УДК 519.72

А. В. Коровкин, С. М. Машарский

О БЫСТРОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ АХМЕДА–РАО С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ[1]

На основе дискретного преобразования Ахмеда–Рао в пространстве дискретных N-периодических сигналов при $N = 2^s$ построено параметрическое семейство рекуррентных последовательностей ортогональных базисов. Представлен явный вид базисных сигналов. Показано, как с их помощью сформировать обобщенные вейвлет-пакеты. Предложен быстрый алгоритм вычисления коэффициентов разложений по всем указанным базисам.

Введение

До 1970-х гг. основным инструментом дискретного гармонического анализа являлось преобразование Фурье. Развитие и распространение цифровых ЭВМ потребовало привлечения в классический дискретный гармонический анализ других ортогональных преобразований, таких как преобразование Уолша, Хаара, дискретное косинусное, пилообразное и другие преобразования [1, 2, 3]. В их числе — и дискретное преобразование Ахмеда–Рао [2], которое представляет собой параметрическое семейство преобразований, включающее в себя преобразования Фурье и Уолша.

В последние годы был разработан новый подход к быстрым ортогональным преобразованиям. В работах [4, 5] результаты промежуточных вычислений быстрого преобразования Фурье впервые были проинтерпретированы как коэффициенты разложений по некоторым ортогональным базисам. В пространстве дискретных периодических сигналов при длине периода, равной 2^s, были построены рекуррентные последовательности ортогональных базисов, имеющих блочную структуру. В работе [6] с аналогичных позиций проанализировано дискретное преобразование Уолша. Наиболее полно этот подход изложен в недавних работах [7, 8]. В них указано, как из блоков, принадлежащих *разным базисам* рекуррентной последовательности, формировать обобщенные вейвлетные базисы.

В настоящей работе этот подход применен к исследованию дискретного преобразования Ахмеда–Рао. Это преобразование представляет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке в форме совместного гранта Министерства образования Российской Федерации и Администрации Санкт-Петербурга (шифр гранта PD02-1.1-204).

определенный интерес, поскольку порождающие его базисные сигналы принимают ограниченное число значений на единичной окружности комплексной плоскости. В пространстве дискретных периодических сигналов строится семейство рекуррентных последовательностей ортогональных базисов. Финальным базисом во всех последовательностях являются дискретные функции Ахмеда–Рао. На основе этих последовательностей строится алгоритм быстрого преобразования Ахмеда–Рао. Эффективные расчетные формулы получаются путем использования индексной техники, когда при умножении разреженной матрицы на вектор убираются все операции с нулевыми элементами матрицы. После построения последовательности ортогональных базисов естественным образом формируется обобщенный вейвлет-пакет.

Прокомментируем содержание статьи по параграфам. В § 1 приводятся предварительные сведения, необходимые для дальнейшего изложения материала. В § 2 изучаются свойства матриц-сомножителей, входящих в факторизацию матрицы дискретного преобразования Ахмеда–Рао, и строятся последовательности ортогональных базисов. В § 3 представлена вычислительная схема быстрого преобразования Ахмеда–Рао. В § 4 детально изучаются базисные сигналы из рекуррентных последовательностей: выясняется их структура и явный вид, устанавливается связь между дискретными функциями Ахмеда–Рао, гармониками Фурье и функциями Уолша. В § 5 строится обобщенный вейвлет-пакет.

§1. Предварительные сведения

1.1. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами*. В $\mathbb{C}_N$ обычным способом вводятся скалярное произведение и норма:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\,\overline{y(j)}, \qquad \|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Единичным N-периодическим импульсом называется сигнал $\delta_N(j)$, равный единице, когда j делится на N, и равный нулю при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Система сдвигов $\delta_N(j)$, $\delta_N(j-1)$, $\ldots$, $\delta_N(j-N+1)$ образует ортонормированный базис в $\mathbb{C}_N$.

Положим $u_k(j) = \omega_N^{kj}$, где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$ — корень N-й степени из 1. Сигналы $u_0(j)$, $u_1(j)$, $\ldots$, $u_{N-1}(j)$ образуют еще один ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$, который называется экспоненциальным.

1.2. В дальнейшем считаем, что $N = 2^s$, где s — натуральное число, отличное от единицы. Положим $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$. В частности, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_{\nu+1} = N_{s-\nu}$ при $\nu = 0, 1, \ldots, s$.

Любое число $j \in 0 : N-1$ можно записать в двоичном коде: $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_2$. Эта запись означает, что $j = j_{s-1}2^{s-1} + j_{s-2}2^{s-2} + \ldots + j_0$, где $j_\nu \in \{0, 1\}$ при всех $\nu = 0, 1, \ldots, s-1$. Введем обозначение

$$\mathrm{rev}_s(j) = (j_0, j_1, \ldots, j_{s-1})_2.$$

Операция rev_s сопоставляет числу j число $\mathrm{rev}_s(j)$, двоичный код которого равен перевернутому двоичному коду числа j. Идентификатор rev связан со словом *реверс*, а индекс s указывает на количество ревертируемых двоичных разрядов.

