АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА, N_P-ОПЕРАТОРЫ И L_P-ОПЕРАТОРЫ

О.И. Рейнов, Ю.И. Рейнов

Некоторые теоремы явно приспособлены для применения их при построении контрпримеров различного рода, причем обычно выделяется какое-то центральное направление в области их приложений. Так, видимо, обстоит дело и с замечательной теоремой Линденштраусса, в которой приводится обобщение конструкций Джеймса банаховых пространств типа знаменитого пространства Джеймса, имеющего коразмерность один в своем втором сопряженном. Речь идет о теореме из работы [6]: каждое сепарабельное банахово пространство X является фактором пространства Y^* с ограниченно полным базисом при факторотображении, сопряженное к которому изометрично и дополняемо вкладывает X^* в пространство Y^{**}. Теорема в [6], как отмечает автор работы, явилась обобщением основной теоремы Джеймса [5], предназначавшейся для построения пространств следующего типа: само пространство, так же как и все его первые $n+1$ сопряженных пространств, сепарабельно, а $(n+2)$-е сопряженное пространство несепарабельно. Линденштраусс выражает уверенность в том, что "пространства, построенные Джеймсом (или, более общо, в теореме выше), будут полезны в качестве контрпримеров также и в другом контексте". Уже в работе [6] первый автор наметил возможную направленность подобных приложений, установив одно "гипотетическое" предложение,

[0]This work was done with partial support by Grant VNP Minobrazovanija 3.1 №4733, by Grant "Scientific schools" №00-15-96-022 and by a grant of the Swedish Royal Academy of Sciences. This research is supported by a grant from Higher Education Commission, Pakistan.

которое очень быстро, при широком участии других математиков, обрело реальность. Именно, в предположении, что найдется банахово пространство без свойства аппроксимации (что годом позже подтвердил Энфло [2]), он доказал существование сепарабельного банахова пространства с базисом Шаудера, сопряженное к которому не обладает свойством аппроксимации. После того, как Энфло построил свой известный пример сепарабельного рефлексивного пространства без свойства аппроксимации, теорема Линденштраусса почти моментально нашла свое применение в работе [3] для доказательства отличия свойства аппроксимации от свойства ограниченной аппроксимации, а также в конструкции не ядерного оператора с ядерным сопряженным (это были контрпримеры к двум гипотезам А. Гротендика). Таким образом, направление в геометрической теории банаховых пространств, связанное с аппроксимационными условиями различного рода, стало одним из главных направлений в приложениях теоремы Линденштраусса (но приложения, естественно, не ограничиваются рамками банаховой теории аппроксимации).

Первый автор настоящей заметки также "принял участие" в применении теоремы и тоже при попытках ответить отрицательно на некоторые вопросы, относящиеся к аппроксимации суммирующих и другого типа операторов в банаховых пространствах конечномерными в той или иной топологии. Первая работа первого автора [13] (см. также ее подробное изложение в [14]) принесла отрицательные ответы на вопросы, подобные вопросам Гротендика, о связи между так называемыми свойствами аппроксимации и ограниченной аппроксимации порядка p при $p > 1$ (для $p = 1$ это соответствующие свойства Гротендика, и с ними разобрались, как отмечалось выше, Фигель и Джонсон). Эти свойства были введены Сафаром [19] в 1970 году, который получил много положительных результатов, но результаты отрицательного характера (контрпримеры) появились лишь в 1981 г. Теорема Линденштраусса стала основанием, на котором выросли примеры пространств со свойствами аппроксимации порядка p, но без соответствующих свойств ограниченной аппроксимации, а также примеры не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными. В дальнейшем, снова на основе теоремы Линденштраусса (и примера Энфло), стало возможным, например, упростить конструкцию Фигеля–Джонсона и получить, в некотором смысле, даже более сильный, чем их, результат — см. [18]. Для нас полезно сказать несколько слов о центральной идее применения в заметке [18] теоремы Линденштраусса. Она очень проста и суть ее сводится к следующему. Если $z = \sum x_k^* \otimes x_k$ — ненулевой тензорный элемент Энфло, порождающий нулевой ядерный оператор, то при помощи теоремы Линденштраусса мы можем поднять ограниченную последовательность (x_k) без существенного увеличения нормы до последовательности в некотором сепарабельном сопряженном пространстве с базисом, получив ненулевой ядерный оператор, который, однако, наследует некоторые "плохие" свойства начального элемента z. Дальше уже, имея перед собой определенную цель, нетрудно получить контрпример типа примера Фигеля–Джонсона. Эта же идея проходит (если немного повозиться с чуть более сложной ситуацией) и при рассмотрении "плохих" p-ядерных тензорных элементов для $p \in (1, 2)$ (для двойки в принципе не может быть подобных контрпримеров в силу "гильбертовости" показателя $p = 2$). Рассмотрение здесь именно случая $p < 2$ возможно благодаря экстремальной конструкции Энфло. Еще в 1955 г. Гротендик установил, что никакой 2/3-ядерный тензорный элемент не может порождать нулевой оператор. В примере Энфло построен нулевой оператор, порождаемый ненулевым тензорным элементом, являющимся p-ядерным элементом для любого $p > 2/3$ (см. [1], [11]). Для $p > 2$ пример Энфло, либо другие контрпримеры к проблеме аппроксимации Гротендика, соединенные с теоремой Линденштраусса ничего похожего (если пользоваться той же идеей) не дают, поскольку в этой ситуации про последовательность (x_k) известно только, что она слабо p'-суммируема (см. [14]), тогда как последовательность функционалов (x_k^*) всего лишь абсолютно p-суммируема, и теорема Линденштраусса не гарантирует возможность поднятия последовательности (x_k) до снова слабо p'-суммируемой последовательности. В этой ситуации нужно некоторое обобщение теоремы Линденштраусса, некая модифицированная конструкция пространства Линденштраусса, для которой уже станет возможным поднимать слабо суммируемые последовательности при фактоотображениях до снова же слабо суммируемых последовательностей так, чтобы "плохие" свойства ненулевых p-ядерных тензорных элементов наследовались "поднятыми" до пространства с базисом p-ядерными тензорными элементами или, что в случае пространства с базисом то же, p-ядерными операторами. На самом деле уже пространство Линденштраусса обладает этим свойством. Одна из основных целей данной работы — привести доказательство соответствующей теоремы и ряд ее применений.

