О гипотезе С.Л. Табачникова

А.И. Назаров, Ф.В. Петров

Доказана гипотеза С.Л. Табачникова о том, что средняя абсолютная кривизна $T(\Gamma)$ замкнутой кривой Γ, лежащей внутри выпуклой замкнутой кривой Γ_1, больше $T(\Gamma_1)$, если $\Gamma \neq k\Gamma_1$.

1. Постановка задачи. План действий

Рассмотрим на плоскости натурально параметризованную замкнутую кривую $\Gamma(s)$, $s \in [0, L(\Gamma)]$. Будем говорить, что $\Gamma(s)$ принадлежит классу BV^1, если скорость $\Gamma'(s)$ существует, непрерывна всюду на $[0, L(\Gamma)]$, за исключением счетного числа точек, в которых имеет односторонние пределы, и имеет конечную вариацию[1]. Полную вариацию Γ' назовем *полным поворотом* кривой Γ и будем обозначать $V(\Gamma)$.

Отметим следующие свойства полного поворота:

1°. Для C^2-гладких кривых полный поворот равен интегралу от модуля кривизны по длине дуги.

2°. Полный поворот замкнутой ломаной равен сумме внешних углов во всех вершинах ломаной.

3°. Полный поворот замкнутой выпуклой кривой существует и равен 2π.

Определим *среднюю абсолютную кривизну* кривой $\Gamma \in BV^1$ как ее полный поворот, деленный на длину.

С.Л. Табачников [1] сформулировал следующую гипотезу, названную им *неравенством ДНК*:

Теорема $\mathcal{P}$. 1. Средняя абсолютная кривизна $T(\Gamma)$ кривой $\Gamma \in BV^1$ ("ДНК", лежащей внутри выпуклой замкнутой кривой Γ_1 ("клетки", не меньше $T(\Gamma_1)$.

2. Если $T(\Gamma) = T(\Gamma_1)$, то кривая Γ есть кратный обход кривой Γ_1.

Обзор результатов, связанных с этой гипотезой и ее обобщениями, приведен в [1]. Первая часть теоремы $\mathcal{P}$ доказана в [2].

Мы докажем неравенство ДНК полностью. Доказательство первой части теоремы $\mathcal{P}$ частично следует [2], но является более прозрачным и кратким и используется при доказательстве второй части теоремы. Для полноты изложения мы приводим (во многом упрощенные) доказательства всех используемых лемм из [2].

Не умаляя общности, можно считать, что Γ_1 совпадает с границей выпуклой оболочки Γ.

[1] Вариация функции f, действующей в единичную окружность, определяется как точная верхняя грань сумм $\sum_{i=1}^{n} \rho(f(t_i), f(t_{i-1})) + \rho(f(t_n), f(t_0))$, взятой по всем разбиениям $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ отрезка задания функции f, для которых f определена в узлах разбиения t_i; ρ – внутренняя метрика окружности.

Будем говорить, что кривая $\widetilde{\Gamma}$ *лучше* кривой Γ, если $T(\Gamma) \geq T(\widetilde{\Gamma})$, и *строго лучше*, если $T(\Gamma) > T(\widetilde{\Gamma})$. Замену кривой на лучшую (соответственно на строго лучшую) кривую с не большей выпуклой оболочкой будем называть улучшением (соответственно строгим улучшением) кривой. Заметим, что если в результате последовательности улучшений кривой Γ получен кратный обход кривой Γ_1, утверждение 1 теоремы $\mathcal{P}$ для кривой Γ доказано, а если хотя бы одно из улучшений было строгим, доказано строгое неравенство $T(\Gamma) > T(\Gamma_1)$.

Первым делом утверждение 1 сводится к случаю ломаных. Затем вершины ломаной "загоняются" на границу (здесь и далее: границу выпуклой оболочки). После этого каждая смена направления поворота ломаной позволяет ее улучшить. Конечное число таких улучшений приводит к ломаной, поворачивающей только в одном направлении, для которой утверждение 1 практически очевидно. Далее мы докажем, что каждую кривую, отличную от несколько раз обойденной границы, можно строго улучшить. Из этого будет следовать утверждение 2.

2. Сведение к ломаной

Заметим, что если в точке разрыва (скачка) функции Γ' доопределить Γ' как произвольный вектор на единичной окружности, лежащий между[2] левым и правым односторонними пределами Γ', вариация Γ' не изменится. Далее, говоря о множестве значений скорости на некотором подынтервале задания Γ', мы будем иметь в виду, что к множеству значений Γ' в точках непрерывности добавлены именно эти множества допустимых значений во всех точках разрыва. Легко видеть, что при таком подходе множество значений скорости на любом интервале есть дуга окружности.

Нам потребуется следующая

Лемма 1. Рассмотрим две точки A и B на кривой Γ. Полный поворот кривой Γ между A и B (такой участок будем обозначать Γ_{AB}) не меньше $\rho(\Gamma'(A), e) + \rho(\Gamma'(B), e)$, где e – единичный вектор, направленный вдоль отрезка AB.

