SPb. Math. Society Preprint 2002-13 20 Dec 2002

УДК 519.72

А. В. Коровкин, С. М. Машарский

О БЫСТРОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ АХМЕДА–РАО С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ[1]

На основе дискретного преобразования Ахмеда–Рао в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = 2^s$ построено параметрическое семейство рекуррентных последовательностей ортогональных базисов. Представлен явный вид базисных сигналов. Показано, как с их помощью сформировать обобщенные вейвлет-пакеты. Предложен быстрый алгоритм вычисления коэффициентов разложений по всем указанным базисам.

Введение

До 1970-х гг. основным инструментом дискретного гармонического анализа являлось преобразование Фурье. Развитие и распространение цифровых ЭВМ потребовало привлечения в классический дискретный гармонический анализ других ортогональных преобразований, таких как преобразование Уолша, Хаара, дискретное косинусное, пилообразное и другие преобразования [1, 2, 3]. В их числе — и дискретное преобразование Ахмеда–Рао [2], которое представляет собой параметрическое семейство преобразований, включающее в себя преобразования Фурье и Уолша.

В последние годы был разработан новый подход к быстрым ортогональным преобразованиям. В работах [4, 5] результаты промежуточных вычислений быстрого преобразования Фурье впервые были проинтерпретированы как коэффициенты разложений по некоторым ортогональным базисам. В пространстве дискретных периодических сигналов при длине периода, равной 2^s, были построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов, имеющих блочную структуру. В работе [6] с аналогичных позиций проанализировано дискретное преобразование Уолша. Наиболее полно этот подход изложен в недавних работах [7, 8]. В них указано, как из блоков, принадлежащих *разным базисам* рекуррентной последовательности, формировать обобщенные вейвлетные базисы.

В настоящей работе этот подход применен к исследованию дискретного преобразования Ахмеда–Рао. Это преобразование представляет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке в форме совместного гранта Министерства образования Российской Федерации и Администрации Санкт-Петербурга (шифр гранта PD02-1.1-204).

определенный интерес, поскольку порождающие его базисные сигналы принимают ограниченное число значений на единичной окружности комплексной плоскости. В пространстве дискретных периодических сигналов строится семейство рекуррентных последовательностей ортогональных базисов. Финальным базисом во всех последовательностях являются дискретные функции Ахмеда–Рао (в несколько видоизмененной форме). На основе этих последовательностей строится алгоритм быстрого преобразования Ахмеда–Рао. Эффективные расчетные формулы получаются путем использования индексной техники, когда при умножении разреженной матрицы на вектор убираются все операции с нулевыми элементами матрицы. После построения последовательности ортогональных базисов естественным образом формируется обобщенный вейвлет-пакет.

Прокомментируем содержание статьи по параграфам. В § 1 приводятся предварительные сведения, необходимые для дальнейшего изложения материала. В § 2 изучаются свойства матриц-сомножителей, входящих в факторизацию матрицы дискретного преобразования Ахмеда–Рао, и строятся последовательности ортогональных базисов. В § 3 представлена вычислительная схема быстрого преобразования Ахмеда–Рао. В § 4 детально изучаются базисные сигналы из рекуррентных последовательностей: выясняется их структура и явный вид, устанавливается связь между дискретными функциями Ахмеда–Рао, гармониками Фурье и функциями Уолша. В § 5 строится обобщенный вейвлет-пакет.

§1. Предварительные сведения

1.1. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами*. В $\mathbb{C}_N$ обычным способом вводятся скалярное произведение и норма:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}, \qquad \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Единичным N-периодическим импульсом называется сигнал $\delta_N(j)$, равный единице, когда j делится на N, и равный нулю при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Система сдвигов $\delta_N(j)$, $\delta_N(j-1)$, …, $\delta_N(j-N+1)$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$.

Положим $u_k(j) = \omega_N^{kj}$, где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из 1. Сигналы $u_0(j)$, $u_1(j)$, …, $u_{N-1}(j)$ образуют еще один ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$, который называется экспоненциальным.

1.2. В дальнейшем считаем, что $N = 2^s$, где s — натуральное число, отличное от единицы. Положим $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$. В частности, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_{\nu+1} = N_{s-\nu}$ при $\nu = 0, 1, \ldots, s$.

Любое число $j \in 0 : N-1$ можно записать в двоичном коде: $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_2$. Эта запись означает, что $j = j_{s-1}2^{s-1} + j_{s-2}2^{s-2} + \ldots + j_0$, где $j_\nu \in \{0, 1\}$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$. Введем обозначение

$$\mathrm{rev}_s(j) = (j_0, j_1, \ldots, j_{s-1})_2.$$

Операция rev_s сопоставляет числу j число $\mathrm{rev}_s(j)$, двоичный код которого равен перевернутому двоичному коду числа j. Идентификатор rev связан со словом *реверс*, а индекс s указывает на количество реверти-руемых двоичных разрядов.

1.3. Дискретное преобразование Ахмеда–Рао представляет собой параметрическое семейство дискретных ортогональных преобразований [2]. При каждом $r = 1, \ldots, s$ оно задается матрицей

$$G^{(r)} = D_s^{(r)} D_{s-1}^{(r)} \cdots D_1^{(r)}, \tag{1.1}$$

где

$$D_\nu^{(r)} = \mathrm{diag}\left[A_0^{(r)}, A_1^{(r)}, \ldots, A_{\Delta_\nu - 1}^{(r)}\right] \otimes E_{N_\nu}, \quad \nu \in 1 : s; \tag{1.2}$$

$$A_l^{(r)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \omega_N^{\mathrm{rev}_{s-1}(l)} \\ 1 & -\omega_N^{\mathrm{rev}_{s-1}(l)} \end{pmatrix}, & l \in 0 : \Delta_r - 1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & l \in \Delta_r : \Delta_s - 1; \end{cases} \tag{1.3}$$

E_{N_ν} — единичная матрица порядка N_ν, символ $\otimes$ означает тензорное произведение матриц (см., например, [9]).

