УДК 519.857: 533.6.011.72

К ПОСТРОЕНИЮ ОПТИМАЛЬНЫХ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ СИСТЕМ[1]

В.Н.Малоземов, А.В.Омельченко

В работе показывается, что задача построения оптимальных ударно-волновых систем в сверхзвуковом потоке газа относится к дискретным задачам оптимального управления. Детально исследуется система, максимизирующая статическое давление. Методом динамического программирования найдено глобально оптимальное решение соответствующей экстремальной задачи и установлена его единственность. Изучены предельные свойства экстремального значения целевой функции как функции параметров задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача построения оптимальных ударно-волновых систем впервые возникла в сороковых годах прошлого века в связи с проблемой торможения сверхзвукового потока до дозвуковых скоростей с минимальными потерями полного давления [1, 2]. В России данной проблемой занимался Г.И.Петров, в Германии – К.Осватич. В их исследованиях было установлено, что потери полного давления в системе из нескольких косых и замыкающего прямого скачков уплотнения всегда меньше потери полного давления на одиночном прямом скачке. При этом для заданного числа скачков всегда можно подобрать их интенсивности так, чтобы потери полного давления были минимальными. Г.И.Петров в своих работах исследовал также поведение статического давления в системе из нескольких косых и замыкающего прямого скачков уплотнения. Он показал, что при некоторых числах Маха набегающего потока справедлив аналогичный результат – такие системы оказываются эффективнее одного прямого скачка.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00-15-96106 и 01-01-00231).

Интенсивности косых скачков в оптимальных системах в работах Г.И.Петрова определялись численно. Из результатов расчетов следовало, что эти интенсивности должны быть примерно равны между собой. К.Осватич решал задачу об оптимальном восстановлении полного давления аналитически. Он показал, что в точке, подозрительной на экстремум, интенсивности косых скачков должны быть равны между собой. Однако явный вид решения в его работах получен не был. Такое решение было предъявлено в работе [3], опубликованной в 1995 году. В ней наряду с системами, оптимизирующими статическое или полное давление, были исследованы системы, максимизирующие плотность или скоростной напор. В работах [4, 5] список газодинамических переменных, для которых существуют оптимальные ударно-волновые системы, был расширен, а в [6] была исследована геометрия таких систем.

В работе [7] было отмечено, что рассматриваемые задачи относятся к задачам нелинейного программирования с нелинейными ограничениями-неравенствами. Для системы, оптимизирующей полное давление, были проверены достаточные условия локальной оптимальности в точке, подозрительной на экстремум. Однако вопрос о глобальной оптимальности и единственности полученного решения оставался открытым.

В данной работе авторы исходят из того, что задачи построения оптимальных ударно-волновых систем являются дискретными задачами оптимального управления. На примере системы, максимизирующей статическое давление, доказывается глобальная оптимальность и единственность полученного решения. При этом используется метод динамического программирования. Исследуются предельные свойства экстремального значения целевой функции как функции параметров задачи.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматривается плоское стационарное сверхзвуковое течение совершенного невязкого газа с последовательно расположенными скачками уплотнения. Пусть f_k – значение газодинамической переменной f за k-м скачком. Используя известные соотношения на скачках, можно разность логарифмов $\ln f_k - \ln f_{k-1}$ выразить через число Маха M_{k-1} потока перед скачком и интенсивность J_k скачка, равную отношению статических давлений за скачком и до скачка [3]. Следовательно, разность логарифмов $\mathrm{K}^{(f)}$ газодинамической переменной f за ударно-волновой системой и до нее выражается через интенсивности J_k и числа Маха M_{k-1} по формуле вида

$$\mathrm{K}^{(f)} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{K}_k^{(f)}(J_k, \mathrm{M}_{k-1}). \tag{2.1}$$

Вместо числа Маха в ударно-волновых системах удобнее работать с газодинамической функцией

$$\mu = 1 + \varepsilon(\mathrm{M}^2 - 1), \qquad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

где γ – показатель адиабаты. Отношение значений этой функции за скачком и до него связано с интенсивностью k-го скачка J_k соотношением [3]

$$\frac{\mu_k}{\mu_{k-1}} = \varphi(J_k), \qquad \varphi(t) = \frac{t + \varepsilon}{t(1 + \varepsilon t)}. \tag{2.2}$$

Условие неубывания энтропии накладывает ограничение $J_k \geq 1$ на интенсивность k-го скачка. Кроме того, для существования $(k+1)$-го скачка, $k = 1, \ldots, n-1$, необходимо, чтобы поток за k-м скачком оставался сверхзвуковым $(\mu_k \geq 1)$. Это условие выполняется в случае $J_k \leq A(\mu_{k-1})$, где

$$A(t) = \frac{t-1}{2\varepsilon} + \sqrt{\frac{(t-1)^2}{4\varepsilon^2} + t}.$$

За последним скачком в системе поток может быть и дозвуковым, что позволяет при $k = n$ несколько расширить область изменения интенсивности:

$$J_n \in [1, B(\mu_{n-1})], \qquad B(t) = \frac{(1+\varepsilon)t - 1}{\varepsilon}.$$

Таким образом, в общем случае

$$J_k \in U_k(\mu_{k-1}), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Под оптимальной для газодинамической переменной f ударно-волновой системой понимается система, доставляющая экстремальное значение целевой функции (2.1) при ограничениях (2.2), (2.3). Видим, что задача построения оптимальной ударно-волновой системы относится к дискретным задачам оптимального управления ([8]–[10]). Роль управляющих параметров в этой задаче играют интенсивности J_k входящих в систему скачков, а роль фазовых переменных, определяющих состояние системы, – значения μ_k. Последовательно расположенные скачки уплотнения переводят сверхзвуковой поток из начального состояния μ_0 в конечное состояние μ_n. При этом гиперболичность уравнений, описывающих такого рода течения, определяет эволюционный характер этого перехода, превращая исследуемую экстремальную задачу в дискретную задачу оптимального управления.

