Представлено М.А. Лифшицем

ЭНЕРГИЯ И КОЛИЧЕСТВО КЛАСТЕРОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НЕУПРУГИХ ПРИТЯГИВАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ

Высоцкий В.В.

Аннотация. Мы рассматриваем одномерную модель гравитационного газа, частицы которого в начальный момент имеют случайные скорости и координаты. При столкновениях частицы слипаются, образуя "кластеры". В случае нулевых начальных скоростей ("холодный газ") в терминах сходимости по вероятности изучено асимптотическое поведение количества кластеров $K_n(t)$ при $n \to \infty$, где n означает число исходных частиц. Кроме того, исследуется асимптотика суммарной энергии газа $E_n(t)$. Здесь при ненулевых начальных скоростях ("теплый газ") основным результатом является описание мгновенного "охлаждения" газа, то есть $E_n(+0) \to 0$.

Ключевые слова и фразы: гравитационный газ, слипание частиц, неупругие соударения, система частиц, количество кластеров, энергия.

1. Введение

В этой статье мы изучаем одномерную модель гравитационного газа. Газ в начальный момент состоит из n расположенных на прямой частиц, каждая из которых характеризуется массой, начальной координатой и начальной скоростью. Частицы начинают движение под действием сил взаимного тяготения. При столкновениях частицы *слипаются*, образуя новую частицу *("кластер")*, характеристики которой определяются законами сохранения массы и импульса. Движение частиц между столкновениями подчинено законам классической механики.

Слипание отдельных частиц в один большой кластер напоминает процесс образования звезды из космической пыли. Более подробно об использовании рассматриваемой модели в астрофизике можно узнать из статьи [1].

Нашей целью является изучение свойств газа при условии, что начальные положения и начальные скорости частиц являются *случайными* величинами, а число исходных частиц стремится к бесконечности. Различные предельные свойства таких систем рассмотрены в работах [2]-[6]. Мы исследуем поведение ранее не изученной величины $K_n(t)$, которая обозначает *количество кластеров* в системе. Также нас интересует $E_n(t)$ – *энергия* системы, то есть сумма кинетических энергий всех кластеров.

Оказывается, что результаты абсолютно различны при рассмотрении моделей с нулевыми *("холодный газ")* и ненулевыми *("теплый газ")* начальными скоростями. Мы докажем, что в холодном газе при любом $t \geq 0$

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{P} f(t), \qquad n \to \infty,$$

где $f(t)$ – детерминированная функция; $f(t) = 0$ при $t \geq 1$. Отсюда в любой фиксированный момент времени $t \in [0, 1)$ среднее число частиц в одном кластере для холодного газа есть константа.

В случае теплого газа, наоборот, мгновенно образуются сколь угодно большие кластеры. За счет этого происходит "охлаждение", то есть энергия газа мгновенно падает до нуля. В статье дано теоретическое обоснование этого феномена, который был эмпирически обнаружен в [5]. Кроме того, доказано, что и в холодном, и в теплом газе при любом $t \in (0,1)$

$$E_n(t) \xrightarrow{P} \frac{t^2}{6}, \qquad n \to \infty.$$

2. Описание модели

2.1. **Детерминированная модель.** В начальный момент времени $t = 0$ газ состоит из n частиц, расположенных на прямой в точках с координатами $x_1(0), \ldots, x_n(0)$. Частицы в рассматриваемой модели являются материальными точками и характеризуются массами m_i и координатами $x_i(t)$ на оси. Обладая в начальный момент скоростями $v_i(0)$, частицы начинают движение под действием гравитационных сил. Сила притяжения здесь пропорциональна произведению масс, то есть частица массы $\widetilde{m}_1$, находящаяся в точке $\widetilde{x}_1$, действует на частицу массы $\widetilde{m}_2$, находящуюся в точке $\widetilde{x}_2$, с силой

$$F = \gamma \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 \, sign(\widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2),$$

где $\gamma > 0$ – постоянная тяготения. Особо подчеркнем, что сила притяжения не зависит от расстояния, что свойственно одномерным моделям. Сил, отличных от гравитационной, в нашей модели нет.

Итак, система полностью определяется количеством частиц n, их массами, координатами и скоростями в начальный момент, а также постоянной γ. Газ называется *холодным*, если все начальные скорости нулевые, и *теплым* в противном случае. Для простоты описания мы предполагаем, что $x_i(0)$ упорядочены по возрастанию.

При описании системы частиц мы придерживаемся правил классической ньютоновской механики. Отсюда ускорение любой частицы пропорционально разности суммарных масс частиц, находящихся справа и слева от нее.

Одной из ключевых характеристик газа является поведение частиц при столкновениях: частицы *слипаются*, подчиняясь законам сохранения массы и импульса. Отметим, что при этом энергия системы падает. Такие столкновения называются *абсолютно неупругими.*

Новые частицы, образовавшиеся в результате слипания, называются *кластерами.* В дальнейшем сам термин *частица* мы будем использовать только для обозначения исходных частиц. А кластером будем называть не только результат слипания, но и любую исходную частицу, не успевшую испытать столкновение. Таким образом, газ в любой момент $t > 0$ является набором кластеров, каждый из которых состоит из одной или нескольких частиц.

Очевидно что все частицы рано или поздно слипнутся в один кластер. Тот момент, когда произойдет указанное событие, назовем *временем коллапса* системы и обозначим t_n^{coll}.

В этой работе мы изучаем только те системы, в которых все массы исходных частиц равны между собой, а их сумма есть 1, то есть $m_i = n^{-1}$, где $1 \leq i \leq n$. Не умаляя общности, положим $\gamma = 1$. Для краткости обозначим $x_i = x_i(0)$ и $v_i = v_i(0)$.

2.2. **Вероятностная модель.** Теперь будем считать, что x_i и v_i являются случайными величинами, а законы, которым подчиняется поведение системы, остались прежними, детерминистическими. Каждая модель газа, таким образом, полностью характеризуется выбором указанных случайных величин. Задача, которая возникает при таком подходе – описание в терминах теории вероятностей различных свойств системы в пределе при $n \to \infty$. Таким образом мы исследуем характеристики "типичной" системы, состоящей из большого числа частиц.

Начальные положения частиц варьируются в рамках следующих трех моделей, которые на самом деле обладают многими одинаковыми предельными свойствами:

Пуассоновская модель предполагает, что x_i есть момент i-ого скачка пуассоновского процесса интенсивности n. Эта модель удобна тем, что для любого $i \geq 0$ разности $x_{i+1} - x_i$ независимы и распределены экспоненциально, со средним n^{-1}. Здесь мы формально полагаем $x_0 = 0$. Для краткости начальные положения частиц в этой модели будем обозначать X_i.

Во второй модели, именуемой нами *независимой равномерно распределенной моделью*, x_i есть i-я порядковая статистика выборки из n независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин. Начальные положения частиц в н.р.р. модели будем обозначать X'_i.

В рамках *решетчатой модели* начальные положения частиц фиксированы: $x_i = i/n$.

Хотя н.р.р. модель более интересна, но пуассоновская проще из-за уже упомянутой независимости расстояний между частицами. Связь между моделями излагает известная

Лемма 1. *Пусть X_i – моменты скачков пуассоновского процесса (произвольной интенсивности). Тогда совместное распределение случайных величин $X'_i = X_i/X_{n+1}$, где $1 \leq i \leq n$, совпадает с совместным распределением порядковых статистик выборки из n независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин.*

Начальные скорости v_i полагаются *независимыми (в совокупности) с x_i*. Кроме того, v_i должны быть *независимы между собой и одинаково распределены*. В холодном газе, как уже говорилось, $v_i = 0$. В случае теплого газа часто рассматривается нормальное распределение начальных скоростей. Однако мы потребуем лишь $\mathbf{D}v_1^2 = \sigma^2 < \infty$.

Будем считать, что $\mathbf{E}v_1 = 0$. Общий случай получается из рассматриваемого добавлением к движениям частиц сдвига с постоянной скоростью $\mathbf{E}v_1$. При этом *все* основные характеристики системы, за исключением энергии, остаются прежними.

3. Динамика и кинематика систем

При исследовании систем частиц ключевую роль играет свойство, сформулированное ниже в предложении 1. Оно многократно использовалось в статьях [2]-[7] и поэтому хорошо известно. Для большей общности все формулировки даются для систем с произвольными массами начальных частиц.

В этом разделе число частиц n считается фиксированным.

