* = A(\mu_0^{1/n})$.

5. Очевидно, что $J^* \to 1$ при $n \to \infty$. Справедлив более точный результат.

Л е м м а. *При* $\mu_0 > 1$ *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} n(J^* - 1) = \lambda \ln \mu_0. \tag{17}$$

Для доказательства перепишем равенство $\varphi(J^*) = \mu_0^{-1/n}$ в виде

$$\mu_0^{-1} = \left\{[1 + (\varphi(J^*) - 1)]^{(\varphi(J^*)-1)^{-1}}\right\}^{[(\varphi(J^*)-\varphi(1))/(J^*-1)](J^*-1)n}. \tag{18}$$

Прологарифмируем (18) и перейдем к пределу при $n \to \infty$. Учитывая, что $\varphi'(1) = -\lambda^{-1}$, получаем (17).

Т е о р е м а 2. *При* $\mu_0 > 1$

$$\lim_{n\to\infty} (J^*)^n = \mu_0^{\lambda}. \tag{19}$$

Доказательство следует из леммы и равенства

$$(J^*)^n = \left\{(1 + (J^* - 1))^{(J^*-1)^{-1}}\right\}^{(J^*-1)n}.$$

С физической точки зрения формула (19) означает, что отношение статического давления за последним скачком в оптимальной системе к давлению в невозмущенном потоке стремится к конечной величине μ_0^{λ}, представляющей собой интенсивность простой волны сжатия, тормозящей поток до звуковой скорости. Такая система является наилучшей с точки зрения минимизации потерь полного давления. Соотношение (19), таким образом, показывает, что с увеличением числа скачков в оптимальной системе до бесконечности происходит качественный переход – система из n косых скачков превращается в оптимальную изэнтропическую волну.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров Г.И.* Избранные труды. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования. М.: Наука, 1992.
2. *Герман Р.* Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960.
3. *Омельченко А.В., Усков В.Н.* //Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. №6. С.118–126.
4. *Малоземов В.Н., Омельченко А.В., Усков В.Н.* //Прикладная математика и механика. 1998. Т.62. Вып.6. С.1015–1021.
5. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.