УДК 519.857

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЯВНЫМ РЕШЕНИЕМ[1]

В.Н.Малоземов, А.В.Омельченко

(198504 Петродворец, Университетский пр., 28, СПбГУ, матем.-механ. ф-т)

e-mail: malv@gamma.math.spbu.ru, vmu@peterlink.ru

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Зафиксируем натуральное n и рассмотрим конечный двумерный процесс

$$\begin{aligned} &x_k = x_{k-1}\alpha(t_k), \quad y_k = y_{k-1}\beta(t_k), \quad k = 1, \ldots, n; \\ &x_0 > 1 \quad \text{и} \quad y_0 > 0 \quad - \quad \text{заданные начальные значения.} \end{aligned} \tag{1}$$

Предполагается, что функции α и β определены на полуоси $[1, +\infty)$, непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\alpha(1) = 1, \quad \alpha'(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 1, \quad \alpha(t) \to +0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty; \\ &\beta(1) = 1, \quad \beta(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Ставится задача: выбрать параметры $t_1, \ldots, t_n$ из $[1, +\infty)$ так, чтобы выполнялось равенство $x_n = 1$ и чтобы при этом величина y_n принимала наибольшее возможное значение.

При $n = 1$ формулы (1) принимают вид

$$x_1 = x_0\alpha(t_1), \quad y_1 = y_0\beta(t_1).$$

Равенство $x_1 = 1$ выполняется только при $t_1 = T(x_0)$, где T — функция, обратная к $1/\alpha$. При этом $y_1 = y_0\beta(T(x_0))$. Здесь нет экстремальной задачи.

Возьмем $n \geqslant 2$. Тогда формулы (1) определяют кривую Γ на плоскости, зависящую от n параметров $t_1, \ldots, t_n$. Эта кривая состоит из n сегментов

$$x = x_{k-1}\alpha(t), \quad y = y_{k-1}\beta(t), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Параметр t изменяется от 1 до выбираемого значения $t_k \geqslant 1$. Тем самым осуществляется переход от точки (x_{k-1}, y_{k-1}) к точке (x_k, y_k). Составную кривую Γ назовем допустимой, если у нее $x_n = 1$. Мы хотим выбрать такую допустимую кривую, у которой величина y_n принимает наибольшее значение. Эту задачу можно интерпретировать как 'забрасывание' материальной точки на максимально возможную высоту.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00231).

Для того чтобы сформулировать основные результаты, введем новые управляющие параметры $u_k = 1/\alpha(t_k)$. Покажем, что ограничения

$$x_k = x_{k-1}\alpha(t_k), \quad k = 1, \ldots, n; \quad x_n = 1 \tag{3}$$

равносильны условиям

$$u_1 u_2 \ldots u_n = x_0, \quad u_k \geqslant 1 \quad \text{при всех} \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Действительно, из (3) следует, что $u_k = x_{k-1}/x_k$. Учитывая равенство $x_n = 1$, получаем

$$u_1 u_2 \ldots u_n = \frac{x_0}{x_1}\frac{x_1}{x_2}\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n} = x_0.$$

Согласно (2), $u_k := 1/\alpha(t_k) \geqslant 1$ при всех $k = 1, \ldots, n$.

Наоборот, пусть выполнены условия (4). Положим $t_k = T(u_k)$, $x_k = x_{k-1}\alpha(t_k)$, $k = 1, \ldots, n$, при заданном x_0. Тогда $x_{k-1}/x_k = 1/\alpha(t_k) = u_k$ и

$$x_0 = u_1 u_2 \ldots u_n = \frac{x_0}{x_1}\frac{x_1}{x_2}\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n}.$$

Отсюда следует, что $x_n = 1$.