3.1. **Блоки частиц и центры масс.**

Блоком частиц назовем произвольный набор частиц с идущими подряд номерами. Условимся блок частиц с номерами $i+1 \leq \cdots \leq i+k$ обозначать $J = (i, i+k]$, сопоставляя ему подмножество отрезка натуральных чисел $[1, n]$. Размером блока естественно называть число его элементов. Заметим, что некоторые частицы блока в какой-то момент могут находится в одном кластере с частицами, не входящими в блок. Будем говорить, что блок *свободен* к моменту t, если его частицы еще не сталкивались с частицами вне блока. Это определение можно немного ослабить: блок *свободен справа (слева)* к моменту t, если его частицы еще не сталкивались с частицами, находящимися справа (слева) от блока. Введем еще одно обозначение: кластер, состоящий из частиц, входящих в блок $J = (i, i+k]$ (и только из них), будем записывать $K(i, i+k] = KJ$.

Очень удобно считать, что исходные частицы не исчезают при столкновениях, а продолжают существовать в составе образовавшихся кластеров. При этом их координаты $x_i(t)$ и скорости $v_i(t)$ понимаются как соответствующие характеристики содержащего их кластера. Таким образом, $x_i(t)$ и $v_i(t)$ определены при всех $t \geq 0$.

Учитывая все сказанное, при $t \geq 0$ определим *центр тяжести* блока, который будем обозначать

$$x_J(t) = M_J^{-1} \sum_{j \in J} m_j x_j(t), \quad \text{где } M_J = \sum_{j \in J} m_j.$$

Аналогично определяется

$$v_J(t) = M_J^{-1} \sum_{j \in J} m_j v_j(t).$$

Предложение 1. *Пусть блок $J = (i, i+k]$ свободен к моменту t. Тогда его центр тяжести движется как единая частица суммарной массы и суммарного импульса, то есть*

$$x_J(s) = x_J(0) + v_J(0)s + (M_J^{(R)} - M_J^{(L)})s^2/2, \quad 0 \leq s \leq t,$$

где $M_J^{(R)} = \sum_{j > i+k} m_j$ и $M_J^{(L)} = \sum_{j \leq i} m_j$ – массы частиц, изначально находящихся соответственно справа и слева от J.

Следствие. *В холодном газе при любых начальных положениях частиц $t_n^{coll} \leq \sqrt{2}$.*

Доказательство. Очевидно, существует такое $k \in [1, n]$, что блоки $[1, k]$ и $(k, n]$ свободны к моменту t_n^{coll}. После несложных преобразований (газ холодный, то есть $v_i = 0$), $x_{(k,n]}(s) - x_{[1,k]}(s) = x_{(k,n]}(0) - x_{[1,k]}(0) - s^2/2$ для любого $s \leq t_n^{coll}$. Поскольку в момент столкновения справедливо $x_{[1,k]}(t_n^{coll}) = x_{(k,n]}(t_n^{coll})$, то $(t_n^{coll})^2/2 = x_{(k,n]}(0) - x_{[1,k]}(0) \leq 1$. □

В более общем случае, когда частицы блока могли испытывать столкновения с частицами, находящимися слева (справа) от блока, справедливо

Предложение 2. *Пусть блок $J = (i, i+k]$ свободен справа (слева) к моменту t. Тогда*

$$x_J(s) \quad \geq (\leq) \quad x_J(0) + v_J(0)s + (M_J^{(R)} - M_J^{(L)})s^2/2, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Наконец, введем функцию

$$x_J^*(s) = x_J(0) + v_J(0)s + (M_J^{(R)} - M_J^{(L)})s^2/2, \qquad s \geq 0,$$

которая описывает воображаемую траекторию движения центра тяжести блока J без учета столкновений со внешними частицами.

3.2. **Время кластеризации.** *Временем кластеризации t_J^{cl}* блока J назовем тот момент, когда все его частицы впервые окажутся в одном кластере (который может содержать частицы не из J). Время кластеризации t_j^{cl} частицы с номером j – это тот момент, когда она слиплась с $j+1$-ой частицей. По определению, $t_j^{cl} = t_{[j,j+1]}^{cl}$. Очевидно, что для любого блока $J = (i, i+k]$ выполняется

$$t_J^{cl} = \max_{i < j < i+k} t_j^{cl}. \tag{1}$$

Отсюда понятно наше стремление найти способ вычисления t_j^{cl}. Его дает следующее

Предложение 3. *Для любой частицы $1 \leq j < n$ время ее кластеризации есть*

$$t_j^{cl} = \inf \left\{ s \geq 0 : \min_{\substack{0 \leq l < j \\ j < k \leq n}} (x_{(j,k]}^*(s) - x_{(l,j]}^*(s)) = 0 \right\}. \tag{2}$$

Несложное доказательство, вытекающее из предложения 2, можно найти в [4].

Замечание. *Все уравнения (относительно s) вида $x^*_{(j,k]}(s) - x^*_{(l,j]}(s) = 0$ имеют ровно один неотрицательный корень.*

Доказательство. Из определения величин $x^*_J(s)$, получаем

$$x^*_{(j,k]}(s) - x^*_{(l,j]}(s) = x_{(j,k]}(0) - x_{(l,j]}(0) + (v_{(j,k]}(0) - v_{(l,j]}(0))s - M_{(l,k]}s^2/2. \qquad (3)$$

Свободный член неотрицателен, а коэффициент при s^2 меньше нуля. □

Теперь мы готовы приступить к изучению стохастических систем частиц.

4. Предел времени кластеризации частицы

Для начала нам потребуется исследовать асимптотику времени кластеризации частиц. До сих пор, когда мы имели дело с подобными величинами, число частиц n было фиксированным, и указание на него не требовалось. Теперь же, при переменном n, старая запись становится некорректной. Заменим ее на $t^{cl}_{j,n}$ (время кластеризации j-ой из n частиц).

При меняющемся n естественно менять и номера частиц. Например, "средняя" частица должна иметь номер $n/2$. Назовем последовательность (номеров частиц) $r(n)$ *типичной*, если $\lim r(n) = \lim (n - r(n)) = +\infty$ при $n \to \infty$ и $r(n) \in [1..n]$ для любого n.

Лемма 2. *В холодном газе для пуассоновской и н.р.р. моделей верно следующее. Для любой типичной последовательности $r(n)$ величины $t^{cl}_{r(n),n}$ сходятся по распределению к независящему от $r(n)$ пределу. Обозначим*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{t^{cl}_{r(n),n} > t\}, \qquad t \geq 0.$$

Для $f(t)$ существует явное выражение (8). Эта функция непрерывна, монотонно убывает и равна нулю при $t \geq 1$.

Более того, если $r(n) < n/2$ для любого n, то при $t \geq 0$

$$\max_{j\in[r(n),n-r(n)]} \left|\mathbf{P}\{t^{cl}_{j,n} > t\} - f(t)\right| \to 0, \qquad n \to \infty. \qquad (4)$$

Замечание. *Вычислить $f(t)$ автору пока не удалось. Однако компьютерное моделирование показывает, что $f(t) = 1 - t^2$ при $t \in [0,1]$. Столь простой ответ просто обязывает продолжать усилия.*

Функцию $f(t)$ будем называть *функцией кластеризации* (холодного газа). Это определение навеяно теоремой 1 из следующего раздела.

Доказательство. Часть первая. Доказательство для пуассоновской модели.