Доказательство. Если вектор e лежит в множестве значений Γ' на участке от A до B, утверждение очевидно (достаточно рассмотреть разбиение Γ_{AB}, в котором узлами будут A, B и точка C, для которой $\Gamma'(C) = e$). В противном случае множество значений Γ' от A до B – дуга, не меньшая полуокружности (иначе можно было бы построить полуплоскость, содержащую это множество значений и не содержащую вектор $\overline{AB}$). Рассмотрев разбиение Γ_{AB}, в котором в качестве узлов встречаются точки с крайними положениями скорости, получим, что поворот Γ' от A до B не меньше большей дуги между $\Gamma'(A)$ и $\Gamma'(B)$, что доказывает лемму и в этом случае. □

Лемма 2. Пусть для некоторой кривой Γ утверждение 1 теоремы $\mathcal{P}$ не выполнено. Тогда существует ломаная, для которой оно также не выполнено.

[2] т.е. на меньшей из двух дуг единичной окружности.

Доказательство. По условию $T(\Gamma) < T(\Gamma_1)$. Впишем в Γ ломаную Δ, длина которой достаточно близка к длине Γ (именно, $L(\Delta) > L(\Gamma) \cdot \frac{T(\Gamma)}{T(\Gamma_1)}$). Очевидно, выпуклая оболочка Δ (обозначим ее границу Δ_1) лежит в Γ_1.

Докажем, что $V(\Delta) \leq V(\Gamma)$. Для этого достаточно сложить неравенства леммы 1 по всем звеньям Δ и затем применить неравенство треугольника.

Отсюда

$$T(\Delta) = \frac{V(\Delta)}{L(\Delta)} < \frac{V(\Gamma)}{L(\Gamma)} \cdot \frac{T(\Gamma_1)}{T(\Gamma)} = T(\Gamma_1) \leq T(\Delta_1),$$

и лемма доказана. □

Для замкнутой ломаной $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ обозначим L ее длину, P – периметр выпуклой оболочки и $V := \sum_{i=1}^{n}(\pi - \angle A_{i-1}A_iA_{i+1})$ – полный поворот (нумерация индексов циклическая по модулю n). Будем предполагать, что ни одна из вершин A_i ломаной не лежит на отрезке $[A_{i-1}A_{i+1}]$. Если у одной из получаемых в процессе улучшения ломаных появятся такие вершины, сразу будем их удалять.

С учетом введенных обозначений утверждение 1 теоремы $\mathcal{P}$ переформулируется для ломаных так:

Лемма 3. $\dfrac{L}{V} \leq \dfrac{P}{2\pi}$.

Заметим, что из лемм 2 и 3 следует утверждение 1 в общем случае.

3. Четырехзвенные ломаные

Докажем две леммы, которые составляют утверждение леммы 3 для четырехзвенных ломаных и, кроме того, в дальнейшем будут использоваться для улучшения произвольной ломаной.

Лемма 4. В треугольнике ABC выполнено неравенство

$$\frac{AB + BC}{2\pi - \beta} < \frac{AB + BC + AC}{2\pi}, \tag{1}$$

где $\beta = \angle ABC$.

Доказательство. По теореме синусов имеем

$$\frac{AB + BC}{AC} = \frac{\sin\angle A + \sin\angle C}{\sin\beta} = \frac{2\sin(\frac{\angle A + \angle C}{2})\cos(\frac{\angle A - \angle C}{2})}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\cos(\frac{\angle A - \angle C}{2})}{\sin\frac{\beta}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Из выпуклости синуса на $]0, \pi/2[$ имеем $\sin\frac{\beta}{2} > \frac{\beta}{\pi}$. Поэтому

$$\frac{AB + BC}{AC} < \frac{\pi}{\beta} < \frac{2\pi - \beta}{\beta},$$

что равносильно (1). □

Лемма 5. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке O. Положим $\varphi = \angle AOB$. Тогда

$$\frac{AB + BD + DC + CA}{2(\pi + \varphi)} < \frac{AB + BC + CD + DA}{2\pi}. \tag{2}$$

Доказательство. По лемме 4 имеем $AB > \frac{\varphi}{\pi}(AO + OB)$, $CD > \frac{\varphi}{\pi}(CO + OD)$. Складывая, получаем $AB + CD > \frac{\varphi}{\pi}(AC + BD)$.

Аналогично, $BC + AD > (1 - \frac{\varphi}{\pi})(AC + BD)$. Поэтому

$$\frac{\varphi}{\pi} \cdot \frac{AB + CD}{AC + BD} + (1 + \frac{\varphi}{\pi}) \cdot \frac{BC + DA}{AC + BD} > \frac{\varphi}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\pi} + (1 + \frac{\varphi}{\pi}) \cdot (1 - \frac{\varphi}{\pi}) = 1.$$

Отсюда

$$\frac{AB + CD}{AC + BD} + 1 < (1 + \frac{\varphi}{\pi})(\frac{AB + CD}{AC + BD} + \frac{BC + DA}{AC + BD}),$$

что равносильно (2). □

К леммам 4 и 5 сводятся частные случаи леммы 3 для случая вогнутого и самопересекающегося четырехугольника соответственно.

Замечание 1. Неравенства (1) и (2) (со знаком $\leq$) выполнены и для вырожденных треугольника ABC и четырехугольника $ABCD$ соответственно.

4. Перемещение вершин на границу

В этом пункте мы сведем лемму 3 к случаю, когда все вершины ломаной лежат на границе ее выпуклой оболочки.

Пусть вершина A_i лежит строго внутри выпуклой оболочки. Разберем три случая.