Сигналы

$$w_k^{(r)}(j) = G^{(r)}[k, j], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.4}$$

назовем *дискретными функциями Ахмеда–Рао*. Формулой (1.4) сигналы $w_k^{(r)}(j)$ определены на основном периоде $j \in 0 : N-1$. Далее они продолжаются N-периодически на все целые $j \in \mathbb{Z}$. При фиксированном $r \in 1 : s$ система сигналов $w_0^{(r)}(j)$, $w_1^{(r)}(j)$, …, $w_{N-1}^{(r)}(j)$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathbb{C}_N$.

§2. Последовательность ортогональных базисов

2.1. Для дальнейшего изложения нам потребуется несколько модифицировать матрицу дискретного преобразования Ахмеда–Рао. Введем квадратную матрицу R порядка $N = 2^s$ с элементами

$$R[k,j] = \begin{cases} 1, \text{ если } j = \mathrm{rev}_s(k), \\ 0 \text{ при остальных } k,j \in 0:N-1. \end{cases}$$

Очевидно, что R — симметричная матрица и $RR = E_N$. Если A — квадратная матрица порядка N, то умножение RA ревертирует строки матрицы A, а умножение AR ревертирует столбцы матрицы A.

Рассмотрим матрицу

$$\widetilde{G}^{(r)} = R\,G^{(r)}\,R, \tag{2.1}$$

которая получается ревертированием строк и столбцов матрицы Ахмеда–Рао. С учетом (1.1) равенство (2.1) можно записать в развернутом виде

$$\widetilde{G}^{(r)} = RD_s^{(r)}(RR)D_{s-1}^{(r)}(RR)\cdots(RR)D_1^{(r)}R =$$

$$= (RD_s^{(r)}R)(RD_{s-1}^{(r)}R)\cdots(RD_1^{(r)}R).$$

Обозначив

$$H_\nu^{(r)} = RD_\nu^{(r)}R, \quad \nu \in 1:s, \tag{2.2}$$

получим

$$\widetilde{G}^{(r)} = H_s^{(r)}H_{s-1}^{(r)}\cdots H_1^{(r)}. \tag{2.3}$$

2.2. Изучим свойств матриц, входящих в факторизацию (2.3).

Пусть $l \in 0:\Delta_\nu - 1$. Введем обозначение

$$b_\nu^{(r)}(l) = \begin{cases} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l}, & \text{если } \ \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) \in 0:\Delta_r - 1, \\ 1, & \text{если } \ \mathrm{rev}_{\nu-1}(l) \in \Delta_r:\Delta_\nu - 1. \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Матрица $H_\nu^{(r)}$ имеет следующую структуру:*

$$H_\nu^{(r)}[l+\sigma\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1},\, l+\tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}] = (-1)^{\sigma\tau}\left[b_\nu^{(r)}(l)\right]^\tau,$$

$$l \in 0:\Delta_\nu - 1, \quad p \in 0:N_\nu - 1, \quad \sigma,\tau \in \{0,1\};$$

$$H_\nu^{(r)}[k,j] = 0 \ \textit{при остальных} \ k,j \in 0:N-1.$$

Доказательство. Выясним сначала структуру матрицы $D_\nu^{(r)}$. Пусть $k = (2l+\sigma)N_\nu + p$, $j = (2l'+\tau)N_\nu + p'$, где $p,p' \in 0:N_\nu - 1$, $l,l' \in 0:\Delta_\nu - 1$, $\sigma,\tau \in \{0,1\}$. Согласно (1.2) имеем

$$D_\nu^{(r)}[k,j] = \begin{cases} A_l^{(r)}[\sigma,\tau], & \text{если } l = l' \text{ и } p = p', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При этом в силу (1.3)

$$A_l^{(r)}[\sigma,\tau] = \begin{cases} (-1)^{\sigma\tau}\omega_N^{\tau\,\mathrm{rev}_{s-1}(l)}, & l \in 0:\Delta_r - 1, \\ (-1)^{\sigma\tau}, & l \in \Delta_r : \Delta_\nu - 1. \end{cases}$$

Далее, из (2.2) следует

$$D_\nu^{(r)}[k,j] = H_\nu^{(r)}[\mathrm{rev}_s(k), \mathrm{rev}_s(j)],$$

или, подробнее,

$$H_\nu^{(r)}[\mathrm{rev}_{s-\nu}(p)\Delta_{\nu+1} + \sigma\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l),\ \mathrm{rev}_{s-\nu}(p')\Delta_{\nu+1} + \tau\Delta_\nu + \mathrm{rev}_{\nu-1}(l')] =$$

$$= \begin{cases} A_l^{(r)}[\sigma,\tau], & \text{если } l = l' \text{ и } p = p', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, в матрице $H_\nu^{(r)}$ отличны от нуля только элементы

$$H_\nu^{(r)}[p\Delta_{\nu+1} + \sigma\Delta_\nu + l,\ p\Delta_{\nu+1} + \tau\Delta_\nu + l] = A^{(r)}_{\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)}[\sigma,\tau].$$

Осталось заметить, что при $l \in 0:\Delta_\nu - 1$, $l = (l_{\nu-2},\ldots,l_0)_2$, имеет место равенство

$$\mathrm{rev}_{s-1}\big(\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)\big) = (l_{\nu-2},\ldots,l_0,\underbrace{0,\ldots,0}_{s-\nu})_2 = lN_\nu,$$

так что

$$\omega_N^{\mathrm{rev}_{s-1}(\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(l))} = \omega_N^{lN_\nu} = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l}$$

и

$$A^{(r)}_{\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)}[\sigma,\tau] = (-1)^{\sigma\tau}\left[b_\nu^{(r)}(l)\right]^\tau. \qquad (2.4)$$

Лемма доказана. ■

Обозначим $Q_\nu^{(r)} = H_\nu^{(r)} H_{\nu-1}^{(r)} \cdots H_1^{(r)}$.