Пусть n фиксировано и $j \in [r(n), n - r(n)]$. Для вычисления $t^{cl}_{j,n}$ мы воспользуемся формулой (2) из предложения 3. Так как $m_i = n^{-1}$, а газ холодный ($v_i = 0$), то формула (3) примет вид

$$x^*_{(j,k]}(s) - x^*_{(l,j]}(s) = \frac{1}{k-j}\sum_{i=j+1}^{k} X_i - \frac{1}{j-l}\sum_{i=l+1}^{j} X_i - \frac{k-l}{2n}s^2.$$

Поскольку это выражение монотонно убывает при $s \geq 0$, из формулы (2) для любого $t \geq 0$ получаем

$$\left\{t^{cl}_{j,n} > t\right\} \Longleftrightarrow \left\{\min_{\substack{0\leq l<j\\ j<k\leq n}} \left(\frac{1}{k-j}\sum_{i=j+1}^{k} X_i - \frac{1}{j-l}\sum_{i=l+1}^{j} X_i - \frac{k-l}{2n}t^2\right) > 0\right\}. \qquad (5)$$

Преобразуем выражение, соответствующее расстоянию между центрами тяжести:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k-j}\sum_{i=j+1}^{k} X_i - \frac{1}{j-l}\sum_{i=l+1}^{j} X_i \\
= &\frac{1}{k-j}\sum_{i=j+1}^{k} (X_i - X_j) + X_j - \frac{1}{j-l}\sum_{i=l+1}^{j} X_i \\
= &\frac{1}{k-j}\sum_{i=j+1}^{k} (X_i - X_j) + \frac{1}{j-l}\sum_{i=l+1}^{j} (X_j - X_i). \qquad (6)
\end{aligned}$$

Учитывая независимость приращений и стационарность пуассоновского процесса, эта случайная величина имеет такое же распределение, как и

$$\frac{1}{k-j}\sum_{i=1}^{k-j} Z_i + \frac{1}{j-l}\sum_{i=1}^{j-l-1} W_i,$$

где Z_i и W_i – моменты скачков независимых пуассоновских процессов интенсивности n. Отсюда с учетом формулы (5) для времени кластеризации, получаем

$$\mathbf{P}\{t_{j,n}^{cl} > t\} = \mathbf{P}\left\{ \min_{\substack{1\le q\le j\\ 1\le p\le n-j}} \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Z_i + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q-1} W_i - \frac{p+q}{2n}t^2 \right) > 0 \right\}.$$

Завершим преобразования переходом к моментам скачков P_i и Q_i стандартных независимых пуассоновских процессов:

$$\mathbf{P}\{t_{j,n}^{cl} > t\} = \mathbf{P}\left\{ \min_{\substack{1\le q\le j\\ 1\le p\le n-j}} \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} P_i + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q-1} Q_i - \frac{p+q}{2}t^2 \right) > 0 \right\}.$$

Поэтому при любом t предел по n выражения $\mathbf{P}\{t_{r(n),n}^{cl} > t\}$ существует и не зависит от $r(n)$ (см. определение типичной последовательности). Далее, если $j \in [r(n), n - r(n)]$, то

$$f(t) < \mathbf{P}\{t_{j,n}^{cl} > t\} < \mathbf{P}\left\{ \min_{\substack{1\le q\le r(n)\\ 1\le p\le r(n)}} \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} P_i + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q-1} Q_i - \frac{p+q}{2}t^2 \right) > 0 \right\}. \qquad (7)$$

Отсюда получаем равномерную оценку (4), так как правая часть стремится к $f(t)$ при $n \to \infty$.

Осталось показать, что $1-f(t)$ является функцией распределения. Это незамедлительно следует из теоремы Прохорова. Действительно, так как $0 \le t_{r(n),n}^{cl} \le t_n^{coll}$, то, по следствию предложения 1, распределения случайных величин $t_{r(n),n}^{cl}$ сосредоточены на $[0, \sqrt{2}]$.

Таким образом, функция кластеризации непрерывна справа. Чтобы получить непрерывность слева, положим $r(n) = n/3$. Тогда при $n \to \infty$ правая часть выражения (7) поточечно сходится к $f(t)$, монотонно убывая по n. Поскольку сходящиеся функции непрерывны, отсюда следует искомая непрерывность слева для $f(t)$.

Равенство $f(t) = 0$ при $t > 1$ следует из следующего хорошо известного факта (например, см. [3]): в холодном газе (при любой из трех моделей начальных положений)

$$t_n^{coll} \xrightarrow{P} 1, \qquad n \to \infty.$$

Наконец, для получения более удобного выражения для $f(t)$, в (7) перейдем к пределу по n и воспользуемся свойством непрерывности вероятностной меры:

$$f(t) = \mathbf{P}\left\{\min_{p\in\mathbf{N}}\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}P_i - \frac{p+1}{2}t^2\right) + \min_{q\in\mathbf{N}}\left(\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q-1}Q_i - \frac{q-1}{2}t^2\right) > 0\right\}. \tag{8}$$

Напомним, что P_i и Q_i – моменты скачков стандартных независимых пуассоновских процессов. Можно также показать, что

$$f(t) = e^{t^2}\mathbf{P}\left\{\min_{k\in\mathbf{N}}\sum_{i=1}^{k}(P_i - t^2 i) > 0\right\}^2.$$

Часть вторая. Покажем, что н.р.р. модель дает такой же результат, что и пуассоновская. Ограничимся проверкой условия (4).

Преобразуя выражение (5) для того, чтобы явно выделить t, положим

$$G_j[y_1,\ldots,y_n] = \min_{\substack{1\le l<j\\ j<k\le n}}\frac{2n}{k-l}\left(\frac{1}{k-j}\sum_{i=j+1}^{k}y_i - \frac{1}{j-l}\sum_{i=l+1}^{j}y_i\right).$$

С использованием этого обозначения, (5) примет вид

$$\left\{t_{j,n}^{cl} > t\right\} \Longleftrightarrow \left\{G_j[X_1,\ldots,X_n] > t^2\right\}$$

($t_{j,n}^{cl}$ здесь, естественно, для пуассоновской модели). В н.р.р. модели выражение для времени кластеризации частицы будет абсолютно таким же, X_i лишь заменяется на X_i'. Воспользуемся леммой 1 и осуществим переход от одной модели к другой:

$$\mathbf{P}\left\{G_j[X_1',\ldots,X_n'] > t^2\right\} = \mathbf{P}\left\{G_j[X_1/X_{n+1},\ldots,X_n/X_{n+1}] > t^2\right\}.$$

Из определения G_j легко видеть, что $G_j[X_1/X_{n+1},\ldots,X_n/X_{n+1}] = G_j[X_1,\ldots,X_n]/X_{n+1}$. Значит, доказывая (4), мы должны установить справедливость

$$\lim_{n\to\infty}\max_{j\in[r(n),n-r(n)]}\left|\mathbf{P}\Big\{G_j[X_1,\ldots,X_n] > X_{n+1}t^2\Big\} - f(t)\right| = 0. \tag{9}$$

Для начала заметим, что

$$X_{n+1}\xrightarrow{P}1. \tag{10}$$

Действительно, переходя к стандартному пуассоновскому процессу, получаем $X_{n+1}\stackrel{d}{=}P_{n+1}/n$. Но P_{n+1} является суммой $n+1$ независимой экспоненциально распределенной случайной величины со средним 1, применим закон больших чисел.

Для произвольных $\varepsilon\in(0,1/2)$ и $j\in[1,n]$ можно вывести

$$\mathbf{P}\left\{X_{n+1}t^2 < G_j\right\} < \mathbf{P}\left\{(1-\varepsilon)t^2 < G_j\right\} + 1 - \mathbf{P}\big\{|1-X_{n+1}| < \varepsilon\big\}$$

и

$$\mathbf{P}\left\{X_{n+1}t^2 < G_j\right\} > \mathbf{P}\left\{(1+\varepsilon)t^2 < G_j\right\} - 1 + \mathbf{P}\big\{|1-X_{n+1}| < \varepsilon\big\}.$$

С помощью этих оценок

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{P}\left\{X_{n+1}t^2 < G_j\right\} - f(t)\Big| \\
< \;&\Big|\mathbf{P}\left\{(1+\varepsilon)t^2 < G_j\right\} - f(t)\Big| + \Big|\mathbf{P}\left\{(1-\varepsilon)t^2 < G_j\right\} - f(t)\Big| + 1 - \mathbf{P}\big\{|1-X_{n+1}| < \varepsilon\big\} \\
< \;&\Big|\mathbf{P}\left\{(1+\varepsilon)t^2 < G_j\right\} - f\big((1+\varepsilon)^{1/2}t\big)\Big| + \Big|\mathbf{P}\left\{1-\varepsilon)t^2 < G_j\right\} - f\big((1-\varepsilon)^{1/2}t\big)\Big| \\
&+ \Big\{f\big((1-\varepsilon)^{1/2}t\big) - f\big((1+\varepsilon)^{1/2}t\big)\Big\} + \Big\{1 - \mathbf{P}\big\{|1-X_{n+1}| < \varepsilon\big\}\Big\},
\end{aligned}$$

во втором переходе использовалась монотонность $f(t)$. В последнем неравенстве возьмем максимум по $j \in [r(n), n-r(n)]$ и осуществим два предельных перехода, сперва по $n \to \infty$, а затем по $\varepsilon \to 0$. При этом мы получим (9). Действительно, максимум суммы не превосходит сумму максимумов. Два первых слагаемых будут равны нулю на основании доказанной первой части, третье – по непрерывности $f(t)$, а четвертое – в силу (10). □

Обратимся теперь к теплому газу. Оказывается, типичным явлением будет мгновенное слипание произвольной частицы с соседней. Более того, мы увидим, что типично мгновенное образование сколь угодно больших кластеров.