В данной статье подробно рассматривается задача построения системы, состоящей из n косых скачков уплотнения и доставляющей максимальное значение статическому давлению за последним скачком. Зафиксируем параметры $n \geq 2$, $\mu_0 \geq 1$, $\varepsilon \in (0, 1/3]$ и сформулируем экстремальную задачу:

$$\textit{максимизировать} \qquad \sum_{k=1}^{n} \ln J_k \tag{2.4}$$

при ограничениях

$$\begin{array}{ll}
1 \leq J_1 \leq A(\mu_0), & \mu_1 = \mu_0 \varphi(J_1), \\
1 \leq J_2 \leq A(\mu_1), & \mu_2 = \mu_1 \varphi(J_2), \\
\multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
1 \leq J_{n-1} \leq A(\mu_{n-2}), & \mu_{n-1} = \mu_{n-2} \varphi(J_{n-1}), \\
1 \leq J_n \leq B(\mu_{n-1}). &
\end{array}$$

Введем обозначение $\mu_* = 1/(1-\varepsilon)$. В работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *При $\mu_0 \in [1, \mu_*]$ единственным решением задачи (2.4) является набор $J_1^* = J_2^* = \ldots = J_{n-1}^* = 1$, $J_n^* = B(\mu_0)$. При $\mu_0 \geq \mu_*$ единственное решение задачи (2.4) определяется так:*

$$J_1^* = J_2^* = \ldots = J_{n-1}^* =: J^*, \quad J_n^* = B(\mu_{n-1}^*), \quad \mu_{n-1}^* = \mu_0 [\varphi(J^*)]^{n-1}.$$

Здесь J^* *– единственный на* $[1, A(\mu_0)]$ *корень уравнения*

$$\left(\frac{J}{J+\varepsilon}\right)^{n-2}(1+\varepsilon J)^n = \mu_0(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2. \tag{2.5}$$

Экстремальное значение целевой функции задачи (2.4) обозначим через L_n и будем рассматривать его как функцию параметра μ_0.

Теорема 2. *Функция* $L_n(\mu_0)$ *непрерывно дифференцируема на полуоси* $[1,+\infty)$. *При этом в критической точке* $\mu_0 = \mu_*$ *справедливы равенства*

$$L_n(\mu_*) = \ln\frac{2}{1-\varepsilon}, \qquad L_n'(\mu_*) = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}.$$

Теорема 3. *При фиксированном* $\mu_0 > \mu_*$ *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\mu_0) = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\ln[(1-\varepsilon)\mu_0] + \ln\frac{2}{1-\varepsilon}.$$

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

3.1. Лемма 1. *На полуоси* $(0,+\infty)$ *функция* $\varphi(t)$ *строго убывает от* $+\infty$ *до* 0 *и строго выпукла. При этом* $\varphi(1) = 1$ *и*

$$\varphi(A(\mu)) = \mu^{-1} \quad \textit{при} \quad \mu > 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Поскольку

$$\varphi'(t) = -\frac{\varepsilon(1+2\varepsilon t+t^2)}{[t(1+\varepsilon t)]^2} < 0,$$

$$\varphi''(t) = \frac{2\varepsilon(1+3\varepsilon t+3\varepsilon^2 t^2+\varepsilon t^3)}{[t(1+\varepsilon t)]^3} > 0,$$

то функция $\varphi(t)$ строго убывает и строго выпукла на $(0,+\infty)$. Кроме того,

$$\lim_{t\to+0}\varphi(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = 0.$$

Очевидно, что $\varphi(1) = 1$. Уравнение $\varphi(t) = \mu^{-1}$ при фиксированном $\mu > 0$ имеет единственный положительный корень t_*. Проверим, что $t_* = A(\mu)$. Для этого перепишем уравнение $\varphi(t) = \mu^{-1}$ в виде

$$\varepsilon t^2 - (\mu - 1)t - \varepsilon\mu = 0.$$

Единственным положительным корнем последнего уравнения является $t_* = A(\mu)$. Лемма доказана.

Введем функцию

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)(1+\varepsilon t)^2}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2} = \frac{(t+\varepsilon)(1+\varepsilon t)}{t(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2}\left[1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\left(t + \frac{1}{t}\right)\right].$$

Лемма 2. *На полуоси $[1, +\infty)$ функция $\psi(t)$ строго возрастает и строго выпукла. При этом $\psi(1) = \mu_*$, $\psi'(1) = 0$.*

Доказательство очевидно.

3.2. Уравнение (2.5) на отрезке $[1, A(\mu_0)]$ равносильно следующему уравнению

$$\psi(J) = \mu_0[\varphi(J)]^{n-1}. \tag{3.2}$$

Лемма 3. *При $\mu_0 \geq \mu_*$ уравнение (3.2) имеет на $[1, A(\mu_0)]$ единственное решение J^*. При этом $J^* = 1$, если $\mu_0 = \mu_*$. Если же $\mu_0 > \mu_*$, то $J^* > 1$. Более того, $J^* \to 1$, монотонно убывая, в двух случаях: когда μ_0 фиксировано и $n \to \infty$ и когда n фиксировано и $\mu_0 \to \mu_* + 0$.*

Доказательство. По лемме 2 функция $\psi(J)$ на $[1, A(\mu_0)]$ строго возрастает от значения $\psi(1) = \mu_*$. Функция из правой части уравнения (3.2) по лемме 1 строго убывает на том же отрезке от значения μ_0 до μ_0^{-n+2}. Поскольку $\mu_0^{-n+2} \leq 1 < \mu_*$, то при $\mu_0 \geq \mu_*$ уравнение (3.2) имеет на $[1, A(\mu_0)]$ единственное решение J^* (см. фиг.1). Очевидно, что $J^* = 1$ при $\mu_0 = \mu_*$. Столь же очевидно заключение леммы и при $\mu_0 > \mu_*$. Лемма доказана.

3.3. Следующий технический результат в дальнейшем будет играть важную роль.

