УДК 621.391 : 519.72

В. Н. Малозёмов, К. Ю. Цветков

ТЕОРЕМА ОБ ОТСЧЕТАХ В БАЗИСЕ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА[1]

Доказывается следующее утверждение: если в разложении дискретного сигнала x по базису Виленкина–Крестенсона, упорядоченному по частоте, старшие коэффициенты равны нулю, то сигнал x является ступенчатым.

§1. Формулировка результата

Пусть $N = n^s$, где n, s — натуральные числа, отличные от единицы, и $J_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Каждое число $j \in J_N$ можно единственным образом представить в виде

$$j = j_{s-1}n^{s-1} + j_{s-2}n^{s-2} + \dots + j_0, \tag{1.1}$$

где $j_\alpha \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ при всех $\alpha = 0, 1, \dots, s-1$. Формулу (1.1) коротко записывают так: $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_n$. Выражение, стоящее в правой части последнего равенства, называется n-ичным кодом числа j.

Наряду с $j \in J_N$ рассмотрим число $\mathrm{rev}_s(j)$, n-ичный код которого равен перевернутому n-ичному коду числа j, т. е. $\mathrm{rev}_s(j) = (j_0, j_1, \dots, j_{s-1})_n$. Очевидно, что $\mathrm{rev}_s(j) \in J_N$ и $\mathrm{rev}_s\big(\mathrm{rev}_s(j)\big) = j$.

Возьмем два числа $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \dots, j_0)_n$, $k = (k_{s-1}, k_{s-2}, \dots, k_0)_n$ и обозначим

$$\{k, j\}_s = \sum_{\alpha=0}^{s-1} k_\alpha j_\alpha.$$

Дискретные функции

$$\mathrm{Pal}_k(j) = \omega_n^{\{\mathrm{rev}_s(k),\, j\}_s}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

определенные на J_N, называются функциями Виленкина–Крестенсона [1, 2]. Здесь $\omega_n = \exp(2\pi i/n)$ — корень n-й степени из единицы. Система

$$\mathrm{Pal}_0(j),\ \mathrm{Pal}_1(j),\ \dots,\ \mathrm{Pal}_{N-1}(j) \tag{1.2}$$

состоит из попарно ортогональных на J_N сигналов. При этом частота $\mathrm{Pal}_k(j)$ равна k.

Любую комплекснозначную функцию $x = x(j)$, заданную на J_N, можно разложить по базису (1.2):

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^{(n)}(k)\, \mathrm{Pal}_k(j). \tag{1.3}$$

Коэффициенты $X^{(n)}(k)$ вычисляются по формуле

$$X^{(n)}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \overline{\mathrm{Pal}_k(j)}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{1.4}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 01-01-00231).

Черта над $\overline{\mathrm{Pal}}_k(j)$ означает комплексное сопряжение. Нас будет интересовать случай, когда $X^{(n)}(k) = 0$ при $k = n^\nu,\ n^\nu + 1,\ \ldots,\ N - 1,\ \nu \in \{0, 1, \ldots, s - 1\}$.

Чтобы сформулировать результат, введем единичный N-периодический импульс $\delta_N(j)$, равный единице, когда j делится на N, и равный нулю при остальных $j \in \mathbb{Z}$. Обозначим $N_\nu = N/n^\nu$, $\Delta_\nu = n^{\nu-1}$ и положим

$$h_\nu(j) = \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \delta_N(j - q).$$

Функция $h_\nu(j)$ представляет собой N-периодическую ступеньку. На основном периоде J_N она равна единице при $j \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$ и равна нулю при $j \in \in \{N_\nu, \ldots, N - 1\}$.

Теорема. *Если $X^{(n)}(k) = 0$ при $k = \Delta_{\nu+1}, \ldots, N - 1$, $\nu \in \{0, 1, \ldots, s - 1\}$, то*

$$x(j) = \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1} - 1} x(lN_\nu)\, h_\nu(j - lN_\nu), \quad j \in J_N. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) показывает, что сигнал $x(j)$ является ступенчатым. Он равен $x(lN_\nu)$ при $j \in \{lN_\nu, \ldots, (l + 1)N_\nu - 1\},\ l = 0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1$.