Лемма 3. *В теплом газе (при любой из рассматриваемых моделей начальных положений) для любой типичной последовательности $r(n)$ выполняется*

$$t^{cl}_{r(n),n} \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty.$$

Более того, если $r(n) < n/2$ для любого n, то при $\tau > 0$ справедлива равномерная оценка

$$\min_{j\in[r(n),n-r(n)]} \mathbf{P}\{t^{cl}_{j,n} < \tau\} \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть зафиксировано произвольное $\tau > 0$, а $j \in [r(n), n-r(n)]$. Снова воспользуемся условием кластеризации из предложения 3. Формула (3) примет вид

$$x^*_{(j,k]}(s) - x^*_{(l,j]}(s) = x_{(j,k]}(0) - x_{(l,j]}(0) + (v_{(j,k]}(0) - v_{(l,j]}(0))s - \frac{k-l}{2n}s^2.$$

Коэффициенты этого квадратного трехчлена обозначим $a_{l,k}$, $b_{l,k}$ и $c_{l,k}$, начиная со старшей степени. Сам трехчлен обозначим $h_{l,k}(s)$. При этом условие кластеризации (2) запишется как

$$t^{cl}_{j,n} = \inf\left\{s \geq 0 : \min_{\substack{0\leq l<j \\ j<k\leq n}} h_{l,k}(s) = 0\right\}.$$

Изучим подробнее уравнения $h_{m,m}(s) = a_{m,m}s^2 + b_{m,m}s + c_{m,m} = 0$. Для них $h_{m,m}(0) = c_{m,m} \geq 0$ и $h_{m,m}\big(-\frac{c_{m,m}}{b_{m,m}}\big) = a_{m,m} \cdot \big(\frac{c_{m,m}}{b_{m,m}}\big)^2 < 0$. Поэтому если $b_{m,m} < 0$ для какого-то m, то неотрицательный корень будет меньше, чем $-\frac{c_{m,m}}{b_{m,m}}$. Значит,

$$\{b_{m,m} < 0\} \Longrightarrow \left\{t^{cl}_{j,n} < -\frac{c_{m,m}}{b_{m,m}}\right\}. \tag{11}$$

Выясним, насколько вероятно найти такое m, что $b_{m,m} < 0$. Положим $\tilde{v_1} = v_1 - v_2$ и введем новую последовательность центрированных независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\tilde{v_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Тогда

$$m \cdot b_{m,m} = \sum_{i=j+1}^{j+m} v_i - \sum_{i=j-m+1}^{j} v_i \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{m} \tilde{v_i}. \tag{12}$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\mathbf{P}\left\{\min_{1\le m\le N}\sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_i < -1\right\} > 1-\varepsilon/2. \tag{13}$$

Справедливость этого утверждения вытекает из соотношения

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{\sqrt{n\mathbf{D}u_1}}\max_{1\le m\le n}\sum_{i=1}^{n}u_i > \alpha\right\} \to \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx, \qquad n\to\infty,$$

где $\alpha \ge 0$, а u_i – независимые одинаково распределенные случайные величины, такие что $\mathbf{D}u_1 < \infty$ и $\mathbf{E}u_1 = 0$ (см. [8, с. 103-106]). Напомним читателю, что у нас $\mathbf{D}\tilde{v}_1 = 2\sigma^2 < \infty$.

Условимся, что n достаточно велико (такое, что $N \le r(n)$ и $r(n)+N \le n$). Поскольку

$$\left\{\min_{1\le m\le N} m\cdot b_{m,m} < -1\right\} \Longrightarrow \left\{\min_{1\le m\le N} b_{m,m} < -\frac{1}{N}\right\},$$

то из (12) и (13) получаем

$$\mathbf{P}\left\{\min_{1\le m\le N} b_{m,m} < -\frac{1}{N}\right\} > 1-\varepsilon/2. \tag{14}$$

Теперь изучим коэффициенты $c_{m,m}$. Учитывая, что $x_{(j,k]}(0) \le x_k$ и $x_{l+1} \le x_{(l,j]}(0)$, имеем

$$\max_{1\le m\le N} c_{m,m} = c_{N,N} \le x_{j+N} - x_{j-N+1}. \tag{15}$$

Относительно правой части можно сказать, что для любой из трех моделей начальных положений справедливо

$$\max_{i\in[r(n),n-r(n)]}\big(x_{i+N} - x_{i-N+1}\big) \xrightarrow{P} 0, \qquad n\to\infty. \tag{16}$$

Для н.р.р. модели это вытекает из теоремы Гливенко, которая гарантирует, что

$$\max_{1\le i\le n}\left|X_i' - \frac{i}{n}\right| \xrightarrow{P} 0, \qquad n\to\infty. \tag{17}$$

А для пуассоновской модели справедливость выражения (16) следует из его справедливости для н.р.р. модели. Достаточно осуществить уже известный переход от одной модели к другой и вспомнить (10).

Из (15) и (16) получаем, что при всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}\left\{\max_{1\le m\le N} c_{m,m} < \frac{\tau}{N}\right\} > 1-\varepsilon/2. \tag{18}$$

Формулы (14) и (18) дают

$$\mathbf{P}\left\{\exists\, m \in [1..N]:\ 0 < -\frac{c_{m,m}}{b_{m,m}} < \tau\right\} > 1-\varepsilon.$$

Учитывая импликацию (11), отсюда следует, что при больших n имеем $\mathbf{P}\{t^{cl}_{j,n} < \tau\} > 1-\varepsilon$. Равномерность этой оценки по $j \in [r(n), n-r(n)]$ вытекает из равномерности оценки (16) и независимости оценки (14) от j. □

Следствие. *Для любого натурального M*

$$\min_{j\in[r(n),n-r(n)]}\mathbf{P}\{t^{cl}_{[j,j+M],n} < \tau\} \to 1, \qquad n\to\infty.$$

Доказательство. Легко получается из формулы (1). □

5. Предельное количество кластеров

Здесь излагается один из основных полученных результатов – формула для количества кластеров в холодном газе.

Теорема 1. *В холодном газе для пуассоновской и н.р.р. моделей при любом* $t \geq 0$

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{P} f(t), \qquad n \to \infty. \tag{19}$$

Доказательство. Из-за ограниченности объема статьи мы проведем доказательство лишь для пуассоновской модели. Доказательство для н.р.р. модели абсолютно аналогично второй части доказательства предложения 2.

Заметим, что доказательство можно проводить лишь для $0 \leq t < 1$, поскольку для остальных t оно получается автоматически. Действительно, если утверждение теоремы уже доказано для всех $t < 1$, то при $t = 1$ его справедливость сразу следует из непрерывности $f(t)$, того, что $f(1) = 0$ и монотонного убывания по t величин $K_n(t)$. Для $t > 1$ оно очевидно тем более.

Итак, зафиксируем произвольное $t < 1$. Каждая слипшаяся со своим правым соседом частица уменьшает исходное количество кластеров (то есть n) на один. Следовательно, $K_n(t)$ есть разница между n и числом слипшихся со своим соседом частиц (к моменту t). Иначе, это есть число частиц, *не*слипшихся со своим соседом справа, то есть

$$K_n(t) = \#\left\{j \in [1, n-1] : \ t_{j,n}^{cl} > t\right\}.$$

Для любого $\delta \in (0, 1/6)$ последовательность $r(n) = \delta n$ является типичной. Поэтому при доказательстве мы будем пользоваться тем, что известно предельное время кластеризации каждой частицы с номером $j \in [\delta n, n - \delta n]$ (см. лемму 2).