Лемма 4. *При $t \geq 1$, $J \geq 1$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{J} + \frac{(1+\varepsilon)\,t}{\varepsilon B(t)} \cdot \frac{\varphi'(J)}{\varphi(J)} = \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2[t - \psi(J)]}{\varepsilon B(t)(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{J}+\frac{(1+\varepsilon)\,t}{\varepsilon B(t)}\cdot\frac{\varphi'(J)}{\varphi(J)}=\frac{1}{J}\left[1-\frac{(1+\varepsilon)\,t}{\varepsilon B(t)}\cdot\frac{\varepsilon(1+2\varepsilon J+J^2)}{(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)}\right]=$$

$$=\frac{[(1+\varepsilon)\,t-1](J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)-\varepsilon(1+\varepsilon)\,t\,(1+2\varepsilon J+J^2)}{\varepsilon B(t)J(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)}=$$

$$=\frac{(1+\varepsilon)\,t\,(1-\varepsilon^2)J-(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)}{\varepsilon B(t)J(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)}=\frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2[t-\psi(J)]}{\varepsilon B(t)(J+\varepsilon)(1+\varepsilon J)}.$$

Лемма доказана.

3.4. Обратимся к задаче (2.4). Отметим, что функции $A(t)$ и $B(t)$, участвующие в формировании ограничений, строго возрастают на полуоси $[1,+\infty)$ и $A(1)=B(1)=1$. Из соотношений

$$1\le J_k\le A(\mu_{k-1}),\qquad \mu_k=\mu_{k-1}\varphi(J_k)$$

и леммы 1 следует, что $\mu_{k-1}\ge\mu_k\ge 1$. Значит,

$$\mu_0\ge\mu_1\ge\ldots\mu_{n-1}\ge 1. \tag{3.4}$$

Особенность ограничений задачи (2.4) заключается в том, что если $J_k=A(\mu_{k-1})$ при некотором $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, то необходимо $J_{k+1}=\ldots=J_n=1$.

Лемма 5. *Решение задачи (2.4) существует.*

Доказательство. Поскольку

$$\mu_k=\mu_0\prod_{s=1}^{k}\varphi(J_s),$$

то переменные $\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$ можно, вообще говоря, исключить. Тогда станет очевидным, что множество планов задачи (2.4) (векторов $(J_1,\ldots,J_n)$, удовлетворяющих ограничениям этой задачи) замкнуто. В силу (3.4) данное множество является и ограниченным. Ограниченность и замкнутость множества планов вместе с непрерывностью целевой функции гарантируют существование решения у задачи (2.4). Лемма доказана.

Отметим, что при $\mu_0 = 1$ множество планов состоит из единственного вектора $(1, \dots, 1)$. Он, естественно, и будет решением задачи (2.4).

3.5. Проверим, что при $\mu_0 \geq \mu_*$ вектор $(J^*, \dots, J^*, B(\mu^*_{n-1}))$, указанный в теореме 1 как решение задачи (2.4), удовлетворяет ограничениям этой задачи. В силу (3.4) достаточно показать, что $J^* \leq A(\mu^*_{n-2})$, где $\mu^*_{n-2} = \mu_0[\varphi(J^*)]^{n-2}$. Перепишем последнее неравенство в равносильном виде $\varphi(J^*) \geq \varphi(A(\mu^*_{n-2}))$. Согласно (3.1), $\varphi(A(\mu^*_{n-2})) = (\mu^*_{n-2})^{-1}$. Учитывая еще (3.2), приходим к цепочке равносильных переходов

$$\varphi(J^*) \geq (\mu^*_{n-2})^{-1} \iff \mu_0[\varphi(J^*)]^{n-1} \geq 1 \iff \psi(J^*) \geq 1.$$

Таким образом, все свелось к проверке неравенства $\psi(J^*) \geq 1$. Но это сделать легко: $\psi(J^*) \geq \psi(1) = \mu_* \geq 1$.

3.6. В задаче (2.4) ничто не мешает в качестве J_n взять максимально возможное значение $B(\mu_{n-1})$. Тогда задача (2.4) примет стандартный вид дискретной задачи оптимального управления:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln J_k + \ln B(\mu_{n-1}) \to \sup, \tag{3.5}$$

$$\mu_k = \mu_{k-1}\varphi(J_k), \quad 1 \leq J_k \leq A(\mu_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Именно задачу (3.5) мы и будем в дальнейшем исследовать.

4. ОПТИМАЛЬНЫЕ ДВУХСКАЧКОВЫЕ СИСТЕМЫ

4.1. Запишем задачу (3.5) при $n = 2$:

$$Q_2(J_1) := \ln J_1 + \ln B(\mu_1) \ \to \sup_{J_1 \in [1, A(\mu_0)]}. \tag{4.1}$$

Здесь $\mu_1 = \mu_0 \varphi(J_1)$.

Лемма 6. *При $\mu_0 \in [1, \mu_*]$ единственным решением задачи (4.1) является $J_1^* = 1$. При этом*

$$Q_2(J_1^*) = \ln[(1+\varepsilon)\mu_0 - 1] - \ln\varepsilon. \tag{4.2}$$

При $\mu_0 \geq \mu_*$ единственное решение задачи (4.1) определяется так:

$$J_1^* = \varepsilon^{-1}[(1+\varepsilon)\sqrt{(1-\varepsilon)\mu_0} - 1]. \tag{4.3}$$

При этом

$$Q_2(J_1^*) = \ln(1 + 2\varepsilon J_1^* + (J_1^*)^2) - \ln(1-\varepsilon^2). \tag{4.4}$$

Доказательство. Имеем

$$Q_2'(J_1) = \frac{1}{J_1} + \frac{(1+\varepsilon)\mu_0}{\varepsilon B(\mu_1)}\varphi'(J_1) = \frac{1}{J_1} + \frac{(1+\varepsilon)\mu_1}{\varepsilon B(\mu_1)} \cdot \frac{\varphi'(J_1)}{\varphi(J_1)}.$$

Согласно (3.3),

$$Q_2'(J_1) = \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2[\mu_1 - \psi(J_1)]}{\varepsilon B(\mu_1)(J_1+\varepsilon)(1+\varepsilon J_1)}.$$

Функция $\mu_1(J_1) = \mu_0\varphi(J_1)$ на отрезке $[1, A(\mu_0)]$ строго убывает от значения μ_0 до 1, в то время как $\psi(J_1)$ строго возрастает от значения μ_*. При $\mu_0 \in [1, \mu_*]$ разность $\mu_1 - \psi(J_1)$ отрицательна на $(1, A(\mu_0)]$ (см. фиг.2). Это гарантирует, что максимум $Q_2(J_1)$ на $[1, A(\mu_0)]$ достигается при $J_1^* = 1$ и равен $\ln B(\mu_0)$. Последнее соответствует (4.2).