§0. Предварительные сведения

Все рассматриваемые нами пространства X, Y, $Z, \dots$ — банаховы. Элементы этих пространств мы обычно обозначаем соответствующими строчными буквами: $x \in X$, $y \in Y, \dots$, $x^* \in X^*$, $y^{**} \in Y^{**}, \dots$. Функционалы будут также обозначаться через f и т.п., а значения их, например, функционала x^* или f, на элементе x — либо через $\langle x^*, x\rangle$, $\langle f, x^*\rangle$, либо через $x^*(x)$, $f(x)$; эти обозначения равноправны. Если надо указать пространство, в котором рассматривается норма $\|\cdot\|$ элемента $x \in X$, то мы пишем $\|x\|_X$. Обозначения для последовательности элементов некоторого множества: $(f_k), (f_k)_k$ и т.д., для замкнутой линейной оболочки B — $[B]$; значение отображения на некотором элементе — $Ax, A(x)$; для образа отображения используем как обозначение типа φ^*X^*, так и типа $\varphi(E)$.

Обозначения l_p, c_0 стандартны; нормы в этих пространствах мы также обозначаем через $\|\alpha\|_p = \|\alpha\|_{l_p}$ для $\alpha = (\alpha_k) \in l_p$ и $\|\alpha\|_\infty = \|\alpha\|_{c_0}$ во втором случае; r' - сопряженный с r показатель (но в §1 мы используем и другое обозначение при доказательстве леммы 1.2). Договоримся под l_p при $p = \infty$ понимать пространство c_0.

Мы говорим, что банахово пространство X *вполне сепарабельно,* если все его сопряженные пространства $X^*, X^{**}, \dots$ сепарабельны.

Через $\mathrm{L}(X, Y)$ обозначается пространство всех (линейных непрерывных) операторов из X в Y со стандартной нормой (вообще, в данной работе под термином "оператор" всегда будет пониматься линейный непрерывный оператор).

Мы используем стандартные обозначения из теории операторных идеалов — Π_p, QN_p, N_p, I_p — определения этих классов можно найти в [11], [9], [10], [4] (абсолютно p-суммирующие, квази-p-ядерные, p-ядерные, p-интегральные в смысле Гротендика операторы; рассматриваются те значения показателей, для которых имеет смысл соответствующее обозначение). Далее, $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ — квазинормированный идеал таких операторов T, что второй сопряженный к T оператор лежит в N_p . Нетрудно понять, что $T \in \mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $\pi_Y T \in \mathrm{N}_p(X, Y^{**})$, где, как обычно принято, через π_Y обозначается каноническое изометрическое вложение пространства Y в его второе сопряженное Y^{**} (часто мы будем опускать индекс, указывающий на то, какое пространство вкладывается в свое второе сопряженное, — из контекста будет понятно, где действует оператор π. Кроме того, если это не приводит к недоразумению, мы иногда будем считать, что рассматриваемое банахово пространство является подпространством своего второго сопряженного, — это удобно, в частности, для упрощений некоторых формул). Нормы в указанных операторных пространствах будут обозначаться, соответственно, через π_p — для первых двух, ν_p и i_p — для второй пары. Отметим, что если пространство X рефлексивно или имеет сепарабельное сопряженное, то $\Pi_p(X, Y) = \mathrm{QN}_p(X, Y)$ и $\mathrm{I}_p(X, Y^{**}) = \mathrm{N}_p(X, Y^{**})$ для всякого банахова пространства Y и любого $p \in [1, \infty)$ (см. [9], [12]).

Если $0 < p \leqslant \infty$, то через $X^* \widehat{\otimes}_p Y$ обозначается ассоциированное с пространством $N_p(X, Y)$ p-проективное тензорное произведение. Удобно будет использовать обозначение $\widetilde{z}$ для оператора, порождаемого некоторым тензорным элементом $z \in X^* \widehat{\otimes}_p Y$, а также иногда через $A \circ z$ суперпозицию A и z, где A, z — тензоры или операторы. В основном, кружок мы будем использовать тогда, когда один из символов A, Z обозначает тензорный элемент.

Напомним, что если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то $(X^* \widehat{\otimes}_p Y)^* = \Pi_{p'}(Y, X^{**})$ с естественной двойственностью, определяемой при помощи следа суперпозиции операторов [19], [11].

Пусть $p \in (0, \infty]$. Говорят, что банахово пространство Y *обладает свойством* AP_p *аппроксимации порядка* p (коротко — $Y \in \mathrm{AP}_p$), если для любого банахова пространства X каноническое отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ взаимно однозначно (и, следовательно, $X^* \widehat{\otimes}_p Y = \mathrm{N}_p(X, Y)$). При $p \in [1, \infty]$ пространство Y *обладает свойством* BAP_p, если для любого X естественное отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{I}_p(X, Y)$ есть C-изометрическое вложение для некоторого числа $C \geq 1$; в случае, когда константу C можно взять равной 1, говорят, что Y обладает свойством MAP_p.

Если $p = 1$, то мы используем общепринятые в этом случае аббревиатуры AP, BAP, MAP, и говорим просто о свойствах аппроксимации, ограниченной аппроксимации и метрической аппроксимации.

Если X^* или Y обладает свойством аппроксимации и $p \in [1, \infty]$, то $\mathrm{QN}_p(X, Y)^* = \mathrm{I}_{p'}(Y, X^{**})$.

