Пахомов С.Н.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОЛЬЗЯЩЕГО СПЕКТРА ФУРЬЕ[1]

В области цифровой обработки сигналов анализ поступающих данных требуется проводить в режиме реального времени. При этом зачастую необходимо анализировать спектр Фурье, *скользящий* вдоль оси дискретного времени. В настоящее время существует два подхода к вычислению скользящего спектра: статические и динамические алгоритмы пересчета.

К разряду статических относятся все классические алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), в частности, алгоритм Кули-Тьюки [1, 2, 3]. Применение таких вычислительных схем позволяет повысить быстродействие анализа спектра. Однако статические алгоритмы не являются оптимальными, поскольку в своей работе не принимают во внимание результаты расчетов, полученные на предыдущих шагах скольжения.

Динамическими являются алгоритмы, работающие с учетом накопленной информации. Основные подходы к синтезу таких вычислительных схем рассмотрены в [4]. В вычислительном плане предложенные в указанной работе алгоритмы значительно эффективнее статических. Но они имеют существенный недостаток, поскольку применимы для сдвига (скольжения) спектра только на один отсчет.

В данной работе развиваются предложенные в [4] идеи. Получен динамический алгоритм пересчета спектра Фурье, применимый для сдвига спектра на число отсчетов, являющееся степенью двойки. Работа содержит описание быстрого алгоритма, подсчет количества вычислительных операций и экспериментальную оценку эффективности в сравнении с другими алгоритмами.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (номер проекта 01-01-00231).

1. Введение

Пусть s — натуральное число и $N = 2^s$. Обозначим через $\mathbb{C}_N$ линейное пространство комплекснозначных N-периодических функций целочисленного аргумента $x = x(j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Элементы пространства $\mathbb{C}_N$ будем называть *сигналами*. Дискретное преобразование Фурье $\mathcal{F}_N : \mathbb{C}_N \to \mathbb{C}_N$ сопоставляет сигналу x сигнал $X = \mathcal{F}_N(x)$ с компонентами

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\omega_N^{-kj}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\omega_N = \exp(2\pi i/N)$. Сигнал X называется *спектром Фурье сигнала* x.

Однако в большинстве практических приложений x не является периодической функцией. В этом случае, как уже отмечалось, интерес представляет *скользящий спектр*, т.е. спектр конечной выборки функции x, перемещающийся вдоль оси времени:

$$X_l(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(l-j)\omega_N^{-kj}, \quad k \in 0 : N-1,$$

где $l \in \mathbb{Z}$ — некоторый момент дискретного времени.

Опишем динамический алгоритм пересчета X_{l+m} из X_l, где $m = 2^t$, $t \in 0 : s-1$.

2. Описание алгоритма

За основу быстрого алгоритма вычисления скользящего спектра взято быстрое преобразование Фурье *с прореживанием по частоте* [1, 2, 3]. Для описания алгоритма положим $N_\nu = N/2^\nu$, $\Delta_\nu = 2^{\nu-1}$ и введем в рассмотрение сигналы X_l^ν при $l \in \mathbb{Z}$, $\nu = s-1, \dots, 0$ с компонентами

$$X_l^\nu(k) = \sum_{j=0}^{N_\nu-1} x(l-\Delta_{\nu+1}j)\omega_{N_\nu}^{-kj}, \quad k \in 0 : N_\nu - 1. \tag{1}$$

В частности, при $\nu = 0$ имеем:

$$X_l^0(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(l-j)\omega_N^{-kj} = X_l(k), \quad k \in 0 : N-1.$$

Лемма 1. *Для всех $l \in \mathbb{Z}$ верно:*

$$\begin{aligned} X_l^{s-1}(\sigma) &= x(l) + (-1)^\sigma x(l - N/2), \quad \sigma \in 0:1; \\ X_l^{\nu-1}(\sigma N_\nu + k) &= X_l^\nu(k) + (-1)^\sigma \omega_{N_{\nu-1}}^{-k} X_{l-\Delta_\nu}^\nu(k), \\ &\qquad \sigma \in 0:1,\ k \in 0:N_\nu - 1. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу (1) можем записать:

$$\begin{aligned} X_l^{s-1}(\sigma) &= \sum_{j=0}^{1} x\left(l - \frac{N}{2}j\right)\omega_2^{-\sigma j} = \\ &= x(l) + (-1)^\sigma x(l - N/2), \quad \sigma \in 0:1; \\ X_l^{\nu-1}(\sigma N_\nu + k) &= \sum_{j=0}^{N_{\nu-1}-1} x(l - \Delta_\nu j)\omega_{N_{\nu-1}}^{-(\sigma N_\nu + k)j} = \\ &= \sum_{j'=0}^{N_\nu - 1} x(l - \Delta_{\nu+1} j')\omega_{N_\nu}^{-kj'} + \\ &\quad + \sum_{j''=0}^{N_\nu - 1} x(l - \Delta_\nu - \Delta_{\nu+1} j'')\omega_{N_\nu}^{-kj''}\omega_2^{-\sigma}\omega_{N_{\nu-1}}^{-k} = \\ &= X_l^\nu(k) + (-1)^\sigma \omega_{N_{\nu-1}}^{-k} X_{l-\Delta_\nu}^\nu(k), \\ &\qquad \sigma \in 0:1,\ k \in 0:N_\nu - 1. \end{aligned}$$

