УДК 519.72

БАЗИСЫ АХМЕДА–РАО[1]

А.В. Коровкин, В.Н. Малоземов

При $N = 2^s$ в пространстве комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента построены s ортогональных базисов, таких, что элементы r-го базиса при $r \in \{1, \dots, s\}$ принимают 2^r значений, равномерно расположенных на единичной окружности комплексной плоскости.

Библиография: 4 названия.

1. Пусть $N = 2^s$. Число $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ можно единственным образом представить в виде $j = j_{s-1}2^{s-1} + j_{s-2}2^{s-2} + \dots + j_0$, где $j_k \in \{0, 1\}$. Для такого представления будем использовать более компактную запись $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$. Число $\operatorname{rev}_s(j) = (j_0, j_1, \dots, j_{s-1})_2$ называется ревертированным по отношению к j.

Возьмем два числа $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_2$ и $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \dots, k_0)_2$. Обозначим

$$\{k, j\}_p = \sum_{\alpha=0}^{p-1} k_\alpha j_\alpha, \quad p \in \{1, \dots, s\}.$$

Функции

$$v_k(j) = (-1)^{\{\operatorname{rev}_s(k), j\}_s}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

называются дискретными функциями Уолша [1, 2]. Продолженные с периодом N на все целые j, они образуют базис в пространстве $\mathbb{C}_N$ комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента. Элементы этого базиса принимают два значения $+1$ и -1.

Функции

$$u_k(j) = \omega_N^{kj}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$, образуют еще один базис в $\mathbb{C}_N$. Он называется экспоненциальным. Элементы экспоненциального базиса принимают $N = 2^s$ значений $1, \omega_N, \omega_N^2, \dots, \omega_N^{N-1}$.

В данной работе будут построены s базисов $\{w_r(k; j)\}_{k=0}^{N-1}$, $r = 1, \dots, s$, так, что элемент r-го базиса $w_r(k; j)$ принимает 2^r значений $1, \omega_{2^r}, \omega_{2^r}^2, \dots, \omega_{2^r}^{2^r-1}$. При этом $w_1(k; j) = v_k(j)$ и $w_s(k; j) = u_k(j)$ для всех $k = 0, 1, \dots, N-1$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №01-01-00231.

2. Целое число j допускает представление $j = j''2^p + j'$, где $j' \in \{0, 1, \ldots, 2^p - 1\}$, и такое представление единственно. Для неполного частного j'' и остатка j' используются обозначения $j'' = \lfloor j/2^p \rfloor$, $j' = \langle j \rangle_{2^p}$.

Напомним, что $N = 2^s$. Положим $N_p = N/2^p$ и при каждом $r \in \{1, \ldots, s\}$ введем функции

$$w_r(k; j) = \omega_N^{kj}, \quad k = N_r k', \quad k' \in \{0, 1, \ldots, 2^r - 1\}; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} w_r(k; j) = \omega_N^{2^{p-r+1}\lfloor j/2^{p-r+1}\rfloor k}(-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k),\, j\}_{p-r+1}}, \\ k = N_{p+1}(2k'+1), \quad k' \in \{0, 1, \ldots, 2^p - 1\}, \quad p \in \{r, \ldots, s-1\}. \end{gathered} \tag{2}$$

Формула (1) определена для $k = (k_{s-1}, \ldots, k_{s-r}, 0, \ldots, 0)_2$. Пусть $k = (k_{s-1}, \ldots, k_{\alpha+1}, 1, 0, \ldots, 0)_2$, где $\alpha \leq s-r-1$. Имеем $\alpha = s-p-1$, где $p \in \{r, \ldots, s-1\}$. Поскольку $k - 2^\alpha$ делится на $2^{\alpha+1}$, т.е. $k - 2^\alpha = k'2^{\alpha+1}$, то $k = N_{p+1}(2k'+1)$. Формула (2) определяет $w_r(k; j)$ при таком k. После продолжения с периодом N на все целые j функции $w_r(k; j)$ будут принадлежность пространству $\mathbb{C}_N$.