Случай **a)**. Если точки A_{i-1} и A_{i+2} лежат по одну сторону от прямой A_iA_{i+1}, ломаную можно строго улучшить, увеличив длину и не изменив поворота, подвинув вершину A_i за отрезок $A_{i-1}A_i$, пока она не наткнется либо на границу, либо на продолжение отрезка $A_{i+1}A_{i+2}$. Тем самым мы получим лучшую ломаную с меньшим количеством вершин внутри выпуклой оболочки (возможно, уменьшится и общее количество вершин). Аналогичным образом поступим, если A_{i+1} и A_{i-2} лежат по одну сторону от A_iA_{i-1}.

Случай **b)**. Предположим теперь, что точки A_{i-1} и A_{i+2} лежат по разные стороны от прямой A_iA_{i+1}; а точки A_{i+1} и A_{i-2} – по разные стороны от прямой A_iA_{i-1}.

Пусть точки A_{i-2} и A_{i+2} лежат в углах, дополнительных (по стороне, содержащей точку A_i) к $\angle A_{i+1}A_{i-1}A_i$ и $\angle A_{i-1}A_{i+1}A_i$ соответственно. Рассмотрим ломаную, получающуюся из $A_1A_2 \ldots A_n$ заменой звеньев $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i+1} на одно звено $A_{i-1}A_{i+1}$. Предположим, что исходная ломаная не удовлетворяет неравенству леммы 3, а новая – удовлетворяет, то есть имеет место двойное неравенство

$$\frac{L}{V} > \frac{P}{2\pi} \geq \frac{L - (A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1})}{V - 2(\pi - \beta)}, \tag{3}$$

где $\beta := \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$. Тогда

$$P \cdot V - 2(\pi - \beta) \cdot P + 2\pi(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1}) \geq 2\pi L > P \cdot V,$$

откуда

$$2\pi(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1}) > 2(\pi - \beta)P \geq 2(\pi - \beta)(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} + A_{i-1}A_{i+1}),$$

что противоречит лемме 4. Поэтому новая ломаная также является контрпримером к лемме 3 и имеет меньшее количество внутренних вершин.

Осталось рассмотреть случай **c)**, когда, скажем, A_{i+2} и A_i лежат по разные стороны от прямой $A_{i-1}A_{i+1}$ (в этом случае вершина A_{i+1} также лежит строго внутри выпуклой оболочки). Не умаляя общности, угол $A_{i-1}A_{i+1}A_i$ — наименьший для всех номеров i, обладающих таким свойством. Заменим i на $i+1$ и разберем аналогичные случаи. Точка A_{i-1} лежит в угле, дополнительном к $A_iA_{i+2}A_{i+1}$ по стороне A_iA_{i+1}. Если точка A_{i+3} не лежит в угле, вертикальном к углу $A_{i+1}A_{i+2}A_i$, ломаная улучшается так, как уже показано (с заменой i на $i+1$). Если же точка A_{i+3} лежит в этом угле, получаем противоречие с выбором i: угол $\angle A_iA_{i+2}A_{i+1}$ меньше, чем $\angle A_iA_{i+1}A_{i-1}$ (так как $\angle A_iA_{i+1}A_{i_1} + \angle A_iA_{i+1}A_{i+2} > \angle A_iA_{i+2}A_{i+1} + \angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$).

Итак, за конечное число шагов дело сводится к случаю, когда все вершины A_i ломаной $A_1A_2 \ldots A_n$ лежат на границе выпуклой оболочки.

5. Уменьшение количества перемен направления

Введем на плоскости ориентацию. Будем говорить, что ломаная $A_1A_2 \ldots A_n$ в вершине A_i поворачивает вправо, если базис $\overline{A_{i-1}A_i}$, $\overline{A_iA_{i+1}}$ отрицательно ориентирован. В противном случае (в частности, если векторы $\overline{A_iA_{i-1}}$ и $\overline{A_iA_{i+1}}$ сонаправлены) будем говорить, что ломаная в вершине A_i поворачивает влево.

Если ломаная дважды подряд поворачивает в одном направлении, то звено между этими поворотами можно заменить на участок границы в том же направлении – ломаная улучшится. Назовем эту операцию вытягиванием ломаной.

Лемма 6. Предположим, что несколько последовательных звеньев нашей ломаной образуют полный обход границы, причем первое и последнее ребро участка совпадают (то есть граница – многоугольник $C_1C_2 \ldots C_m$, а в ломаной есть участок $XC_1C_2 \ldots C_mC_1C_2Y$). Тогда истинность леммы 3 для такой ломаной равносильно ее истинности для ломаной, в которой обход исключен (то есть для ломаной, в которой указанный участок заменен на XC_1C_2Y).

Доказательство. Легко видеть, что периметр ломаной, полученной после удаления обхода, равен $L-P$, а полный поворот – $V-2\pi$. Утверждение леммы 3 для новой ломаной записывается в виде неравенства $\frac{L-P}{V-2\pi} \leq \frac{P}{2\pi}$, равносильного утверждению леммы 3 для исходной ломаной. $\square$

Будем повторять операцию леммы 6 до тех пор, пока это возможно. Этот процесс когда-нибудь прекратится: из ломаной на каждом шаге убираются некоторые звенья и не добавляется новых. Заметим, что количество перемен направления не будет изменяться.

