SPb. Math. Society Preprint 2003-04 21 Nov 2003

О ВЫЧИСЛЕНИИ СПЕКТРА МОРСА

Г.С.Осипенко
Лаборатория нелинейного анализа и математического моделирования
С.Петербургский технический университет
e-mail: math@math.tu.neva.ru
И.В.Романовский
С.Петербургский государственный университет
e-mail: jvr@or.math.lgu.spb.su
Н.Б.Ампилова
С.Петербургский государственный университет
e-mail: nataly@is1483.spb.edu
Е.Петренко
С.Петербургский государственный университет
e-mail: jo@nwgsm.ru

Аннотация

Спектр Морса — это предельное множество показателей Ляпунова периодических псевдотраекторий. Эта характеристика особенно важна, когда динамическая система имеет бесконечно много периодических траекторий большого периода. В работе [9] был предложен способ оценки спектра Морса, использующий идеи символической динамики, которая сводит изучение динамической системы к изучению связанного с ней графа — символического образа. При таком подходе вычисление спектра Морса связано с поиском простых замкнутых путей и выделением среди них контуров с нужными характеристиками. К сожалению, при итерационных построениях символического образа число таких путей резко возрастает, что приводит к колоссальным затратам памяти и времени. В настоящей работе предлагается алгоритм построения контуров с наибольшим и наименьшим значениями средних, основанный на симплекс-методе. Описаны численные эксперименты.

1 Введение

Мы будем рассматривать дискретную динамическую систему, порожденную гомеоморфизмом $F : E \to E$ на векторном расслоении E над компактным многообразием M, который накрывает гомеоморфизм $f : M \to M$ и является линейным изоморфизмом в слоях. Примером описанного отображения F является дифференциал Df диффеоморфизма $f : M \to M$.

Общая схема исследования состоит в следующем. Гомеоморфизм F индуцирует отображение PF на проективном расслоении, ассоциированном с E. Отображению PF сопоставляется некоторая его конечная аппроксимация — *символический образ*, представляющий собой ориентированный граф. Символический образ порождает символическую динамику, которая отражает поведение исходной динамической системы. Определяется характеристический показатель замкнутого пути на символическом образе. Спектром символического образа называется предельное множество таких характеристических показателей. Эта характеристика является хорошим приближением для спектра Морса исходной системы и может быть определена по наибольшему и наименьшему показателям простых замкнутых путей. Для нахождения экстремальных простых замкнутых путей используется алгоритм [12], который позволяет преодолеть описанные выше проблемы оценки спектра Морса.

2 Спектр Морса

Пусть $f : M \to M$ есть гомеоморфизм компактного многообразия M. Обозначим через (E, M, π) векторное расслоение над M, где π — проектор из тотального пространства E на базу M, а каждый слой $E(x) = \pi^{-1}(x)$ является d-мерным линейным пространством изоморфным R^d.

Определение 1 *Гомеоморфизм $F : E \to E$ называется линейным расширением f, если F накрывает f, т.е. $f \circ \pi = \pi \circ F$, и ограничение $A := F|_{E(x)} : E(x) \to E(f(x))$ является линейным изоморфизмом на каждом слое.*

Исследование линейных расширений мотивировано изучением поведения дифференциала на касательном пространстве [4, 7, 13, 14, 15, 17]. Как пример линейного расширения, мы будем рассматривать дифференциал $Df = F : TM \to TM$ диффеоморфизма f многообразия M.

Проективное пространство P^{d-1} есть множество прямых в R^d, проходящих через начало координат. Для ненулевого вектора v обозначим через $[v] = y$ точку проективного пространства, соответствующую прямой, натянутой на вектор v. $R^d \setminus \{0\}$ есть расслоение над проективным пространством P^{d-1} с проекцией $q(v) = [v]$. Пусть $L(y)$ — одномерное подпространство, соответствующее точке $y \in P^{d-1}$.

Рассмотрим расслоение (P, M, p) над M такое, что каждый слой является проективным пространством $P^{d-1}(x)$ ассоциированным со слоем $E(x) = R^d$, p — проекция: $p(P^{d-1}(x)) = x$. Такое расслоение (P, M, p) назовем проективным расслоением, ассоциированным с векторным расслоением (E, M, π). Мы будем использовать следующие локальные координаты : (x, v) на E и (x, y) на P, где $x \in M$, $v \in E(x)$, $y \in P^{d-1}(x)$. Отображение F индуцирует гомеоморфизм $PF : P \to P$ на проективном расслоении так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \stackrel{F}{\to} & E \setminus \{0\} \\ \downarrow^{q} & & \downarrow^{q} \\ P & \stackrel{PF}{\to} & P \\ \downarrow^{p} & & \downarrow^{p} \\ M & \stackrel{f}{\to} & M \end{array}$$

коммутативна. В координатах x, y, v эти отображения имеют вид:

$$F = (f(x), A(x)v), \ \ PF(x, y) = (f(x), [A(x)e(y)]),$$

где $e(y)$ — базисный вектор в подпространстве $L(y)$. Число $a(x, y) = |F(x, e(y))| = |A(x)e(y)|$ назовем коэффициентом изменения длины при отображении $F|_{L(y)}$.