Пусть теперь $\mu_0 \geq \mu_*$. Тогда разность $\mu_1 - \psi(J_1)$ на $[1, A(\mu_0)]$ обращается в ноль в единственной точке J_1^*, причем слева от J_1^* эта разность положительна, а справа от J_1^* – отрицательна (см. фиг.3). Значит, J_1^* является единственной точкой максимума функции $Q_2(J_1)$ на $[1, A(\mu_0)]$.

Найдем точку J_1^*. Уравнение $\mu_1 = \psi(J_1)$ равносильно уравнению (2.5) при $n = 2$. Его единственный положительный корень определяется формулой (4.3).

Проверим равенство (4.4). Имеем

$$\mu_1^* = \mu_0\varphi(J_1^*) = \psi(J_1^*) = \frac{1}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2}\left[1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\left(J_1^* + \frac{1}{J_1^*}\right)\right],$$

$$B(\mu_1^*) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon\left(J_1^* + \frac{1}{J_1^*}\right)\right) - 1\right] = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(2\varepsilon + J_1^* + \frac{1}{J_1^*}\right),$$

$$Q_2(J_1^*) = \ln J_1^* + \ln B(\mu_1^*) = \ln(1 + 2\varepsilon J_1^* + (J_1^*)^2) - \ln(1-\varepsilon^2).$$

Лемма доказана.

Лемма 6 содержит теорему 1 при $n = 2$.

4.2. Точка $\mu_0 = \mu_*$ принадлежит как отрезку $[1, \mu_*]$, так и полуоси $[\mu_*, +\infty)$. В обоих случаях при $\mu_0 = \mu_*$ справедливо равенство $Q_2(J_1^*) = \ln(2/(1-\varepsilon))$. Отсюда, в частности, следует, что экстремальное значение целевой функции $Q_2(J_1^*)$ как функция параметра μ_0 непрерывна на $[1, +\infty)$.

Далее,

$$\lim_{\mu_0 \to \mu_* - 0} \frac{dQ_2(J_1^*)}{d\mu_0} = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}. \tag{4.5}$$

При $\mu_0 > \mu_*$ имеем

$$\frac{dJ_1^*}{d\mu_0} = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon\sqrt{(1-\varepsilon)\mu_0}}.$$

Учитывая это, находим

$$\lim_{\mu_0 \to \mu_* + 0} \frac{dQ_2(J_1^*)}{d\mu_0} = \lim_{\mu_0 \to \mu_* + 0} \frac{2(J_1^* + \varepsilon)}{1 + 2\varepsilon J_1^* + (J_1^*)^2} \cdot \frac{dJ_1^*}{d\mu_0} = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}. \tag{4.6}$$

На основании (4.5), (4.6) заключаем, что функция $Q_2(J_1^*)$ непрерывно дифференцируема по μ_0 на $[1, +\infty)$, причем в критической точке $\mu_0 = \mu_*$ выполняется равенство

$$\left.\frac{dQ_2(J_1^*)}{d\mu_0}\right|_{\mu_0 = \mu_*} = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}.$$

Тем самым, доказана теорема 2 при $n = 2$.

5. ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРЕХСКАЧКОВЫЕ СИСТЕМЫ

5.1. Рассмотрим задачу (3.5) при $n = 3$:

$$\ln J_1 + \ln J_2 + \ln B(\mu_2) \ \to \ \sup, \tag{5.1}$$

$$\mu_1 = \mu_0 \varphi(J_1), \quad 1 \le J_1 \le A(\mu_0),$$

$$\mu_2 = \mu_1 \varphi(J_2), \quad 1 \le J_2 \le A(\mu_1).$$

Согласно лемме 5 решение задачи (5.1) существует.

Пусть вначале $\mu_0 \in [1, \mu_*]$. Зафиксируем $J_1 \in [1, A(\mu_0)]$. Имеем $\mu_1 \in [1, \mu_*]$. В оставшейся двухскачковой системе в силу леммы 6 оптимальным параметром будет $J_2^* = 1$. При этом $\mu_2^* := \mu_1\varphi(J_2^*) = \mu_1$. Выбор J_1 подчиняется условию

$$\ln J_1 + \ln B(\mu_1) \ \to \sup_{J_1 \in [1, A(\mu_0)]}.$$

Поскольку $\mu_0 \in [1, \mu_*]$, то снова по лемме 6 получаем $J_1^* = 1$. Таким образом, единственным решением задачи (5.1) при $\mu_0 \in [1, \mu_*]$ является $J_1^* = J_2^* = 1$.

5.2. Обратимся к основному случаю $\mu_0 \geq \mu_*$. Тогда оптимальное значение $J_1 = J_1^*$ должно быть таким, что $\mu_1^* := \mu_0\varphi(J_1^*) \geq \mu_*$. Действительно, при $\mu_1^* \in [1, \mu_*)$ по предыдущему необходимо $J_1^* = 1$ и $\mu_1^* = \mu_0$, так что $\mu_0 \in [1, \mu_*)$. Но это противоречит условию $\mu_0 \geq \mu_*$. Приходим к выводу, что достаточно рассматривать $J_1 \in [1, T_0]$, где T_0 определяется из уравнения

$$\mu_0\varphi(T_0) = \mu_*. \tag{5.2}$$

Для T_0 можно записать явную формулу

$$T_0 = \frac{\mu_0 - \mu_* + \sqrt{(\mu_0 - \mu_*)^2 + 4\varepsilon^2\mu_0\mu_*}}{2\varepsilon\mu_*}.$$

При фиксированном $J_1 \in [1, T_0]$ получаем двухскачковую систему с $\mu_1 \geq \mu_*$. На основании леммы 6 задача (5.1) принимает вид

$$Q_3(J_1) := \ln J_1 + \ln J_2^*(J_1) + \ln B(\mu_2^*) \ \to \ \sup, \tag{5.3}$$

$$\mu_1 = \mu_0\varphi(J_1), \qquad 1 \leq J_1 \leq T_0,$$
$$J_2^* = J_2^*(J_1) = \varepsilon^{-1}[(1+\varepsilon)\sqrt{(1-\varepsilon)\mu_1} - 1],$$
$$\mu_2^* = \mu_0\varphi(J_1)\varphi(J_2^*).$$

Напомним, что для J_2^* при всех $J_1 \in [1, T_0]$ выполняется соотношение $\psi(J_2^*) = \mu_2^*$.