Разберемся с целевой функцией. Имеем

$$y_n = y_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{y_k}{y_{k-1}} = y_0 \prod_{k=1}^{n} \beta(t_k) = y_0 \prod_{k=1}^{n} \beta(T(u_k)).$$

Обозначив $A(u) = \beta(T(u))$, придем к экстремальной задаче, эквивалентной исходной:

$$\begin{gathered} P_n(u) := y_0 \prod_{k=1}^{n} A(u_k) \to \max, \\ u_1 u_2 \ldots u_n = x_0, \quad u_k \geqslant 1 \quad \text{при всех} \quad k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{5}$$

Справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что функция $\chi(u) = uA'(u)/A(u)$ строго убывает на отрезке $[1, x_0]$. Тогда задача (5) имеет единственное решение*

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = x_0^{1/n}. \tag{6}$$

Обозначим через λ_n максимальное значение целевой функции в задаче (5).

Т е о р е м а 2. *В условиях теоремы 1 последовательность $\{\lambda_n\}$ строго возрастает с увеличением n. При этом*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = y_0 (x_0)^{A'(1)}. \tag{7}$$

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим строго вогнутую на отрезке $[0,a]$ функцию $f(\vartheta)$, удовлетворяющую дополнительному условию $f(0)=0$. Запишем для нее неравенство Йенсена

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\vartheta_k) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k\right). \tag{8}$$

Здесь n — произвольное натуральное число и $\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n$ — любые точки из $[0,a]$. Неравенство (8) обращается в равенство только при $\vartheta_1=\vartheta_2=\ldots=\vartheta_n$.

Предположим, что

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\ldots+\vartheta_n=a;\quad \vartheta_k\geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad k=1,\ldots,n. \tag{9}$$

В этом случае согласно (8)

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vartheta_k)\leqslant n\ f\left(\frac{a}{n}\right), \tag{10}$$

причем неравенство обращается в равенство только при $\vartheta_1=\vartheta_2=\ldots=\vartheta_n=a/n$.

Обозначим правую часть неравенства (10) через μ_n. В силу предположений о функции f имеем

$$\mu_n=n\ f\left(\frac{a}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{a}{n}\right)+f(0)<(n+1)\ f\left(\frac{a}{n+1}\right)=\mu_{n+1}.$$

Значит, последовательность $\{\mu_n\}$ строго возрастает. Поскольку

$$\mu_n=a\ \frac{f(a/n)-f(0)}{a/n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n=af'(0) \tag{11}$$

при условии, что производная $f'(0)$ существует.

Приходим, в частности, к такому заключению.

Л е м м а 1. *Пусть строго вогнутая на отрезке $[0,a]$ функция $f(\vartheta)$ удовлетворяет дополнительному условию $f(0)=0$, и у нее существует конечная производная $f'(0)$. Тогда при любом натуральном n и любых $\vartheta_1,\vartheta_2,\ldots,\vartheta_n$, удовлетворяющих условию (9), выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vartheta_k)<af'(0).$$

Это неравенство неулучшаемо одновременно для всех n.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2

Напомним, что $A(u) = \beta(T(u))$, где T — функция, обратится к $1/\alpha$. Поскольку $\alpha(1) = \beta(1) = 1$ и $\beta(t) > 0$ при $t \geqslant 1$, то и $A(1) = 1$, $A(t) > 0$ при $t \geqslant 1$.

Л е м м а 2. *В условиях теоремы 1 справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} A(u_k) \leqslant \left[A\left(x_0^{1/n}\right)\right]^n. \tag{12}$$

Это неравенство обращается в равенство только при выполнения условия (6).