Последовательность точек $\{x_i\}$ называется ε-траекторией дискретной системы $\{f^n\}$, если $\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ для любого i. Если при этом последовательность является периодической, то она называется периодической ε-траекторией, а точки x_i называются ε-периодическими. Точка x называется цепно-рекуррентной, если она является ε-периодической для любого положительного ε. Множество цепно-рекуррентных точек на базе M называется цепно-рекуррентным множеством, которое обозначим Q. Множество цепно-рекуррентных точек дискретной динамической системы $\{PF^n\}$ на проективном расслоении обозначим CR. Если $\xi = \{(x_0, y_0), ..., (x_p, y_p) = (x_0, y_0)\}$ является периодической ε-траекторией периода p, то характеристический показатель Ляпунова для этой траектории определяется следующим образом

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |F(x_i, e(y_i))|.$$

Спектром Морса отображения F на цепно-рекуррентном множестве CR проективного отображения PF называется множество

$$\begin{aligned} \Sigma(F) \ = \ & \{\lambda \in R : \text{ существуют } \varepsilon_k \to 0 \text{ и периодические } \varepsilon_k\text{-траектории } \xi_k \\ & \text{такие, что } \lambda(\xi_k) \to \lambda \text{ при } k \to \infty\}. \end{aligned}$$

Таким образом, спектр Морса есть предельное множество для характеристических показателей Ляпунова периодических ε-траекторий на проективном расширении при $\varepsilon \to 0$.

3 Символический образ и его спектр

Пусть $g : N \to N$ является гомеоморфизмом на многообразии N и $C = \{M(1), \cdots, M(s)\}$ является конечным покрытием многообразия N замкнутыми множествами. Множества $M(i)$ назовем ячейками покрытия. Для каждого номера i определим подпокрытие $C(i)$ образа $g(M(i))$ ячейки $M(i)$, состоящее из тех ячеек $M(j)$, которые пересекают $g(M(i))$: (см.рис.1)

$$C(i) = \{M(j) \ : M(j) \cap g(M(i)) \neq \emptyset\}.$$

Множество $C(i)$ назовем образом ячейки $M(i)$ и положим $c(i) = \{j \ : M(j) \cap g(M(i)) \neq \emptyset\}$.

Определим диаметр ячейки $M(i)$: $\mathrm{diam} M(i) = \max\{\rho(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M(i)\}$. Пусть d есть наибольший из диаметров ячеек покрытия C, а q есть наибольший из диаметров образов $g(M(i))$, $i = 1, ..., s$. Определим число r следующим образом. Если ячейка $M(k)$ не принадлежит подпокрытию $C(i)$, тогда расстояние между $M(k)$ и образом $g(M(i))$ $r_{ik} = \rho(g(M(i)), M(k))$ является положительным. Пусть r есть минимальное значение среди таких r_{ik}, т.е.

$$r = \min_{i,k}\{r_{ik} : 1 \leq i \leq s, k \notin c(i)\}.$$

Так как число описанных пар (i, k) конечно, то r является положительным числом. Таким образом, число r есть наименьшее расстояние между образами $g(M(i))$ и ячейками $M(k)$, которые не пересекаются с этим образом.

Определение 2 *Пусть G есть ориентированный граф, имеющий s вершин, при этом номер вершины i соответствует ячейке $M(i)$. Вершины i и j связаны ориентированным ребром $i \to j$, если и только если $j \in c(i)$, т.е. $M(j) \cap g(M(i)) \neq \emptyset$. Так построенный граф G называется символическим образом отображения g относительно покрытия C.*

Определенное выше число r называется нижней гранью символического образа G. Ясно, что символический образ зависит от покрытия C. Естественно рассматривать символический образ как конечную аппроксимацию отображения g. Эта аппроксимация будет более точной при более мелком покрытии.

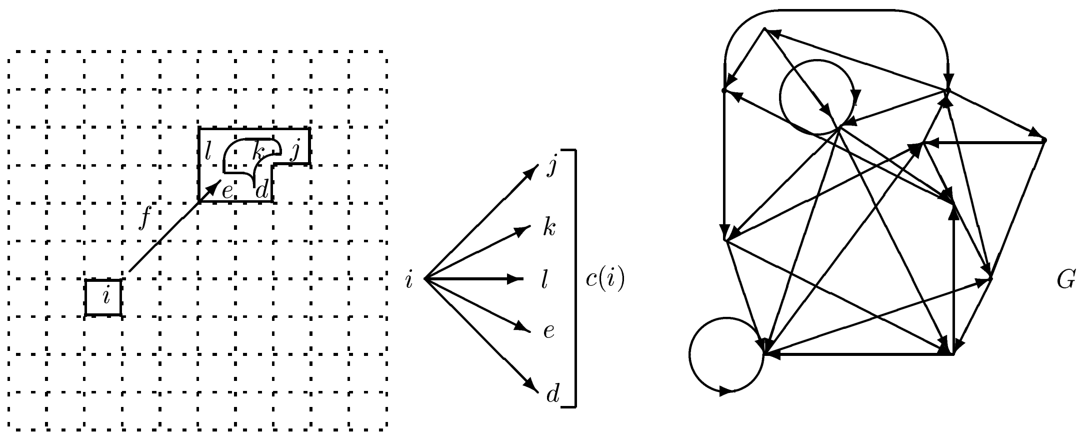

Рис. 1. Построение символического образа

Обозначим через Ver множество вершин графа G. Ориентированный граф G можно рассматривать, как многозначное соответствие $G : Ver \to Ver$ между вершинами. Такой граф G однозначно определяется матрицей переходов $\Pi = (\pi_{ij})$, которая имеет размеры $s \times s$. Элемент $\pi_{ij} = 1$, если существует ориентированное ребро $i \to j$, в противном случае $\pi_{ij} = 0$.