Теперь ломаная разбивается на участки с поворотами в одну сторону, причем на каждом участке все ребра, кроме – возможно – первого и последнего, идут по границе (но, благодаря лемме 6, не повторяются).

Будем проводить такую операцию: возьмем участок $A_iA_{i+1}\dots A_k$, состоящий, для определенности, из поворотов влево; именно, повороты в вершинах A_{i+1}, $A_{i+2},\dots,$ A_{k-1} направлены влево, а в A_i и A_k вправо. Заменим $A_iA_{i+1}\dots A_k$ на участок границы $A_i..A_k$, обходящий границу в противоположном (в данном случае отрицательном) направлении. Количество перемен направления поворота при этой операции уменьшается.

Предположим, что исходная ломаная не удовлетворяет неравенству леммы 3. Покажем, что тогда и новая ломаная не удовлетворяет этому неравенству. Необходимо проверить 6 разных случаев, определяемых порядком следования вершин A_i, A_{i+1}, A_{k-1}, A_k при обходе границы в положительном направлении:

1°. $A_iA_{i+1}A_{k-1}A_k$;

2°. $A_iA_kA_{i+1}A_{k-1}$;

3°. $A_iA_{i+1}A_kA_{k-1}$;

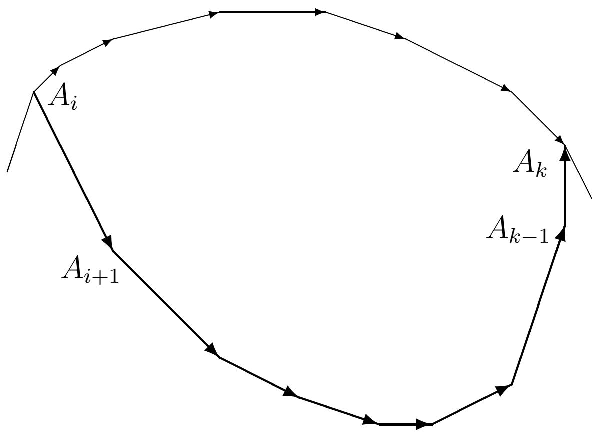
4°. $A_iA_{k-1}A_kA_{i+1}$;

5°. $A_iA_{k-1}A_{i+1}A_k$;

6°. $A_iA_{k-1}A_kA_{i+1}$.

Случаи 3 и 4 переводятся друг в друга переобозначениями и симметрией. Обозначим s длину ломаной $A_iA_{i+1}\dots A_k$, а s' – длину нового участка.

Рис. 1:



1° (см. рис.1). Обозначим $\angle A_{i+1}A_iA_k = \alpha$, $\angle A_{k-1}A_kA_i = \beta$. При замене ломаной ее полный поворот уменьшился на $2(\alpha+\beta)$, а длина – на $s-s'$.

Если новая ломаная удовлетворяет неравенству леммы 3, то справедливо двойное неравенство

$$\frac{L}{V} > \frac{P}{2\pi} \geq \frac{L+s'-s}{V-2(\alpha+\beta)}, \tag{4}$$

или

$$P\cdot V - 2P(\alpha+\beta) + 2\pi(s-s' \geq 2\pi L > P\cdot V,$$

откуда $2\pi(s-s' > 2(\alpha+\beta)P \geq 2(\alpha+\beta)(s+s'$ и $2(\pi-\alpha-\beta)s > 2(\pi+\alpha+\beta)s'$.

Последнее неравенство может выполняться только если $\alpha+\beta<\pi$. В этом случае лучи

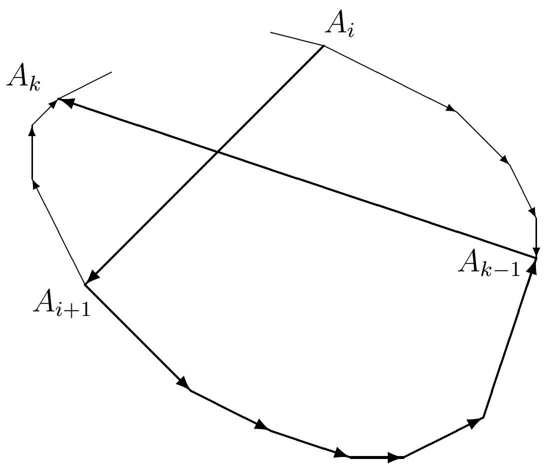
A_iA_{i+1} и A_kA_{k-1} пересекаются в точке C, причем $CA_i + CA_k \geq s$, $A_iA_k \leq s'$. Поэтому

$$(\pi - \alpha - \beta)(CA_i + CA_k) > (\pi + \alpha + \beta)A_iA_k,$$

что противоречит лемме 4.

2° (см. рис.2). Обозначим O точку пересечения отрезков A_iA_{i+1} и A_kA_{k-1}, $\angle A_iOA_k = \varphi$. При замене ломаной ее полный поворот уменьшился на 2φ, а длина – на $s - s'$.

Рис. 2:



Если новая ломаная удовлетворяет неравенству леммы 3, то справедливо двойное неравенство

$$\frac{L}{V} > \frac{P}{2\pi} \geq \frac{L + s' - s}{V - 2\varphi}.$$

Отсюда аналогично пункту 1 получаем неравенство $2\pi(s - s' > 2\varphi P$, из которого следует, что

$$\frac{A_iA_{i+1} + A_kA_{k-1} - (A_iA_{k-1} + A_kA_{i+1})}{A_iA_k + A_kA_{i+1} + A_{i+1}A_{k-1} + A_iA_{k-1}} > \frac{\varphi}{\pi}.$$

Это противоречит лемме 5 (для четырехугольника $A_iA_{k-1}A_{i+1}A_k$).