Очевидно, что $w_s(k; j) = u_k(j)$. Покажем, что $w_1(k; j) = v_k(j)$. Согласно (1) имеем

$$w_1(0; j) \equiv 1 = (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(0),\, j\}_s},$$

$$w_1(2^{s-1}; j) = \omega_2^{j} = \omega_2^{j_0} = (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(2^{s-1}),\, j\}_s}.$$

Обратимся к формуле (2). Пусть $k' = (k'_{p-1}, \ldots, k'_0)_2$. Тогда

$$2k'+1 = (k'_{p-1}, \ldots, k'_0, 1)_2, \quad k = (k'_{p-1}, \ldots, k'_0, 1, 0, \ldots, 0)_2,$$

$$\mathrm{rev}_s(k) = (0, \ldots, 0, 1, k'_0, \ldots, k'_{p-1})_2, \quad \{\mathrm{rev}_s(k), j\}_p = \textstyle\sum_{\alpha=0}^{p-1} k'_{p-1-\alpha} j_\alpha,$$

$$\{\mathrm{rev}_s(k), j\}_s = \{\mathrm{rev}_s(k), j\}_p + j_p. \tag{3}$$

Далее

$$\omega_N^{2^p\lfloor j/2^p\rfloor k} = \omega_2^{\lfloor j/2^p\rfloor(2k'+1)} = (-1)^{\lfloor j/2^p\rfloor} = (-1)^{j_p}. \tag{4}$$

На основании (2)–(4) получаем $w_1(k; j) = (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k),\, j\}_s}$.

3.Формулу (1) можно переписать так:

$$w_r(k; j) = \omega_{2^r}^{k'j}, \quad k = N_r k', \quad k' \in \{0, 1, \ldots, 2^r - 1\}. \tag{1$'$}$$

Преобразуем формулу (2). Индекс $j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ представим в виде

$$j = j''2^{p-r+1} + j', \quad j' \in \{0, 1, \ldots, 2^{p-r+1} - 1\}.$$

Тогда $\{\mathrm{rev}_s(k), j\}_{p-r+1} = \{\mathrm{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1}$ и

$$2^{p-r+1}\lfloor j/2^{p-r+1}\rfloor k = N_r j''(2k'+1).$$

Получаем

$$
\begin{gathered}
w_r(k;j)=\omega_{2^r}^{j''(2k'+1)+2^{r-1}\{\mathrm{rev}_s(k),j'\}_{p-r+1}},\\
k=N_{p+1}(2k'+1),\quad k'\in\{0,1,\dots,2^p-1\},\quad p\in\{r,\dots,s-1\}.
\end{gathered}\tag{2$'$}
$$

Из (1$'$), (2$'$) следует, что функции $w_r(k;j)$, $k=0,1,\dots,N-1$, принимают значения из множества $\{1,\omega_{2^r},\omega_{2^r}^2,\dots,\omega_{2^r}^{2^r-1}\}$.

4. Введем в $\mathbb{C}_N$ скалярное произведение и норму:

$$
\langle x,y\rangle=\sum_{j=0}^{N-1}x(j)\overline{y(j)},\qquad \|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2}.
$$

Теорема 1. *При каждом $r\in\{1,\dots,s\}$ функции $w_r(k;j)$, $k=0,1,\dots,N-1$, ортогональны. При этом $\|w_r(k;\cdot)\|^2=N$.*

Доказательство. Заключение теоремы при $r=s$ известно, поэтому считаем, что $r\in\{1,\dots,s-1\}$. Функции вида (1) ортогональны и квадрат их нормы равен N, поскольку это выборка из экспоненциального базиса. Разберёмся с функциями вида (2). Нам потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $r\in\{1,\dots,s-1\}$ и $p\in\{r,\dots,s-1\}$. Тогда*

$$
\sum_{j=0}^{N_{p-r+1}-1}\omega_{2^r}^{(2l+1)j}=0\quad\forall l\in\mathbb{Z}.
$$

Доказательство. Представим индекс $j\in\{0,1,\dots,2^{s-p+r-1}-1\}$ в виде $j=j''2^r+j'$, где $j'\in\{0,1,\dots,2^r-1\}$, $j''\in\{0,1,\dots,2^{s-p-1}-1\}$. Поскольку $z:=\omega_{2^r}^{2l+1}\neq 1$ и $z^{2^r}=1$, то

$$
\sum_{j=0}^{N_{p-r+1}-1}\omega_{2^r}^{(2l+1)j}=\sum_{j''=0}^{2^{s-p-1}-1}\sum_{j'=0}^{2^r-1}z^{j'}=0.
$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Имеем

$$
\begin{aligned}
\langle w_r(k;\cdot),w_r(l;\cdot)\rangle=\sum_{j=0}^{N-1}&\omega_N^{2^{p-r+1}\lfloor j/2^{p-r+1}\rfloor k-2^{q-r+1}\lfloor j/2^{q-r+1}\rfloor l}\\
&\times(-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k),j\}_{p-r+1}+\{\mathrm{rev}_s(l),j\}_{q-r+1}}.
\end{aligned}\tag{5}
$$