Определение 3 *Последовательность вершин* $\{z_k\}$ *графа* G *называется допустимым путем (или просто путем), если для каждого* k *граф* G *имеет дугу* $z_k \to z_{k+1}$.

Мы будем говорить о периодическом пути, если последовательность $\{z_k\}$ является периодической. Существует естественная связь между допустимыми путями на символическом образе G и ε-траекториями отображения g.

Утверждение 1 [8]

1. *Если последовательность вершин* $\{z_k\}$ *является допустимым путем на символическом образе* G *и* $x_k \in M(z_k)$, *то последовательность* $\{x_k\}$ *является* ε*-траекторией отображения* g *для любого* $\varepsilon > q + d$. *В частности, если последовательность* $\{z_k\}$ *является периодической, то последовательность* $\{x_k\}$ *может быть выбрана периодической* ε*-траекторией.*

2. *Если последовательность* $\{x_k\}$ *является* ε*-траекторией отображения* g, $\varepsilon < r$ *и* $x_k \in M(z_k)$, *то последовательность* $\{z_k\}$ *является допустимым путем на символическом образе* G. *В частности, если последовательность* $\{x_k\}$ *является периодической* ε*-траекторией, то последовательность* $\{z_k\}$ *может быть выбрана периодической.*

Определение 4 *Вершина символического образа называется возвратной, если существует периодический путь, проходящий через нее. Множество возвратных вершин обозначается* $RVer$. *Две возвратные вершины* i *и* j *называются эквивалентными, если существует периодический допустимый путь, проходящий через вершины* i *и* j.

Согласно определению, множество возвратных вершин $RVer$ разбивается на несколько классов эквивалентности $\{H_k\}$.

Рассмотрим некоторые особенности построения символического образа гомеоморфизма на проективном расслоении. Пусть $G(f)$ является символическим образом гомеоморфизма $f : M \to M$ относительно покрытия $C(M) = \{m(1), \cdots, m(q)\}$. Для построения символического образа проективного отображения $PF : P \to P$ удобно выбрать покрытие $C(P)$ так, чтобы проекция любой ячейки покрытия $C(P)$ была ячейкой $C(M)$. В этом случае покрытия проективного расслоения и базы назовем согласованными. Согласованные покрытия индуцируют естественное отображение h из $G(PF)$ на $G(f)$, сопоставляющее вершинам $\{i\}$ вершину j, если $pM(i) = m(j)$. Так как из $PF(M(i)) \cap M(i^*) \neq \emptyset$ следует $f(m(j)) \cap m(j^*) \neq \emptyset$, то ориентированное ребро $(i) \to (i^*)$ графа $G(PF)$ отображается на ориентированное ребро $j \to j^*$ графа $G(f)$. Следовательно, отображение h переводит ориентированный граф на ориентированный граф так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Ver & \stackrel{G(PF)}{\to} & Ver \\ \downarrow^h & & \downarrow^h \\ ver & \stackrel{G(f)}{\to} & ver \end{array}$$

является коммутативной, где через Ver и ver обозначены множества вершин $G(PF)$ и $G(f)$, соответственно. Отображение h переводит допустимые пути на допустимые пути и, в частности, периодические пути отображаются на периодические пути, а классы эквивалентных возвратных вершин отображаются на классы эквивалентных возвратных вершин.

Пусть $F : E \to E$ есть линейное расширение гомеоморфизма $f : M \to M$ и $PF : P \to P$ – индуцированное проективное отображение. Построим оснащение символического образа. Пусть C является покрытием проективного расслоения P и $G = G(PF)$ — символический образ гомеоморфизма PF относительно C. Существование ориентированного ребра $i \to j$ на G означает, что существует точка (x, y) в ячейке $M(i)$, образ которой $PF(x, y)$ лежит в ячейке $M(j)$. Ребру $i \to j$ сопоставим число $a[j, i] = |A(x)e(y)| = a(x, y)$, которое является коэффициентом изменения длины при действии отображения F. Ясно, что описанная точка $(x, y) \in M(i)$ не является единственной. Если $(x^*, y^*) \in M(i)$ другая точка, то справедлива оценка

$$|a(x^*, y^*) - a(x, y)| < \eta(d),$$

где $\eta(d)$ есть модуль непрерывности функции $a(x,y)$ и d — максимальный диаметр ячеек покрытия C. Заметим, что данная оценка справедлива, даже если образ $PF(x^*,y^*)$ не лежит в $M(j)$. В дальнейшем оснащение $a[j,i]=|A(x)e(y)|$ строится по любой точке $(x,y)\in M(i)$.

Определение 5 *Структуру, состоящую из символического образа G и чисел $\{a[j,i]\}$, назовем оснащенным символическим образом и обозначим G^*.*

Каждый периодический путь $\omega=\{z_0,z_1,...,z_p=z_0\}$ на G периода p индуцирует коэффициент изменения длины вдоль этого пути $a[\omega]=a[z_pz_{p-1}]...a[z_2z_1]a[z_1z_0]$. Число $\sigma(\omega)=(a(\omega))^{\frac{1}{p}}$ назовем мультипликатором и число

$$\lambda(\omega)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\ln a[z_kz_{k-1}]=\ln\sigma(\omega)$$

назовем характеристическим показателем Ляпунова периодического пути ω.