5.3. Лемма 7. *Функция $J_2^*(J_1)$ строго убывает на отрезке $[1, T_0]$ до значения 1. Уравнение $J_2^*(J_1) = J_1$ имеет на $[1, T_0]$ единственное решение J_1^*.*

Доказательство. Строгое убывание функции J_2^* следует из строгого убывания функции φ. При этом согласно (5.2)

$$J_2^*(T_0) = \varepsilon^{-1}[(1+\varepsilon)\sqrt{(1-\varepsilon)\mu_0\varphi(T_0)} - 1] = 1.$$

Наличие единственного на $[1, T_0]$ корня у уравнения $J_2^*(J_1) = J_1$ очевидно (см. фиг.4). Лемма доказана.

Лемма 8. *Функция $\mu_2^* = \mu_2^*(J_1)$ строго убывает на $[1, T_0]$ до значения μ_*.*

Доказательство следует из равенства $\mu_2^* = \psi(J_2^*)$ и лемм 2, 7.

5.4. Обратимся к задаче (5.3). По существу, в ней идет речь о максимизации функции $Q_3(J_1)$ на отрезке $[1, T_0]$.

Лемма 9. *При $\mu_0 \geq \mu_*$ задача (5.3) имеет единственное решение J_1^*, которое является корнем уравнения (2.5) при $n = 3$. При этом справедливо равенство $J_2^*(J_1^*) = J_1^*$.*

Доказательство. Продифференцируем целевую функцию:

$$Q_3'(J_1) = \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2^*}\frac{dJ_2^*}{dJ_1} + \frac{1}{B(\mu_2^*)}\frac{dB(\mu_2^*)}{dJ_1}.$$

Поскольку $B(\mu_2^*) = \varepsilon^{-1}[(1+\varepsilon)\mu_0\varphi(J_1)\varphi(J_2^*) - 1]$, то

$$\frac{dB(\mu_2^*)}{dJ_1} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\mu_0\left[\varphi'(J_1)\varphi(J_2^*) + \varphi(J_1)\varphi'(J_2^*)\frac{dJ_2^*}{dJ_1}\right] =$$

$$= \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\,\mu_2^*\left[\frac{\varphi'(J_1)}{\varphi(J_1)} + \frac{\varphi'(J_2^*)}{\varphi(J_2^*)}\cdot\frac{dJ_2^*}{dJ_1}\right].$$

Значит,

$$Q_3'(J_1) = \frac{1}{J_1} + \frac{(1+\varepsilon)\mu_2^*}{\varepsilon B(\mu_2^*)}\cdot\frac{\varphi'(J_1)}{\varphi(J_1)} + \left[\frac{1}{J_2^*} + \frac{(1+\varepsilon)\mu_2^*}{\varepsilon B(\mu_2^*)}\cdot\frac{\varphi'(J_2^*)}{\varphi(J_2^*)}\right]\frac{dJ_2^*}{dJ_1}.$$

Учитывая (3.3), получаем

$$Q_3'(J_1) = \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon B(\mu_2^*)}\left[\frac{\mu_2^* - \psi(J_1)}{(J_1+\varepsilon)(1+\varepsilon J_1)} + \frac{\mu_2^* - \psi(J_2^*)}{(J_2^*+\varepsilon)(1+\varepsilon J_2^*)}\cdot\frac{dJ_2^*}{dJ_1}\right].$$

Но $\mu_2^* = \psi(J_2^*)$, так что

$$Q_3'(J_1) = \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2[\mu_2^* - \psi(J_1)]}{\varepsilon B(\mu_2^*)(J_1+\varepsilon)(1+\varepsilon J_1)}.$$

Производная $Q_3'(J_1)$ обращается в ноль при $J_1 = J_1^*$, где J_1^* – единственный на $[1,T_0]$ корень уравнения $\mu_2^* = \psi(J_1)$. Эта производная положительна при $J_1 < J_1^*$ и отрицательна при $J_1 > J_1^*$. Следовательно, J_1^* – единственная точка максимума функции $Q_3(J_1)$ на $[1,T_0]$.

Принимая во внимание равенство $\mu_2^* = \psi(J_2^*)$, приходим к выводу о том, что $\psi(J_2^*(J_1^*)) = \psi(J_1^*)$. В силу строгой монотонности функции ψ на $[1,T_0]$ имеем $J_2^*(J_1^*) = J_1^*$. Последнее означает, что J_1^* есть единственный на $[1,T_0]$ корень уравнения $J_2^*(J_1) = J_1$.

Равенство $\mu_2^*(J_1^*) = \psi(J_1^*)$ можно переписать так: $\mu_0[\varphi(J_1^*)]^2 = \psi(J_1^*)$. Получили, что J_1^* является корнем уравнения (3.2) при $n = 3$ или, что равносильно, корнем уравнения (2.5) при $n = 3$. Лемма доказана.

Лемма 9 вместе с анализом случая $\mu_0 \in [1,\mu_*]$ из разд.5.1 гарантируют справедливость теоремы 1 при $n = 3$.