Лемма 2.2. *При всех $\nu = 1, \ldots, s$ справедлива формула*

$$Q_\nu^{(r)} \left[Q_\nu^{(r)}\right]^* = 2^\nu E_N,$$

где $\left[Q_\nu^{(r)}\right]^*$ — сопряженная по отношению к $Q_\nu^{(r)}$ матрица.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $A_l^{(r)} \left[A_l^{(r)}\right]^* = 2E_2$ при всех $l \in 0 : \Delta_s - 1$. Отсюда, пользуясь свойством тензорного произведения $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, получаем

$$D_\nu^{(r)} \left[D_\nu^{(r)}\right]^* = \operatorname{diag}\big(\underbrace{2E_2, 2E_2, \ldots, 2E_2}_{\Delta_\nu \text{ раз}}\big) \otimes E_{N_\nu} = 2E_N.$$

В силу ортогональности матрицы реверсных перестановок R

$$H_\nu^{(r)} \left[H_\nu^{(r)}\right]^* = (RD_\nu^{(r)} R)(RD_\nu^{(r)} R)^* = 2E_N.$$

Окончательно,

$$Q_\nu^{(r)} \left[Q_\nu^{(r)}\right]^* = H_\nu^{(r)} H_{\nu-1}^{(r)} \cdots H_1^{(r)} \left[H_1^{(r)}\right]^* \cdots \left[H_{\nu-1}^{(r)}\right]^* \left[H_\nu^{(r)}\right]^* = 2^\nu E_N.$$

Лемма доказана. ■

2.3. Введем сигналы

$$\widetilde{w}_k^{(r)}(j) = \widetilde{G}^{(r)}[k, j], \quad k, j \in 0 : N - 1.$$

В силу (2.1) и (1.4) можем записать

$$\widetilde{w}_k^{(r)}(j) = w_{\mathrm{rev}_s(k)}^{(r)}\big(\mathrm{rev}_s(j)\big). \tag{2.5}$$

Сигналы (2.5) назовем *модифицированными функциями Ахмеда–Рао.*

На основе факторизации (2.3) построим в $\mathbb{C}_N$ при $N = 2^s$ последовательность ортогональных базисов $\{f_\nu^{(r)}(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, так, чтобы $f_0^{(r)}(k; j) = \delta_N(j - k)$ и $f_s^{(r)}(k; j) = \widetilde{w}_k^{(r)}(j)$. Сигналы $f_\nu^{(r)}(k; j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $f_\nu^{(r)}(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-сигнала $f_\nu^{(r)} = \big(f_\nu^{(r)}(0), f_\nu^{(r)}(1), \ldots, f_\nu^{(r)}(N-1)\big)^\top$ и определим его формулой

$$f_\nu^{(r)} = H_\nu^{(r)} H_{\nu-1}^{(r)} \cdots H_1^{(r)} f_0^{(r)}. \tag{2.6}$$

В лемме 2.2, по существу, установлено, что строки матрицы $Q_\nu^{(r)}$ попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен 2^ν. Учитывая соотношение $f_\nu^{(r)} = Q_\nu^{(r)} f_0^{(r)}$, приходим к следующему выводу.

Теорема 2.1. *При всех* $\nu \in 0 : s$ *сигналы* $f_\nu^{(r)}(0),\ f_\nu^{(r)}(1),\ \ldots,\ f_\nu^{(r)}(N-1)$ *образуют ортогональный базис в* $\mathbb{C}_N$ *и* $\|f_\nu^{(r)}(k)\|^2 = 2^\nu$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Из (2.6) следует, что

$$f_\nu^{(r)} = H_\nu^{(r)} f_{\nu-1}^{(r)}, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{2.7}$$

Формула (2.7) и лемма 2.1 позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $f_{\nu-1}^{(r)}$ к базису $f_\nu^{(r)}$:

$$f_0^{(r)}(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1;$$

$$\begin{aligned} f_\nu^{(r)}(l + p\Delta_{\nu+1}) &= f_{\nu-1}^{(r)}(l + 2p\Delta_\nu) + b_\nu^{(r)}(l) f_{\nu-1}^{(r)}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ f_\nu^{(r)}(l + \Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= f_{\nu-1}^{(r)}(l + 2p\Delta_\nu) - b_\nu^{(r)}(l) f_{\nu-1}^{(r)}\big(l + (2p+1)\Delta_\nu\big), \\ l \in 0 : \Delta_\nu - 1, &\quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{aligned} \tag{2.8}$$

§3. Быстрое преобразование Ахмеда–Рао

3.1. Любой сигнал $x \in \mathbb{C}_N$ при $N = 2^s$ можно разложить по ортогональному базису $f_\nu^{(r)}(0),\ f_\nu^{(r)}(1),\ \ldots,\ f_\nu^{(r)}(N-1)$ при каждом $\nu = 0, 1, \ldots, s$:

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} x_\nu^{(r)}(k)\, f_\nu^{(r)}(k). \tag{3.1}$$

Здесь $x_\nu^{(r)}(k) = 2^{-\nu}\langle x, f_\nu^{(r)}(k)\rangle$. В частности,

$$x_0^{(r)}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \delta_N(j-k) = x(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Согласно (2.8)

$$x_\nu^{(r)}(l+p\Delta_{\nu+1}) = 2^{-\nu}\big[\big\langle x, f_{\nu-1}^{(r)}(l+2p\Delta_\nu)\big\rangle + \overline{b_\nu^{(r)}(l)}\big\langle x, f_{\nu-1}^{(r)}\big(l+(2p+1)\Delta_\nu\big)\big\rangle\big] =$$

$$= \frac{1}{2}\big[x^{(r)}_{\nu-1}(l+2p\Delta_\nu) + \overline{b^{(r)}_\nu(l)}\, x^{(r)}_{\nu-1}\big(l+(2p+1)\Delta_\nu\big)\big].$$

Аналогичное выражение можно получить и для $x^{(r)}_\nu(l+\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1})$.

Приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (3.1):

$$x^{(r)}_0(k) = x(k), \quad k \in 0:N-1;$$

$$\begin{aligned} x^{(r)}_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) &= \tfrac{1}{2}\big[x^{(r)}_{\nu-1}(l+2p\Delta_\nu) + \overline{b^{(r)}_\nu(l)}\, x^{(r)}_{\nu-1}\big(l+(2p+1)\Delta_\nu\big)\big], \\ x^{(r)}_\nu(l+\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) &= \tfrac{1}{2}\big[x^{(r)}_{\nu-1}(l+2p\Delta_\nu) - \overline{b^{(r)}_\nu(l)}\, x^{(r)}_{\nu-1}\big(l+(2p+1)\Delta_\nu\big)\big], \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$l \in 0:\Delta_\nu-1, \quad p \in 0:N_\nu-1, \quad \nu = 1,\dots,s.$$

При $\nu = s$ получаем разложение сигнала x по модифицированным функциям Ахмеда–Рао:

$$x(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x^{(r)}_s(k)\, \widetilde{w}^{(r)}_k(j).$$

Попутно вычисляются коэффициенты разложений по всем промежуточным базисам.

Формула (3.2) допускает обращение. Действительно, пользуясь тем, что $|b^{(r)}_\nu(l)| = 1$, можно записать

$$\begin{aligned} x^{(r)}_{\nu-1}(l+2p\Delta_\nu) &= x^{(r)}_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) + x^{(r)}_\nu\big(l+\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}\big), \\ x^{(r)}_{\nu-1}\big(l+(2p+1)\Delta_\nu\big) &= b^{(r)}_\nu(l)\big[x^{(r)}_\nu(l+p\Delta_{\nu+1}) - x^{(r)}_\nu\big(l+\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}\big)\big], \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$l \in 0:\Delta_\nu-1, \quad p \in 0:N_\nu-1, \quad \nu = s, s-1,\dots,1.$$

Основная роль формул (3.3) заключается в том, что с их помощью вычисляются значения сигнала x, заданного в виде (3.1) при некотором $\nu \in 1:s$, на основном периоде, а именно:

$$x(k) = x^{(r)}_0(k), \quad k \in 0:N-1.$$

3.2. Формулы (3.2) при $r = s$ совпадают с вычислительными формулами алгоритма Кули–Тьюки быстрого преобразования Фурье, связанного с прореживанием по частоте [4]. При $r = 1$ формулы (3.2) описывают алгоритм быстрого преобразования Уолша с прореживанием по частоте [6].

Это дает нам основание назвать вычислительную схему (3.2) *быстрым преобразованием Ахмеда–Рао, связанным с прореживанием по частоте.*

§4. Свойства базисов $f_\nu^{(r)}$

4.1. Получим явное представление для базисных сигналов $f_\nu^{(r)}(k)$. Для этого введем систему матриц $\{U_\nu^{(r)}\}_{\nu=1}^{s}$:

$$U_1^{(r)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$U_\nu^{(r)}[l+\sigma\Delta_\nu,\, m+\tau\Delta_\nu] = U_{\nu-1}^{(r)}[l,m]\, A^{(r)}_{\mathrm{rev}_{\nu-1}(l)}[\sigma,\tau], \tag{4.2}$$

$$l,m \in 0:\Delta_\nu-1, \quad \sigma,\tau\in\{0,1\}, \quad \nu=2,\dots,s.$$

Отметим, что $U_\nu^{(r)}$ — квадратная матрица порядка $\Delta_{\nu+1}$.

Теорема 4.1. *Справедливо представление*

$$f_\nu^{(r)}(l+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} U_\nu^{(r)}[l,m]\, f_0^{(r)}(m+p\Delta_{\nu+1}), \tag{4.3}$$

$$l\in 0:\Delta_{\nu+1}-1, \quad p\in 0:N_\nu-1, \quad \nu\in 1:s.$$

Доказательство проведем методом математической индукции.
При $\nu=1$ формула (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} f_1^{(r)}(2p) &= f_0^{(r)}(2p) + f_0^{(r)}(1+2p), \\ f_1^{(r)}(1+2p) &= f_0^{(r)}(2p) - f_0^{(r)}(1+2p), \end{aligned}$$

что совпадает с (2.8) при $\nu=1$.