Определение 6 *Спектром оснащенного символического образа G^* называется*

$$\Sigma(G^*)=\{\lambda\in R:\ \textit{существует последовательность периодических}$$

$$\textit{путей}\ \omega_k\ \textit{на}\ G\ \textit{таких, что}\ \lambda(\omega_k)\to\lambda\ \textit{при}\ k\to\infty\}.$$

Рассмотрим некоторый класс H эквивалентных возвратных вершин. Периодический путь $\omega=\{z_0,z_1,...,z_p=z_0\}\subset H$ назовем простым, если его вершины $z_1,...,z_p$ различны, т.е. $z_i\neq z_j$ при $i\neq j$; $i,j=1,...,p$. Так как символический образ имеет конечное число вершин, число различных простых периодических путей конечно. Пусть $\phi_1,...,\phi_q$ — полный набор простых периодических путей для класса H с периодами $p_1,...,p_q$ соответственно. Характеристический показатель простого периодического пути $\phi_j=\{z_1^j,...,z_{p_j}^j\}$

$$\lambda(\phi_j)=\frac{1}{p_j}\sum_{k=1}^{p_j}\ln a[z_k^jz_{k-1}^j].$$

Пусть

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(H)&=\min\{\lambda(\phi_j),\ j=1,...,q\},\\ \lambda_{\max}(H)&=\max\{\lambda(\phi_j),\ j=1,...,q\}\end{aligned}$$

суть наименьший и наибольший из этих характеристических показателей.

Теорема 1 *[9] Спектр оснащенного символического образа G^* состоит из интервалов $[\lambda_{\min}(H_k),\lambda_{\max}(H_k)]$, где $\{H_k\}$ — полный набор классов эквивалентных возвратных вершин символического образа G.*

По предыдущей теореме, спектр оснащенного образа можно найти, вычисляя $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ простых замкнутых путей, которых конечное число. Найдем отрезки, содержащие спектр Морса, предполагая известным спектр оснащенного символического образа. Так как M — компакт, то отображение $A(x)$ имеет модуль непрерывности $\eta_A(\rho)$ по x. Обозначим

$$\eta(\rho)=\eta_A(\rho)+\max_{x\in M}|A(x)|\rho,$$

$$\theta=\left(\min_{x\in M,\ |e|=1}|A(x)e|\right)^{-1}=\max_{x\in M}|A^{-1}(x)|>0.$$

Теорема 2 *[9] Спектр Морса отображения $F : E \to E$ лежит в семействе интервалов*

$$\{[\lambda_{\min}(H_k) - \theta\eta(d), \lambda_{\max}(H_k) + \theta\eta(d)]\},$$

построенных для любого оснащения G^*, где $\{H_k\}$ — полный набор классов эквивалентных возвратных вершин на символическом образе G, d — наибольший диаметр ячеек покрытия C.

Таким образом, для оценки спектра Морса исходной системы нам нужно найти спектр оснащенного символического образа. Эта задача, как было отмечено, сводится к нахождению простых замкнутых путей с минимальным и максимальным характеристическими показателями. Понятно, что поиск всех таких путей и нахождение среди них оптимальных с помощью перебора в наших условиях невозможен, так как при итерационных построениях символического образа число этих путей резко возрастает. Поэтому для решения используется другой метод, сводящий данную задачу к задаче линейного программирования.

4 Определение контуров с экстремальными характеристиками

Начнем с упомянутой задачи линейного программирования и необходимых для нее определений.

Пусть задан конечный ориентированный граф $\langle M, N\rangle$, где M его множество вершин, а N — множество дуг. Каждой дуге $j \in N$ сопоставляется некоторое число c_j, характеристика дуги (в нашем случае $c_j = ln a_j$). Любому контуру графа можно сопоставить его характеристику как среднее значение характеристик дуг, входящих в контур. Требуется найти контур с минимальной характеристикой (случай максимальной характеристики легко получается сменой знака у характеристик дуг).

В 1967 г. в работе [12] эта задача была сведена к специальной задаче линейного программирования и был построен метод ее решения, по существу являющийся специализированным симплекс-методом.

Основная идея этого метода состоит в следующем. Введем дополнительные переменные, характеризующие дуги и назовем их, например, длинами дуг (для дуги с номером j ее длина есть l_j). Вычислим сумму длин дуг, входящих в контур C и обозначим ее λ_C. Теперь каждому контуру поставим в соответствие вектор $Y = y_u, u \in C$ (контурный вектор), составленный по следующему правилу $y_u = \lambda_C$ при $u \in C, y_u = 0$ в остальных случаях .

Пусть число дуг в контуре C равно m. Введем также величины $x_j = l_j/\lambda_C$, которые образуют нормированный контурный вектор. Тогда задача о нахождении контуров с экстремальными характеристиками может быть сведена к следующей.

Найти набор неотрицательных переменных x_j, $j \in N$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j\in N} x_j = 1,$$

$$\sum_{j:e(j)=i} x_j - \sum_{j:b(j)=i} x_j = 0, \quad i \in M$$

(где $b(j)$ и $e(j)$ — соответственно начало и конец дуги j) и минимизирующих линейную функцию

$$\sum_{j\in N} c_j x_j.$$

Условия, накладываемые на переменные x_j, означают, что рассматривается замкнутый поток, в котором сумма потоков на дугах равна 1. В этой задаче каждая крайняя точка многогранника допустимых решений является элементарным замкнутым потоком — нормированным “контурным вектором”, т.е. таким набором переменных x_j, у которого все отличные от нуля значения равны между собой и в сумме равны 1 ($x_j = 1/m$), а соответствующие им дуги j являются дугами некоторого контура. Легко видеть, что значение целевой функции на контурном векторе совпадает с характеристикой соответствующего контура.