1.3. Дискретное преобразование Ахмеда–Рао представляет собой параметрическое семейство дискретных ортогональных преобразований [2]. При каждом $r = 1, \ldots, s$ оно задается матрицей

$$G^{(r)} = D_s^{(r)} D_{s-1}^{(r)} \cdots D_1^{(r)}, \tag{1.1}$$

где

$$D_\nu^{(r)} = \mathrm{diag}\left[A_0^{(r)}, A_1^{(r)}, \ldots, A_{\Delta_\nu - 1}^{(r)}\right] \otimes E_{N_\nu}, \quad \nu \in 1 : s; \tag{1.2}$$

$$A_l^{(r)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \omega_N^{\mathrm{rev}_{s-1}(l)} \\ 1 & -\omega_N^{\mathrm{rev}_{s-1}(l)} \end{pmatrix}, & l \in 0 : \Delta_r - 1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & l \in \Delta_r : \Delta_s - 1; \end{cases} \tag{1.3}$$

E_{N_ν} — единичная матрица порядка N_ν, символ $\otimes$ означает тензорное произведение матриц (см., например, [9]).

Сигналы

$$w_k^{(r)}(j) = G^{(r)}[k, j], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.4}$$

назовем *дискретными функциями Ахмеда–Рао*. Формулой (1.4) сигналы $w_k^{(r)}(j)$ определены на основном периоде $j \in 0 : N-1$. Далее они продолжаются N-периодически на все целые $j \in \mathbb{Z}$. При фиксированном $r \in 1 : s$ система сигналов $w_0^{(r)}(j)$, $w_1^{(r)}(j)$, …, $w_{N-1}^{(r)}(j)$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathbb{C}_N$.

§2. Последовательность ортогональных базисов

2.1. Зафиксируем $r \in 1 : s$ и изучим свойств матриц, входящих в факторизацию (1.1). Введем обозначение

$$a^{(r)}(l) = \begin{cases} \omega_N^{\mathrm{rev}_s(2l)}, & \text{если } \ l \in 0 : \Delta_r - 1, \\ 1, & \text{если } \ l \in \Delta_r : \Delta_s - 1. \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Матрица* $D_\nu^{(r)}$ *имеет следующую структуру:*

$$D_\nu^{(r)}[lN_{\nu-1} + \sigma N_\nu + p,\, lN_{\nu-1} + \tau N_\nu + p] = (-1)^{\sigma\tau}\big[a^{(r)}(l)\big]^\tau,$$

$$l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \sigma, \tau \in \{0, 1\};$$

$$D_\nu^{(r)}[k, j] = 0 \ \text{ при остальных } \ k, j \in 0 : N - 1.$$

Доказательство. Пусть $k = (2l + \sigma)N_\nu + p,\ j = (2l' + \tau)N_\nu + p'$, где $p, p' \in 0 : N_\nu - 1,\ l, l' \in 0 : \Delta_\nu - 1,\ \sigma, \tau \in \{0, 1\}$. Согласно (1.2) имеем

$$D_\nu^{(r)}[k, j] = \begin{cases} A_l^{(r)}[\sigma, \tau], & \text{если } \ l = l' \ \text{ и } \ p = p', \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

При этом в силу (1.3)

$$A_l^{(r)}[\sigma, \tau] = \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{\sigma\tau} \omega_N^{\tau\, \mathrm{rev}_{s-1}(l)}, & l \in 0 : \Delta_r - 1, \\ (-1)^{\sigma\tau}, & l \in \Delta_r : \Delta_s - 1 \end{array} \right\} = (-1)^{\sigma\tau}\big[a^{(r)}(l)\big]^\tau \tag{2.1}$$

(мы воспользовались тем, что $\mathrm{rev}_{s-1}(l) = \mathrm{rev}_s(2l)$).

Лемма доказана. ■

Обозначим $Q_\nu^{(r)} = D_\nu^{(r)} D_{\nu-1}^{(r)} \cdots D_1^{(r)}$.