В одном месте работы нам будет удобно использовать еще и такое обозначение: $X^* \in \mathrm{AP}_p^{\mathrm{dual}}$, если для любого Y естественное отображение $X^* \widehat{\otimes}_p Y \to \mathrm{L}(X, Y)$ взаимно однозначно. Понятно, что это некоторое новое аппроксимационное условие, налагаемое на пространство X^*, и можно определить соответствующие аппроксимационные свойства для произвольного не обязательно сопряженного пространства. Мы однако, по крайней мере в этой работе, не пойдем так далеко и не станем исследовать банаховы пространства, обладающие подобными аппроксимационными свойствами, а ограничимся всего лишь введенным обозначением.

Будем говорить, что оператор $T : X \to Y$ *(компактно) факторизуется через пространство* Z, если найдутся два (компактных) оператора $A : X \to Z$ и $B : Z \to Y$, для которых $T = BA$. Если $Z = L_p(\mu)$, то говорят о *p-факторизуемых операторах* (основную информацию об идеале таких операторов можно найти в [11]).

В §1 нам понадобятся некоторые более конкретные понятия и один простой факт, которые мы сейчас и вспомним.

Пусть $0 < r \leqslant \infty$. Последовательность (z_k) элементов нормированного пространства Z называется *слабо r-суммируемой,* если $(\langle z^*, z_k\rangle) \in l_r$ для всех функционалов $z^* \in Z^*$. Мы полагаем $\varepsilon_r(z_k) := \sup\{\|(\langle z^*, z_k\rangle)\|_{l_r} : \|z^*\| \leqslant 1\}$.

Пусть $r \geqslant 1$ и (h_k) обозначает стандартную последовательность ортов пространства l_r (в случае $r = \infty$ мы сейчас рассматриваем пространство c_0). Без труда проверяется, что последовательность (z_k) элементов пространства Z является слабо r-суммируемой тогда и только тогда, когда вполне определен и ограничен линейный оператор $T : l_{r'} \to Z$, заданный соотношениями $Th_k := z_k$; при этом $\|T\| = \varepsilon_r(z_k)$.

Напомним, что базис Шаудера (z_k) банахова пространства Z называется *ограниченно полным,* если для всякой числовой последовательности (a_k) такой, что $\sup_N \|\sum_{k=1}^N a_k z_k\| < \infty$, ряд $\sum_{k=1}^\infty a_k z_k$ сходится, и называется *натягивающим базисом,* если биортогональная с ним система функционалов образует базис сопряженного пространства Z^*. Если базис натягивающий, то биортогональная система функционалов — ограниченно полный базис. Если базис (z_k) ограниченно полный, то пространство Z изоморфно сопряженному пространству, точнее, пространству, сопряженному к линейной оболочке биортогональной системы функционалов этого базиса; в случае, когда ограниченно полный базис является монотонным, Z даже изометрично указанному сопряженному пространству (подробности и другие свойства базисов можно найти в монографии [7, раздел 1.b]).

Следующий факт, конечно, хорошо известен, но поскольку мы не можем привести конкретную ссылку на соответствующую литературу, то приведем его доказательство. Под единичным элементом нормированного пространства будем понимать любой элемент единичной нормы.

Лемма 0.1. *Всякий единичный элемент пространства X разлагается в абсолютно сходящийся ряд по любой заранее фиксированной ε-сети единичной сферы $S(X)$ пространства X $(0 < \varepsilon < 1)$. При этом, разумеется, сама сеть не обязана лежать на этой сфере.*

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < 1$, V — ε-сеть для сферы $S(X)$. Возьмем произвольный элемент $x \in S(X)$ и выберем для него такой $x_1 \in V$, что $\alpha_2 := \|x - x_1\| \leqslant \varepsilon$.

Далее, найдем $x_2 \in V$, для которого $\left\| \frac{x - x_1}{\|x - x_1\|} - x_2 \right\| \leqslant \varepsilon$ и положим $\alpha_3 := \|x - x_1 - \alpha_2\, x_2\|$. Теперь выберем такой $x_3 \in V$, что

$$\left\| \frac{x - x_1 - \alpha_2\, x_2}{\|x - x_1 - \alpha_2\, x_2\|} - x_3 \right\| \leqslant \varepsilon$$

и положим $\alpha_4 := \|x - x_1 - \alpha_2\, x_2 - \alpha_3\, x_3\|$ и т.д.. Мы получим разложение элемента x в сходящийся ряд:

$$x = x_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3 + \ldots, \qquad x_k \in V,\ |\alpha_k| \leqslant \varepsilon^{k-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \square$$

В частности, если $\{x_n\}$ — счетное всюду плотное на единичной сфере пространства X множество, последовательность единичных элементов $\{e_n\}$ из нормированного пространства E порождает все E и линейное отображение, переводящее e_n в x_n, непрерывно, то его образ есть все пространство X. Действительно, можно рассмотреть дополнительно естественное отображение $l_1 \to E$, переводящее базисные векторы пространства l_1 в элементы e_n (оно, конечно, непрерывно) и взять суперпозицию $l_1 \to E \to X$, которая будет действовать "на" по вышесказанному, и тем более, образ E накроет все пространство X.

§1. Обобщение теоремы Й. Линденштраусса

Под *фактоотображением*из пространства Y на пространство X мы понимаем такое отображение $\varphi : Y \to X$, что естественное отображение из $Y/\operatorname{Ker}\varphi$ на X есть изометрия. Через $\pi : Y \to Y^{**}$ ниже обозначается каноническое вложение пространства Y в его второе сопряженное Y^{**}.

Теорема 1.1. *Для всякого сепарабельного банахова пространства X существует вполне сепарабельное банахово пространство Y, обладающее следующими свойствами.*

1) *Y имеет монотонный натягивающий базис и, следовательно, сопряженное пространство Y^* сепарабельно и имеет монотонный ограниченно полный базис;*

2) *существует фактоотображение φ из Y^* на X;*

3) $Y^{**} = \pi Y \oplus \varphi^* X^*$ *(и, следовательно, Y^{**} изоморфно пространству $Y \oplus X^*$).*

4) *Для всякого $\varepsilon > 0$, любого $r \in [1, +\infty)$ и для каждой слабо r-суммируемой последовательности (z_k) в X существует такая слабо r-суммируемая последовательность (y_k^*) в Y^*, что $\varphi(y_n^*) = z_n, n = 1, 2, \ldots,$ и $\varepsilon_r(y_n^*) \leqslant \varepsilon_r(z_n) + \varepsilon$.*

На самом деле пространство Y в этой теореме — не что иное, как пространство Линденштраусса из [6]. Поэтому мы напомним его определение.