Сделаем индукционный переход от $\nu-1$ к ν. Представим индекс $l\in 0:\Delta_{\nu+1}-1$ в виде $l=l'+\sigma\Delta_\nu$, где $l'\in 0:\Delta_\nu-1$, $\sigma\in\{0,1\}$. На основании (2.8), (2.4), индукционного предположения и (4.2) получаем

$$f_\nu^{(r)}(l'+\sigma\Delta_\nu+p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{\tau=0}^{1}(-1)^{\sigma\tau}\left[b_\nu^{(r)}(l')\right]^\tau f_{\nu-1}^{(r)}\left(l'+(2p+\tau)\Delta_\nu\right) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{1} A^{(r)}_{\mathrm{rev}_{\nu-1}(l')}[\sigma,\tau] \sum_{m'=0}^{\Delta_\nu-1} U_{\nu-1}^{(r)}[l',m']\, f_0^{(r)}\left(m'+(2p+\tau)\Delta_\nu\right) =$$

$$= \sum_{m'=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{\tau=0}^{1} U_\nu^{(r)}[l' + \sigma\Delta_\nu,\, m' + \tau\Delta_\nu]\, f_0^{(r)}(m' + \tau\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} U_\nu^{(r)}[l, m]\, f_0^{(r)}(m + p\Delta_{\nu+1}).$$

Теорема доказана. ■

Теорема 4.2. *Справедливо тождество*

$$f_\nu^{(r)}(l + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu^{(r)}(l; j - p\Delta_{\nu+1}), \tag{4.4}$$

$$l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Доказательство. В соответствии с (4.3) имеем

$$f_\nu^{(r)}(l; j) = \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} U_\nu^{(r)}[l, m]\, \delta_N(j - m).$$

Поэтому

$$f_\nu^{(r)}(l; j - p\Delta_{\nu+1}) = \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} U_\nu^{(r)}[l, m]\, \delta_N\big(j - (m + p\Delta_{\nu+1})\big) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} U_\nu^{(r)}[l, m]\, f_0^{(r)}(m + p\Delta_{\nu+1}; j) = f_\nu^{(r)}(l + p\Delta_{\nu+1}; j).$$

Теорема доказана. ■

4.2. Формула (4.3) дает точное представление о структуре базисных сигналов, однако коэффициенты в этом разложении не определены явно, а вычисляются рекуррентно по формуле (4.2). Ответ на вопрос о явном выражении для элементов матрицы $U_\nu^{(r)}$ оказывается весьма нетривиальным.

Пусть a, b — целые числа, принадлежащие множеству $\{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ при некотором $\nu \geq 1$. Запишем их двоичные коды $a = (a_{\nu-1}, a_{\nu-2}, \ldots, a_0)_2$, $b = (b_{\nu-1}, b_{\nu-2}, \ldots, b_0)_2$ и положим

$$\{a, b\}_\nu = \sum_{k=0}^{\nu-1} a_k\, b_k.$$

Будем использовать стандартные обозначения $\lfloor\alpha\rfloor$ для целой части вещественного числа α и $\langle m\rangle_n$ для остатка от деления целого числа m на натуральное n.

Теорема 4.3. *Пусть* $\nu \in 1:s,\ l,m \in 0:\Delta_{\nu+1}-1$. *Справедливы следующие утверждения:*

а) если $\nu \le r$, *то*

$$U_\nu^{(r)}[l,m] = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\,\mathrm{rev}_\nu(m)}, \quad l \in 0:\Delta_{\nu+1}-1; \tag{4.5}$$

б) если $\nu \ge r+1$, *то*

$$U_\nu^{(r)}[l,m] = \begin{cases} \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\,\mathrm{rev}_\nu(m)}, \quad \textit{если}\ \ l = \Delta_{\nu-r+1}l',\ \ l' \in 0:\Delta_{r+1}-1; \\ \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\,\mathrm{rev}_\nu(\langle m\rangle_{\Delta_{\nu-\kappa+r}})}(-1)^{\left\{\lfloor\frac{l}{\Delta_{\nu-\kappa+r}}\rfloor,\lfloor\frac{m}{\Delta_{\nu-\kappa+r}}\rfloor\right\}_\nu}, \\ \qquad \textit{если}\ \ l = \Delta_{\nu-\kappa}(2l'+1),\ \ l' \in 0:\Delta_{\kappa+1}-1, \\ \qquad\qquad \kappa \in r:\nu-1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Доказательство. При $\nu = 1$ в проверке нуждается только равенство (4.5), которое в этом случае имеет вид

$$U_1^{(r)}[l,m] = \omega_2^{l\,\mathrm{rev}_1(m)} = (-1)^{lm}, \quad l,m \in \{0,1\},$$

что соответствует (4.1).

Сделаем индукционный переход от $\nu-1$ к ν. Пусть $l = \lambda + \sigma\Delta_\nu$, $m = \mu + \tau\Delta_\nu$, где $\sigma,\tau \in \{0,1\}$, $\lambda,\mu \in 0:\Delta_\nu - 1$, $\lambda = (\lambda_{\nu-2},\ldots,\lambda_0)_2$, $\mu = (\mu_{\nu-2},\ldots,\mu_0)_2$. Исходя из (4.2) и (2.4), можем записать

$$U_\nu^{(r)}[l,m] = U_{\nu-1}^{(r)}[\lambda,\mu]\,(-1)^{\sigma\tau}\left[b_\nu^{(r)}(\lambda)\right]^\tau. \tag{4.7}$$

Рассмотрим отдельно случаи $\nu \le r$, $\nu = r+1$ и $\nu \ge r+2$.

При $\nu \le r$ имеем $\mathrm{rev}_{\nu-1}(\lambda) \le \Delta_r - 1$ и, как следствие, $b_\nu^{(r)}(\lambda) = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\lambda}$. В силу (4.7) и индукционного предположения получаем

$$U_\nu^{(r)}[l,m] = \omega_{\Delta_\nu}^{\lambda\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(\mu)}(-1)^{\sigma\tau}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\lambda\tau} = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{2\lambda\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(\mu)+\sigma\tau\Delta_\nu+\lambda\tau} =$$

$$= \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{(\lambda+\sigma\Delta_\nu)(2\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(\mu)+\tau)},$$

что соответствует (4.5), поскольку $2\mathrm{rev}_{\nu-1}(\mu) + \tau = \mathrm{rev}_\nu(\mu+\tau\Delta_\nu)$.