Лемма 2.2. *При всех* $\nu = 1, \ldots, s$ *справедлива формула*

$$Q_\nu^{(r)}\big[Q_\nu^{(r)}\big]^* = 2^\nu E_N,$$

где $\big[Q_\nu^{(r)}\big]^*$ *— сопряженная по отношению к* $Q_\nu^{(r)}$ *матрица.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что $A_l^{(r)}\big[A_l^{(r)}\big]^* = 2E_2$ при всех $l \in 0 : \Delta_s - 1$. Отсюда, пользуясь свойством тензорного произведения $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, получаем

$$D_\nu^{(r)}\big[D_\nu^{(r)}\big]^* = \mathrm{diag}\,(\underbrace{2E_2, 2E_2, \ldots, 2E_2}_{\Delta_\nu \text{ раз}}) \otimes E_{N_\nu} = 2E_N.$$

Окончательно,

$$Q_\nu^{(r)}\bigl[Q_\nu^{(r)}\bigr]^* = D_\nu^{(r)} D_{\nu-1}^{(r)} \cdots D_1^{(r)} \bigl[D_1^{(r)}\bigr]^* \cdots \bigl[D_{\nu-1}^{(r)}\bigr]^* \bigl[D_\nu^{(r)}\bigr]^* = 2^\nu E_N.$$

Лемма доказана. ■

2.2. На основе факторизации (1.1) построим в $\mathbb{C}_N$ при $N = 2^s$ последовательность ортогональных базисов $\{g_\nu^{(r)}(k;j)\}_{k=0}^{N-1}$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, так, чтобы $g_0^{(r)}(k;j) = \delta_N(j-k)$ и $g_s^{(r)}(k;j) = w_k^{(r)}(j)$. Сигналы $g_\nu^{(r)}(k;j)$ как элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем обозначать $g_\nu^{(r)}(k)$; ν-й базис запишем в виде вектор-сигнала $g_\nu^{(r)} = \bigl(g_\nu^{(r)}(0), g_\nu^{(r)}(1), \ldots, g_\nu^{(r)}(N-1)\bigr)^\top$ и определим его формулой

$$g_\nu^{(r)} = D_\nu^{(r)} D_{\nu-1}^{(r)} \cdots D_1^{(r)} g_0^{(r)}. \tag{2.2}$$

В лемме 2.2, по существу, установлено, что строки матрицы $Q_\nu^{(r)}$ попарно ортогональны и квадрат нормы каждой из них равен 2^ν. Учитывая соотношение $g_\nu^{(r)} = Q_\nu^{(r)} g_0^{(r)}$, приходим к следующему выводу.

Теорема 2.1. *При всех $\nu \in 0 : s$ сигналы $g_\nu^{(r)}(0)$, $g_\nu^{(r)}(1)$, $\ldots$, $g_\nu^{(r)}(N-1)$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}_N$ и $\|g_\nu^{(r)}(k)\|^2 = 2^\nu$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.*

Из (2.2) следует, что

$$g_\nu^{(r)} = D_\nu^{(r)} g_{\nu-1}^{(r)}, \quad \nu = 1, \ldots, s. \tag{2.3}$$

Формула (2.3) и лемма 2.1 позволяют записать развернутую схему перехода от базиса $g_{\nu-1}^{(r)}$ к базису $g_\nu^{(r)}$:

$$\begin{gathered} g_0^{(r)}(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ \begin{aligned} g_\nu^{(r)}(2lN_\nu + p) &= g_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1} + p) + a^{(r)}(l)\, g_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \\ g_\nu^{(r)}\bigl((2l+1)N_\nu + p\bigr) &= g_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1} + p) - a^{(r)}(l)\, g_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p), \end{aligned} \\ l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{2.4}$$

§3. Быстрое преобразование Ахмеда–Рао

3.1. Любой сигнал $y \in \mathbb{C}_N$ при $N = 2^s$ можно разложить по ортогональному базису $g_\nu^{(r)}(0),\ g_\nu^{(r)}(1),\ \ldots,\ g_\nu^{(r)}(N-1)$ при каждом $\nu = 0, 1, \ldots, s$:

$$y = \sum_{k=0}^{N-1} y_\nu^{(r)}(k)\, g_\nu^{(r)}(k). \tag{3.1}$$

Здесь $y_\nu^{(r)}(k) = 2^{-\nu}\langle y, g_\nu^{(r)}(k)\rangle$. В частности,

$$y_0^{(r)}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} y(j)\, \delta_N(j-k) = y(k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Согласно (2.4)

$$y_\nu^{(r)}(2lN_\nu + p) = 2^{-\nu}\big[\big\langle y, g_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+p)\big\rangle + \overline{a^{(r)}(l)}\big\langle y, g_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+N_\nu+p)\big\rangle\big] =$$

$$= \frac{1}{2}\big[y_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+p) + \overline{a^{(r)}(l)}\, y_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+N_\nu+p)\big].$$

Аналогичное выражение можно получить и для $y_\nu^{(r)}\big((2l+1)N_\nu + p\big)$.