Пусть $S = \{x_i\}$ — счетное всюду плотное подмножество единичной сферы пространства X. Рассмотрим пространство всех вещественных последовательностей $\alpha = (\alpha_j)$, для которых

$$\|\alpha\| := \sup_{k \in} \sup_{0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k} \left(\sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i x_i \rangle \right\|^2 \right)^{1/2} < \infty. \tag{1.1}$$

Это пространство сопряжено к некоторому банахову пространству, которое мы и обозначим через Y. Пусть (e_k) — последовательность ортов в пространстве Y^*, рассматриваемом как пространство последовательностей с нормой (1.1). Пространство Y отождествимо с замкнутой линейной оболочкой в Y^{**} биортогональной к (e_k) системы функционалов (f_k), причем (e_k) образует монотонный ограниченно полный базис в Y^*. В [6] также показано, что естественное отображение $\varphi : Y^* \to X$, переводящее орты (e_k) в соответствующие единичные элементы (x_k), есть факторотображение и, кроме того, что Y обладает свойством 3). Мы установим свойство 4) теоремы не прямым путем, а введя некоторое дополнительное пространство E и еще одно факторотображение, на этот раз из E в X.

Рассмотрим пространство всех вещественных последовательностей $\alpha = (\alpha_j)$, для которых

$$\|\alpha\| := \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| = 1}} \left\{ \sup_{k \in} \sup_{0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k} \left(\sum_{j=1}^{k} \left| \langle f, \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i x_i \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \right\} < \infty. \tag{1.2}$$

Отметим сразу, что из (1.2) моментально вытекает тот факт, что для $\alpha \in E_1$ все нормы вида $\| \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i \|$ не превосходят $\|\alpha\|$.

Далее, для каждого $f \in X^*$ ряд $\sum_i \langle f, \alpha_i x_i \rangle$ сходится. Действительно, пусть подобный ряд расходится. Тогда он не сходится в себе, и для некоторого $\varepsilon > 0$ мы можем найти цепочку $0 < l_1 < m_1 < l_2 < m_2 < \dots < l_k < m_k < \dots$ натуральных чисел, для которой любой отрезок ряда вида $\sum_{i=l_k+1}^{m_k} \langle f, \alpha_i x_i \rangle$ будет по модулю больше ε. Это противоречит условию (1.2).

Таким образом, ряд $\sum_i \alpha_i x_i$ слабо сходится в себе и, следовательно, *-слабо сходится в пространстве X^{**} к некоторому элементу, который мы обозначим через $\varphi_1(\alpha)$. Формула $\varphi_1(\alpha) := w^*\text{-}\lim_N \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$ определяет естественное отображение $\varphi_1 : E_1 \to X^{**}$, причем понятно, что $\|\varphi_1\| \leqslant 1$. Определим, наконец, пространство E как прообраз подпространства $\pi_X X \subset X^{**}$ при отображении φ_1. Отображение φ_1 индуцирует соответствующее отображение из E в X, которое мы снова будем обозначать через φ_1, и, по лемме 0.1, это отображение есть факторотображение из E на X (так как $\varphi(e_k) = x_k$ и множество S плотно на сфере пространства X). Обозначим еще через J тождественное отображение из Y^* в E, так что $\varphi = \varphi_1 J$. Заметим, что, поскольку $(f_k) \subset E^*$ и $Y^{**} = Y \oplus \varphi^*(X^*) = Y \oplus J^* \varphi_1^*(X)$, то, в частности, $J^*(E^*)$ плотно по норме в пространстве Y^{**}.

Лемма 1.2. *Для всякого $\varepsilon > 0$, любого $r \in [1, +\infty)$ и для каждой слабо r-суммируемой последовательности (z_k) в X существует такая слабо r-суммируемая последовательность (y_k^*) в Y^*, что $\varphi(y_n^*) = z_n, n = 1, 2, \dots,$ и $\varepsilon_r(y_n^*) \leqslant \varepsilon_r(z_n) + \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $r \in [1, +\infty)$ и (z_k) — произвольная слабо r-суммируемая последовательность в X. Мы будем считать, что $\|z_k\| \leqslant 1$ для каждого k. Пусть, далее, $(\varepsilon_k) \in l_1, \delta := \sum_1^\infty \varepsilon_k$ и $w_k := x_{m_k}\, (m_1 < m_2 < \dots)$ — такая последовательность элементов множества S, что $\left\| w_k - \dfrac{z_k}{\|z_k\|} \right\|_X < \varepsilon_k$ для всякого k. Наконец, пусть $(\overline{y}_k^*)$ — последовательность элементов Y^*, для которой $\|e_{m_k} - \overline{y}_k^*\|_{Y^*} < \varepsilon_k$ и $\varphi(\overline{y}_k^*) = \dfrac{z_k}{\|z_k\|}$. Мы утверждаем, что элементы $y_k^* := \|z_k\|\, \overline{y}_k^*$ образуют нужную нам слабо r-суммируемую последовательность в Y^*. Для этого достаточно, в силу сильной плотности $J^* E^*$ в Y^{**}, показать, что $(J y_k^*)$ слабо r-суммируема в E.