§2. Вспомогательные предложения

Лемма 1. *Справедлива формула*

$$\delta_{\Delta_{\nu+1}}\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \delta_N(j - q), \quad j \in J_N. \tag{2.1}$$

Доказательство. Если $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$, то

$$\mathrm{rev}_s(j) = j_0 n^{s-1} + \cdots + j_{s-\nu-1} n^\nu + j_{s-\nu} n^{\nu-1} + \cdots + j_{s-1}.$$

Обозначим $p = j_0 n^{s-\nu-1} + \cdots + j_{s-\nu-1},\ r = j_{s-\nu} n^{\nu-1} + \cdots + j_{s-1}$. Тогда $\mathrm{rev}_s(j) = = p\Delta_{\nu+1} + r$, причем $r \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$. В силу $\Delta_{\nu+1}$-периодичности единичного импульса $\delta_{\Delta_{\nu+1}}$ имеем

$$\delta_{\Delta_{\nu+1}}\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(r). \tag{2.2}$$

Пусть $j \in \{0, 1, \ldots, N_\nu - 1\}$. В этом случае $j_{s-1} = j_{s-2} = \cdots = j_{s-\nu} = 0$. В частности, $r = 0$. Согласно (2.2), $\delta_{\Delta_{\nu+1}}\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = 1$. Но при указанных j и правая часть (2.1) равна единице.

Если $j \in \{N_\nu, \ldots, N - 1\}$, то хотя бы одна из компонент $j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_{s-\nu}$ отлична от нуля. Как следствие получаем $r \neq 0$, т. е. $r \in \{1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$. Согласно (2.2), $\delta_{\Delta_{\nu+1}}\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = 0$. Но при указанных j и правая часть (2.1) равна нулю. Лемма доказана. ▲

Формулу (2.1) можно переписать в виде $\delta_{\Delta_{\nu+1}}\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = h_\nu(j)$, откуда следует, что

$$h_\nu\bigl(\mathrm{rev}_s(j)\bigr) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j), \quad j \in J_N. \tag{2.3}$$

Л е м м а 2. *Для* $j = (j_{s-1}, j_{s-2}, \ldots, j_0)_n$ *справедливо равенство*

$$\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j) = \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} \delta_n(j_\alpha). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$j = j_{s-1}n^{s-1} + \cdots + j_\nu n^\nu + j_{\nu-1}n^{\nu-1} + \cdots + j_0.$$

Обозначим $p' = j_{s-1}n^{s-\nu-1} + \cdots + j_\nu,\ r' = j_{\nu-1}n^{\nu-1} + \cdots + j_0$. Тогда $j = p'\Delta_{\nu+1} + r'$ и

$$\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(r'). \tag{2.5}$$

Возможны два случая.

1) $j_0 = j_1 = \cdots = j_{\nu-1} = 0$. В этом случае $r' = 0$. Согласно (2.5), $\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j) = 1$. Очевидно, что и правая часть (2.4) равна единице.

2) Хотя бы одна из компонент $j_0, j_1, \ldots, j_{\nu-1}$ отлична от нуля. Пусть $j_{\alpha'} \in \in \{1, \ldots, n-1\}$ при некотором $\alpha' \in \{0, 1, \ldots, \nu-1\}$. Тогда сомножитель $\delta_n(j_{\alpha'})$ в правой части (2.4) равен нулю, так что и все произведение равно нулю. Поскольку в данном случае $r' \in \{1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$, то согласно (2.5) и $\delta_{\Delta_{\nu+1}}(j) = 0$. Лемма доказана. ▲

Л е м м а 3. *Справедливо разложение*

$$h_\nu(j) = \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \operatorname{Pal}_k(j), \quad j \in J_N. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правую часть (2.6) обозначим через $f_\nu(j)$ и покажем, что

$$f_\nu\bigl(\operatorname{rev}_s(j)\bigr) = \delta_{\Delta_{\nu+1}}(j). \tag{2.7}$$

Согласно определению функций Виленкина–Крестенсона имеем

$$f_\nu\bigl(\operatorname{rev}_s(j)\bigr) = \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \omega_n^{\{\operatorname{rev}_s(k),\, \operatorname{rev}_s(j)\}_s} = \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \prod_{\alpha=0}^{s-1} \omega_n^{k_\alpha j_\alpha}.$$

Поскольку $k = (k_{\nu-1}, k_{\nu-2}, \ldots, k_0)_n$, то

$$f_\nu\bigl(\operatorname{rev}_s(j)\bigr) = \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{k_{\nu-1}=0}^{n-1} \cdots \sum_{k_0=0}^{n-1} \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} \omega_n^{k_\alpha j_\alpha} = \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{k_\alpha=0}^{n-1} \omega_n^{k_\alpha j_\alpha}.$$

Воспользуемся элементарной формулой [3]

$$\frac{1}{n} \sum_{k_\alpha=0}^{n-1} \omega_n^{k_\alpha j_\alpha} = \delta_n(j_\alpha).$$

Получим

$$f_\nu\bigl(\operatorname{rev}_s(j)\bigr) = \prod_{\alpha=0}^{\nu-1} \delta_n(j_\alpha).$$

Теперь (2.7) следует из (2.4).