Здесь $k = N_{p+1}(2k'+1)$, $l = N_{q+1}(2l'+1)$, $k' \in \{0, 1, \ldots, 2^p - 1\}$, $l' \in \{0, 1, \ldots, 2^q - 1\}$, $p, q \in \{r, \ldots, s-1\}$. Пусть вначале $p \neq q$, для определенности $p > q$. Учитывая, что

$$\lfloor j/2^{q-r+1} \rfloor = \lfloor (2^{p-r+1} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor + \langle j \rangle_{2^{p-r+1}})/2^{q-r+1} \rfloor$$
$$= 2^{p-q} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor + \lfloor \langle j \rangle_{2^{p-r+1}}/2^{q-r+1} \rfloor,$$

получаем

$$\langle w_r(k; \cdot), w_r(l; \cdot) \rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{2^{p-r+1} \lfloor j/2^{p-r+1} \rfloor (k-l) - 2^{q-r+1} \lfloor \langle j \rangle_{2^{p-r+1}}/2^{q-r+1} \rfloor l}$$
$$\times (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k), \langle j \rangle_{2^{p-r+1}}\}_{p-r+1} + \{\mathrm{rev}_s(l), \langle j \rangle_{2^{p-r+1}}\}_{q-r+1}}.$$

Положим $j = j'' 2^{p-r+1} + j'$, $j' \in \{0, 1, \ldots, 2^{p-r+1} - 1\}$, $j'' \in \{0, 1, \ldots, N_{p-r+1} - 1\}$. Тогда

$$\langle w_r(k; \cdot), w_r(l; \cdot) \rangle = \sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{2^r}^{j''(2k'+1-2^{p-q}(2l'+1))}$$
$$\times \sum_{j'=0}^{2^{p-r+1}-1} \omega_N^{-2^{q-r+1} \lfloor j'/2^{q-r+1} \rfloor l} (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1} + \{\mathrm{rev}_s(l), j'\}_{q-r+1}}.$$

По лемме первая сумма в правой части последнего равенства равна нулю. Значит, равно нулю и скалярное произведение.

Пусть теперь $q = p$ и $k' > l'$. Положив, как и раньше, $j = j'' 2^{p-r+1} + j'$, перепишем формулу (5) в виде

$$\langle w_r(k; \cdot), w_r(l; \cdot) \rangle = \sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{N_{p-r+1}}^{j''(k-l)} \sum_{j'=0}^{2^{p-r+1}-1} (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1} + \{\mathrm{rev}_s(l), j'\}_{p-r+1}}. \quad (6)$$

Как отмечалось в п.2,

$$k = (k'_{p-1}, \ldots, k'_0, 1, 0, \ldots, 0)_2, \quad \mathrm{rev}_s(k) = (0, \ldots, 0, 1, k'_0, \ldots, k'_{p-1})_2,$$
$$l = (l'_{p-1}, \ldots, l'_0, 1, 0, \ldots, 0)_2, \quad \mathrm{rev}_s(l) = (0, \ldots, 0, 1, l'_0, \ldots, l'_{p-1})_2.$$

Если

$$k'_\alpha = l'_\alpha \quad \text{при } \alpha = r-1, \ldots, p-1, \quad (7)$$

то $0 < k - l \leq 2^{s-p+r-1} - 1 = N_{p-r+1} - 1$. Число $z = \omega_{N_{p-r+1}}^{k-l}$ отлично от единицы и $z^{N_{p-r+1}} = 1$, поэтому

$$\sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{N_{p-r+1}}^{j''(k-l)} = \sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} z^{j''} = 0.$$

Предположим, что условие (7) не выполняется. Имеем

$$\{\mathrm{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1} = \sum_{\alpha=0}^{p-r} k'_{p-1-\alpha} j'_\alpha, \ \{\mathrm{rev}_s(l), j'\}_{p-r+1} = \sum_{\alpha=0}^{p-r} l'_{p-1-\alpha} j'_\alpha,$$