Для доказательства последнего рассмотрим линейный оператор (формально заданный на финитных последовательностях) $T : l_s \to E$, где $1/s + 1/r = 1$, определяемый соотношениями $Th_k = Jy_k^*, k \geqslant 1$ (здесь h_k — k-й орт в l_s). Имеем для $\alpha \in l_s$ (при $s = \infty$ нужна соответствующая модификация):

$$\|T\alpha\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J y_k^*\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\|z_k\| J\overline{y}_k^* - \|z_k\| e_{m_k}\right)\right\|_E + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|z_k\| e_{m_k}\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^s\right)^{1/s} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|J\overline{y}_k^* - e_{m_k}\|_E^r\right)^{1/r} + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|z_k\| e_{m_k}\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \|\alpha\|_s \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k + \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|z_k\| e_{m_k}\right\|_E n.$$

Оценим второе слагаемое в последней сумме. Для $k \in \mathbb{N}, 0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ и $f \in X^*, \|f\| \leqslant 1:$

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\langle \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \|z_i\| w_i, f\rangle\right|^2 = \sum_{j=1}^{k} \left|\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle \|z_i\| w_i, f\rangle\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\left|\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle\right| + \left|\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle \|z_i\| \left(w_i - \frac{z_i}{\|z_i\|}\right), f\rangle\right|\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\left|\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle\right| + \|\alpha\|_s \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \varepsilon_i\right)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left|\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle\right|^2 +$$

$$+ 2\|\alpha\|_s \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \left|\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle\right| \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k + \|\alpha\|_s^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left|\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle\right|^2 + 2\|\alpha\|_s^2 \varepsilon_r(z_n)\,\delta + \|\alpha\|_s^2 \delta^2.$$

При $s \geqslant 2$ (и, следовательно, $r \leqslant 2$) имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} \left|\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\alpha_i|^s\right)^{2/s} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f\rangle|^r\right)^{2/r} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\alpha_i|^s\right)^{2/s} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f\rangle|^r\right)^{2/r} \leqslant \|\alpha\|_s^2 \varepsilon_r(z_n)^2.$$

При $s \in [1,2]$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\alpha_i|^s \right)^{2/s} \max_{1\leqslant j\leqslant k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f\rangle|^r \right)^{2/r} \leqslant \|\alpha\|_s^2\, \varepsilon_r(z_n)^2.$$

При $s = \infty$:

$$\sum_{j=1}^{k} \left| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} \alpha_i \langle z_i, f\rangle \right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(\max_i |\alpha_i| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f\rangle| \right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \max_{n\geqslant 1} |\alpha_n|^2 \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} |\langle z_i, f\rangle| \right)^2 \leqslant \|\alpha\|_{c_0}^2\, \varepsilon_1\left((z_n)\right)^2 .$$

Следовательно, $\|T\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_s\, \delta + \left(\|\alpha\|_s^2 \varepsilon_r(z_n)^2 + 2\,\|\alpha\|_s^2 \varepsilon_r(z_n)\,\delta + \|\alpha\|_s^2 \delta^2 \right)^{1/2}$, откуда $\|T\alpha\| \leqslant \|\alpha\|_s\,(\varepsilon_r(z_n) + o(1))$ при $\delta \to 0$, т.е. $\|T\| \leqslant \varepsilon_r(z_n) + o(1)$ при $\delta \to 0$. Так как (y_n^*) есть образ последовательности ортов пространства l_s при отображении T, то из последнего вытекает, что при достаточно малом $\delta > 0$ будет выполняться неравенство $\varepsilon_r(y_n^*) \leqslant \varepsilon_r(z_n) + \varepsilon$; в частности, последовательность (y_n^*) слабо r-суммируема и по построению ее образ при отображении φ есть последовательность (z_n). $\square$

Замечание 1.3. Представляется интересным следующая переформулировка теоремы 1.1: для любого сепарабельного банахова пространства X существует сепарабельное банахово пространство Y, обладающее свойствами 1)–3) из теоремы 1.1 и такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ и любого $p \in [1, +\infty]$ каждый оператор $T : l_p \to X$ может быть поднят (относительно факторотображения φ) до непрерывного линейного оператора $\widetilde{T} : l_p \to Y^*$ так, что $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\| + \varepsilon$.

Следствие 1.4. *Для любого сепарабельного пространства X существует такое вполне сепарабельное банахово пространство Z, что*

(i) Z^{**} сепарабельно и имеет базис;

(ii) существует линейный гомоморфизм ψ из Z^{**} на X с ядром πZ и такой, что подпространство $\psi^* X^*$ дополняемо в Z^{***};

(iii) для всякого $\varepsilon > 0$, любого $r \in [1, +\infty)$ и для каждой слабо r-суммируемой последовательности (x_k) в X существует такая слабо r-суммируемая последовательность (z_k^{**}) в Z^{**}, что $\psi(z_k^{**}) = x_k, k = 1, 2, \ldots,$ и $\varepsilon_r(z_k^{**}) \leqslant (2+\varepsilon)\,\varepsilon_r(x_k)$.

Доказательство. Пусть Y и $\varphi : Y^* \to X$ — из теоремы 1.1, $Z := \operatorname{Ker} \varphi, I : Z \to Y^*$ — тождественное вложение. Положим $T := I^* \pi_Y : Y \to Y^{**} \to Z^*$. Тогда T есть изоморфизм из Y на Z^* и, так как

$$\langle T^* \pi_Z z, y\rangle = \langle \pi_Z z, Ty\rangle = \langle Ty, z\rangle = \langle I^* \pi_Y y, z\rangle = \langle \pi_Y y, Iz\rangle = \langle Iz, y\rangle,$$

то $T^* \pi_Z = I$. Поэтому T^* — изоморфизм из Z^{**} на Y^*, индуцирующий изоморфизм $T' : Z^{**}/\pi_Z Z \to Y^*/IZ$. Если $\psi := \varphi T^*$, то ψ — гомоморфизм и подпространство $\psi^* X^* = T^{**} \varphi^* X^*$ дополняемо в $Z^{***} = T^{**} Y^{**}$.