Имеет место такая оценка:

$$\#\left\{j \in [\delta n, n-\delta n] : \ t_{j,n}^{cl} > t\right\} \leq K_n(t) \leq \#\left\{j \in [\delta n, n-\delta n] : \ t_{j,n}^{cl} > t\right\} + 2\delta n.$$

Поскольку δ выбрано так, что $(1-2\delta)^{-1} < 1 + 3\delta$, то отсюда

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{K_n(t)}{n} - \frac{\#\left\{j \in [\delta n, n-\delta n] : \ t_{j,n}^{cl} > t\right\}}{(1-2\delta)n} \right| \leq 5\delta. \tag{20}$$

Теперь для каждой частицы с номером $j \in [\delta n, n - \delta n]$ определим случайную величину $\xi_j^{(n)} = \mathbf{1}_{(t,+\infty)}\left(t_{j,n}^{cl}\right)$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\xi_j^{(n)} = 0\right\} = \mathbf{P}\{t_{j,n}^{cl} \leq t\} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\left\{\xi_j^{(n)} = 1\right\} = \mathbf{P}\{t_{j,n}^{cl} > t\}. \tag{21}$$

В терминах этих величин

$$\#\left\{j \in [\delta n, n-\delta n] : \ t_{j,n}^{cl} > t\right\} = \sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \xi_j^{(n)}.$$

Наша задача – показать, что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{(1-2\delta)n}\left(\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n}\xi_j^{(n)} - \sum_{j=\delta n}^{n-\delta n}\mathbf{P}\{t_{j,n}^{cl} > t\}\right)\right| > \delta^{1/3}\right\} < 10\delta^{1/3}. \qquad (22)$$

По лемме 2, $\mathbf{P}\{t_{j,n}^{cl} > t\} \to f(t)$ при $n \to \infty$ равномерно по $j \in [\delta n, n-\delta n]$. Поэтому из (22)

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{(1-2\delta)n}\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n}\xi_j^{(n)} - f(t)\right| > 2\delta^{1/3}\right\} < 10\delta^{1/3}.$$

Полученное соотношение, а также формула (20) справедливы при всех $\delta \in (0, 1/6)$. Из них предельным переходом $\delta \to 0$ получаем (19), что и требовалось.

Нам осталось "лишь" доказать (22), в чем и состоит вся сложность. Рассмотрим ковариации

$$cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) = \mathbf{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 1, \xi_j^{(n)} = 1\right\} - \mathbf{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 1\right\} \cdot \mathbf{P}\left\{\xi_j^{(n)} = 1\right\}.$$

Отсюда $cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < 1$. Оценим дисперсию суммы величин $\xi_j^{(n)}$:

$$\mathbf{D}\left(\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n}\xi_j^{(n)}\right) = \sum_{i,j=\delta n}^{n-\delta n} cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-2\delta n}\sum_{\substack{|i-j|=k\\ i,j\in[\delta n, n-\delta n]}} cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)})$$

$$= \sum_{k=0}^{2\delta n}\sum_{\substack{|i-j|=k\\ i,j\in[\delta n, n-\delta n]}} cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) + \sum_{k=2\delta n+1}^{n-2\delta n}\sum_{\substack{|i-j|=k\\ i,j\in[\delta n, n-\delta n]}} cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)})$$

$$< \sum_{k=0}^{2\delta n} 2n + \sum_{k=2\delta n+1}^{n-2\delta n} 2n \max_{\substack{2\delta n<|i-j|\\ i,j\in[\delta n, n-\delta n]}} cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < 4\delta n^2 + 2n^2 \max_{\substack{2\delta n<|i-j|\\ i,j\in[\delta n, n-\delta n]}} cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}).$$

Если мы докажем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{\substack{2\delta n<|i-j|\\ i,j\in[\delta n, n-\delta n]}} cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) \le 0, \qquad (23)$$

то из неравенства Чебышева

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{(1-2\delta)n}\left(\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n}\xi_j^{(n)} - \sum_{j=\delta n}^{n-\delta n}\mathbf{P}\{t_j^{cl} > t\}\right)\right| > \delta^{1/3}\right\}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{(1-2\delta)^2 n^2 \delta^{2/3}}\mathbf{D}\left(\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n}\xi_j^{(n)}\right) \le \frac{4\delta^{1/3}}{(1-2\delta)^2},$$

откуда следует искомое (22).

Таким образом, все свелось к доказательству соотношения (23). Покажем, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется

$$i, j \in [\delta n, n-\delta n],\ 2\delta n < |i-j| \quad \Longrightarrow \quad cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < \varepsilon. \qquad (24)$$

Для краткости введем обозначение

$$C_m[l,k,y_1,\ldots,y_n] = \frac{1}{k-m}\sum_{i=m+1}^{k} y_i - \frac{1}{m-l}\sum_{i=l+1}^{m} y_i - \frac{k-l}{2n}t^2.$$

Ранее было получено (формула (5)), что в холодном газе для пуассоновской модели

$$\mathbf{P}\left\{\xi_m^{(n)} = 1\right\} = \mathbf{P}\{t_{m,n}^{cl} > t\} = \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{0\le l<m\\ m<k\le n}} C_m[l,k,X_1,\ldots,X_n] > 0\right\}.$$

Сперва мы докажем, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ верна импликация

$$m \in [\delta n, n-\delta n] \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{\delta n<k-l\\ 0\le l<m<k\le n}} C_m[l,k,X_1,\ldots,X_n] > 0\right\} > 1-\varepsilon/3, \tag{25}$$

и автоматически

$$m \in [\delta n, n-\delta n] \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{k-l\le\delta n\\ 0\le l<m<k\le n}} C_m[l,k,X_1,\ldots,X_n] > 0\right\} < \mathbf{P}\left\{\xi_m^{(n)} = 1\right\} + \varepsilon/3. \tag{26}$$

В самом деле, по теореме Гливенко (17), из которого, с учетом (10), вытекает

$$\max_{1\le i\le n}\left|X_i - \frac{i}{n}\right| \xrightarrow{P} 0, \qquad n\to\infty.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что

$$n > N(\varepsilon) \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\left\{\max_{1\le i\le n}\left|X_i - \frac{i}{n}\right| < \delta\frac{1-t^2}{4}\right\} > 1-\varepsilon/3. \tag{27}$$

Найденное $N(\varepsilon)$ – искомое. Действительно, справедливо

$$\max_{1\le i\le n}\left|X_i - \frac{i}{n}\right| < \delta\frac{1-t^2}{4} \quad\Longrightarrow$$
$$\forall\, l,k,m \in [1..n] \quad \left|\frac{1}{k-m}\sum_{i=m+1}^{k} X_i - \frac{1}{m-l}\sum_{i=l+1}^{m} X_i - \frac{k-l}{2n}\right| < \delta\frac{1-t^2}{2},$$

и поэтому

$$\max_{1\le i\le n}\left|X_i - \frac{i}{n}\right| < \delta\frac{1-t^2}{4} \quad\Longrightarrow$$
$$\forall\, l,k,m \in [1..n] \quad C_m[l,k,X_1,\ldots,X_n] > \left(\frac{k-l}{2n} - \frac{\delta}{2}\right)(1-t^2).$$

Легко видеть, что отсюда, с учетом условия (27), следует (25).

Теперь, когда получено (25), завершим наши усилия, доказав (23), а точнее, эквивалентное ему (24). В качестве искомого $N(\varepsilon)$ возьмем найденное в (25). Пусть $n > N(\varepsilon)$ и

$i, j \in [\delta n, n-\delta n]$ такие, что $2\delta n < |i-j|$. Считая н.у.о. $i<j$,

$$\mathbf{P}\left\{\xi_i^{(n)}=1, \xi_j^{(n)}=1\right\} = \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{0\le l<i\\ i<k\le n}} C_i[l,k,X_1,\dots,X_n]>0,\ \min_{\substack{0\le p<j\\ j<q\le n}} C_j[p,q,X_1,\dots,X_n]>0\right\}$$

$$< \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{k-l\le\delta n\\ 0\le l<i<k\le n}} C_i[l,k,X_1,\dots,X_n]>0,\ \min_{\substack{q-p\le\delta n\\ 0\le p<j<q\le n}} C_j[p,q,X_1,\dots,X_n]>0\right\}$$

$$= \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{k-l\le\delta n\\ 0\le l<i<k\le n}} C_i[l,k,X_1,\dots,X_n]>0\right\}\cdot \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{q-p\le\delta n\\ 0\le p<j<q\le n}} C_j[p,q,X_1,\dots,X_n]>0\right\}.$$

Объясним последний переход. Согласно преобразованиям (6),

$$C_j[p,q,X_1,\dots,X_n] = C_j[p,q,X_j-X_1,\dots,X_j-X_{j-1},0,X_{j+1}-X_j,\dots,X_n-X_j].$$

Первый минимум есть функция от $X_1,\dots,X_{i+\delta n-1}$, а второй – функция от $X_j-X_{j-\delta n+1}$, $\dots$, $X_j-X_{j-1},0,X_{j+1}-X_j,\dots,X_n-X_j$. Осталось лишь вспомнить, что $2\delta n<|i-j|$ и воспользоваться независимостью приращений пуассоновского процесса.