При $\nu = r+1$ формула (4.6) принимает вид

$$U^{(r)}_{r+1}[l,m] = \begin{cases} \omega^{l\,\mathrm{rev}_{r+1}(m)}_{\Delta_{r+2}}, \quad \text{если } \ l = 2l', \ \ l' \in 0 : \Delta_{r+1} - 1; \\ \omega^{l\,\mathrm{rev}_{r+1}(\langle m\rangle_{\Delta_{r+1}})}_{\Delta_{r+2}} (-1)^{\left\{ \lfloor \frac{l}{\Delta_{r+1}} \rfloor, \lfloor \frac{m}{\Delta_{r+1}} \rfloor \right\}_{r+1}}, \\ \qquad \text{если } \ l = 2l'+1, \ \ l' \in 0 : \Delta_{r+1} - 1. \end{cases} \tag{4.8}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $b^{(r)}_{r+1}(\lambda) = \omega^{\lambda}_{\Delta_{r+2}}$, поскольку $\mathrm{rev}_r(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1})_2 \le \Delta_r - 1$, и (4.7) вкупе с индукционным предположением дает

$$U^{(r)}_{r+1}[l,m] = \omega^{\lambda\,\mathrm{rev}_r(\mu)}_{\Delta_{r+1}} (-1)^{\sigma\tau} \omega^{\lambda\tau}_{\Delta_{r+2}} = \omega^{l\,\mathrm{rev}_{r+1}(m)}_{\Delta_{r+2}},$$

что соответствует верхней строчке формулы (4.8). Если же $\lambda_0 = 1$, то $\mathrm{rev}_r(\lambda) = (1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1})_2 \ge \Delta_r$ и $b^{(r)}_{r+1}(\lambda) = 1$, так что

$$U^{(r)}_{r+1}[l,m] = \omega^{\lambda\,\mathrm{rev}_r(\mu)}_{\Delta_{r+1}} (-1)^{\sigma\tau} = \omega^{2(\lambda+\sigma\Delta_{r+1})\,\mathrm{rev}_r(\mu)}_{\Delta_{r+2}} (-1)^{\{\sigma,\tau\}_{r+1}}.$$

Это соответствует нижней строчке формулы (4.8), если учесть, что $2\mathrm{rev}_r(\mu) = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{r-1}, 0)_2 = \mathrm{rev}_{r+1}(\mu)$ и $\mu = \langle m\rangle_{r+1}$.

Осталось разобрать случай, когда $\nu \ge r+2$. При этом для индекса l возможны три варианта.

1) Если $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\nu-r-1} = 0$, то $l = \Delta_{\nu-r+1} l'$, где $l' = (\sigma, \lambda_{\nu-2}, \ldots, \lambda_{\nu-r})_2$. При этом так же, как и в случае $\nu \le r$, доказывается, что $U^{(r)}_{\nu}[l,m] = \omega^{l\,\mathrm{rev}_{\nu}(m)}_{\Delta_{\nu+1}}$.

2) Если $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\nu-r-2} = 0$ и $\lambda_{\nu-r-1} = 1$, то $l = \Delta_{\nu-r}(2l'+1)$, и нужно, опираясь в индукционном предположении на верхнюю строчку формулы (4.6), доказать ее нижнюю строчку при $\kappa = r$. Поскольку $\mathrm{rev}_{\nu-1}(\lambda) = (1, \lambda_{\nu-r}, \ldots, \lambda_{\nu-2})_2 \ge \Delta_r$, то $b^{(r)}_{\nu}(\lambda) = 1$, и в силу (4.7)

$$U^{(r)}_{\nu}[l,m] = \omega^{\lambda\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(\mu)}_{\Delta_{\nu}} (-1)^{\sigma\tau} = \omega^{\lambda\,\mathrm{rev}_{\nu}(\mu)}_{\Delta_{\nu+1}} (-1)^{\{\sigma,\tau\}_{\nu}}.$$

Это соответствует нижней строчке формулы (4.6) при $\kappa = r$.

3) Если $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{\nu-\kappa-2} = 0$, $\lambda_{\nu-\kappa-1} = 1$ при некотором $\kappa \in r+1 : \nu-1$, то $l = \Delta_{\nu-\kappa}(2l'+1)$, где $l' = (\sigma, \lambda_{\nu-2}, \ldots, \lambda_{\nu-\kappa})_2$. При этом мы не выходим за рамки нижней строчки формулы (4.6). Исходя из (4.7) и равенства $b^{(r)}_{\nu}(\lambda) = 1$ и пользуясь для индукционного предположения представлением $l = \Delta_{\nu-1-(k-1)}(2l'+1)$, получаем

$$U^{(r)}_{\nu}[l,m] = \omega^{\lambda\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(\langle\mu\rangle_{\Delta_{\nu-\kappa+r}})}_{\Delta_{\nu}} (-1)^{\left\{ \lfloor \frac{\lambda}{\Delta_{\nu-\kappa+r}} \rfloor, \lfloor \frac{\mu}{\Delta_{\nu-\kappa+r}} \rfloor \right\}_{\nu-1}} (-1)^{\sigma\tau}.$$

Осталось заметить, что

$$\omega_{\Delta_\nu}^{\lambda\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(\langle\mu\rangle_{\Delta_{\nu-\kappa+r}})} = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{2(\lambda+\sigma\Delta_\nu)\,\mathrm{rev}_{\nu-1}(\langle m\rangle_{\Delta_{\nu-\kappa+r}})} = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\,\mathrm{rev}_\nu(\langle m\rangle_{\Delta_{\nu-\kappa+r}})}$$

и

$$\Big\{\big\lfloor\tfrac{\lambda}{\Delta_{\nu-\kappa+r}}\big\rfloor, \big\lfloor\tfrac{\mu}{\Delta_{\nu-\kappa+r}}\big\rfloor\Big\}_{\nu-1} + \sigma\tau = \sum_{p=\nu-\kappa+r-1}^{\nu-2} \lambda_p\mu_p + \sigma\tau =$$

$$= \Big\{\big\lfloor\tfrac{l}{\Delta_{\nu-\kappa+r}}\big\rfloor, \big\lfloor\tfrac{m}{\Delta_{\nu-\kappa+r}}\big\rfloor\Big\}_{\nu}.$$

Теорема доказана. ■

Следствие. *Ненулевые значения любого базисного сигнала* $f_\nu^{(r)}(k;j)$ *имеют вид* $\omega_{\Delta_{r+1}}^n$, *где* n — *некоторое целое число из множества* $\{0, 1, \ldots, \Delta_{r+1}-1\}$, *зависящее от* ν, k *и* j.