Пусть (x_n) — слабо r-суммируемая последовательность в X. По выбору пары Y и φ можно найти такую слабо r-суммируемую последовательность (y_n^*), что $\varphi(y_n^*) = x_n$ для каждого n. Так как $(T^*)^{-1}$ есть изоморфизм, то, полагая $z_n^{**} := (T^*)^{-1} y_n$, получаем слабо r-суммируемую последовательность, чей образ при отображении ψ есть последовательность (x_n). Остается заметить, что $\|(T^*)^{-1}\| \leqslant 2$. $\square$

Следствие 1.5. *Для любого сепарабельного пространства X существует такие сепарабельное банахово пространство Z и гомоморфизм ψ из Z^{**} на X с ядром πZ, что подпространство $\psi^* X^*$ дополняемо в Z^{***} и для любого $p \in [1, \infty)$ имеют место утверждения:*

a) для любых банахова пространства E и отображения $T \in \mathrm{L}(X, E)$ оператор $T\psi$ является абсолютно p-суммирующим тогда и только тогда, когда абсолютно p-суммирующим является оператор T; при этом $\pi_p(T\psi) \leqslant \pi_p(T) \leqslant 2\pi_p(T\Psi)$;

b) для любого банахова пространства E

$$\Pi_p(Z^{**}, E) = \Pi_p(Z, E) \oplus \Pi_p^0(Z^{**}, E) \simeq \Pi_p(Z, E) \oplus \Pi_p(X, E),$$

где $\Pi_p^0(Z^{**}, E)$ — *подпространство тех операторов из* $\Pi_p(Z^{**}, E)$, *которые аннулируются на* πZ.

Это вытекает непосредственно из следствия 1.4. $\square$

Утверждения, подобные следствиям 1.4–1.5, имеют многочисленные применения при изучении различных аппроксимационных свойств банаховых пространств (частично мы рассмотрим их ниже). Сейчас нам хотелось бы привести примеры применения другого рода, непосредственно не связанных с аппроксимационными условиями.

Следствие 1.6. *Для любых* $p \geqslant 1$, *рефлексивного пространства* E *и сепарабельного пространства* X *существует такое сепарабельное пространство* Z, *что в* Z^{**} *есть базис и*

$$\Pi_p(Z, E)^{**} \simeq \Pi_p(Z, E) \oplus \Pi_p(X, E).$$

Доказательство. Это получается из следствия 1.5,b) и равенств

$$\Pi_p(Z^{**}, E) = (\mathrm{N}_{p'}(E, Z^{**}))^* = \mathrm{QN}_p(Z, E)^{**} = \Pi_p(Z, E)^{**}.$$

При $p = 1$ второе равенство вытекает из теоремы 1.1 [8] (см. также ниже лемму 2.7), а при остальных p — например, из результатов [9] или [12]; последнее равенство, для любого $p \geqslant 1$ есть следствие сепарабельности пространства Z^*, — см., например, [12]. $\square$

Наше следующее утверждение дополняет следствие 1 из [17] и вместе с ним полностью завершает рассмотрение соответствующей ситуации для всех показателей $p > 0$. Мы включим в часть b) этого утверждения случай $p \leqslant 1$, рассмотренный в [17], поскольку формулировка получаемого факта в этом случае, в отличие от a), в точности такая же, как и при $p > 1$. Относительно a) при $p \leqslant 1$ см. [17].

Следствие 1.7. *Для всякого сепарабельного пространства* X *существует такое сепарабельное пространство* Z, *что* Z^{**} *имеет базис,* $Z^{**}/\pi Z$ *изоморфно* X, *подпространство* $(\pi Z)^{\perp}$ *дополняемо в* Z^{**} *и выполняются следующие условия:*

a) для любых показателя $p \geqslant 1$ и банахова пространства E тензорное произведение $E^*\widehat{\otimes}_p X$ изоморфно произведению $E^*\widehat{\otimes}_p(Z^{**}/\pi Z)$, которое, в свою очередь, канонически изометрично факторпространству $\mathrm{N}_p(E,Z^{**})/\,\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$;

b) для любых показателя $p>0$ и банахова пространства E пространство $\mathrm{N}_p(E,X)$ изоморфно пространству $\mathrm{N}_p(E,Z^{**}/\pi Z)$, которое канонически изоморфно (изометрично при $p\geqslant 1$) факторпространству $\mathrm{N}_p(E,Z^{**})/\,\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,\pi Z)$.

Доказательство. Пусть $p\in(1,\infty]$ и Z — банахово пространство из следствия 1.4. Обозначим для простоты фактор–пространство $Z^{**}/\pi Z$ через F. Факторотображение $\psi: Z^{**}\to F=Z^{**}/\pi Z$ естественным образом индуцирует отображение $\Psi:\mathrm{N}_p(E,Z^{**})\to E^*\widehat{\otimes}_pF$, $\Psi(T):=\psi\circ T$. В силу свойства (iii) из следствия 1.4 и по определению тензорной нормы в $E^*\widehat{\otimes}_pF$, отображение Ψ является гомоморфизмом из $\mathrm{N}_p(E,Z^{**})$ на $E^*\widehat{\otimes}_pF$. Пусть $U\in\operatorname{Ker}\Psi$; это означает, что для любого $A\in\Pi_{p'}(F,E^{**})$ след $\operatorname{trace} A\circ\psi\circ U$ равен нулю, или что для любого $B\in\Pi_{p'}(Z^{**},E^{**})$, $B|_{\pi Z}\equiv 0$, след $\operatorname{trace} B\circ U$ равен нулю. Отсюда вытекает, что $U(E)\subset\pi Z$ (в противном случае найдется одномерный оператор $R\in\Pi_{p'}(Z^{**},E^{**})$, тождественно равный нулю на πZ, для которого $\operatorname{trace} R\circ U\neq 0$). Итак, $U\in\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,Z)$. Нам надо уточнить это включение: установить, что $U\in\mathrm{N}_p(E,\pi Z)\subset\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E,\pi Z)$.