Приходим к следующей рекуррентной схеме вычисления коэффициентов разложений (3.1):

$$y_0^{(r)}(k) = y(k), \quad k \in 0 : N-1;$$

$$\begin{aligned} y_\nu^{(r)}(2lN_\nu + p) &= \tfrac{1}{2}\big[y_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+p) + \overline{a^{(r)}(l)}\, y_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+N_\nu+p)\big], \\ y_\nu^{(r)}\big((2l+1)N_\nu + p\big) &= \tfrac{1}{2}\big[y_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+p) - \overline{a^{(r)}(l)}\, y_{\nu-1}^{(r)}(lN_{\nu-1}+N_\nu+p)\big], \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

При $\nu = s$ получаем разложение сигнала y по дискретным функциям Ахмеда–Рао:

$$y(j) = \sum_{k=0}^{N-1} y_s^{(r)}(k)\, w_k^{(r)}(j).$$

Попутно вычисляются коэффициенты разложений по всем промежуточным базисам.

Формула (3.2) допускает обращение. Действительно, пользуясь тем, что $|a^{(r)}(l)| = 1$, можно записать

$$\begin{aligned} y^{(r)}_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + p) \;&=\; y^{(r)}_{\nu}(2lN_\nu + p) + y^{(r)}_{\nu}\big((2l+1)N_\nu + p\big), \\ y^{(r)}_{\nu-1}(lN_{\nu-1} + N_\nu + p) \;&=\; a^{(r)}(l)\big[y^{(r)}_{\nu}(2lN_\nu + p) - y^{(r)}_{\nu}\big((2l+1)N_\nu + p\big)\big], \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$l \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = s, s-1, \ldots, 1.$$

Основная роль формул (3.3) заключается в том, что с их помощью вычисляются значения сигнала y, заданного в виде (3.1) при некотором $\nu \in 1 : s$, на основном периоде, а именно:

$$y(k) = y^{(r)}_0(k), \quad k \in 0 : N - 1.$$

3.2. Формулы (3.2) при $r = s$ совпадают с вычислительными формулами алгоритма Кули–Тьюки быстрого преобразования Фурье, связанного с прореживанием по времени [4, 10]. При $r = 1$ формулы (3.2) описывают алгоритм быстрого преобразования Уолша с прореживанием по времени [6].

Это дает нам основание назвать вычислительную схему (3.2) *быстрым преобразованием Ахмеда–Рао, связанным с прореживанием по времени.*

§4. Свойства базисов $g^{(r)}_\nu$

4.1. Получим явное представление для базисных сигналов $g^{(r)}_\nu(k)$. Для этого введем систему матриц $\big\{T^{(r)}_\nu\big\}^s_{\nu=1}$:

$$T^{(r)}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$T^{(r)}_\nu[2l+\sigma,\, 2m+\tau] = A^{(r)}_l[\sigma,\tau]\, T^{(r)}_{\nu-1}[l,m], \tag{4.2}$$

$$l, m \in 0 : \Delta_\nu - 1, \quad \sigma, \tau \in \{0, 1\}, \quad \nu = 2, \ldots, s.$$

Отметим, что $T^{(r)}_\nu$ — квадратная матрица порядка $\Delta_{\nu+1}$.

Теорема 4.1. *Справедливо представление*

$$g^{(r)}_\nu(lN_\nu + p) = \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T^{(r)}_\nu[l,m]\, g^{(r)}_0(mN_\nu + p), \tag{4.3}$$

$$l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $\nu = 1$ формула (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} g_1^{(r)}(p) &= g_0^{(r)}(p) + g_0^{(r)}(N_1 + p), \\ g_1^{(r)}(N_1 + p) &= g_0^{(r)}(p) - g_0^{(r)}(N_1 + p), \end{aligned}$$

что совпадает с (2.4) при $\nu = 1$.

Сделаем индукционный переход от $\nu - 1$ к ν. Представим индекс $l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1$ в виде $l = 2l' + \sigma$, где $l' \in 0 : \Delta_\nu - 1$, $\sigma \in \{0, 1\}$. На основании (2.4), (2.1), индукционного предположения и (4.2) получаем

$$g_\nu^{(r)}\big((2l' + \sigma)N_\nu + p\big) = \sum_{\tau=0}^{1} (-1)^{\sigma\tau} \big[a^{(r)}(l')\big]^\tau g_{\nu-1}^{(r)}(l' N_{\nu-1} + \tau N_\nu + p) =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{1} A_{l'}^{(r)}[\sigma, \tau] \sum_{m'=0}^{\Delta_\nu - 1} T_{\nu-1}^{(r)}[l', m'] \, g_0^{(r)}\big(m' N_{\nu-1} + (\tau N_\nu + p)\big) =$$

$$= \sum_{m'=0}^{\Delta_\nu - 1} \sum_{\tau=0}^{1} T_\nu^{(r)}[2l' + \sigma, \, 2m' + \tau] \, g_0^{(r)}\big((2m' + \tau)N_\nu + p\big) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} T_\nu^{(r)}[l, m] \, g_0^{(r)}(m N_\nu + p).$$