так что

$$\sum_{j'=0}^{2^{p-r+1}-1} (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1} + \{\mathrm{rev}_s(l), j'\}_{p-r+1}}$$

$$= \sum_{j'_0=0}^{1} \sum_{j'_1=0}^{1} \cdots \sum_{j'_{p-r}=0}^{1} \prod_{\alpha=0}^{p-r} (-1)^{\langle k'_{p-1-\alpha} + l'_{p-1-\alpha}\rangle_2 j'_\alpha} = \prod_{\alpha=0}^{p-r} \sum_{j'_\alpha=0}^{1} (-1)^{\langle k'_{p-1-\alpha} + l'_{p-1-\alpha}\rangle_2 j'_\alpha}.$$

Поскольку условие (7) не выполняется, то хотя бы один из сомножителей в последнем произведении равен нулю. Значит, и все произведение равно нулю. Показано, что $\langle w_r(k;\cdot), w_r(l;\cdot)\rangle = 0$ при $q = p$ и $k' > l'$.

При $k = l$ из (6) следует, что $\|w_r(k;\cdot)\|^2 = N$.

Осталось проверить, что любая функция вида (1) ортогональна любой функции вида (2). Имеем

$$\langle w_r(l;\cdot), w_r(k;\cdot)\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} \omega_N^{lj - 2^{p-r+1}\lfloor j/2^{p-r+1}\rfloor k} (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k), j\}_{p-r+1}}$$

$$= \sum_{j''=0}^{N_{p-r+1}-1} \omega_{2^r}^{j''(2^{p-r+1}l' - (2k'+1))} \sum_{j'=0}^{2^{p-r+1}-1} \omega_{2^r}^{l'j'} (-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k), j'\}_{p-r+1}}.$$

По лемме первая сумма в правой части последнего равенства равна нулю. Значит, равно нулю и скалярное произведение.

Теорема доказана.

Согласно теореме 1 при каждом $r \in \{2, \ldots, s-1\}$ функции $w_r(k; j)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, образуют ортогональные базисы в пространстве $\mathbb{C}_N$. Назовем их базисами Ахмеда–Рао. В неявной форме они появились в монографии [1, §7.2].

5. Следуя [3, 4], рассмотрим вопрос о частоте дискретных N-периодических функций $w_r(k; j)$.

Теорема 2. *Частота функции $w_r(k; j)$ при $r \in \{1, \ldots, s\}$, $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ равна k.*

Доказательство. Для функций вида (1) это очевидно. Действительно, поскольку $w_r(k; j) = \exp(i(2\pi/N)kj)$, то при возрастании j от 0 до N аргумент

$(2\pi/N)kj$ комплексного числа $w_r(k;j)$ возрастает от 0 до $2\pi k$. Величину k принимают за частоту функции $w_r(k;j)$.

Обратимся к функциям вида (2), (2′). Формула (2′) определяет $w_r(k;j)$ при всех целых j как N-периодическую функцию, поскольку

$$j + lN = (j'' + l2^{r+s-p-1})2^{p-r+1} + j' \quad \text{и} \quad \omega_{2^r}^{(j''+l2^{r+s-p-1})(2k'+1)} = \omega_{2^r}^{j''(2k'+1)}.$$

Чтобы обеспечить монотонное неубывание аргумента комплексного числа $w_r(k;j)$ при возрастании j от 0 до N, потребуется дополнительное преобразование.

Имеем

$$(-1)^{\{\mathrm{rev}_s(k),j'\}_{p-r+1}} = (-1)^{\sum_{\alpha=0}^{p-r} k'_{p-1-\alpha}(j'_\alpha + j'_{\alpha+1}2+\cdots+j'_{p-r}2^{p-r-\alpha})}.$$

Обозначим

$$\varphi_k(j') := \sum_{\alpha=0}^{p-r} k'_{p-1-\alpha} \sum_{\beta=\alpha}^{p-r} j'_\beta 2^{\beta-\alpha} = \sum_{\beta=0}^{p-r} \left(\sum_{\alpha=0}^{\beta} k'_{p-1-\alpha} 2^{\beta-\alpha} \right) j'_\beta.$$