Предположим, что $U\notin\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$. Тогда найдется оператор $B\in\Pi_{p'}(Z^{**},E^{**})$ такой, что $\operatorname{trace} B\circ U=1$, но $\operatorname{trace} B\circ T=0$ для любого $T\in\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$. Так как $\pi Z\in\mathrm{AP}$, то из последнего вытекает тождество $B|_{\pi Z}\equiv 0$, что противоречит выбору U. Поэтому $U\in\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$. С другой стороны, очевидно, что для любых $V\in\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$ и $B\in\Pi_{p'}(Z^{**},E^{**})$, где $B|_{\pi Z}\equiv 0$, имеем: $\operatorname{trace} B\circ V=0$. Поэтому $\operatorname{Ker}\Psi=\mathrm{N}_p(E,\pi Z)$.

Рассмотрим теперь факторотображение Ψ_0 :

$$\mathrm{N}_p(E,Z^{**})\xrightarrow{\Psi}E^*\widehat{\otimes}_pF\xrightarrow{j}\mathrm{N}_p(E,F),$$

где j — каноническое факторотображение. Его ядро $\operatorname{Ker}\Psi_0$ состоит из всех тех операторов $U\in\mathrm{N}_p(E,Z^{**})$, которые превращаются в тождественный нуль после действия факторизации $\psi : Z^{**} \to F$, т.е. из тех U, для которых $U(E) \subset \mathrm{Ker}\ \psi$. Это и означает, что $\mathrm{Ker}\ \Psi_0 = \mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E, \pi Z)$. $\square$

Сейчас хорошо известно, что идеалы N_p при $p > 2/3, p \neq 2$, не являются регулярными, т.е. $\mathrm{N}_p \neq \mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ (см. [3], [14] для $p \geqslant 1$ и [15, следствие 3.1] для $p \in (2/3, 1)$). В заключение этого параграфа мы отметим следующий намного более сильный результат.

Следствие 1.8. *Если $p \in (2/3, \infty]$, $p \neq 2$, то идеал конечномерных операторов не плотен в идеале $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$; в частности, идеал $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}$ не минимален* (определение см. в [11]).

Доказательство. Как известно (и этим мы будем пользоваться в следующем параграфе), существуют сепарабельные пространства E и X, для которых $E^* \widehat{\otimes}_p X \neq \mathrm{N}_p(E, X)$ [3], [14], [15]. Для $p \geqslant 1$, по следствию 1.7, существует такое сепарабельное пространство Z с базисом, что $\mathrm{N}_p(E, Z) \neq \mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E, Z)$, причем тождественное отображение $\mathrm{N}_p(E, Z) \to \mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(E, Z)$ есть изометрическое вложение (пространство Z^{**} обладает свойством метрической аппроксимации). Для $p < 1$ надо воспользоваться теоремой 3 из [17]: в этом случае существуют оператор $T \in \mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z) \backslash \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, где Z^{**} имеет базис. Если этот оператор приближается в пространстве $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z)$ конечномерными отображениями, то тем более он приближается ими и в пространстве $N_1^{\mathrm{reg}}(Z^{**}, Z) \subset N_1(Z^{**}, Z^{**})$. Но $N_1(Z^{**}, Z)$ вкладывается в $N_1(Z^{**}, Z***)$ при каноническом вложении изометрично. Поэтому оператор T должен приближаться конечномерными и в пространстве $N_1(Z^{**}, Z)$, что противоречит его выбору. $\square$

§2. Операторы с p-ядерными вторыми сопряженными

Теорема 2.1. *Пусть $s \geqslant 1$. Предположим, что*

a) каноническое отображение $X^* \otimes_s Y^{****} \to \mathrm{L}(X, Y^{****})$ взаимно однозначно, либо

b) $Y^{***} \in \mathrm{AP}_1$.

Тогда

$$\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(X,Y)\subset \mathrm{N}_s(X,Y).$$

В частности, это верно, если $X^*\in \mathrm{AP}_s^{\mathrm{dual}}$ *или* $Y^{****}\in \mathrm{AP}_s$.

Доказательство. В этом доказательстве мы обозначим через N^s дуальный к N_s операторный идеал (см. [11]), а через ${}_s\widehat{\otimes}$ — "дуальное" к $\widehat{\otimes}_s$ тензорное произведение (таким образом, формально $Z^*{}_s\widehat{\otimes}W^*=W^*\widehat{\otimes}_sZ^*$ для любых банаховых пространств Z,W). Предположим, что существует такой оператор $T\in \mathrm{L}(X,Y)$, что $T\notin \mathrm{N}_s(X,Y)$, но $\pi_YT\in \mathrm{N}_s(X,Y^{**})$. По условию $\mathrm{N}_s(X,Y^{**})=X^*\widehat{\otimes}_sY^{**}$; следовательно, существует такой оператор $U\in \Pi_{s'}(Y^{**},X^{**})$, что $U|_Y\equiv 0$ (и, значит, $(\pi_Y^*U^*)|_{X^*}=0$) и $\mathrm{trace}\,U\circ t=1$, где $t=\pi_YT$. Рассмотрим оператор

$$V:=(U^*|_{X^*})\circ T^*\circ \pi_Y^*:\ Y^{***}\xrightarrow{\pi_Y^*}Y^*\xrightarrow{T^*}X^*\xrightarrow{U^*}Y^{***}.$$

В случае a)

$$T^*\pi_Y^*\in Y^{****}{}_s\widehat{\otimes}X^*\,(=X^*\widehat{\otimes}_sY^{****})\;=\mathrm{N}^s(Y^{***},X^*),\quad U^*\in (Y^{****}{}_s\widehat{\otimes}X^*)^*.$$

Поэтому след $\mathrm{trace}\,U^*\circ(T^*\pi_Y^*)$ не зависит от выбора представления $T^*\pi_Y^*$ как элемента пространства $\mathrm{N}^s(Y^{****},X^*)$. Как и при доказательстве теоремы 2,1) из [17], нетрудно видеть, что если $t=\sum x_n^*\otimes y_n^{**}$, то

$$T^*\pi_Y^*=\sum \pi_Y^{**}(y_n^{**})\otimes x_n^*=\sum y_n^{**}\otimes x_n^*.$$

Поэтому, с одной стороны, $\mathrm{trace}\ U^*\circ(T^*\pi_y^*)=\sum\langle \pi_Y^{**}y_n^{**},U^*x_n^*\rangle=0$, а с другой стороны, $\mathrm{trace}\ U^*\circ(T^*\pi_y^*)=\sum\langle y_n^{**},U^*x_n^*\rangle=1$. Противоречие.