Остальные случаи разбираются аналогично, с применением леммы 4 (в случаях 3 и 6) или леммы 5 (в случае 5).

Таким образом за конечное число шагов мы придем к ломаной, поворачивающей все время в одном направлении. Но из такой ломаной с помощью вытягивания получается кратный обход границы, поэтому утверждение леммы 3 для нее выполнено. Следовательно, исходное предположение неверно, и лемма 3 доказана. Доказано и утверждение 1 теоремы $\mathcal{P}$.

6. Доказательство утверждения 2

Пусть кривая Γ не есть (кратный) обход границы, но $T(\Gamma) = T(\Gamma_1)$. Выделим на Γ конечное число точек так, чтобы сумма скачков скорости в оставшихся точках была достаточно мала (к примеру, меньше одного градуса). Объединение этого множества с множеством $\Gamma \cap \Gamma_1$ замкнуто. Прообраз его дополнения – объединение счетного числа интервалов. Рассмотрим один из таких интервалов, пусть он соответствует участку Γ между точками A и B.

Будем говорить, что участок кривой Γ_{CD} *маленький*, если множество значений скорости на этом участке является дугой не более $\pi/4$, и окружность с диаметром CD лежит строго внутри Γ_1. Легко видеть, что для каждой внутренней точки участка Γ_{AB} есть содержащий ее маленький подучасток.

Рассмотрим маленький участок Γ_{CD}. Определим, если это необходимо, скорости $\Gamma'(C)$ и $\Gamma'(D)$ как их правые пределы. Построим параллелограмм $CPDQ$, в котором $\overline{CP}$ и $\overline{CQ}$ направлены по крайним направлениям скорости кривой Γ на участке Γ_{CD}. Он полностью лежит внутри Γ_1 (поскольку крайние направления скорости достаточно близки к направлению вектора $\overline{CD}$).

Будем считать для определенности, что на пути от C до D на кривой Γ сначала встречается точка X, в которой касательная параллельна CP, а потом – точка Y, в которой касательная параллельна CQ. Заменим участок Γ_{CD} на двузвенную ломаную CPD.

Заметим, что полный поворот кривой Γ_{CD} не меньше

$$v := \rho(\Gamma'(C), \Gamma'(X)) + \rho(\Gamma'(X), \Gamma'(Y)) + \rho(\Gamma'(Y), \Gamma'(D)),$$

в то время как полный поворот участка новой кривой равен v. Равенство достигается лишь в случае, когда Γ выпукла от C до X, от X до Y и от Y до D.

Далее, длина участка Γ_{CD} не превосходит $CP + PD$. Чтобы это доказать, рассмотрим произвольную вписанную в Γ_{CD} ломаную. Направления ее могут меняться между направлениями векторов $\overline{CP}$ и $\overline{CQ}$. Поэтому после их перестановки в монотонном порядке от самого близкого (в смысле направления) к $\overline{CP}$ до самого близкого к $\overline{CQ}$ получится выпуклая ломаная $C \dots D$, лежащая внутри треугольника CPD, длина которой, очевидно, не превосходит $CP + PD$.

Итак, при замене участка Γ_{CD} на ломаную CPD не уменьшается поворот и не увеличивается длина, т.е. кривая Γ улучшается. Но по уже доказанному утверждению 1 Γ нельзя строго улучшить. Поэтому при такой замене остаются неизменными и поворот, и длина. Первое возможно, только если Γ_{CD} разбивается на не более чем три выпуклых участка ($C - X$, $X - Y$, $Y - D$). Второе же возможно, лишь если каждый из этих участков есть ломаная с не более чем двумя звеньями. Таким образом, Γ_{CD} – ломаная с не более чем шестью звеньями (количество звеньев можно еще уменьшить, но нам это сейчас не требуется).

Зафиксируем теперь точки A' и B' на открытой дуге Γ_{AB} и покроем $\Gamma_{A'B'}$ конечным числом маленьких участков. На каждом из них Γ является ломаной, так что и $\Gamma_{A'B'}$ – ломаная.

Покажем, что если в ней хотя бы 4 звена, то кривую Γ можно строго улучшить. Рассмотрим случаи, фигурирующие в §4. В случае **a)** используется лишь локальная структура ломаной и он без изменений переносится в нашу ситуацию.

В случае **b)**, используя утверждение 1 для преобразованной кривой, мы получаем неравенство, аналогичное (3),

$$\frac{L(\Gamma)}{V(\Gamma)} = \frac{L(\Gamma_1)}{2\pi} \geq \frac{L(\Gamma) - (A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1})}{V(\Gamma) - 2(\pi - \beta)},$$

откуда

$$2\pi(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1}) \geq 2(\pi - \beta)(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} + A_{i-1}A_{i+1}),$$

что противоречит лемме 4.