В силу (2.7) и (2.3), $f_\nu\big(\mathrm{rev}_s(j)\big) = h_\nu\big(\mathrm{rev}_s(j)\big)$. Заменив в последнем равенстве j на $\mathrm{rev}_s(j)$, придем к (2.6). Лемма доказана. ▲

Формула (2.6) представляет собой разложение ступеньки h_ν по базису Виленкина–Крестенсона, упорядоченному по частоте.

Лемма 4. *При всех k, l из множества $\{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1}-1\}$ справедливо равенство*

$$\{\mathrm{rev}_\nu(l), k\}_\nu = \{\mathrm{rev}_s(k), lN_\nu\}_s. \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть $l = (l_{\nu-1}, l_{\nu-2}, \ldots, l_0)_n$, $k = (k_{\nu-1}, k_{\nu-2}, \ldots, k_0)_n$. Тогда $\mathrm{rev}_\nu(l) = (l_0, l_1, \ldots, l_{\nu-1})_n$ и

$$\{\mathrm{rev}_\nu(l), k\}_\nu = l_{\nu-1}k_0 + l_{\nu-2}k_1 + \cdots + l_0 k_{\nu-1}. \tag{2.9}$$

Вместе с тем,

$$\mathrm{rev}_s(k) = k_0 n^{s-1} + k_1 n^{s-2} + \cdots + k_{\nu-1} n^{s-\nu}, \quad lN_\nu = l_{\nu-1}n^{s-1} + l_{\nu-2}n^{s-2} + \cdots + l_0 n^{s-\nu},$$

так что

$$\{\mathrm{rev}_s(k), lN_\nu\}_s = k_0 l_{\nu-1} + k_1 l_{\nu-2} + \cdots + k_{\nu-1} l_0. \tag{2.10}$$

Сравнивая (2.9) и (2.10), приходим к (2.8). Лемма доказана. ▲

В следующей лемме будут использоваться операции $\underset{n}{\oplus}$ и $\underset{n}{\ominus}$ поразрядного сложения по модулю n и поразрядного вычитания по модулю n двух чисел, представленных своими n-ичными кодами [1, 2].

Лемма 5. *При $j \in J_N$ и $l \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ справедливо равенство*

$$h_\nu(j \underset{n}{\ominus} lN_\nu) = h_\nu(j - lN_\nu). \tag{2.11}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\delta_N(j \underset{n}{\ominus} k) = \delta_N(j - k)$ при всех j, k из J_N. В силу определения h_ν получим

$$h_\nu(j \underset{n}{\ominus} lN_\nu) = \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \delta_N\big((j \underset{n}{\ominus} lN_\nu) - q\big) =$$

$$= \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \delta_N\big((j \underset{n}{\ominus} lN_\nu) \underset{n}{\ominus} q\big) = \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \delta_N\big(j \underset{n}{\ominus} (lN_\nu \underset{n}{\oplus} q)\big).$$

Так как $lN_\nu = l_{\nu-1}n^{s-1} + l_{\nu-2}n^{s-2} + \cdots + l_0 n^{s-\nu}$, $q = q_{s-\nu-1}n^{s-\nu-1} + \cdots + q_0$, то $lN_\nu \underset{n}{\oplus} q = lN_\nu + q$. Значит,

$$h_\nu(j \underset{n}{\ominus} lN_\nu) = \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \delta_N\big(j \underset{n}{\ominus} (lN_\nu + q)\big) =$$

$$= \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \delta_N\big(j - (lN_\nu + q)\big) = \sum_{q=0}^{N_\nu - 1} \delta_N\big((j - lN_\nu) - q\big) = h_\nu(j - lN_\nu).$$

Лемма доказана. ▲

§3. Доказательство теоремы

На основании условия теоремы и формулы обращения (1.3) запишем

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} X^{(n)}(k) \operatorname{Pal}_k(j), \quad j \in J_N. \tag{3.1}$$