Таким образом, если m обозначает количество дуг в контуре, то при $x_j = 1/m$ мы получаем

$$\sum_{j\in N} c_j x_j = 1/m \sum_{j\in N} c_j = 1/m \sum_{j=1}^{m} \ln a_j.$$

Иначе говоря, контуры с наибольшим и наименьшим средним дают нам максимальное и минимальное значения характеристических показателей Ляпунова периодических путей на оснащенном символическом образе.

Заметим, что в связи с возникшей потребностью решения задач большого размера в метод [12] были внесены следующие изменения:

1. Для упрощения логики метода и предельного сокращения размерности выполняется предварительная подготовка графа $\langle M, N\rangle$. Именно, в нем выделяются сильносвязные компоненты — т. е. классы эквивалентности возвратных вершин — (эта операция линейна по числу дуг [18]), и задача решается для каждой такой компоненты отдельно.

2. Для каждой сильносвязной компоненты при реализации специализированного симплекс-метода допустимое базисное решение не пересчитывается явно, а значительная его часть строится заново с использованием метода типа метода Б. Ю. Левита для решения задачи о кратчайшем пути.

3. Используется очень эффективный метод построения начального допустимого базисного решения.

Для дальнейшего изложения мы ограничимся случаем, когда упомянутая в п. 1 предварительная подготовка уже выполнена и граф $\langle M, N\rangle$ сильно связен, т. е. в нем имеется путь из любой вершины в любую другую.

Метод типа симплексного предназначен для нахождения крайних точек многогранника допустимых решений, поэтому его применение в этом случае и даст нам контур с минимальной характеристикой. Но алгоритм работает не с крайними точками многогранника, а с более сложными конструкциями — допустимыми базисными решениями задачи линейного программирования. Такое решение определяется базисным множеством, — подмножеством $N' \subset N$, мощность которого равна рангу соответствующей ему подматрицы матрицы ограничений и рангу всей матрицы. Легко показать, что для того, чтобы множество N' было базисным, необходимо и достаточно, чтобы граф $\langle M, N'\rangle$ был деревом с одной дополнительной дугой и эта дополнительная дуга порождала в графе (единственный) контур. Этот контур является носителем само́й крайней точки, а остальные дуги базисного решения используются для нахождения значений двойственных переменных.
Напомним, что одновременно с основной (прямой) задачей линейного программирования ставится и решается следующая двойственная задача.

Найти переменную z и набор переменных v_i, $i \in M$, удовлетворяющие условиям

$$z + v_{e(j)} - v_{b(j)} \le c_j, \qquad j \in N,$$

и максимизирующие z.

В обычной схеме симплекс-метода базисному набору индексов N' отвечает система уравнений

$$v_{e(j)} - v_{b(j)} = c_j - z, \qquad j \in N',$$

имеющая решение, единственное с точностью до постоянного слагаемого у переменных v (что позволяет называть их потенциалами). Эту систему приходится решать на каждой итерации, и решать удобно, находя сначала z как характеристику базисного контура, а затем, игнорируя одну из дуг контура и задав v для одной из вершин, на оставшемся базисном дереве последовательно находить все остальные потенциалы (как в методе потенциалов для транспортной задачи линейного программирования). Если полученные таким образом z и v удовлетворяют неравенствам

$$v_{e(j)} - v_{b(j)} \leq c_j - z, \qquad j \in N,$$

то решение прямой задачи является оптимальным, и контур с минимальной характеристикой найден.

Однако, описанную схему расчетов можно сильно упростить и сделать более эффективной. Назовем дерево направленным с корнем i_0, если в нем есть пути из i_0 во все остальные вершины. Используя это определение и учитывая, что речь идет о сильно связном графе, введем в алгоритм следующие изменения. Во-первых, будем рассматривать в качестве базисного графа $\langle M, N' \rangle$ направленное дерево, к которому добавлена одна дуга, ведущая в корневую вершину i_0. Во-вторых, будем строить направленное дерево на каждой итерации заново, стремясь по возможности соблюдать требуемые неравенства. Для построения дерева используется техника, разработанная для решения задачи о кратчайшем пути. Известный метод Дейкстры [19] здесь не годится, так как "длины дуг" $c_j - z$ могут быть разного знака, лучше подходит метод Левита [20], близкий по технике, но более гибкий.

При построении дерева все множество вершин разбивается на три подмножества $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2$, где M_0 — множество обработанных алгоритмом вершин, M_1 — множество вершин, ждущих обработки, M_2 — вершины, до которых алгоритм еще не добрался. Вершины M_1 будут организованы в очередь. В любой момент у нас имеется направленное дерево с множеством вершин $M_0 \cup M_1$ с корнем в некоторой вершине i_0, и для всех вершин $M_0 \cup M_1$ вычислены (возможно, не окончательно) потенциалы v.

Будем говорить, что вершина i_1 предшествует вершине i_2, если i_1 лежит на контуре, либо в дереве существует путь из i_1 в i_2.

Алгоритм построения дерева

1. По заданному контуру $\langle M_c, N_c \rangle$ вычислить его характеристику z и, выбрав $i_0 \in M_c$ и положив $v[i_0] = 0$ найти все остальные $v[i]$ для $i \in M_c$. Образовать из контура дерево, удалив из рассмотрения (единственную) дугу, входящую в i_0.