Теорема доказана. ■

Теорема 4.2. *Справедливо тождество*

$$g_\nu^{(r)}(l N_\nu + p; j) = g_\nu^{(r)}(l N_\nu; j - p), \tag{4.4}$$

$$l \in 0 : \Delta_{\nu+1} - 1, \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu \in 1 : s.$$

Доказательство. В соответствии с (4.3) имеем

$$g_\nu^{(r)}(l N_\nu; j) = \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} T_\nu^{(r)}[l, m] \, \delta_N(j - m N_\nu).$$

Поэтому

$$g_\nu^{(r)}(lN_\nu; j-p) = \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu^{(r)}[l,m]\,\delta_N\bigl(j-(mN_\nu+p)\bigr) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} T_\nu^{(r)}[l,m]\,g_0^{(r)}(mN_\nu+p; j) = g_\nu^{(r)}(lN_\nu+p; j).$$

Теорема доказана. ■

4.2. Формула (4.3) дает точное представление о структуре базисных сигналов, однако коэффициенты в этом разложении не определены явно, а вычисляются рекуррентно по формуле (4.2). Ответ на вопрос о явном выражении для элементов матрицы $T_\nu^{(r)}$ оказывается довольно нетривиальным.

Пусть p, q — целые числа, принадлежащие множеству $\{0, 1, \ldots, N-1\}$. Запишем их двоичные коды $p = (p_{s-1}, p_{s-2}, \ldots, p_0)_2$, $q = (q_{s-1}, q_{s-2}, \ldots, q_0)_2$ и положим

$$\{p,q\}_\nu = \sum_{k=0}^{\nu-1} p_k\, q_k.$$

Будем использовать стандартные обозначения $\lfloor \alpha \rfloor$ для целой части вещественного числа α и $\langle m \rangle_n$ для остатка от деления целого числа m на натуральное n.

Теорема 4.3. *Пусть* $\nu \in 1:s$, $l,m \in 0:\Delta_{\nu+1}-1$. *Справедливо равенство*

$$T_\nu^{(r)}[l,m] = \begin{cases} \omega_N^{m\,\mathrm{rev}_s(l)}, \quad \textit{если} \;\; l \in 0:\Delta_{r+1}-1; \\[2ex] \omega_N^{\Delta_{\kappa-r+2}\left\lfloor \frac{m}{\Delta_{\kappa-r+2}}\right\rfloor \mathrm{rev}_s(l)} (-1)^{\{l,\langle m\rangle_{\Delta_{\kappa-r+2}}\}_s}, \\ \qquad \textit{если} \;\; l = \Delta_{\kappa+1}+l', \;\; l' \in 0:\Delta_{\kappa+1}-1, \\ \qquad\qquad \kappa \in r:\nu-1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть числа l и m имеют двоичные коды $(l_{\nu-1}, l_{\nu-2}, \ldots, l_0)_2$ и $(m_{\nu-1}, m_{\nu-2}, \ldots, m_0)_2$ соответственно.

При $\nu = 1$ имеем $l = l_0 < \Delta_{r+1}$ независимо от r, поэтому

$$T_1^{(r)}[l,m] = \omega_N^{m\,\mathrm{rev}_s(l)} = \omega_N^{ml_0\Delta_s} = (-1)^{ml},$$

что соответствует (4.1).

Сделаем индукционный переход от $\nu-1$ к ν. Индексы l, m представим в виде $l = 2\lambda + l_0$, $m = 2\mu + m_0$, где $\lambda = (l_{\nu-1}, \ldots, l_1)_2$, $\mu = (m_{\nu-1}, \ldots, m_1)_2$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{rev}_s(\lambda) = 2\mathrm{rev}_s(2\lambda)$ и

$$\mathrm{rev}_s(l) = l_0\Delta_s + \mathrm{rev}_s(2\lambda). \tag{4.6}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\omega_N^{\mathrm{rev}_s(\lambda)} = \omega_N^{2\,\mathrm{rev}_s(2\lambda)} = \omega_N^{2\,\mathrm{rev}_s(l)}. \tag{4.7}$$

Исходя из (4.2) и (2.1), можем записать

$$T_\nu^{(r)}[l,m] = (-1)^{l_0 m_0}\left[a^{(r)}(\lambda)\right]^{m_0} T_{\nu-1}^{(r)}[\lambda,\mu]. \tag{4.8}$$

Рассмотрим отдельно случаи $l \in 0 : \Delta_{r+1}-1$, $l \in \Delta_{r+1} : \Delta_{r+2}-1$ и $l \geq \Delta_{r+2}$.