6. ОПТИМАЛЬНЫЕ n-СКАЧКОВЫЕ СИСТЕМЫ

6.1. Сделаем индукционный переход от $n-1$ к n, $n \geq 4$. Рассмотрим задачу (3.5) и предположим вначале, что $\mu_0 \in [1,\mu_*]$. Зафиксируем $J_1 \in [1, A(\mu_0)]$. Имеем $\mu_1 \in [1,\mu_*]$. В оставшейся $(n-1)$-скачковой системе по индукционному предположению оптимальными параметрами будут $J_2^* = \ldots = J_{n-1}^* = 1$. Выбор J_1 подчиняется условию

$$\ln J_1 + \ln B(\mu_{n-1}^*) \ \to \sup_{J_1 \in [1, A(\mu_0)]} . \tag{6.1}$$

В данном случае $\mu_{n-1}^* = \mu_1$. При $\mu_0 \in [1,\mu_*]$ единственным решением задачи (6.1) согласно лемме 6 является $J_1^* = 1$. Таким образом, единственным решением задачи (3.5) при $\mu_0 \in [1,\mu_*]$ будет $J_1^* = J_2^* = \ldots = J_{n-1}^* = 1$.

6.2. Пусть теперь $\mu_0 \geq \mu_*$. Тогда оптимальному $J_1 = J_1^*$ соответствует $\mu_1^* = \mu_0\varphi(J_1^*)$, такое, что $\mu_1^* \geq \mu_*$ (если бы $\mu_1^* \in [1,\mu_*)$, то по предыдущему $J_1^* = 1$ и $\mu_1^* = \mu_0$, $\mu_0 \in [1,\mu_*)$, что противоречит условию

$\mu_0 \geq \mu_*$). Значит, достаточно рассматривать $J_1 \in [1, T_0]$, где T_0 – корень уравнения (5.2).

В силу индукционного предположения задача (3.5) принимает вид

$$Q_n(J_1) := \ln J_1 + (n-2)\ln J^*(J_1) + \ln B(\mu^*_{n-1}) \;\to \sup_{J_1 \in [1, T_0]}. \tag{6.2}$$

Здесь $\mu^*_{n-1} = \mu_0 \varphi(J_1)[\varphi(J^*)]^{n-2}$ и J^* удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{J^*}{J^* + \varepsilon}\right)^{n-3} (1 + \varepsilon J^*)^{n-1} = \mu_0 \varphi(J_1)(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2. \tag{6.3}$$

Введем обозначения $c = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2$,

$$G(t) = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^{n-3} (1+\varepsilon t)^{n-1}.$$

Тогда (6.3) можно переписать так:

$$G(J^*) = \varphi(J_1). \tag{6.4}$$

Формула (6.4) неявно определяет J^* как функцию от J_1.

Лемма 10. *Функция $J^* = J^*(J_1)$ непрерывно дифференцируема и строго убывает на полуоси $(0, +\infty)$. При этом $J^*(T_0) = 1$. Уравнение $J^*(J_1) = J_1$ имеет на $[1, T_0]$ единственное решение J_1^*.*

Доказательство. По условию $n \geq 4$, так что $G(0) = 0$. Далее,

$$G'(t) = \frac{\varepsilon}{\mu_0 c}\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^{n-4} \frac{(1+\varepsilon t)^{n-2}}{t+\varepsilon}\left[(n-3)\frac{1+\varepsilon t}{t+\varepsilon} + (n-1)t\right].$$

Поскольку $G'(t) > 0$ на $(0, +\infty)$, то функция G имеет непрерывно дифференцируемую на $(0, +\infty)$ строго возрастающую обратную функцию G^{-1}. Применив G^{-1} к (6.4), получим $J^* = G^{-1}(\varphi(J_1))$. Теперь становятся очевидными и непрерывная дифференцируемость и строгое убывание функции J^* на $(0, +\infty)$.

При $J_1 = T_0$ соотношению (6.3) удовлетворяет $J^* = 1$. Значит, $J^*(T_0) = 1$. Учитывая, что $J^*(J_1)$ строго убывает на $[1, T_0]$ до значения 1, а J_1 на том же отрезке строго возрастает от значения 1, приходим к выводу о том, что существует и единственна точка $J_1^* \in [1, T_0]$ со свойством $J^*(J_1^*) = J_1^*$. Лемма доказана.

Лемма 11. *Величина* μ_{n-1}^* *как функция от* J_1 *строго убывает на* $[1, T_0]$ *до значения* μ_*.

Доказательство. Из определения μ_{n-1}^* и (6.3) следует, что

$$\mu_{n-1}^* = \psi(J^*). \tag{6.5}$$

Остается сослаться на леммы 10 и 2.

Лемма 12. *При* $\mu_0 \geq \mu_*$ *задача (6.2) имеет единственное решение* J_1^*, *которое является корнем уравнения (2.5). При этом* $J^*(J_1^*) = J_1^*$.

Доказательство. Продифференцируем целевую функцию:

$$Q_n'(J_1) = \frac{1}{J_1} + \frac{n-2}{J^*}\frac{dJ^*}{dJ_1} + \frac{1}{B(\mu_{n-1}^*)}\frac{dB(\mu_{n-1}^*)}{dJ_1}.$$

Поскольку $B(\mu_{n-1}^*) = \varepsilon^{-1}[(1+\varepsilon)\mu_0\varphi(J_1)[\varphi(J^*)]^{n-2} - 1]$, то

$$\frac{dB(\mu_{n-1}^*)}{dJ_1} = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\mu_0\left[\varphi'(J_1)[\varphi(J^*)]^{n-2} + (n-2)\varphi(J_1)[\varphi(J^*)]^{n-3}\varphi'(J^*)\frac{dJ^*}{dJ_1}\right] =$$

$$= \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\mu_{n-1}^*\left[\frac{\varphi'(J_1)}{\varphi(J_1)} + (n-2)\frac{\varphi'(J^*)}{\varphi(J^*)}\frac{dJ^*}{dJ_1}\right].$$