2. Включить в множество M_1 все вершины из M_c, образовав из них список.

3. Пока список M_1 не пуст, выполнять следующие действия (обработку вершины)

   (a) Исключить из списка первую вершину i_1 и перевести ее в M_0.

   (b) Для каждой дуги j, такой что $b(j) = i_1$, вычислить

   $$w = v[i_1] + c_j - z.$$

   Положить $i_2 = e(j)$.

   Если $i_2 \in M_2$, то перевести вершину i_2 из M_2 в M_1, приписав ее в конце списка. Положить $v[i_2]$ равным w. Добавить к дереву дугу j.

   Иначе (если $i_2 \in M_0 \cup M_1$) сравнить w с $v[i_2]$. Если $w \geq v[i_2]$, то закончить обработку дуги.

   Иначе проверить, не предшествует ли вершина i_2 вершине i_1 в имеющемся дереве. Если да, то дуга j замыкает контур с характеристикой, меньшей чем z. Закончилась итерация нашего "симплекс-метода". Теперь новый контур нужно взять в качестве базового и повторить алгоритм заново.

   Если же вершина i_2 предшествует вершине i_1, то нужно положить $v[i_2]$ равным w, включить в дерево дугу j, заменив ею какую-то другую дугу с концом i_2, и в случае, если вершина i_2 уже находится в M_0, перевести ее для повторной обработки в M_1, поставив в начало списка.

4. Если вычисления дошли до этого пункта, то построена система потенциалов, удовлетворяющая требуемым неравенствам, и базисный контур имеет минимальную характеристику.

Что касается выбора начального базисного контура, то достаточно эффективна следующая процедура.

1. Для каждой вершины $i \in M$ среди выходящих из i дуг выбрать дугу $j(i)$ с наименьшим c_j. Множество отобранных дуг обозначим через N_s.

   Подсчитать для каждой вершины i ее *степень* $s[i]$ — число входящих в нее отобранных дуг.

2. Составим список вершин с нулевой степенью.

3. Пока список не пуст, выполнять следующие действия

   (a) Исключить из списка первую вершину i_1.

   (b) Исключить $j(i_1)$ из N_s.

   (c) Уменьшить на единицу степень вершины $i_2 = e(j(i_1))$, если эта степень стала нулевой, то включить i_2 в список.

4. По исчерпании списка дуги, еще входящие в N_s образуют изолированные контуры, нужно их просмотреть и выбрать контур с минимальной характеристикой.

5 Численный эксперимент

Описанные методы расчета были применены к исследованию следующих систем.

1. Отображение Хенона.

Рассмотрим отображение

$$F: \quad \begin{array}{rr} x_1 = & y + 1 - ax^2, \\ y_1 = & bx, \end{array} \tag{1}$$

где $a = 1.4$, $b = 0.3$. Как известно, при данных значениях параметров у отображения существуют две седловые неподвижные точки, координаты которых вычисляются по формулам

$$x = (-(1-b) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a})/2a, \quad y = bx.$$

Точки вещественны при выполнении неравенства $a > (1-b)^2/4$. Координаты неподвижных точек:

$$x_1 = -1.1313545, y_1 = -0.3394063, x_2 = 0.63135448, y_2 = 0.18940634.$$

Собственные числа матрицы Якоби в точке x определяются по формулам: $\lambda(x) = -ax \pm \sqrt{a^2x^2 + b}$. В точке (x_1, y_1) собственные числа равны $\lambda_1 = -0.09202956$, $\lambda_2 = 3.2598221$. В точке (x_2, y_2) значения равны $\lambda_1 = 0.15594632$, $\lambda_2 = -1.92373886$.

Вычисляя логарифмы абсолютных значений собственных чисел, получаем:

$$\ln|\lambda_1(x_1)| = -2.38564544; \quad \ln|\lambda_2(x_1)| = 1.18167262;$$

$$\ln|\lambda_1(x_2)| = 0.65427061; \quad \ln|\lambda_2(x_2)| = -1.85824343.$$

При численном исследовании начальная область была выбрана $[-10, 10] \times [-10, 10]$, при начальном разбиении 10×10 ячеек. Итерации проводились до того момента, пока размеры ячейки не составили 0.001953×0.001953. Символический образ распался на две сильные компоненты, одна из которых содержала 2 вершины, а вторая — 15179. На первых итерациях оснащенный символический образ распался на 5 сильных компонент, две из которых содержали по 1 вершине, две — по 3 вершины и одна — 27748. Отметим, что при последующих итерациях