При $l \in 0 : \Delta_{r+1}-1$ имеем $\lambda \in 0 : \Delta_r - 1$ и, как следствие, $a^{(r)}(\lambda) = \omega_N^{\mathrm{rev}_s(2\lambda)}$. В силу (4.8), индукционного предположения, (4.7) и (4.6) получаем

$$T_\nu^{(r)}[l,m] = (-1)^{l_0 m_0}\omega_N^{m_0\,\mathrm{rev}_s(2\lambda)}\omega_N^{\mu\,\mathrm{rev}_s(\lambda)} =$$

$$= \omega_N^{m_0(l\Delta_s + \mathrm{rev}_s(2\lambda))}\omega_N^{2\mu\,\mathrm{rev}_s(l)} = \omega_N^{m\,\mathrm{rev}_s(l)},$$

что соответствует (4.5).

Пусть $l = \Delta_{r+1} + l'$, $l' \in 0 : \Delta_{r+1}-1$, тогда $\lambda = \Delta_r + \lfloor l'/2 \rfloor < \Delta_{r+1}$. При этом $a^{(r)}(\lambda) = 1$ и

$$T_\nu^{(r)}[l,m] = (-1)^{l_0 m_0}\omega_N^{\mu\,\mathrm{rev}_s(\lambda)} = \omega_N^{2\mu\,\mathrm{rev}_s(l)}(-1)^{\{l_0, m_0\}_s},$$

что соответствует нижней строчке формулы (4.5) при $\kappa = r$.

Пусть, наконец, $l = \Delta_{\kappa+1} + l'$, $l' \in 0 : \Delta_{\kappa+1}-1$, при некотором $\kappa \in r+1 : \nu-1$. В этом случае $\lambda = \Delta_{(\kappa-1)+1} + \lfloor l'/2 \rfloor \geq \Delta_{r+1}$, $a^{(r)}(\lambda) = 1$ и

$$T_\nu^{(r)}[l,m] = (-1)^{l_0 m_0}\omega_N^{\Delta_{(\kappa-1)-r+2}\left\lfloor \frac{\mu}{\Delta_{(\kappa-1)-r+2}} \right\rfloor \mathrm{rev}_s(\lambda)}(-1)^{\{\lambda, \langle\mu\rangle_{\Delta_{(\kappa-1)-r+2}}\}_s} =$$

$$= \omega_N^{\Delta_{\kappa-r+2}\left\lfloor \frac{\mu}{\Delta_{\kappa-r+1}} \right\rfloor \mathrm{rev}_s(l)}(-1)^{\{\lambda, \langle\mu\rangle_{\Delta_{\kappa-r+1}}\}_s + l_0 m_0}.$$

Осталось заметить, что $\lfloor\frac{\mu}{\Delta_{\kappa-r+1}}\rfloor = \lfloor\frac{m}{\Delta_{\kappa-r+2}}\rfloor$ и

$$\{\lambda, \langle\mu\rangle_{\Delta_{\kappa-r+1}}\}_s + l_0 m_0 = \sum_{p=1}^{k-r} l_p m_p + l_0 m_0 = \{\lambda, \langle m\rangle_{\Delta_{\kappa-r+2}}\}_s.$$

Теорема доказана. ■

Следствие. *Ненулевые значения любого базисного сигнала* $g_\nu^{(r)}(k;j)$ *имеют вид* $\omega_{\Delta_{r+1}}^n$, *где* n *— некоторое целое число из множества* $\{0,\,1,\,\ldots,\Delta_{r+1}-1\}$, *зависящее от* ν, k *и* j.

Действительно, все значения сигнала $g_\nu^{(r)}(k;j)$ равны либо нулю, либо какому-то элементу матрицы $T_\nu^{(r)}$. При этом, согласно (4.5), возможны два варианта: либо $l\in 0:\Delta_{r+1}-1$, и тогда $\mathrm{rev}_s(l) = (l_0,\ldots,l_{r-1}, 0,\ldots,0)_2 = N_r \mathrm{rev}_r(l)$ и

$$\omega_N^{\mathrm{rev}_s(l)} = \omega_{\Delta_{r+1}}^{\mathrm{rev}_r(l)}; \tag{4.9}$$

либо $l = \Delta_{\kappa+1} + l'$ при некотором $\kappa\in r:\nu-1$, и тогда $\mathrm{rev}_s(l) = N_{\kappa+1}\mathrm{rev}_{\kappa+1}(l)$ и

$$\omega_N^{\Delta_{\kappa-r+2}\,\mathrm{rev}_s(l)} = \omega_{\Delta_{r+1}}^{\mathrm{rev}_{\kappa+1}(l)}, \tag{4.10}$$

поскольку $\Delta_{\kappa-r+2}N_{\kappa+1} = N_r$.