Теперь, используя (26), немедленно получаем

$$P\left\{\xi_i^{(n)}=1,\xi_j^{(n)}=1\right\} < \left(\mathbf{P}\left\{\xi_i^{(n)}=1\right\}+\varepsilon/3\right)\left(\mathbf{P}\left\{\xi_j^{(n)}=1\right\}+\varepsilon/3\right).$$

Значит, $cov(\xi_i^{(n)},\xi_j^{(n)}) < 2/3\varepsilon+\varepsilon^2/9<\varepsilon$, это и есть (24). □

Теперь попытаемся сформулировать аналогичное утверждение для теплого газа. Следующая лемма не дает точной оценки количества кластеров. Однако она будет чрезвычайно полезна в следующем разделе.

Зафиксируем произвольное натуральное M, а также $\tau>0$. Обозначим

$$\mathcal{K}_n^{M,\tau} = \left\{k\in[1,n/M]:\ t^{cl}_{((k-1)M,kM],n}<\tau\right\}. \tag{28}$$

Эта величина описывает количество кластеризовавшихся к моменту τ блоков вида $((k-1)M,kM]$.

Лемма 4. *В теплом газе (при любой из трех моделей начальных положений) для произвольных $M\in\mathbf{N}$ и $\tau>0$ справедливо*

$$\frac{\#\mathcal{K}_n^{M,\tau}}{n/M}\xrightarrow{P}1,\qquad n\to\infty.$$

Доказательство. Оно идентично доказательству теоремы 1 и самостоятельного интереса не представляет. Там мы воспользовались леммой 2, а здесь, соответственно, потребуется следствие леммы 3.

Итак, рассмотрим произвольное $\delta\in(0,1/6)$. Аналогично определению (21), для каждого $k\in[\delta n/M,(1-\delta)n/M]$ положим $\xi_k^{(n)}=\mathbf{1}_{[0,\tau)}\big(t^{cl}_{((k-1)M,kM],n}\big)$. Как и ранее, достаточно доказать аналог (24), то есть проверить, для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется

$$i,j\in[\delta n/M,(1-\delta)n/M],\ 2\delta n/M<|i-j| \quad\Longrightarrow\quad cov(\xi_i^{(n)},\xi_j^{(n)})<\varepsilon.$$

В отличие от предыдущего доказательства, проверка не составит труда. По следствию леммы 3, существует $N(\varepsilon)$ такое, что если $n>N(\varepsilon)$, то

$$j\in[\delta n,(1-\delta)n] \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{P}\{t^{cl}_{[j,j+M],n}<\tau\}>1-\varepsilon/2.$$

Следовательно, при $n > N(\varepsilon)$

$$k \in [\delta n/M, (1-\delta)n/M] \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{P}\left\{\xi_k^{(n)} = 1\right\} > 1 - \varepsilon/2.$$

Поэтому, если $n > N(\varepsilon)$ и $i, j \in [\delta n/M, (1-\delta)n/M]$, то

$$cov(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < 1 - \mathbf{P}\left\{\xi_i^{(n)} = 1\right\} \cdot \mathbf{P}\left\{\xi_j^{(n)} = 1\right\} < 1 - (1-\varepsilon/2)^2 < \varepsilon.$$

□

Положив $M = 1$, получаем такое

Следствие. *В теплом газе для любого $t > 0$ справедливо*

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty.$$

6. Предельная энергия

Основная теорема этого раздела описывает мгновенное охлаждение теплого газа. Кроме того, здесь дается явная формула для энергии.

Поясним полученные результаты. Изменение энергии холодного газа происходит по следующим причинам. С одной стороны, абсолютные скорости подавляющего большинства частиц возрастают из-за гравитации, и в силу этого энергия системы увеличивается. С другой стороны, при столкновениях частиц энергия падает. В теореме 3, в частности, показано, что в холодном газе процессом уменьшения энергии при столкновениях можно пренебречь. В случае теплого газа происходит мгновенное образование больших кластеров, за счет чего начальные скорости усредняются и практически исчезают. После этого они меняются так же, как и в холодном газе, то есть опять можно не учитывать уменьшение энергии из-за столкновений.

Теорема 2. *Теплый газ (при любой из трех моделей начальных положений) мгновенно охлаждается: в начальный момент времени*

$$E_n(0) \xrightarrow{P} \frac{\sigma^2}{2}, \qquad n \to \infty,$$

но для любого $\rho > 0$ при $t \in (0, \min\{\sqrt{\frac{2\rho}{3}}, \frac{\rho}{3\sigma}\})$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{E_n(t) < \rho\} = 1.$$

Доказательство. Первая часть теоремы немедленно следует из закона больших чисел.

Для оценки энергии системы в произвольный момент времени $t \in (0, \min\{\sqrt{\frac{2\rho}{3}}, \frac{\rho}{3\sigma}\})$ представим множество $[1, n]$ в виде $[1, n] = \bigcup_{j=1}^m J_j$, где J_j – блоки, соответствующие существующим в момент t кластерам.

Рассмотрим произвольный кластер $K = KJ_j$, состоящий из $k = \#J_j$ исходных частиц. Так как все абсолютные ускорения $|a_i|$ меньше 1, то $|v_K(t)| < k^{-1}|\sum_{i\in J_j} v_i| + t$. Отсюда для энергии кластера K

$$E_K(t) < \frac{k}{2n}\left(k^{-1}\Big|\sum_{i\in J_j} v_i\Big| + t\right)^2 \le \frac{1}{2nk}\left(\sum_{i\in J_j} v_i\right)^2 + \frac{t}{n}\sum_{i\in J_j}|v_i| + \frac{kt^2}{2n}.$$

Значит, для энергии всей системы

$$E_n(t) < \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{m} \# J_j^{-1}\Big(\sum_{i\in J_j} v_i\Big)^2 + \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}|v_i| + \frac{t^2}{2}. \tag{29}$$

Разберемся с каждым из трех слагаемых по отдельности. Для третьего слагаемого, которое не является случайным,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{t^2}{2} < \frac{\rho}{3}\right\} = 1. \tag{30}$$

Напоминаем, что t было выбрано достаточно маленьким. Далее, для второго слагаемого, используя закон больших чисел и то, что $\mathbf{E}|v_1| \le \sigma$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n}|v_i| < \frac{\rho}{3}\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|v_i| < \frac{\rho}{3t}\right\} = 1. \tag{31}$$

Таким образом, мы оценили возможное увеличение энергии из-за гравитации. Оставшееся слагаемое является функцией от начальных скоростей. Для его оценки воспользуемся неравенством Коши-Буняковского.

Пусть $M \in \mathbf{N}$. Снова рассмотрим произвольный кластер $K = KJ_j$. Максимальное по включению множество вида $(kM, (k+i)M]$, содержащееся в J_j, обозначим I^M; возможно, это множество пусто. Теперь $J_j = I^M \bigcup I$, где I – дополнение I^M до J_j. Далее, разобьем I^M на непересекающиеся подмножества $I_1, \dots, I_s$, каждое из которых есть отрезок вида $((k-1)M, kM]$. Естественно, что для таких k справедливо $k \in \mathcal{K} := \mathcal{K}_n^{M,t}$; напоминаем, что определение множества $\mathcal{K}_n^{M,t}$ было дано в (28). Таким образом, $J_j = \bigcup_{\ell=1}^{s} I_\ell \bigcup I$.

В этих обозначениях из неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\# J_j^{-1}\Big(\sum_{i\in J_j} v_i\Big)^2 \le \sum_{\ell=1}^{s}\frac{1}{M}\Big(\sum_{i\in I_\ell} v_i\Big)^2 + \sum_{i\in I} v_i^2.$$

Отсюда для первого слагаемого суммы (29)

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{m} \# J_j^{-1}\Big(\sum_{i\in J_j} v_i\Big)^2 \le \frac{1}{2n}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{M}\left(\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i\right)^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k\notin\mathcal{K}}\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i^2. \tag{32}$$

По лемме 4, для любых $\delta, \varepsilon > 0$ существует такое $N_1(\varepsilon)$, что при всех $n > N_1(\varepsilon)$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\#\mathcal{K}}{n/M} > 1-\delta\right\} > 1 - \varepsilon/2.$$

Значит, с вероятностью, превосходящей $1-\varepsilon/2$, во втором слагаемом суммы (32) суммирование ведется менее чем по δn слагаемым. Поэтому

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{2n}\sum_{k\notin\mathcal{K}}\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i^2 < \frac{1}{2n}\sum_{i=(1-\delta)n}^{n}(v^2)_{i:n}\right\} > 1-\varepsilon/2 \tag{33}$$

(имеются в виду порядковые статистики для серий величин $\{v_i^2\}_{i=1}^n$).