□

Теорема 1. *Пусть известны (хранятся в памяти) компоненты $X_{l+m-p-\Delta_\nu}^\nu(k),\ k \in 0:N_\nu - 1,\ p \in 0:m-1,\ \nu = s-1, \ldots, t+1$. Тогда компоненты $X_{l+m}^0(k),\ k \in 0:N-1$ могут быть вычислены по формулам:*

$$\begin{aligned} X_{l+m-p}^{s-1}(\sigma) &= x(l+m-p) + (-1)^\sigma x(l+m-p-N/2), \\ &\qquad \sigma \in 0:1,\ p \in 0:m-1; \end{aligned} \tag{2}$$

$$X^{\nu-1}_{l+m-p}(\sigma N_\nu + k) = X^{\nu}_{l+m-p}(k) + (-1)^\sigma \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l+m-p-\Delta_\nu}(k),$$
$$\sigma \in 0:1,\ k \in 0:N_\nu - 1, \tag{3}$$
$$p \in 0:\min\{m, \Delta_\nu\} - 1,\ \nu = s-1, \dots, 1.$$

Доказательство. Истинность формул (2), (3) следует непосредственно из леммы.

Покажем, что компоненты, вычисленные при некотором ν, и компоненты, хранящиеся в памяти, необходимы и достаточны для вычислений на следующем шаге. Для этого представим выражение (3) в виде двух формульных зависимостей:

$$X^{\nu-1}_{l+m-p}(\sigma N_\nu + k) = X^{\nu}_{l+m-p}(k) + (-1)^\sigma \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l+m-p-\Delta_\nu}(k),$$
$$\sigma \in 0:1,\ k \in 0:N_\nu - 1, \tag{4}$$
$$p \in 0:m-1,\ \nu = s-1, \dots, t+1;$$

$$X^{\nu-1}_{l+m-p}(\sigma N_\nu + k) = X^{\nu}_{l+m-p}(k) + (-1)^\sigma \omega^{-k}_{N_{\nu-1}} X^{\nu}_{l+m-p-\Delta_\nu}(k),$$
$$\sigma \in 0:1,\ k \in 0:N_\nu - 1, \tag{5}$$
$$p \in 0:\Delta_\nu - 1,\ \nu = t, \dots, 1.$$

Полученные по формуле (2) компоненты $X^{s-1}_{l+m-p}(k),\ k \in 0:1$, $p \in 0:m-1$ необходимы для вычислений по формуле (4) при $\nu = s-1$. Вместе с хранящимися в памяти $X^{s-1}_{l+m-p-\Delta_{s-1}}(k), k \in 0:1$, $p \in 0:m-1$ они достаточны для этих вычислений.

При $\nu = s-1, \dots, t+2$ полученные по формуле (4) компоненты $X^{\nu-1}_{l+m-p}(k),\ k \in 0:N_{\nu-1}-1,\ p \in 0:m-1$ необходимы для вычислений по этой же формуле при переходе от ν к $\nu-1$. Вместе с хранящимися в памяти $X^{\nu}_{l+m-p-\Delta_\nu}(k),\ k \in 0:N_\nu - 1, p \in 0:m-1$, $\nu = s-2, \dots, t+1$ они являются достаточными.

При $\nu = t+1$ по формуле (4) получены компоненты $X^{t}_{l+m-p}(k),\ k \in 0:N_t - 1,\ p \in 0:m-1$. Их можно разбить на две группы: $X^{t}_{l+m-p}(k)$ и $X^{t}_{l+m-p-m/2}(k),\ k \in 0:N_t-1,\ p \in 0:m/2-1$. С учетом зависимости $m/2 = \Delta_t$ эти компоненты необходимы и достаточны для вычислений по формуле (5) при $\nu = t$.

При $\nu = t, \dots, 2$ полученные по формуле (5) компоненты $X^{\nu-1}_{l+m-p}(k),\ k \in 0:N_{\nu-1}-1,\ p \in 0:\Delta_\nu - 1$ можно разбить на группы $X^{\nu-1}_{l+m-p}(k)$ и $X^{\nu-1}_{l+m-p-\Delta_{\nu-1}}(k),\ k \in 0:N_{\nu-1}-1, p \in 0:\Delta_{\nu-1}-1$. Таким образом, они необходимы и достаточны для вычислений по этой же формуле при переходе от ν к $\nu-1$.