Действительно, все значения сигнала $f_\nu^{(r)}(k;j)$ равны либо нулю, либо какому-то элементу матрицы $U_\nu^{(r)}$. При $\nu \le r$ элементы $U_\nu^{(r)}$ задаются формулой (4.5), причем имеет место равенство $\omega_{\Delta_{\nu+1}} = \omega_{\Delta_{r+1}}^{\Delta_{r-\nu+1}}$. При $\nu \ge r+1$ возможны два варианта: либо $l = \Delta_{\nu-r+1}l'$, и тогда $\omega_{\Delta_{\nu+1}}^l = \omega_{\Delta_{r+1}}^{l'}$; либо $l = \Delta_{\nu-\kappa}(2l'+1)$ при некотором $\kappa \in r : \nu-1$, и тогда $\mathrm{rev}_\nu(\langle m\rangle_{\Delta_{\nu-\kappa+r}}) = (m_0, m_1, \ldots, m_{\nu-\kappa+r-2}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\kappa-r+1})_2 =: \Delta_{k-r+2}m''$

и

$$\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{l\,\mathrm{rev}_\nu(\langle m\rangle_{\Delta_{\nu-\kappa+r}})} = \omega_{\Delta_{\nu+1}}^{\Delta_{\nu-k}(2l'+1)\Delta_{k-r+2}m''} = \omega_{\Delta_{r+1}}^{(2l'+1)m''}. \qquad (4.9)$$

4.3. Формула (4.3) при $\nu = s$ дает нам выражение для модифицированных функций Ахмеда–Рао:

$$\widetilde{w}_l^{(r)}(j) = f_s^{(r)}(l;j) = \sum_{m=0}^{N-1} U_s^{(r)}[l,m]\,\delta_N(m-j) = U_s^{(r)}[l,j].$$

В частности, при $r = s$ согласно (4.5) имеем

$$\widetilde{w}_l^{(s)}(j) = \omega_N^{l\,\mathrm{rev}_s(j)} = u_l\big(\mathrm{rev}_s(j)\big), \quad j \in 0 : N-1.$$

Другими словами, модифицированные функции Ахмеда–Рао $\widetilde{w}_l^{(s)}$ на основном периоде представляют собой дискретные экспоненциальные функции, у которых ревертирован аргумент.

Менее очевиден следующий результат.

Теорема 4.4. *При $r = 1$ модифицированные функции Ахмеда–Рао совпадают с дискретными функциями Уолша:*

$$\widetilde{w}_l^{(1)}(j) = (-1)^{\{l,j\}_s}, \quad l, j \in 0 : N-1.$$

Доказательство. Зафиксируем $l, m \in 0 : N-1$, $l = (l_{s-1}, \ldots, l_0)_2$, $m = (m_{s-1}, \ldots, m_0)_2$. Формула (4.6) при $r = 1$ и $\nu = s$ принимает вид

$$U_s^{(1)}[l,m] = \begin{cases} \omega_N^{l\,\mathrm{rev}_s(m)}, \quad \text{если} \;\; l = N_1 l', \;\; l' \in \{0,1\}; \\ \omega_N^{l\,\mathrm{rev}_s(\langle m \rangle_{N_\kappa})} (-1)^{\left\{ \lfloor \frac{l}{N_\kappa} \rfloor, \lfloor \frac{m}{N_\kappa} \rfloor \right\}_s}, \\ \qquad \text{если} \;\; l = N_{\kappa+1}(2l'+1), \;\; l' \in 0 : \Delta_{\kappa+1} - 1, \\ \qquad\quad \kappa \in 1 : s-1. \end{cases} \tag{4.10}$$

Если $l_0 = l_1 = \ldots = l_{s-2} = 0$, то $l = N_1 l_{s-1}$ и, согласно (4.10),

$$U_s^{(1)}[l,m] = \omega_N^{N_1 l_{s-1}\,\mathrm{rev}_s(m)} = (-1)^{l_{s-1} m_{s-1}} = (-1)^{\{l,m\}_s}.$$

Если $l_0 = l_1 = \ldots = l_{s-\kappa-2} = 0$ и $l_{s-\kappa-1} = 1$ при некотором $\kappa \in 1 : s-1$, то $l = N_{\kappa+1}(2l'+1)$, где $l' = (l_{s-1}, \ldots, l_{s-\kappa})_2$. Положим $m' = (m_{s-1}, \ldots, m_{s-\kappa})_2$, $m'' = (m_0, m_1, \ldots, m_{s-\kappa-1})_2$. Согласно (4.9) имеем

$$\omega_N^{l\,\mathrm{rev}_s(\langle m \rangle_{N_\kappa})} = (-1)^{(2l'+1)m''} = (-1)^{m_{s-\kappa-1}}.$$

При этом

$$\left\{ \lfloor \tfrac{l}{N_\kappa} \rfloor, \lfloor \tfrac{m}{N_\kappa} \rfloor \right\}_s = \{l', m'\}_s = \sum_{p=s-\kappa}^{s-1} l_p m_p.$$

Подставляя эти равенства в (4.10), получаем

$$U_s^{(1)}[l,m] = (-1)^{l_{s-\kappa-1} m_{s-\kappa-1} + \sum_{p=s-\kappa}^{s-1} l_p m_p} = (-1)^{\{l,m\}_s}.$$

Итак, мы показали, что при всех $l, m \in 0 : N-1$ выполняется равенство $U_s^{(1)}[l,m] = (-1)^{\{l,m\}_s}$. Осталось учесть, что $\widetilde{w}_l^{(1)}(j) = U_s^{(1)}[l,j]$.