Доказательство. Прологарифмируем ограничение $u_1 u_2 \ldots u_n = x_0$. Обозначим $\vartheta_k = \ln u_k$, $a = \ln x_0$. Учитывая, что $u_k \geqslant 1$, получаем

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots + \vartheta_n = a; \quad \vartheta_k \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Теперь прологарифмируем неравенство (12). Положив $f(\vartheta) = \ln A(e^{\vartheta})$, придем к равносильному неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vartheta_k) \leqslant n\ f\left(\frac{a}{n}\right). \tag{13}$$

Отметим, что $f(0) = 0$. Неравенство (13) и условие обращения его в равенство будут установлены, если мы докажем строгую вогнутость функции $f(\vartheta)$ на отрезке $[0, a]$. Имеем

$$f'(\vartheta) = \frac{e^{\vartheta} A'(e^{\vartheta})}{A(e^{\vartheta})} = \frac{uA'(u)}{A(u)}. \tag{14}$$

Здесь $u = e^{\vartheta}$. Когда ϑ изменяется от 0 до a, величина u изменяется от 1 до x_0. В силу условия теоремы 1 производная $f'(\vartheta)$ строго убывает на $[0, a]$, а это гарантирует ее строгую вогнутость. Лемма доказана.

Теорема 1 непосредственно следует из леммы 2. При этом

$$\lambda_n := \max P_n(u) = y_0 \left[A\left(x_0^{1/n}\right)\right]^n = y_0\ \exp\left\{\ln\left(\left[A\left(x_0^{1/n}\right)\right]^n\right)\right\} =$$

$$= y_0\ \exp\left\{nf\left(\frac{a}{n}\right)\right\} = y_0\ \exp(\mu_n).$$

Как отмечалось в п. 2, последовательность $\{\mu_n\}$ строго возрастает и справедливо предельное соотношение (11). Согласно (14), $f'(0) = A'(1)$. Видим, что последовательность $\{\lambda_n\}$ также строго возрастает и

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = y_0 \exp(A'(1) \ln x_0) = y_0 (x_0)^{A'(1)}.$$

Именно это утверждается в теореме 2.

4. ПРИМЕРЫ

В качестве $\alpha(t)$ возьмем функцию $2/(t+1)$. В этом случае

$$\frac{1}{\alpha(t)} = \frac{t+1}{2}, \quad T(u) = 2u - 1.$$

Функция $\beta(t)$ будет представлена в трех вариантах

$$\beta_1(t) = \sqrt{t}, \quad \beta_2(t) = t^2, \quad \beta_3(t) = e^{-(t-1)}.$$

Найдем три соответствующих варианта функций $A(u)$ и $\chi(u)$. Имеем

$$A_1(u) = \sqrt{2u-1}, \quad A_2(u) = (2u-1)^2, \quad A_3(u) = e^{-2(u-1)};$$

$$\chi_1(u) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2u-1}\right), \quad \chi_2(u) = 2\left(1 + \frac{1}{2u-1}\right), \quad \chi_3(u) = -2u.$$

Во всех трех случаях функция $\chi(u)$ строго убывает на полуоси $[1, +\infty)$. Это значит, что для всех трех пар функций $(\,\alpha(t),\ \beta_i(t)\,)$, $i = 1, 2, 3$, справедливы теоремы 1 и 2.

В работе [2] рассматривалась функция

$$A(u) = \frac{u+\varepsilon}{u(1+\varepsilon u)}, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Соответствующая функция $\chi(u)$ имеет вид

$$\chi(u) = u[\ln A(u)]' = u\left(\frac{1}{u+\varepsilon} - \frac{1}{u} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon u}\right) = -\varepsilon\left(\frac{1}{u+\varepsilon} + \frac{u}{1+\varepsilon u}\right).$$

Для нее

$$\chi'(u) = \frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)(1-u^2)}{[(u+\varepsilon)(1+\varepsilon u)]^2} < 0 \quad \text{при} \quad u > 1.$$

Значит, основные результаты работы [2] следуют из теорем 1 и 2.

Разумеется, функция $\chi(u)$ не всегда строго убывает. При $A(u) = (1 + + \ln u)^{-1}$ имеем

$$\chi(u) = \frac{uA'(u)}{A(u)} = -\frac{1}{1+\ln u},$$

так что $\chi(u)$ строго возрастает на полуоси $[1, +\infty)$. В таком случае задачу (5) максимизации $P_n(u)$ следует заменить задачей минимизации $P_n(u)$.

5. ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ОГИБАЮЩИЕ ДЛЯ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ КРИВЫХ

Понятие допустимой кривой было введено в п. 1. Возьмем произвольную допустимую кривую Γ и запишем ее в явном виде $y = y_n(x)$, $x \in [1, x_0]$.

Т е о р е м а 3. *При всех натуральных* $n \geqslant 2$ *и любых* $x \in [1, x_0)$ *справедливы неравенства*

$$y_0 A(x_0/x) \leqslant y_n(x) < y_0 (x_0/x)^{A'(1)}. \tag{15}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in [1, x_0)$ и заменим в (3) условие $x_n = 1$ равенством $x_n = x$. Это приведет к тому, что в (5) ограничение $u_1 u_2 \ldots u_n = x_0$ заменится на $u_1 u_2 \ldots u_n = x_0/x$. Соответственно правая часть соотношения (7) примет вид $y_0 (x_0/x)^{A'(1)}$. Мы учитываем, что функция $\chi(u)$ остается строго убывающей на $[1, x_0/x]$. Допустимую кривую y_n можно сузить на $[x, x_0]$ и сделать ее на этом отрезке n-звенной, использовав нужное число фиктивных управлений $t_k = 1$. В результате по тем же соображениям, что и в теореме 2, придем к правому неравенству в (15).

Для проверки левого неравенства потребуется некоторая подготовка.

Л е м м а 3. *Пусть* $f(\vartheta)$ *— строго вогнутая на отрезке* $[0, a]$ *функция и* $f(0) = 0$. *Тогда при любом* $n \geqslant 2$ *и любых* $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$, *удовлетворяющих условию (9), выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vartheta_k) \geqslant f(a). \tag{16}$$

Неравенство обращается в равенство только тогда, когда одно из ϑ_k *равно* a, *а остальные* ϑ_k *равны нулю.*

Доказательство. При $n = 2$ неравенство (16) можно записать в виде $f(\vartheta_1) + f(a - \vartheta_1) \geqslant f(a)$, где $\vartheta_1 \in [0, a]$. Функция $F(\vartheta_1) = f(\vartheta_1) + f(a - \vartheta_1)$ строго вогнута на $[0, a]$. Ее минимум достигается на концах этого отрезка. Остается учесть, что $F(0) = F(a) = f(a)$.

Сделаем индукционный переход от n к $n+1$. Согласно индукционному предположению имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vartheta_k) + f(\vartheta_{n+1}) \geqslant f(a - \vartheta_{n+1}) + f(\vartheta_{n+1}) \geqslant f(a).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 4. *При* $x \in [1, x_0)$ *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} A(u_k) \geqslant A(x_0/x), \tag{17}$$

где $u_1 u_2 \ldots u_n = x_0/x$ *и* $u_k \geqslant 1$ *при всех* $k = 1, \ldots, n$. *Неравенство обращается в равенство только тогда, когда одно из* u_k *равно* x_0/x, *а остальные* u_k *равны единице.*

Доказательство. Положим $\vartheta_k = \ln u_k$, $a = \ln(x_0/x)$, $f(\vartheta) = \ln A(e^{\vartheta})$. Прологарифмируем неравенство (17) и ограничения. Получим равносильное неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vartheta_k) \geqslant f(a) \qquad (18)$$

при ограничениях (9). Функция $f(\vartheta)$ строго вогнута на $[0, a]$ и $f(0) = 0$. По лемме 3 неравенство (18) выполняется. Более того, оно обращается в равенство только тогда, когда одно из ϑ_k равно a, а остальные ϑ_k равны нулю. Это равносильно утверждению, сформулированному в лемме.

Лемма доказана.

Теперь левое неравенство в (15) следует из леммы 4.

Список литературы

1. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
2. *Малоземов В.Н., Омельченко А.В.* Глобальная оптимальность и единственность в задаче минимизации потерь полного давления //Доклады РАН. 2003. Т.389. №2. С.189–192.