Значит,

$$Q_n'(J_1) = \frac{1}{J_1} + \frac{(1+\varepsilon)\mu_{n-1}^*}{\varepsilon B(\mu_{n-1}^*)}\frac{\varphi'(J_1)}{\varphi(J_1)} + (n-2)\left[\frac{1}{J^*} + \frac{(1+\varepsilon)\mu_{n-1}^*}{\varepsilon B(\mu_{n-1}^*)}\frac{\varphi'(J^*)}{\varphi(J^*)}\right]\frac{dJ_2^*}{dJ_1}.$$

В силу (3.3)

$$Q_n'(J_1) = \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon B(\mu_{n-1}^*)}\left[\frac{\mu_{n-1}^* - \psi(J_1)}{(J_1+\varepsilon)(1+\varepsilon J_1)} + (n-2)\frac{\mu_{n-1}^* - \psi(J^*)}{(J^*+\varepsilon)(1+\varepsilon J^*)}\frac{dJ^*}{dJ_1}\right].$$

На основании (6.5) получаем

$$Q_n'(J_1) = \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2[\mu_{n-1}^* - \psi(J_1)]}{\varepsilon B(\mu_{n-1}^*)(J_1+\varepsilon)(1+\varepsilon J_1)}.$$

Производная $Q_n'(J_1)$ обращается в ноль при $J_1 = J_1^*$, где J_1^* – единственный на $[1, T_0]$ корень уравнения $\mu_{n-1}^* = \psi(J_1)$ (см. леммы 11 и 2). При $J_1 < J_1^*$ производная $Q_n'(J_1)$ положительна, а при $J_1 > J_1^*$ – отрицательна. Следовательно, J_1^* – единственное решение задачи (6.2).

Согласно (6.5), $\psi(J^*(J_1^*)) = \psi(J_1^*)$. На основании строгой монотонности функции ψ заключаем, что $J^*(J_1^*) = J_1^*$, т.е. J_1^* является единственным на $[1, T_0]$ корнем уравнения $J^*(J_1) = J_1$.

Равенство $\mu_{n-1}^*(J_1^*) = \psi(J_1^*)$ можно переписать так: $\mu_0[\varphi(J_1^*)]^{n-1} = \psi(J_1^*)$. Последнее означает, что J_1^* – корень уравнения (3.2) или, что равносильно, корень уравнения (2.5).

Общее значение J_1^* всех оптимальных параметров снова обозначим через J^*. Как только что было отмечено, J^* удовлетворяет уравнению (2.5). Лемма доказана.

Лемма 12 вместе с рассуждениями из разд. 6.1 гарантируют справедливость теоремы 1 в общем случае.

7. СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

7.1. Обратимся к теореме 2. При $n = 2$ она доказана в разд.4.2, поэтому считаем, что $n \geq 3$.

Согласно теореме 1

$$L_n(\mu_0) = \begin{cases} \ln B(\mu_0) & \text{при} \quad \mu_0 \in [1, \mu_*], \\ (n-1)\ln J^* + \ln B(\mu_{n-1}^*) & \text{при} \quad \mu_0 \geq \mu_*, \end{cases}$$

где $\mu_{n-1}^* = \mu_0[\varphi(J^*)]^{n-1}$ и J^* – корень уравнения (2.5). Поскольку (2.5) равносильно (3.2), то $\mu_{n-1}^* = \psi(J^*)$. Принимая это во внимание, запишем

$$L_n(\mu_0) = (n-1)\ln J^* + \ln B(\psi(J^*)) \quad \text{при} \quad \mu_0 \geq \mu_*. \tag{7.1}$$

На отрезке $[1, \mu_*]$ функция $L_n(\mu_0)$ непрерывно дифференцируема и

$$L_n(\mu_*) = \ln\frac{2}{1-\varepsilon}, \qquad L_n'(\mu_* - 0) = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}. \tag{7.2}$$

Функция $L_n(\mu_0)$ непрерывно дифференцируема и на полуоси $[\mu_*, +\infty)$, причем в силу равенства $J^*(\mu_*) = 1$ и формулы (7.1)

$$L_n(\mu_*) = \ln B(\psi(1)) = \ln B(\mu_*) = \ln \frac{2}{1-\varepsilon}.$$

Отсюда и из первой формулы в (7.2) следует, в частности, что функция $L_n(\mu_0)$ непрерывна на $[1, +\infty)$. Теорема 2 будет доказана, если мы установим, что наряду со второй формулой в (7.2) справедливо предельное соотношение

$$L_n'(\mu_* + 0) = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}. \tag{7.3}$$

Введем функцию

$$G_1(t) = \frac{1}{c}\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^{n-2}(1+\varepsilon t)^n,$$

где $c = (1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2$, и перепишем условие, которому удовлетворяет J^*, в виде

$$G_1(J^*) = \mu_0. \tag{7.4}$$

Равенством (7.4) величина μ_0 определена как функция от J^*. Напомним, что $n \geq 3$, так что $G_1(0) = 0$. Далее,

$$G_1'(t) = \frac{\varepsilon}{c}\left(\frac{t}{t+\varepsilon}\right)^{n-3}\frac{(1+\varepsilon t)^{n-1}}{t+\varepsilon}\left[(n-2)\frac{1+\varepsilon t}{t+\varepsilon} + n\,t\right].$$

Поскольку $G_1'(t) > 0$ на $(0, +\infty)$, то функция G_1 имеет непрерывно дифференцируемую на $(0, +\infty)$ строго возрастающую обратную функцию G_1^{-1}. Применив G^{-1} к (7.4), получим $J^* = G_1^{-1}(\mu_0)$, причем по теореме о производной обратной функции

$$\frac{dJ^*}{d\mu_0} = \frac{1}{G_1'(J^*)}.$$

В силу леммы 3, $J^* \to 1$, монотонно убывая, при фиксированном n и $\mu_0 \to \mu_* + 0$. Значит,

$$\lim_{\mu_0 \to \mu_* + 0} \frac{dJ^*}{d\mu_0} = \left[(n-1)\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right]^{-1}.$$

На основании (7.1) при $\mu_0 > \mu_*$ имеем

$$L'_n(\mu_0) = \frac{n-1}{J^*}\frac{dJ^*}{d\mu_0} + \frac{(1+\varepsilon)\psi'(J^*)}{\varepsilon B(\psi(J^*))}\frac{dJ^*}{d\mu_0}.$$

Но $\psi'(J^*) \to \psi'(1) = 0$ при $\mu_0 \to \mu_* + 0$, поэтому

$$\lim_{\mu_0 \to \mu_*+0} L'_n(\mu_0) = (n-1)\lim_{\mu_0 \to \mu_*+0}\left[\frac{1}{J^*}\frac{dJ^*}{d\mu_0}\right] = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}.$$

Предельное соотношение (7.3), а с ним и теорема 2 доказаны.