Зафиксируем $j \in J_N$, введем функцию $g(k) = \operatorname{Pal}_k(j)$, $k \in \{0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ и разложим g по базису Виленкина–Крестенсона, определенному на множестве $\{0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$. Для этого вычислим коэффициенты Фурье вида (1.4). Согласно (2.8) получим

$$G^{(n)}(l) = \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} g(k)\, \omega_n^{-\{\operatorname{rev}_\nu(l),\, k\}_\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \operatorname{Pal}_k(j)\, \omega_n^{-\{\operatorname{rev}_s(k),\, lN_\nu\}_s} = \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \operatorname{Pal}_k(j)\, \overline{\operatorname{Pal}_k(lN_\nu)}.$$

Как известно, $\operatorname{Pal}_k(j)\, \overline{\operatorname{Pal}_k(lN_\nu)} = \operatorname{Pal}_k(j \underset{n}{\ominus} lN_\nu)$. Учитывая еще (2.6) и (2.11), приходим к соотношению

$$G^{(n)}(l) = \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \operatorname{Pal}_k(j \underset{n}{\ominus} lN_\nu) =$$

$$= \Delta_{\nu+1}\, h_\nu(j \underset{n}{\ominus} lN_\nu) = \Delta_{\nu+1}\, h_\nu(j - lN_\nu), \quad l \in \{0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1\}.$$

По формуле обращения и (2.8) при $k \in \{0, 1, \dots, \Delta_{\nu+1} - 1\}$ имеем

$$\operatorname{Pal}_k(j) = g(k) = \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} G^{(n)}(l)\, \omega_n^{\{\operatorname{rev}_\nu(l),\, k\}_\nu} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_\nu(j - lN_\nu)\, \omega_n^{\{\operatorname{rev}_s(k),\, lN_\nu\}_s} = \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_\nu(j - lN_\nu) \operatorname{Pal}_k(lN_\nu).$$

Остается подставить полученное выражение для $\operatorname{Pal}_k(j)$ в (3.1). Это дает

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} X^{(n)}(k) \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_\nu(j - lN_\nu) \operatorname{Pal}_k(lN_\nu) =$$

$$\sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_\nu(j - lN_\nu) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} X^{(n)}(k) \operatorname{Pal}_k(lN_\nu) \right\} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} h_\nu(j - lN_\nu)\, x(lN_\nu).$$

Теорема доказана. ▲

Данная теорема допускает обращение. Точнее, справедливо следующее утверждение: *при разложении ступенчатой функции*

$$x(j) = \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l)\, h_\nu(j - lN_\nu), \quad j \in J_N,$$

по базису Виленкина–Крестенсона, упорядоченному по частоте, коэффициенты Фурье $X^{(n)}(k)$ *вида* (1.4) *равны нулю при* $k = \Delta_{\nu+1}, \ldots, N-1$.

Действительно,

$$X^{(n)}(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\, \overline{\operatorname{Pal}_k(j)} = \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l) \sum_{j=0}^{N-1} \overline{\operatorname{Pal}_k(j)}\, h_\nu(j \ominus_n lN_\nu) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l) \sum_{j=0}^{N-1} \overline{\operatorname{Pal}_k(j)} \sum_{\alpha=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \operatorname{Pal}_\alpha(j)\, \overline{\operatorname{Pal}_\alpha(lN_\nu)} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_{\nu+1}} \sum_{l=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} a(l) \sum_{\alpha=0}^{\Delta_{\nu+1}-1} \overline{\operatorname{Pal}_\alpha(lN_\nu)} \sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Pal}_\alpha(j)\, \overline{\operatorname{Pal}_k(j)}\,.$$

При $k \in \{\Delta_{\nu+1}, \ldots, N-1\}$ и $\alpha \in \{0, 1, \ldots, \Delta_{\nu+1}-1\}$ функции $\operatorname{Pal}_\alpha(j)$ и $\operatorname{Pal}_k(j)$ ортогональны, т. е.

$$\sum_{j=0}^{N-1} \operatorname{Pal}_\alpha(j)\, \overline{\operatorname{Pal}_k(j)} = 0.$$

Значит, $X^{(n)}(k) = 0$ при указанных k.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трахтман А. М., Трахтман В. А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975.

2. *Малозёмов В. Н., Машарский С. М.* Обобщенные вейвлетные базисы, связанные с дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона// Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 1. С. 111–157.

3. *Малозёмов В. Н., Машарский С. М.* Основы дискретного гармонического анализа. СПб.: НИИММ, 2003.