В случае **c)**, если A_{i+2} и A_i лежат по разные стороны от прямой $A_{i-1}A_{i+1}$ (в этом случае вершина A_{i+1} также лежит строго внутри выпуклой оболочки), ломаную можно строго улучшить, заменив звено A_iA_{i+1} на параллельное более длинное $A_i'A_{i+1}' \parallel A_iA_{i+1}$, где $A_i \in [A_{i-1}A_i'[,\ A_{i+1}' \in]A_{i+1}A_{i+2}]$.

Итак, $\Gamma_{A'B'}$ является ломаной не более чем с тремя звеньями. Значит, в силу произвольности выбора точек A' и B', и Γ_{AB} является ломаной не более чем с тремя звеньями.

Присоединим теперь к рассмотренным интервалам точки "большого поворота", которые мы ранее исключили. Тогда вся внутренняя часть кривой Γ разбивается на не более чем счетное число участков, каждый из которых – ломаная с конечным числом звеньев.

Если на одном из таких участков число звеньев ломаной больше одного, то она содержит внутренние вершины, и Γ опять строго улучшаема с помощью приемов §4.

Итак, все точки Γ лежат на границе либо на одном из отрезков, соединяющих точки границы.

Допустим, что отрезков бесконечно много. Тогда существует последовательность отрезков, длина которых стремится к нулю, а концы сходятся к некоторой точке $C \in \Gamma_1$. Зафиксируем достаточно малую окрестность точки C, в которой поворот Γ_1 равен $\varphi_0 < \pi$. Рассмотрим один из отрезков $\overline{AB}$ (A, $B \in \Gamma_1$), лежащий в этой окрестности. Если векторы $\Gamma'(A-)$ и $\Gamma'(B+)$ направлены в разные полуплоскости относительно прямой AB, то кривая Γ строго улучшаема (вытягиванием отрезка AB на границу), что невозможно. Поэтому вариация Γ' на отрезке AB не меньше $\pi - \varphi_0$ и, таким образом, бесконечного числа отрезков быть не может.

Таким образом, Γ состоит из конечного числа кусков, идущих по границе, и конечного числа внутренних отрезков между ними. Если на границе имеются точки возврата, то ввиду $\Gamma \in BV^1$ таких точек лишь конечное число, и мы будем интерпретировать их как "внутренние отрезки нулевой длины".

Если два последовательных куска границы имеют одинаковое направление обхода, то Γ опять строго улучшится, если мы вытянем соединяющий их отрезок на границу. Далее, можно исключить все полные обходы границы аналогично лемме 6.

Рассмотрим теперь дугу Γ_{AB}, состоящую из отрезка AA_1, участка границы $\Gamma_{A_1B_1}$, проходимого, для определенности, в положительном направлении, и отрезка B_1B. Аналогично §5, заменим Γ_{AB} на участок границы между A и B, проходимый в отрицательном направлении. Здесь вновь необходимо рассмотреть 6 случаев, разобранных в §5, в зависимости от порядка следования точек A, A_1, B, B_1 при обходе границы в положительном направлении. Например, в случае 1° (порядок AA_1B_1B), используя утверждение 1 для преобразованной кривой, мы получаем неравенство, аналогичное (4),

$$\frac{L(\Gamma)}{V(\Gamma)} = \frac{L(\Gamma_1)}{2\pi} \geq \frac{L(\Gamma) + s' - s}{V(\Gamma) - 2(\angle A_1AB + \angle B_1BA)}.$$

Из этого неравенства, как и в §5, выводим, что лучи AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C, причем

$$(\pi - \angle A_1AB - \angle B_1BA)(CA + CB) \geq (\pi + \angle A_1AB + \angle B_1BA)AB,$$

что противоречит лемме 4.

Аналогично к противоречию приводят и остальные случаи. Это показывает, что кривая Γ не может содержать внутренних отрезков и потому представляет собой обход границы, а с учетом исключенных ранее обходов – кратный обход границы. Утверждение 2 доказано. □

7. О поверхностях постоянной кривизны

В этом пункте мы докажем аналог неравенства ДНК на поверхности сферы.

Пусть Γ — замкнутая кривая, лежащая в некоторой полусфере (здесь и далее: единичного радиуса) и имеющая конечную вариацию $V(\Gamma)$ правого поворота (определения см. в [3]). Отметим, что если $\Gamma:\ A_1A_2\dots A_nA_1$ — замкнутая ломаная, то $V(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n}(\pi - \angle A_{i-1}A_iA_{i+1})$ (нумерация индексов, как обычно, циклическая). Если Γ — замкнутая C^2-гладкая кривая, то $V(\Gamma)$ есть интеграл (по натуральному параметру) от длины вектора геодезической кривизны.

Определим *среднюю абсолютную геодезическую кривизну* $T(\Gamma)$ замкнутой кривой: $T(\Gamma) := V(\Gamma)/L(\Gamma)$.

Теорема $\mathcal{S}$. Пусть Γ — замкнутая кривая на полусфере, имеющая конечную вариацию правого поворота; Γ_1 — граница ее выпуклой оболочки. Тогда $T(\Gamma) \geq T(\Gamma_1) = (2\pi - S)/L(\Gamma_1)$, где S — площадь выпуклой оболочки.

План доказательства теоремы $\mathcal{S}$ такой же, как и в плоском случае. Сформулируем сначала соответствующую теорему для ломаных.

Теорема $\mathcal{S}'$. Пусть Γ — замкнутая ломаная на полусфере, Γ_1 — граница ее выпуклой оболочки, и Γ не есть кратный обход Γ_1. Тогда $T(\Gamma) > T(\Gamma_1)$.