Обозначим H_δ такой симметричный относительно 0 отрезок, что $P_v(H_\delta) = 1-\delta$, где P_v – мера, являющаяся распределением скоростей. Используя теорему Гливенко и закон больших чисел, получаем

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=(1-\delta)n}^{n}(v^2)_{i:n}\xrightarrow{P}\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}\setminus H_\delta}x^2dP_v(x).$$

По абсолютной непрерывности интеграла (второй момент скоростей существует) выражение в правой части стремится к 0 при $\delta\to 0$. Поэтому при всех достаточно малых $\delta>0$ для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $N_2(\varepsilon)$, что при всех $n>N_2(\varepsilon)$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=(1-\delta)n}^{n}(v^2)_{i:n}<\frac{\rho}{6}\right\}>1-\varepsilon/2.$$

Отсюда и из (33), при всех малых $\delta>0$ для любого $\varepsilon>0$ при всех $n>\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{2n}\sum_{k\notin\mathcal{K}}\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM}v_i^2<\frac{\rho}{6}\right\}>1-\varepsilon.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{1}{2n}\sum_{k\notin\mathcal{K}}\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM}v_i^2<\frac{\rho}{6}\right\}=1. \tag{34}$$

Осталось разобраться лишь с первым слагаемым из (32). Оно, очевидно, мажорируется полной суммой:

$$\frac{1}{2n}\sum_{k\in\mathcal{K}}\frac{1}{M}\left(\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM}v_i\right)^2\le\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n/M}\frac{1}{M}\left(\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM}v_i\right)^2=\frac{M}{2n}\sum_{k=1}^{n/M}\left(\frac{1}{M}\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM}v_i\right)^2.$$

Определим новые серии случайных величин:

$$\eta_k^{(n)}:=\left(\frac{1}{M}\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM}v_i\right)^2,\qquad k\in[1,n/M].$$

В каждой серии эти величины независимы, одинаково распределены и, легко убедится, имеют математические ожидания, равные σ^2M^{-1}. Вспомним теперь про то, что M было произвольным, и выберем его так, чтобы $\sigma^2M^{-1}<\rho/6$. Тогда по закону больших чисел

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{M}{2n}\sum_{k=1}^{n/M}\eta_k<\frac{\rho}{6}\right\}\ge\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left\{\left|\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n/M}\eta_k-\frac{\sigma^2}{M}\right|<\frac{\rho}{6}\right\}=1. \tag{35}$$

Учитывая (30), (31), (34) и (35), получаем искомое. □

Теперь мы можем приступить к доказательству формул для предельной энергии. Но сперва обозначим за $L_n(t)$ *размер максимального кластера* к моменту t. В холодном газе для пуассоновской и н.р.р. моделей при $t<1$ имеем $L_n(t)\sim\log n$ по вероятности (см. [3] и [4]). Отсюда во всех трех моделях

$$\frac{L_n(t)}{n}\xrightarrow{P}0,\qquad n\to\infty \tag{36}$$

(для решетчатой модели $L_n(t)=1$ при $t<1$).

Теорема 3. *В холодном газе (при любой из трех моделей начальных положений) для любого* $t \in [0,1)$ *справедливо*

$$E_n(t) \xrightarrow{P} \frac{t^2}{6}, \qquad n \to \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t \in [0,1)$. Предположим, что к моменту t образовался кластер $K = K(l, l+k]$. В начальный момент времени произвольная частица с номером $i \in (l, l+k]$ испытывает ускорение $a_i(0) = \frac{n-2i+1}{n}$ (с вероятностью 1). Так как блок $(l, l+k]$ свободен к моменту t, а все его частицы уже входят в кластер K, то справедливо $x_{(l,l+k]}(t) = x_K(t) = x_i(t)$ и $v_{(l,l+k]}(t) = v_K(t) = v_i(t)$. Воспользуемся предложением 1 и получим $v_i(t) = \frac{n-2l-k}{n}t$. Значит $|v_i(t) - a_i(0)t| < \frac{k}{n}t$; учитывая $|a_i(0)| < 1$ и $k \le n$, из формулы разности квадратов

$$|v_i(t)^2 - a_i(0)^2 t^2| < 2\frac{k}{n}t^2.$$

Учитывая (36),

$$\sup_{i \in [1,n]} \left|v_i(t)^2 - a_i(0)^2 t^2\right| \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty$$

и отсюда

$$E_n(t) - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-2i+1}{n}t\right)^2 \xrightarrow{P} 0, \qquad n \to \infty.$$

Вычисление суммы завершает доказательство. □

Обратимся теперь к теплому газу. В доказательстве следующей теоремы мы снова воспользуемся идеей об оценке скорости произвольной частицы при помощи размера максимального кластера. Однако для этого потребуется наложить более жесткие условия на v_i. Согласно [4], при $t < 1$ для всех трех моделей начальных положений $L_n(t) \sim n^{2/3} \log n^{1/3}$ по вероятности, но для этого нужно существование 7-х моментов у скоростей. Нам же требуется лишь $L_n(t) = o(n)$. Для решетчатой модели начальных положений этот результат присутствует в [6], при более слабом условии существования моментов порядка $4 + \varepsilon$.

Теорема 4. *В теплом газе (для любой из трех моделей начальных положений) справедливо*

$$E_n(0) \xrightarrow{P} \frac{\sigma^2}{2}, \qquad n \to \infty.$$

Если для произвольного $t \in (0,1)$ *выполняется условие* (36), *то*

$$E_n(t) \xrightarrow{P} \frac{t^2}{6}, \qquad n \to \infty. \tag{37}$$

В частности, если $\mathbf{E}|v_1|^c < \infty$ ($c = 7$ *для пуассоновской и н.р.р. моделей,* $c > 4$ *для решетчатой), то* (37) *выполняется при всех* $t \in (0,1)$.

Доказательство. Снова зафиксируем произвольное $t \in (0,1)$ и $\tau \in (0,t)$. Предположим, что к моменту t образовался кластер $K = K(l, l+k]$. Опять воспользуемся предложением 1:

$$v_i(t) = \frac{1}{k}\sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau) + \frac{n-2l-k}{n}(t-\tau).$$

Отсюда, аналогично предыдущему доказательству

$$\Big|v_i(t) - a_i(0)(t-\tau)\Big| < \left|\frac{1}{k}\sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau)\right| + \frac{k}{n}(t-\tau) < \left|\frac{1}{k}\sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau)\right| + \frac{k}{n}t;$$

учитывая, что $k \le n$,

$$\Big|v_i(t)^2 - a_i(0)^2(t-\tau)^2\Big| < \left(\left|\frac{1}{k}\sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau)\right| + \frac{k}{n}t\right)\left(\left|\frac{1}{k}\sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau)\right| + 2t\right).$$

Раскрыв скобки, получим

$$\Big|v_i(t)^2 - a_i(0)^2(t-\tau)^2\Big| < \left(\frac{1}{k}\sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau)\right)^2 + \frac{3}{k}t\left|\sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau)\right| + 2\frac{k}{n}t^2.$$

Значит, для энергии кластера $K = K(l, l+k]$

$$\left|E_K(t) - \frac{1}{2n}\sum_{i=l+1}^{l+k} a_i(0)^2(t-\tau)^2\right| < \frac{k}{2n}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=l+1}^{l+k} v_i(\tau)\right)^2 + \frac{3}{2n}t\left|\sum_{i=l+1}^{l+k} v_i(\tau)\right| + \frac{k^2}{n^2}t^2.$$

Оценив второе слагаемое суммой модулей, а первое при помощи неравенства Коши-Буняковского, получаем

$$\left|E_K(t) - \frac{1}{2n}\sum_{i=l+1}^{l+k} a_i(0)^2(t-\tau)^2\right| < \frac{1}{2n}\sum_{i=l+1}^{l+k} v_i(\tau)^2 + \frac{3}{2n}t\sum_{i=l+1}^{l+k} |v_i(\tau)| + \frac{k^2}{n^2}t^2.$$