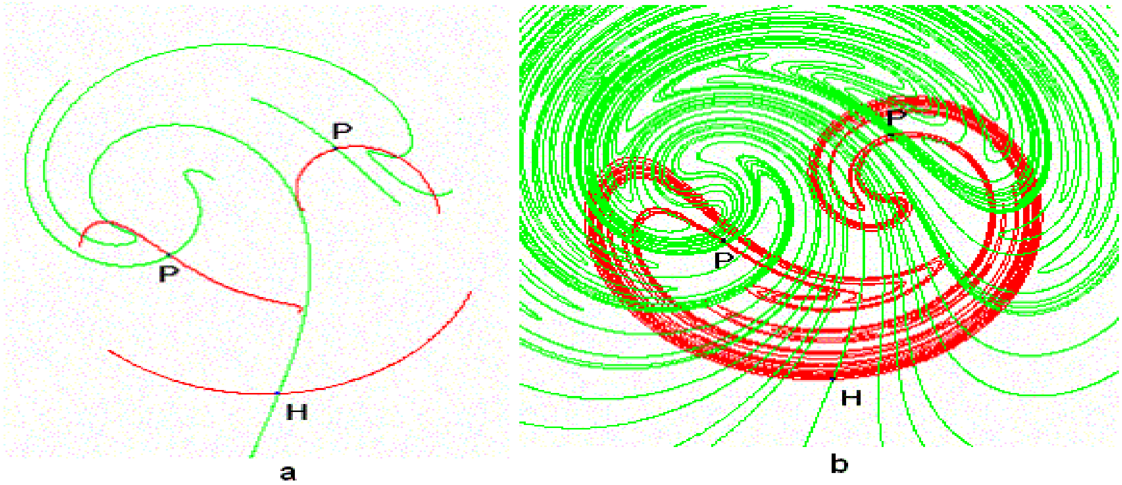

Рис. 2.

четыре малые компоненты сохранились. Оценка спектра Морса на полученных компонентах: $[-1.904604, 0.659633], \{1.184467\}, \{-2.388265\}, [-2.389518, -2.388891], [1.181143, 1.182805]$. Таким образом, мы видим, что логарифмы абсолютных значений собственных чисел матрицы Якоби лежат в интервалах, определенных с помощью численных методов.

2. Отображение Икеда. Рассмотрим отображение :

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 - 0.9(x\cos\tau(x,y) - y\sin\tau(x,y)) \\ y_1 & = & 0.9(x\sin\tau(x,y) + y\cos\tau(x,y)), \end{array} \tag{2}$$

где

$$\tau(x,y) = 0.4 - \frac{6}{1 + x^2 + y^2}.$$

Отображение (2) обладает свойством сжатия площадей и имеет глобальный аттрактор A_g. Существует единственная гиперболическая неподвижная точка $H(1.3815, -2.4746)$, инвариантные многообразия которой $W^s(H), W^u(H)$ пересекаются. Кроме того, отображение имеет единственную 2-периодическую орбиту $P_2(0.2338, -0.7031), (1.9995, 0.6681)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которой пересекают многообразия $W^s(H), W^u(H)$ и образуют гетероклинический цикл. Эта ситуация показана на рисунке 2a). Замыкание неустойчивого многообразия точки H образует глобальный аттрактор A_g (см. рис.2b)).

В целом аттрактор A_g не является гиперболическим. Рассмотрим часть этого аттрактора, а именно максимальное цепно-рекуррентное множество Ω_0 в области $[-1.1, 3.5] \times [1.5, 1.8]$ (см. рис.3a)). При начальном разбиении базы 10×10 стартовые размеры ячейки были 0.46×0.33. После нескольких итераций (при размерах ячейки 0.0071×0.0051) множество Ω_0 (рис. 3a) распадается на две компоненты Ω_1 и Ω_2 (рис.3b), соответствующие двум компонентам сильной связности на символическом образе. Множество Ω_1 (отмечено '+') представляет собой периодическую орбиту периода 6, а Ω_2 является инвариантным множеством с нетривиальной фрактальной структурой.

Дальнейшее построение для множества Ω_1 дает следующие результаты. Для лучшей локализации в базе проведено ещё несколько итераций до момента, когда размеры ячейки составили 0.00045×0.00032. Построение оснащенного символического образа проводилось до момента, пока размер ячейки в проективном пространстве не стал равен 0.0003. При таких данных расстояние между спектром Морса исходной системы и спектром символического образа не превосходит 0.01. В результате вычислений на проективном расслоении получены две компоненты и спектр Морса над множеством Ω_1 содержится в об'единении интервалов $[0.522, 0.523]$ и $[-0.734, -0.733]$. Подробные результаты приведены в таблице 1.

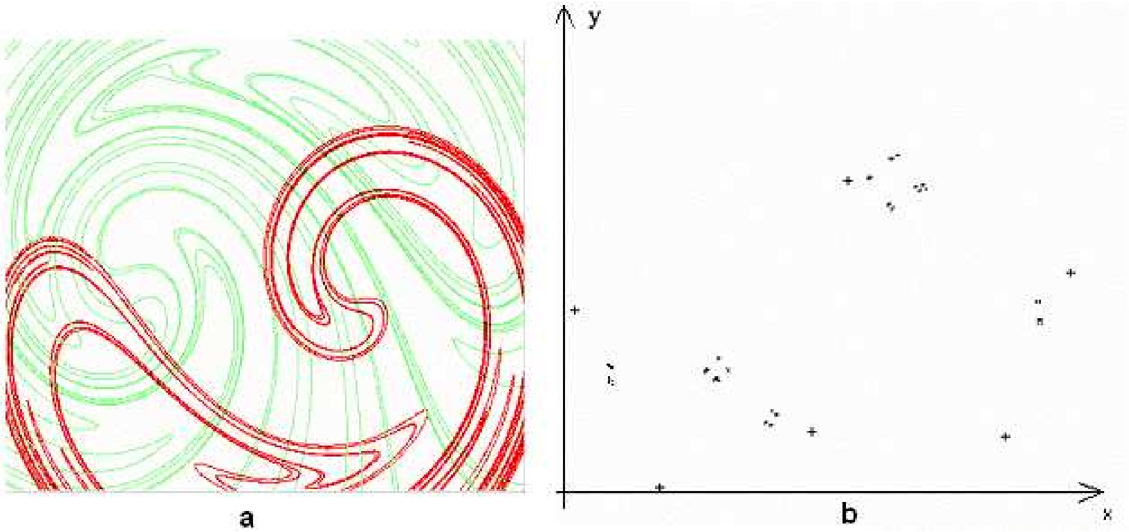

Рис. 3. Множество Ω_0 и компоненты Ω_1 и Ω_2

Таблица 1 . Оценка спектра Морса для компоненты Ω_1 .