4.3. Формула (4.3) при $\nu = s$ дает нам выражение для дискретных функций Ахмеда–Рао:

$$w_l^{(r)}(j) = f_s^{(r)}(l;j) = \sum_{m=0}^{N-1} T_s^{(r)}[l,m]\,\delta_N(m-j) = T_s^{(r)}[l,j].$$

В частности, при $r=s$ согласно (4.5) имеем

$$w_l^{(s)}(j) = \omega_N^{j\,\mathrm{rev}_s(l)} = u_{\mathrm{rev}_s(l)}(j), \quad l,j\in 0:N-1.$$

Другими словами, дискретные функции Ахмеда–Рао $w_l^{(s)}$ лишь порядком нумерации отличаются от дискретных экспоненциальных функций.

Менее очевиден следующий результат.

Теорема 4.4. *При* $r=1$ *дискретные функции Ахмеда–Рао совпадают с дискретными функциями Уолша:*

$$w_l^{(1)}(j) = (-1)^{\{l,j\}_s}, \quad l,j\in 0:N-1.$$

Доказательство. Зафиксируем $l, m \in 0 : N-1$, $l = (l_{s-1}, \ldots, l_0)_2$, $m = (m_{s-1}, \ldots, m_0)_2$. Формула (4.5) при $r = 1$ и $\nu = s$ с учетом (4.9) и (4.10) примет вид

$$T_s^{(1)}[l, m] = \begin{cases} (-1)^{m \operatorname{rev}_1(l)}, \quad \text{если} \ \ l \in \{0, 1\}; \\ \\ (-1)^{\left\lfloor \frac{m}{\Delta_{\kappa+1}} \right\rfloor \operatorname{rev}_{\kappa+1}(l)} (-1)^{\{l, \langle m \rangle_{\Delta_{\kappa+1}}\}_s}, \\ \qquad \text{если} \ \ l = \Delta_{\kappa+1} + l', \ \ l' \in 0 : \Delta_{\kappa+1} - 1, \\ \qquad\qquad \kappa \in 1 : s-1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Если $l_{s-1} = l_{s-2} = \ldots = l_1 = 0$, то $l = l_0 = \operatorname{rev}_1(l)$ и

$$T_s^{(1)}[l, m] = (-1)^{l_0 (m_0 + 2m_1 + \ldots)} = (-1)^{l_0 m_0} = (-1)^{\{l, m\}_s}.$$

Если $l_{s-1} = l_{s-2} = \ldots = l_{\kappa+1} = 0$ и $l_\kappa = 1$ при некотором $\kappa \in 1 : s-1$, то $l = \Delta_{\kappa+1} + l'$, где $l' = (l_{\kappa-1}, \ldots, l_0)_2$, и $\operatorname{rev}_{\kappa+1}(l) = (l_0, l_1, \ldots, l_{\kappa-1}, 1)_2 = 2\operatorname{rev}_\kappa(l') + 1$. Согласно (4.11) имеем

$$T_s^{(1)}[l, m] = (-1)^{\left\lfloor \frac{m}{\Delta_{\kappa+1}} \right\rfloor} (-1)^{\{l, \langle m \rangle_{\Delta_{\kappa+1}}\}_s} = (-1)^{m_\kappa + \{l, \langle m \rangle_{\Delta_{\kappa+1}}\}_s}.$$

При этом

$$m_\kappa + \{l, \langle m \rangle_{\Delta_{\kappa+1}}\}_s = l_\kappa m_\kappa + \sum_{p=0}^{\kappa-1} l_p m_p = \{l, m\}_s.$$

Итак, мы показали, что при всех $l, m \in 0 : N-1$ выполняется равенство $T_s^{(1)}[l, m] = (-1)^{\{l, m\}_s}$. Осталось учесть, что $w_l^{(1)}(j) = T_s^{(1)}[l, j]$.

Теорема доказана. ■

§5. Обобщенные вейвлетные базисы

2.1. На основе рекуррентной схемы пересчета базисов (2.4) при каждом $r \in 1 : s$ можно стандартным образом построить обобщенный вейвлет-пакет [7, 8]. А именно, можно считать, что базис $g_{\nu-1}^{(r)}$ разбит на Δ_ν блоков; блоки помечены индексом l. Каждый такой блок содержит $N_{\nu-1}$ элементов с индексами p и $p + N_\nu$. Согласно формулам (2.4) блок с индексом l базиса $g_{\nu-1}^{(r)}$ порождает два блока базиса $g_\nu^{(r)}$ с индексами $2l$ и $2l+1$, причем в каждом блоке находится N_ν элементов с внутренним индексом p. Такое разбиение на блоки обладает замечательным свойством: согласно теореме 4.2 сигналы l-го блока в базисе $g_\nu^{(r)}$ являются сдвигами образующего сигнала $g_\nu^{(r)}(lN_\nu; j)$.