Перед тем, как приступить к леммам о четырехзвенных ломаных, мы докажем следующее утверждение, уточняющее (в частном случае) теорему А.Д. Александрова о сравнении углов.

Лемма $1s$. Пусть ABC — невырожденный треугольник на сфере со сторонами $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и углами α, β, γ соответственно. Обозначим через α', β', γ' углы трегольника со сторонами a, b, c на плоскости. Тогда выполнено неравенство

$$\alpha - \alpha' < (\beta - \beta') + (\gamma - \gamma'). \qquad (1_s)$$

Доказательство. Обозначим $(a + b + c) = 4S$, $S - a/2 = X$, $S - b/2 = Y$, $S - c/2 = Z$, $\mathcal{E} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ – площадь треугольника ABC. Неравенство (1_s) равносильно неравенству $\alpha' \geq \alpha - \mathcal{E}/2$ или, что то же самое,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2} > \operatorname{tg}(\alpha/2 - \mathcal{E}/4). \qquad (2_s)$$

Подставляя сюда формулы

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin 2Y\sin 2Z}{\sin 2X\sin 2S}},\quad \operatorname{tg}\frac{\mathcal{E}}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}S\cdot\operatorname{tg}X\cdot\operatorname{tg}Y\cdot\operatorname{tg}Z},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2}=\sqrt{\frac{YZ}{X(X+Y+Z)}}$$

(первая формула – это [5, (28)], вторая – [6], третья – [7, (20)]), преобразуем (2_s) к виду

$$\frac{\sin Z\sin Y}{\sin X\sin S}\cdot\frac{\cos Y\cos Z-\sin X\sin S}{\cos X\cos S+\sin Y\sin Z}<\sqrt{\frac{YZ}{X(X+Y+Z)}}\cdot\sqrt{\frac{\sin(2Z)\sin(2Y)}{\sin(2X)\sin(2S)}}. \tag{3_s}$$

Так как $S=X+Y+Z$, имеем $\cos(S-X)=\cos(Y+Z)$, а значит второй сомножитель в левой части (3_s) равен 1. Если ввести обозначение $f(x)=x\operatorname{ctg}x$, то (3_s) сводится к

$$f(Y)f(Z)>f(X)f(X+Y+Z). \tag{4_s}$$

Поскольку $f'(x)=\frac{\sin(2x)-2x}{2\sin^2 x}<0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$, то f строго убывает на $[0,\frac{\pi}{2}]$. Поскольку все аргументы в (4_s) лежат в $[0,\frac{\pi}{2}]$ (напомним, что $X+Y+Z=(a+b+c)/4\le\pi/2$), достаточно считать, что $X=0$ и доказывать неравенство

$$f(Y)f(Z)>f(0)f(Y+Z). \tag{5_s}$$

Имеем $(\ln(f))''(x)=\frac{4}{\sin^2(2x)}\Big(\cos(2x)-\frac{\sin^2(2x)}{4x^2}\Big)$. Элементарными методами доказывается, что $\cos t<(\frac{\sin t}{t})^2$ при $t=2x\in]0,\pi[$. Поэтому функция $\ln(f)$ строго вогнута на $[0,\frac{\pi}{2}]$, откуда следует (5_s). □

Теперь мы готовы доказать аналоги лемм 4 и 5 для сферы.

Лемма 2*s*. Пусть ABC – невырожденный треугольник на сфере. Тогда в обозначениях леммы 1*s*

$$\frac{a+c}{2\pi-\beta}<\frac{a+b+c}{2\pi-\mathcal{E}}.$$

Доказательство. Утверждение следует из цепочки неравенств

$$\frac{a+c}{a+b+c}<\frac{2\pi-\beta'}{2\pi}<\frac{2\pi-\beta+\mathcal{E}/2}{2\pi}\le\frac{2\pi-\beta}{2\pi-\mathcal{E}}$$

(первое неравенство – это лемма 4, второе – лемма 1s, последнее сводится к очевидному $\beta\le\pi+\mathcal{E}/2$). □

Лемма 3*s*. Рассмотрим на полусфере выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Положим $\varphi=\angle AOB$. Обозначим $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $BD=m$, $AC=n$, $\angle AOB=\varphi$. Площади треугольников OAB, OBC, OCD, ODA обозначим $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_4$ соответственно и положим $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_3+\mathcal{E}_4$. Тогда

$$\frac{a+c+m+n}{2\pi-(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_3)+2\varphi}<\frac{a+b+c+d}{2\pi-\mathcal{E}}. \tag{6_s}$$

Доказательство. Обозначим φ' угол треугольника на плоскости со сторонами a, AO, BO напротив стороны a. Тогда

$$\frac{a}{AO+BO} > \frac{\varphi'}{\pi} > \frac{\varphi - \mathcal{E}_1/2}{\pi} > \frac{\varphi - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3)/2}{\pi}, \tag{7_s}$$

(первое неравенство следует из доказательства леммы 4, второе – из леммы 1s). Аналогично,

$$\frac{c}{CO+DO} > \frac{\varphi - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3)/2}{\pi}. \tag{8_s}$$

Из (7_s) и (8_s) немедленно следует, что

$$x := \frac{a+c}{m+n} > \frac{\varphi - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3)/2}{\pi}.$$

Аналогично,

$$y := \frac{b+d}{m+n} > \frac{\pi - \varphi - (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4)/2}{\pi}.$$

Подставляя в равенство

$$z := \frac{a+c+m+n}{a+c+b+d} = \frac{x+1}{x+y} = 1 + \frac{1-y}{x+y}$$

полученные оценки снизу для x и y, в силу $y < 1$ получаем оценку сверху для z. Это дает неравенство (6_s). $\square$

Изложим вкратце план дальнейшего доказательства теоремы $\mathcal{S}'$.