Наконец, при $\nu = 1$ по формуле (5) вычислены компоненты $X^0_{l+m}(k),\ k \in 0 : N-1$ — скользящий спектр. $\square$

3. Эффективность

Определим количество арифметических операций, требуемых для вычисления скользящего спектра.

Комплексные умножения производятся только в формуле (3). Их число определяется формулой

$$\begin{aligned} M = \sum_{\nu=1}^{s-1} N_\nu \min\{m, \Delta_\nu\} = \sum_{\nu=1}^{t} N_\nu \Delta_\nu + \sum_{\nu=t+1}^{s-1} N_\nu m = \\ = t\frac{N}{2} + m(2^{s-t} - 2) = \frac{N}{2}(t+2) - 2^{t+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для подсчета числа сложений отдельно рассмотрим вычисления, проводимые по формулам (2) и (3). В формуле (2) количество комплексных сложений равно

$$A_1 = 2m, \tag{7}$$

в формуле (3) количество комплексных сложений равно

$$A_2 = 2M = N(t+2) - 2^{t+2}. \tag{8}$$

С учетом (7), (8) общее число комплексных сложений определяется формулой

$$A = A_1 + A_2 = N(t+2) - 2^{t+1}. \tag{9}$$

Рассмотрим крайние случаи для формул (6) и (9):

1. $t = 0$ $(m = 1)$. В этом случае спектр перемещается на один отсчет и $M = N - 2,\ A = 2N - 2$ — линейная вычислительная сложность.

2. $t = s - 1$ $(m = N/2)$. В этом случае спектр перемещается на половину длины выборки и $M = \frac{N}{2}(log_2 N - 1)$, $A = N log_2 N$ — вычислительная сложность, соответствующая статическому БПФ.

4. Сравнение с другими алгоритмами

Как отмечалось выше, на сегодняшний день существует два подхода к решению задачи нахождения скользящего спектра. Первым является вычисление спектра с помощью статического БПФ. Вторым — динамические алгоритмы. Рассмотрим каждый из этих подходов и определим области, в которых в зависимости от соотношения N и m эффективен тот или иной алгоритм.

1. Первым способом нахождения скользящего спектра является вычисление его компонент по алгоритму Кули-Тьюки [1, 2, 3]. Теоретически этот способ всегда хуже предложенного алгоритма, поскольку его вычислительная сложность всегда выше. Однако на практике существует область, в которой соотношение N и m таково, что статическое вычисление спектра оказывается эффективнее динамического. Это объясняется тем, что предложенный алгоритм содержит дополнительные вычислительные затраты по отношению к алгоритму Кули-Тьюки.

2. Другим способом нахождения скользящего спектра является использование динамических алгоритмов, описанных в [4]. Однако, как уже отмечалось, они применимы только для сдвига спектра на один отсчет. Таким образом, для вычисления скользящего спектра со сдвигом более чем на один отсчет необходимо многократное использование указанных алгоритмов, что делает их существенно хуже предложенного метода. Экспериментальные данные подтверждают этот вывод и по этой причине не приводятся.

В Таблице 1 показаны экспериментальные данные измерения времени работы алгоритма Кули-Тьюки и предложенного метода. Эксперименты проводились при различных значениях N и m. При каждой фиксированной паре чисел N и m случайным образом генерировалось 100 различных сигналов. Для каждого сигнала измерялось время работы обоих алгоритмов, после чего вычислялось среднее время работы каждого из них. В таблице буквой F отмечены области, в которых эффективнее вычислять скользящий спектр по алгоритму Кули-Тьюки, буквой P —

области, в которых оптимальные результаты дает предложенный алгоритм.

Таблица 1: Экспериментальные данные

					m			
N	1	2	4	8	16	32	64	128
4	F	F	—	—	—	—	—	—
8	F	F	F	—	—	—	—	—
16	F	F	F	F	—	—	—	—
32	P	P	F	F	F	—	—	—
64	P	P	P	P	F	F	—	—
128	P	P	P	P	P	F	F	—
256	P	P	P	P	P	P	F	F

Таким образом:

- применение предложенного алгоритма наиболее эффективно при вычислении скользящего спектра больших длин со сдвигом от одного отсчета до 10—15% длины спектра;
- при малых длинах спектра и при сдвиге, составляющем более 15% длины спектра, вычисления эффективнее проводить по алгоритму Кули-Тьюки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cooley J., Tukey J.* An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series// Math. Comput. 1965. Vol. 19. P. 297-301.
2. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. Пер. с англ. М., 1989. 448 с.
3. *Малоземов В.Н., Третьяков А.А.* Алгоритм Кули-Тьюки и дискретное преобразование Хаара// Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 3 (№15). С. 31-34.
4. *Сюзев В.В.* Быстрые преобразования Фурье для скользящего анализа спектра// Вестник МГТУ. Сер. Приборостроение. 1998. №2. С. 29-38.