Количество ортогональных базисов в пространстве $\mathbb{C}_N$ можно значительно увеличить, если формировать базисы из блоков разных уровней. При этом в базис должны включаться только те блоки, которые не подвергаются дальнейшему делению (так называемые «висячие» блоки). Такие базисы получаются ортогональными автоматически: ортогональность сигналов $(\nu-1)$-го уровня известна, а сигналы каждого висячего блока ν-го уровня являются линейными комбинациями сигналов некоторого блока $(\nu-1)$-го уровня и поэтому они ортогональны сигналам из остальных блоков $(\nu-1)$-го уровня.

Ортогональные базисы в $\mathbb{C}_N$ при $N = 2^s$, сформированные из блоков всех уровней $\nu = 1, \ldots, s$, называются обобщенными вейвлетными базисами. Совокупность всех возможных вейвлетных базисов (при фиксированном r) образует обобщенный вейвлет-пакет.

Таким образом, на основе дискретного преобразования Ахмеда–Рао с прореживанием по времени в пространстве $\mathbb{C}_N$ можно построить s вейвлет-пакетов. При этом r-й вейвлет-пакет характеризуется следующей особенностью: каждый сигнал из любого вейвлетного базиса может принимать значения только из множества $\{0, \omega_{\Delta_{r+1}}^0, \omega_{\Delta_{r+1}}^1, \ldots, \omega_{\Delta_{r+1}}^{\Delta_{r+1}-1}\}$. Например, при $r = 1$ ненулевыми значениями сигналов могут быть только числа 1 и -1; при $r = 2$ — числа 1, -1, i и $-i$; и т. д.

Особо выделим вейвлетный базис, который получится, если каждый раз делить блок с самым маленьким номером (что соответствует выбору $l = 0$ в формулах (2.4)). Поскольку $a^{(r)}(0) = 1$ при всех r, то из (2.4) получим

$$\begin{gathered} g_0^{(r)}(k) = \delta_N(\cdot - k), \quad k \in 0 : N-1; \\ g_\nu^{(r)}(p) = g_{\nu-1}^{(r)}(p) + g_{\nu-1}^{(r)}(N_\nu + p), \\ g_\nu^{(r)}(N_\nu + p) = g_{\nu-1}^{(r)}(p) - g_{\nu-1}^{(r)}(N_\nu + p), \\ p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Отметим, что формулы (5.1) при любом r порождают один и тот же вейвлетный базис

$$g_s(0); \quad g_\nu(N_\nu + p), \quad p \in 0 : N_\nu - 1, \quad \nu = 1, \ldots, s.$$

Этот базис называется базисом Хаара, связанным с прореживанием по времени. Он был впервые рассмотрен в [10] и детально изучен в [11, 12].

Список литературы

[1] Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Советское радио, 1975. 208 с.

[2] Ахмед Н., Рао К. Р. *Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.* М.: Связь, 1980. 248 с.

[3] Дагман Э. Е., Кухарев Г. А. *Быстрые дискретные ортогональные преобразования.* Новосибирск: Наука, 1983. 232 с.

[4] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Новый подход к алгоритму Кули–Тьюки* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1997. Вып. 3 (№15). С. 57–60.

[5] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Алгоритм Кули–Тьюки и дискретное преобразование Хаара* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№15). С. 31–34.

[6] Малоземов В. Н., Третьяков А. А. *Секционирование, ортогональность и перестановки* // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1999. Вып. 1 (№1). С. 16–21.

[7] Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина—Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. №1. С. 111–157.

[8] Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Формула Глассмана, быстрое преобразование Фурье и вейвлетные разложения* // Труды Санкт-Петербургского математического общества. Т. 9. 2001. С. 97–119.

[9] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. *Матрицы и вычисления.* М.: Наука, 1984. 318 с.

[10] Малоземов В. Н., Певный А. Б., Третьяков А. А. *Быстрое вейвлетное преобразование дискретных периодических сигналов и изображений* // Проблемы передачи информации. 1998. Т. 34. Вып. 2. С. 77–85.

[11] Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Сравнительное изучение двух вейвлетных базисов* // Проблемы передачи информации. 2000. Т. 36. Вып. 2. С. 27–37.

[12] Малоземов В. Н., Машарский С. М. *Хааровские спектры дискретных сверток* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2000. Т. 40. №6. С. 954–960.

ПЕРЕВОД НАЗВАНИЯ СТАТЬИ НА АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК

A. V. Korovkin and S. M. Masharsky

ON THE FAST AHMED–RAO TRANSFORM WITH SUBSAMPLING IN TIME