Теорема доказана. ■

§5. Обобщенные вейвлетные базисы

2.1. На основе рекуррентной схемы пересчета базисов (2.8) при каждом $r \in 1 : s$ можно стандартным образом построить обобщенный вейвлет-пакет [7, 8]. А именно, можно считать, что базис $f_{\nu-1}^{(r)}$ разбит на Δ_ν блоков; блоки помечены индексом l. Каждый такой блок содержит $N_{\nu-1}$ элементов с индексами $2p\Delta_\nu$ и $(2p+1)\Delta_\nu$. Согласно формулам (2.8) блок с индексом l базиса $f_{\nu-1}^{(r)}$ порождает два блока базиса $f_\nu^{(r)}$ с индексами l и $l+\Delta_\nu$, причем в каждом блоке находится N_ν элементов с внутренним индексом $p\Delta_{\nu+1}$. Такое разбиение на блоки обладает замечательным свойством: согласно теореме 4.2 сигналы l-го блока в базисе $f_\nu^{(r)}$ получаются из сигнала $f_\nu^{(r)}(l;j)$ с помощью сдвига аргумента на число, кратное $\Delta_{\nu+1}$.

Количество ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}_N$ можно значительно увеличить, если формировать базисы из блоков разных уровней. При этом в базис должны включаться только те блоки, которые не подвергаются дальнейшему делению (так называемые «висячие» блоки). Такие базисы получаются ортогональными автоматически: ортогональность сигналов $(\nu-1)$-го уровня известна, а сигналы каждого висячего блока ν-го уровня являются линейными комбинациями сигналов некоторого блока $(\nu-1)$-го уровня и поэтому они ортогональны сигналам из остальных блоков $(\nu-1)$-го уровня.

Ортогональные базисы в $\mathbb{C}_N$ при $N=2^s$, сформированные из блоков всех уровней $\nu=1,\dots,s$, называются обобщенными вейвлетными базисами. Совокупность всех возможных вейвлетных базисов (при фиксированном r) образует обобщенный вейвлет-пакет.

Таким образом, на основе дискретного преобразования Ахмеда–Рао с прореживанием по частоте в пространстве $\mathbb{C}_N$ можно построить s вейвлет-пакетов. При этом r-й вейвлет-пакет характеризуется следующей особенностью: каждый сигнал из любого вейвлетного базиса может принимать значения только из множества $\{0, \omega_{\Delta_{r+1}}^0, \omega_{\Delta_{r+1}}^1, \dots, \omega_{\Delta_{r+1}}^{\Delta_{r+1}-1}\}$. Например, при $r=1$ ненулевыми значениями сигналов могут быть только числа 1 и -1; при $r=2$ — числа 1, -1, i и $-i$; и т. д.

Особо выделим вейвлетный базис, который получится, если каждый раз делить блок с самым маленьким номером (что соответствует выбору $l=0$ в формулах (2.8)). Поскольку $b_\nu^{(r)}(0)=1$ при всех ν и r, то из (2.8) получим

$$
\begin{aligned}
f_0^{(r)}(k) &= \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\
f_\nu^{(r)}(p\Delta_{\nu+1}) &= f_{\nu-1}^{(r)}(2p\Delta_\nu) + f_{\nu-1}^{(r)}\big((2p+1)\Delta_\nu\big), \\
f_\nu^{(r)}(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}) &= f_{\nu-1}^{(r)}(2p\Delta_\nu) - f_{\nu-1}^{(r)}\big((2p+1)\Delta_\nu\big), \\
& p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Отметим, что формулы (5.1) при любом r порождают одну и ту же систему сигналов

$$
f_s(0); \quad f_\nu(\Delta_\nu + p\Delta_{\nu+1}), \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{5.2}
$$

Как известно [5], сигналы (5.2) образуют дискретный базис Хаара, связанный с прореживанием по частоте. Этот базис хорошо изучен (см., например, [10], где имеется обширная библиография, а также недавние работы [11, 12]).

Список литературы

[1] Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975. 208 с.

[2] Ахмед Н., Рао К. Р. *Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.* М.: Связь, 1980. 248 с.

[3] Дагман Э. Е., Кухарев Г. А. *Быстрые дискретные ортогональные преобразования.* Новосибирск: Наука, 1983. 232 с.

[4] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Новый подход к алгоритму Кули–Тьюки* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 3 (№15). С. 57–60.

[5] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Алгоритм Кули–Тьюки и дискретное преобразование Хаара* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№15). С. 31–34.

[6] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Секционирование, ортогональность и перестановки* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1999. Вып. 1 (№1). С. 16–21.

[7] Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина—Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. №1. С. 111–157.

[8] Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Формула Глассмана, быстрое преобразование Фурье и вейвлетные разложения* // Труды Санкт-Петербургского математического общества. Т. 9. 2001. С. 97–119.

[9] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984. 318 с.

[10] Залманзон Л. А. *Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 496 с.

[11] Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 2. С. 27–37.

[12] Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Хааровские спектры дискретных сверток* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2000. Т. 40. №6. С. 954–960.

ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

A. V. Korovkin and S. M. Masharsky

ON THE FAST AHMED–RAO TRANSFORM WITH SUBSAMPLING IN FREQUENCY