Тогда

$$w_r(k;j) = \omega_{2^r}^{j''(2k'+1)+2^{r-1}\varphi_k(j')}. \tag{8}$$

Покажем, что функция $\varphi_k(j') = \sum_{\beta=0}^{p-r} a_\beta j'_\beta$, где $a_\beta = \sum_{\alpha=0}^{\beta} k'_{p-1-\alpha}2^{\beta-\alpha}$, монотонно не убывает при возрастании j' от 0 до $2^{p-r+1}-1$. Для этого заметим, что

$$a_\beta \geq 2\sum_{\alpha=0}^{\beta-1} k'_{p-1-\alpha}2^{\beta-1-\alpha} = 2a_{\beta-1} \geq a_{\beta-1} + 2a_{\beta-2} \geq \cdots$$
$$\geq a_{\beta-1} + a_{\beta-2} + \cdots + a_1 + 2a_0,$$

тем более,

$$a_\beta \geq a_{\beta-1} + a_{\beta-2} + \cdots + a_1 + a_0. \tag{9}$$

Пусть $j' \in \{0,1,\ldots,2^{p-r+1}-2\}$, $j' = (j'_{p-r},\ldots,j'_0)_2$. Если $j'_0 = 0$, то

$$\varphi_k(j'+1) = a_0 + \sum_{\beta=1}^{p-r} a_\beta j'_\beta \geq \varphi_k(j').$$

Предположим, что $j'_0 = 1$. В случае $j'_0 = j'_1 = \ldots = j'_{\beta-1} = 1$, $j'_\beta = 0$ при некотором $\beta \in \{1,\ldots,p-r\}$ получаем

$$\varphi_k(j'+1) = a_\beta + \sum_{\nu=\beta+1}^{p-r} a_\nu j'_\nu.$$

Согласно (9)

$$\varphi_k(j'+1)-\varphi_k(j')=a_\beta-\sum_{\nu=0}^{\beta-1}a_\nu\geq 0.$$

Тем самым, монотонное неубывание функции $\varphi_k(j')$ на множестве $\{0,1,\ldots,2^{p-r+1}-1\}$ установлено.

Обозначим $\psi_k(j)=\pi[2^{-r+1}j''(2k'+1)+\varphi_k(j')]$ и перепишем формулу (8) в виде $w_r(k;j)=\exp(i\psi_k(j))$. При $j=N$ имеем $j''=2^{s-p+r-1}$, $j'=0$, так что $\psi_k(N)=2\pi k$. Кроме того, $\psi_k(0)=0$. Если мы покажем, что функция $\psi_k(j)$ монотонно не убывает при возрастании j от 0 до N, то это будет означать, что частота функции $w_r(k;j)$ равна k.

Возьмем $j_1,j_2\in\{0,1,\ldots,N\}$, $j_\alpha=j''_\alpha 2^{p-r+1}+j'_\alpha$, где $j'_\alpha\in\{0,1,\ldots,2^{p-r+1}-1\}$, $\alpha\in\{1,2\}$, и предположим, что $j_1>j_2$. Тогда $j''_1\geq j''_2$, поскольку $|j'_1-j'_2|\leq 2^{p-r+1}-1$. При $j''_1=j''_2$, $j'_1>j'_2$ неравенство $\psi_k(j_1)\geq\psi_k(j_2)$ следует из монотонного неубывания функции $\varphi_k(j')$.

Допустим, что $j''_1>j''_2$. Оценим $\varphi_k(j')$. Согласно определению

$$\varphi_k(2^{p-r+1}-1)\leq\sum_{\alpha=0}^{p-r}k'_{p-1-\alpha}2^{p-r-\alpha+1}\leq 2^{-r+1}(2k').$$

Принимая во внимание монотонное неубывание $\varphi_k(j')$, получаем

$$0\leq\varphi_k(j')\leq 2^{-r+1}(2k')\quad\text{и}\quad|\varphi_k(j'_1)-\varphi_k(j'_2)|\leq 2^{-r+1}(2k').$$

Теперь запишем

$$\psi_k(j_1)-\psi_k(j_2)\geq\pi 2^{-r+1}[(j''_1-j''_2)(2k'+1)-2k']>0.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ахмед Н., Рао К. Р. *Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов.* Пер. с англ. М.: Связь, 1980.

[2] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша.* М.: Наука, 1987.

[3] Трахтман А. М., Трахтман В. А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах.* М.: Сов. радио, 1975.

[4] Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Обобщённые вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона* // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.

Санкт-Петербургский государственный
университет

E-mail: malv@gamma.math.spbu.ru