7.2. Переходим к доказательству теоремы 3.

Лемма 13. *При* $\mu_0 > \mu_*$ *справедлива формула*

$$\lim_{n\to\infty} n(J^*-1) = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\ln\frac{\mu_0}{\mu_*}. \tag{7.5}$$

Доказательство. Напомним, что, согласно лемме 3, $J^* \to 1$, монотонно убывая, при фиксированном $\mu_0 > \mu_*$ и $n \to \infty$.

Распишем подробно равенство $\psi(J^*) = \mu^*_{n-1}$, учитывая, что $\varphi(1) = 1$:

$$\psi(J^*) = \mu_0[\varphi(J^*)]^{n-1} = \mu_0[1 + (\varphi(J^*)-1)]^{(\varphi(J^*)-1)^{-1}(\varphi(J^*)-\varphi(1))(n-1)} =$$

$$= \mu_0\left\{[1+(\varphi(J^*)-1)]^{(\varphi(J^*)-1)^{-1}}\right\}^{\varphi'(\Theta_n)(J^*-1)(n-1)}. \tag{7.6}$$

Здесь $\Theta_n \in (1, J^*)$. Выражение в фигурных скобках обозначим через g_n. Очевидно, что $g_n \to e$ при $n \to \infty$. Отметим также, что

$$\varphi'(\Theta_n) \to -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Прологарифмировав равенство (7.6), получим

$$(n-1)(J^*-1) = \frac{\ln[\psi(J^*)/\mu_0]}{\varphi'(\Theta_n)\ln g_n}.$$

В пределе при $n \to \infty$ приходим к (7.5). Лемма доказана.

На основании (7.1) доказательство теоремы 3 сводится к проверке предельного соотношения

$$\lim_{n\to\infty}(n-1)\,\ln J^* = \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}\ln\frac{\mu_0}{\mu_*} =: \Lambda_w. \tag{7.7}$$

Но это следует из леммы 13 и равенства

$$(n-1)\ln J^* = (n-1)(J^*-1)\ln[1+(J^*-1)]^{(J^*-1)^{-1}}.$$

7.3. С физической точки зрения формула (7.7) означает, что логарифм отношения статического давления за предпоследним скачком в оптимальной системе к давлению в невозмущенном потоке стремится к конечной величине Λ_w, представляющей собой логарифм интенсивности J_w простой волны сжатия, тормозящей поток до μ_*. В статье [3] показано, что ударно-волновая система, состоящая из простой волны с интенсивностью J_w и замыкающего прямого скачка с интенсивностью $B(\mu_*)$, является наилучшей с точки зрения максимизации статического давления. Соотношение (7.7), таким образом, показывает, что с увеличением числа скачков в оптимальной для статического давления системе до бесконечности происходит качественный переход – система из $n-1$ косого скачка превращается в оптимальную изэнтропическую волну.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе задача, поставленная в середине прошлого века Г.И.Петровым, получила окончательное решение. Принципиальным моментом, позволившим доказать глобальную оптимальность и единственность решения, оказался тот факт, что указанная задача является дискретной задачей оптимального управления. Анализ предельных свойств полученного решения показал, что при увеличении числа скачков до бесконечности максимальное значение целевой функции стремится к величине $\Lambda_w + \ln B(\mu_*)$. Последняя представляет собой логарифм интенсивности системы, состоящей из простой волны сжатия и замыкающего прямого скачка и являющейся наилучшей с точки зрения максимизации статического давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров Г.И.* Избранные труды. Аэромеханика больших скоростей и космические исследования. М.: Наука, 1992.
2. *Герман Р.* Сверхзвуковые входные диффузоры. М.: Физматгиз, 1960.
3. *Омельченко А.В., Усков В.Н.* Оптимальные ударно-волновые системы //Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1995. №6. С.118–126.
4. *Ерофеев В.К., Омельченко А.В., Усков В.Н.* Анализ акустического импеданса в стационарных сверхзвуковых течениях //Инженерно-физический журнал. 1998. Т.71. №4. С.663–668.
5. *Омельченко А.В., Усков В.Н.* Максимальные углы поворота сверхзвукового потока в ударно-волновых системах //Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. №3. С.148–156.
6. *Омельченко А.В., Усков В.Н.* Геометрия оптимальных ударно-волновых систем //Прикладная механика и техническая физика. 1997. Т.38. №5. С.29–35.
7. *Малоземов В.Н., Омельченко А.В., Усков В.Н.* О минимизации потерь полного давления при торможении сверхзвукового потока //Прикладная математика и механика. 1998. Т.62. Вып.6. С.1015–1021.
8. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. л-ры, 1960.
9. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
10. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.

ПОДПИСИ К ФИГУРАМ

1.Фиг.1. Графики функций $\psi(J)$ (кривая 1) и $\mu_0[\varphi(J)]^{n-1}$ (кривая 2), построенные при $n = 4$, $\mu_0 = 2$, $\varepsilon = 1/6$.

2.Фиг.2. Графики функций $\psi(J_1)$ (кривая 1) и $\mu_1(J_1)$ (кривая 2), построенные при $\mu_0 = 1.1$ и $\varepsilon = 1/6$.

3.Фиг.3. Графики функций $\psi(J_1)$ (кривая 1) и $\mu_1(J_1)$ (кривая 2), построенные при $\mu_0 = 2$ и $\varepsilon = 1/6$.

4.Фиг.4. Графики функций J_1 (кривая 1) и $J_2^*(J_1)$ (кривая 2), построенные при $\mu_0 = 2$, $\varepsilon = 1/6$.