Поскольку $k^2 \le L_n(t)k$, а суммарное количество частиц во всех кластерах равно n,

$$\left|E_n(t) - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i(0)^2(t-\tau)^2\right| < \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} v_i(\tau)^2 + \frac{3}{2n}t\sum_{i=1}^{n} |v_i(\tau)| + \frac{L_n(t)}{n}t^2 \tag{38}$$

$$\le \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} v_i(\tau)^2 + \frac{3}{2}t\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i(\tau)^2\right)^{1/2} + \frac{L_n(t)}{n}t^2 = E_n(\tau) + \frac{3}{2}t\sqrt{2E_n(\tau)} + \frac{L_n(t)}{n}t^2,$$

для второй оценки мы снова использовали неравенство Коши-Буняковского. Теперь зафиксируем произвольное $\rho > 0$. По теореме 2 и условию (36), из (38) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|E_n(t) - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i(0)^2(t-\tau)^2\right| < \rho\right\} = 1$$

для всех достаточно малых τ. На этом доказательство завершается, ведь при всех малых τ и больших n справедливо

$$\mathbf{P}\left\{\left|E_n(t) - \frac{t^2}{6}\right| < 2\rho\right\} \ge \mathbf{P}\left\{\left|E_n(t) - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i(0)^2(t-\tau)^2\right| < \rho\right\}.$$

$\square$

7. Компьютерное моделирование

Теорема 1, являющаяся одним из основных результатов статьи, была обнаружена эмпирически. В результате многочисленных запусков программы, реализующей рассматриваемую модель холодного гравитационного газа, автор обнаружил, что график функции $K_n(t)/n$ при больших n сильно напоминает параболу $1-t^2$, где $t \in [0,1]$. Это соответствует соотношению (19). Как уже говорилось, равенство $f(t) = 1-t^2$ пока доказать не удалось, однако проведенное компьютерное моделирование случайной величины из выражения (8) недвусмысленно указывает на его справедливость.

При моделировании была реализована н.р.р. модель начальных положений. В случае теплого газа начальные скорости брались нормальными с параметрами 0 и 1.

На рис. 1 представлены графики функций $K_n(t)$ при $n = 100$ и $n = 1000$ соответственно. Каждый из них получен в результате однократного запуска моделирующей программы. При $n = 5000$ отклонение от предельной функции оказалось настолько малым, что было абсолютно незаметно при выбранном размере рисунка.

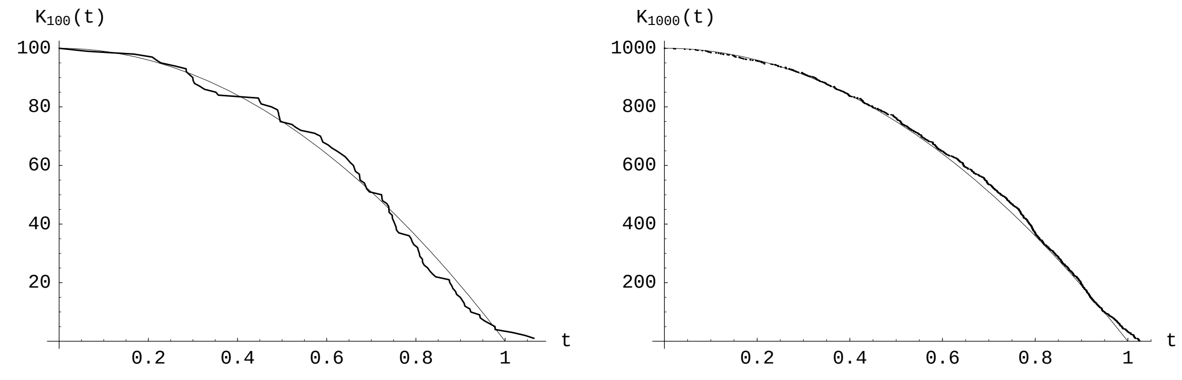

Рис. 1. $K_{100}(t)$ и $K_{1000}(t)$ в холодном газе.

При изучении энергии оказалось, что в холодном газе достаточно хорошее приближение к предельной функции (см. теорему 3) достигается уже при $n = 100$. Это подтверждает рис. 2.

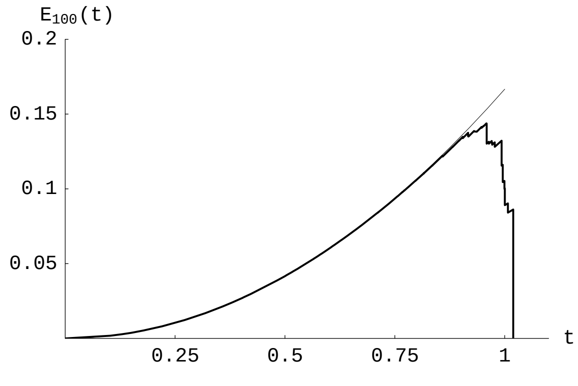

Рис. 2. $E_{100}(t)$ в холодном газе.

В теплом газе сходимость энергии к пределу (см. теорему 4) происходит гораздо медленнее. На рис. 3 изображены графики функций $E_n(t)$ при $n = 500$ и $n = 5000$. Отклонение

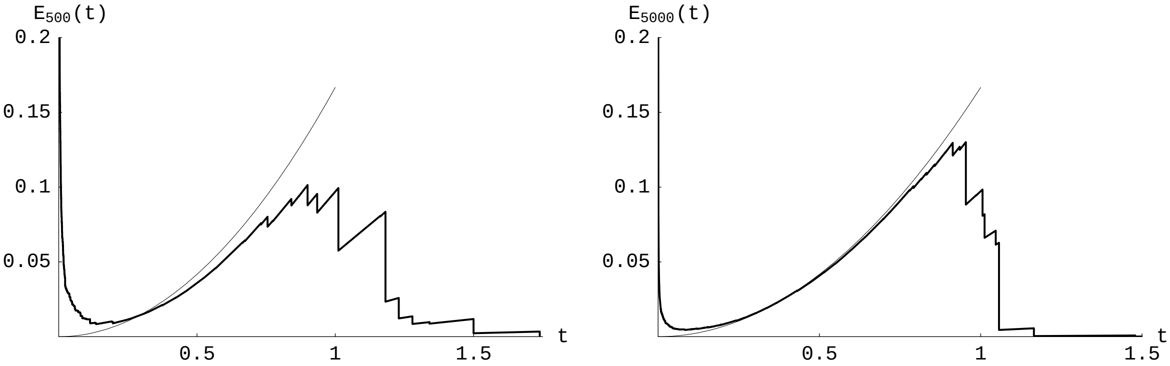

Рис. 3. $E_{500}(t)$ и $E_{5000}(t)$ в теплом газе.

от предельной функции при t, близких к 1, достаточно велико даже при $n = 10000$. Однако, рис. 3 убедительно свидетельствует об описываемом теоремой 2 мгновенном охлаждении теплого газа.

Автор выражает глубокую признательность своему руководителю М. А. Лифшицу, чьи замечания позволили значительно улучшить изложение результатов и исправить ряд неточностей.

Список литературы

[1] Shandarin S.F., Zeldovich Ya.B. The large-scale structure of the universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium. – Rev. Modern Physics, 1989, v. 61, p. 185-220.

[2] Martin Ph.A., Piasecki, J. Aggregation dynamics in a self-gravitating one-dimensional gas. – J. Statist. Phys., 1996, v. 84, p. 837-857.

[3] Giraud C. Clustering in a self-gravitating one-dimensional gas at zero temperature. – J. Statist. Phys., 2001, v. 105, p. 585-604.

[4] Lifshits M., Shi Z. Aggregation rates in one-dimensional stochastic systems with adhesion and gravitation. Preprint, 2003. (www.arxiv.org, Physics, Condensed Matter, статья № 0311025)

[5] Bonvin J.C., Martin Ph.A., Piasecki J. and Zotos X. Statistics of mass aggregation in a self-gravitating one-dimensional gas. – J. Statist. Phys., 1998, v. 91, p. 177-197.

[6] Суидан Т.М. Одномерный гравитационно взаимодействиющий газ и выпуклая миноранта броуновского движения. – Успехи мат. наук, 2001, т. 56, № 4, с. 73-96.

[7] E W., Rykov Yu.G., Sinai Ya.G. Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics. – Comm. Math. Phys., 1996, v. 177, p. 349-380.

[8] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.

Электронный адрес: vysotsky@vv9034.spb.edu

Владислав Высоцкий

кафедра теории вероятностей и математической статистики

Математико-механический факультет

Санкт-Петербургский Государственный Университет

Библиотечная пл., 2

198504, Старый Петергоф

Санкт-Петербург, Россия

vysotsky@vv9034.spb.edu