Рассуждения случаев **a)** и **c)** параграфа 4 переносятся на сферический случай почти без изменений (естественные изменения, связанные с появлением сферического дефекта $\mathcal{E}$, лишь улучшают соответствующие неравенства).

В случае **b)** следует выбирать номер i таким, чтобы угол, вертикальный к углу $\angle A_{i-1}A_{i+1}A_i$ имел наименьшую площадь пересечения с с полусферой. Угол, вертикальный к $\angle A_iA_{i+2}A_{i+1}$, содержится в угле, вертикальном к $\angle A_{i-1}A_{i+1}A_i$ (в пересечении с полусферой) из-за отсутствия на полуфере сопряженных точек, и это опять же приводит к противоречию.

Рассуждения параграфа 5 подвергаются тем же изменениям, что и в случае **c)** параграфа 4.

Вывод теоремы $\mathcal{S}$ из теоремы $\mathcal{S}'$. Прежде всего заметим, что кривая Γ разбивается на конечное число кусков без кратных точек. Действительно, если кусок достаточно малой длины содержит кратные точки, то его поворот не меньше $\pi/2$, поэтому таких кусков не может быть бесконечно много.

Пусть $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = L(\Gamma)$ — узлы такого разбиения (мы считаем, что Γ параметризована натурально, начиная с одного из узлов). Положим $A_i := \Gamma(t_i)$, $\Gamma_i := \Gamma_{[t_i,t_{i+1}]}$. По теореме 1 [4], для $i = 1,\dots,n$ существует последовательность ломаных $g_k^i : \ [t_i, t_{i+1}] \to S^2$ ($k = 1, 2, \dots$) такая, что $g_k^i(t_i) = A_i$, $g_k^i(t_{i+1}) = A_{i+1}$, последовательность g_k^i сходится к Γ_i справа, и $\limsup V(g_k^i) \leq V(\Gamma_i)$. Кроме того, направления ломаных g_k^i в точках A_i и A_{i+1} сходятся к направлениям (соответственно, правому и левому) кривой Γ в этих точках.

Обозначим g_k объединение (по всем $i = 1, \ldots, n$) ломаных g_k^i, а G_k — границу выпуклой оболочки ломаной g_k. Тогда $\limsup V(g_k) \leq V(\Gamma)$. Далее, $L(\Gamma) \leq \liminf L(g_k)$. Наконец, поскольку $g_k \to \Gamma$ равномерно, то $G_k \to \Gamma_1$, откуда $L(G_k) \to L(\Gamma_1)$ и $T(G_k) \to T(\Gamma_1)$. Следовательно, по теореме $\mathcal{S}'$

$$T(\Gamma) \geq \limsup T(g_k) \geq \limsup T(G_k) = T(\Gamma_1),$$

что и требовалось. $\square$

К сожалению, перенести утверждение 2 теоремы $\mathcal{P}$ на сферический случай пока не удалось.

Отметим, что на плоскости Лобачевского неравенство ДНК не имеет места. Действительно, возьмем на плоскости Лобачевского (кривизны -1) треугольник ABC, выберем точки $B_1 \in AB$, $C_1 \in AC$ и рассмотрим ломаную $\Gamma = ABCC_1B_1BCA$. Тогда $\Gamma_1 = ABCA$, и

$$\frac{V(\Gamma)}{V(\Gamma_1)} = 2 - \frac{S(A_1B_1C_1)}{V(\Gamma_1)} < 2 - \frac{S(A_1B_1C_1)}{3\pi}.$$

Если отодвинуть вершину B достаточно далеко по лучу AB_1, то отношение $L(\Gamma)/L(G_1)$ можно сделать сколь угодно близким к 2, что даст $T(\Gamma) < T(\Gamma_1)$.

Мы благодарны В. А. Залгаллеру, обратившему наше внимание на ссылки [3], [4].

Мы также признательны С. В. Дужину за внимание к работе.

Работа поддержана грантами для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-2261.2003.1 (первый автор) и НШ-2251.2003.1 (второй автор), а также грантом РФФИ 02-01-00093 (второй автор).

Список литературы

1. S. Tabachnikov. The tale of a geometric inequality // MASS colloquium lecture, 2001.

2. J. Lagarias, T. Richardson. Convexity and the average curvature of the plane curves // Geom. Dedicata, 67 (1997). 1-38.

3. Александров, А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. ОГИЗ, М.-Л., 1948

4. Залгаллер, В. А. О кривых с ограниченной вариацией кривизны на выпуклых поверхностях. Мат. Сборник 26(68), (1950). 205–214.

5. http:\\ mathworld.wolfram.com\ SphericalTrigonometry.html

6. http:\\ mathworld.wolfram.com\ SphericalExcess.html

7. http:\\ mathworld.wolfram.com\ Triangle.html