Компонента 1	Компонента 2	Размер ячейки по "углу"
$[0.359, 0.587]$	$[-0.829, -0.535]$	0.31
$[0.488, 0.565]$	$[-0.698, -0.659]$	0.15
$[0.508, 0.544]$	$[-0.762, -0.687]$	0.078
$[0.520, 0.528]$	$[-0.741, -0.723]$	0.0196
$[0.522, 0.523]$	$[-0.735, -0.733]$	0.00122
$[0.522, 0.523]$	$[-0.734, -0.733]$	0.00030

Для множества Ω_2 итерации в базе проводились до размера ячейки 0.00089×0.00058. Затем строились итерации оснащенного символического образа до размера ячейки по углу 0.00038. Аналогично вычислениям для первой компоненты, при таких данных спектр Морса исходной системы отличается от спектра символического образа на 0.01. В результате получены два интервала $[0.632, 0.793]$ и $[-1.004, -0.843]$. Таблица 2 показывает последовательность итераций.

Поскольку спектр Морса не содержит нуля, то, согласно [11], цепно-рекуррентное множество системы Ω_0 гиперболично.

Таблица 2 . Оценка спектра Морса для компоненты Ω_2 .

Компонента 1	Компонента 2	Размер ячейки по "углу"
$[-0.327, -0.177]$	$[0.454, 0.755]$	0.78
$[-0.908, -0.558]$	$[0.574, 0.756]$	0.39
$[-1.011, -0.653]$	$[0.652, 0.796]$	0.19
$[-1.071, -0.779]$	$[0.621, 0.812]$	0.098
$[-1.054, -0.820]$	$[0.624, 0.787]$	0.049
$[-1.034, -0.838]$	$[0.627, 0.792]$	0.0254
$[-1.019, -0.842]$	$[0.630, 0.794]$	0.0122
$[-1.007, -0.840]$	$[0.631, 0.794]$	0.00613
$[-1.006, -0.842]$	$[0.632, 0.793]$	0.00306
$[-1.005, -0.842]$	$[0.632, 0.793]$	0.00153
$[-1.004, -0.843]$	$[0.632, 0.793]$	0.00076
$[-1.004, -0.843]$	$[0.632, 0.793]$	0.00038

Список литературы

[1] В. М. Алексеев, Символическая динамика, 11 математическая школа, Киев, 1976.

[2] И. У. Бронштейн, Неавтономные динамические системы, Кишинев, 1984.

[3] Б. Ф. Былов, Р. Е. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, Теория показателей Ляпунова, Москва, 1966.

[4] F. Colonius and W. Klieman, *The Morse spectrum of linear flows on vector bundles*, report 503 Inst. of Math. Ausburg Univ., 1994.

[5] Z. Nitecki and M. Shub, *Filtrations, decompositions, and explosions*, Amer. J. of Math., v. 97 (1975), No. 4, 1029-1047.

[6] Г. С. Осипенко, *О символическом образе динамической системы*, сб. Граничные задачи, Пермь, 1983, 101-105.

[7] Г. С. Осипенко, *Проверка условия трансверсальности методами символической динамики*, Дифференциальные уравнения, т. 26, N 9, 1990, 1126-1132.

[8] G. S. Osipenko, *The periodic points and symbolic dynamics*, in Seminar on Dynamical Systems, Birkhauser Verlag, Basel, 1993, 261-267.

[9] G. Osipenko, *Spectrum of a Dynamical System and Applied Symbolic Dynamics*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 252, 2000, 587-616.

[10] G. S. Osipenko and S. Campbell, *Applied Symbolis Dynamics: Attractors and Filtrations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 5, no. 1, 1999, 43-60.

[11] Г. С. Осипенко, Оценка характеристических показателей методами символической динамики, *Дифференциальные уравнения,* т.38, N4, 1-11, (2002).

[12] И. В. Романовский, *Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом,* Кибернетика, N. 2, 1967, с.66-78.

[13] R. Sacker and G. Sell, *Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems I-III*, J. Diff. Eq. v. 15, no 3 (1974), 429-458, v. 22, no. 2 (1976) 476-522.

[14] R. Sacker and G.Sell, *A spectral theory for liner differential systems*, J. Diff. Eq., v. 27, no. 3, (1978), 320-358.

[15] D. Salamon and E. Zehnder, *Flows on vector bundles and hyperbolic sets*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 306, no. 2 (1988), 623-649.

[16] J. Selgrade, *Isolated invariant sets for flows on vector bundles*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 203 (1975), 359-390.

[17] G. Sell, *Nonautonomous differential equations and topological dynamics*, Trans. AMS, 127 (1967), 241-283.

[18] С. Писсанецки, Технология разреженных матриц, М., Мир, 1988.

[19] E. W. Dijkstra *A note on two problems in connection with graphs* // Numerische Math., 1959, **1**, p. 269–271.

[20] Б. Ю. Левит, В. Н. Лившиц *Нелинейные сетевые транспортные задачи.* — М., Транспорт, 1972 г. — 144 с.