В случае b)

$$U^*\circ(T^*\pi_Y^*)\in \mathrm{N}_1(Y^{***},Y^{***})=Y^{****}\widehat{\otimes}_1Y^{***}$$

и след $\mathrm{trace}\ U^*\circ(T^*\pi_Y^*)$ не зависит от ядерного представления этого оператора, что ведет к противоречию по аналогии с предыдущим случаем. $\square$

Замечание 2.2. В отличие от теоремы 2 из [17], в теореме 2.1 не совсем понятно, какое аппроксимационное условие достаточно наложить на Y^{***}, чтобы формулировка теоремы стала такой же приятной как и формулировка теоремы 2 в [17]. Видимо условие $Y^{***}\in \mathrm{AP}_1$ намного сильнее, чем нужно.

Покажем теперь, что аппроксимационные предположения в утверждениях теоремы 2.1 существенны.

Теорема 2.3. 1) *Для каждого $q > 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство F, вполне сепарабельное пространство Z, операторы $T \in \mathrm{L}(F, Z)$ и $U \in \mathrm{QN}_q(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $U|Z = 0$, $\operatorname{trace} UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(F, Z)$ и $T \notin \mathrm{N}_p(F, Z)$, если $p < 2$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют сепарабельное рефлексивное пространство F, вполне сепарабельное пространство Z, $T \in \mathrm{L}(F, Z)$ и $U \in \mathrm{QN}_1(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $U|Z = 0$, $\operatorname{trace} UT^{**} = 1$, $T \in \mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(F, Z)$ и $T \notin \mathrm{N}_\infty(F, Z)$.*

Доказательство. 1). По лемме 1.1,1) из [14] существуют два сепарабельных рефлексивных банаховых пространства E, F, оператор $U_0 \in \mathrm{QN}_q(E, F)$ и элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}_1 E$ такие, что $\operatorname{trace} z \circ U_0 = 1$ и $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$ (т.е. $\widetilde{z} = 0$). Пусть Z и $\psi : Z^{**} \to E$ — из следствия 1.4, примененного к пространству $X = E$. Положим $U = U_0 \psi$, и пусть $T \in \mathrm{N}_1(F, Z^{**})$ — такой оператор, что $\psi \circ T = z$ (так как $Z^{**} \in \mathrm{AP}$, то $\mathrm{N}_1(F, Z^{**}) = F^* \widehat{\otimes}_1 Z^{**}$). Ясно, что trace $U \circ T = 1$ (при доказательстве утверждения 2) мы распишем это место подробнее). Так как Ker $\psi = \pi Z$, то $T(F) \subset$ Ker $\psi = \pi Z$, т.е. $T \in \mathrm{L}\,(F, Z)$. Наконец, если $T \in \mathrm{N}_p(F, Z)$ при $p < 2$, то для произвольного p-ядерного представления T в виде $\sum f_n^* \otimes z_n$ имеем:

$$1 = \operatorname{trace}\, U \circ T = \sum \langle f_n^*, U z_n \rangle = 0.$$

Поэтому $T \notin \mathrm{N}_p(F, Z)$.

2). Воспользовавшись пунктом 2) леммы 1.1 из [14], найдем такие сепарабельные рефлексивные банаховы пространства E, F, оператор $U_0 \in \mathrm{QN}_1(E, F)$ и элемент $z \in F^* \widehat{\otimes}_s E$, что $\operatorname{trace} z \circ U_0 = 1$ и $\operatorname{trace} z \circ \varphi = 0$ для каждого $\varphi \in E^* \otimes F$. Пусть $z = \sum f_n^* \otimes e_n$ — представление z в пространстве $F^* \widehat{\otimes}_s E$. Как и выше, рассмотрим пространство Z и гомоморфизм $\psi : Z^{**} \to E$ из следствия 1.4 (для $X = E$) и положим $U = U_0 \psi$. В силу утверждения (iii) следствия 1.4, существует слабо s'-суммируемая последовательность (z_n^{**}) в Z, для которой $\psi(z_n^{**}) = e_n$. Определим оператор $T \in \mathrm{N}_s(F, Z^{**})$ следующим образом: $T := \sum f_n^* \otimes z_n^{**}$. Очевидно, $U|_Z = 0$ и $T(F) \subset \pi Z$. Кроме того,

$$\operatorname{trace} U \circ T = \sum \langle f_n^*, U z_n^{**} \rangle = \sum \langle f_n^*, U_0 e_n \rangle = \operatorname{trace} z \circ U_0 = 1.$$

Тот факт, что $T \notin \mathrm{N}_\infty(F, Z)$, проверяется так же, как и в случае 1) (используем то, что $U \in \mathrm{QN}_1$). $\square$

Применяя теорему 1.1 к пространству F (ср. с завершением доказательства теоремы 5 в [17]), получаем, в частности:

Следствие 2.4. 1) *Существуют два вполне сепарабельных банаховых пространства W и Z такие, что W и Z^{**} имеют базисы, и такие, что $\mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}}(W, Z) \not\subset \mathrm{N}_p(W, Z)$ для $p < 2$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют два вполне сепарабельных пространства W и Z такие, что W и Z^{**} имеют базисы, и такие, что $\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}}(W, Z) \not\subset \mathrm{N}_\infty(W, Z)$.*

Следствие 2.5. *Существует такое вполне сепарабельное сепарабельное банахово пространство V с базисом что для каждого $p \geqslant 1, p \neq 2$, найдется оператор $T \in \mathrm{L}(V, V)$, $T \notin \mathrm{N}_p(V, V)$, для которого T^{**} является p-ядерным;*

Следствие 2.6. *Существует такое вполне сепарабельное сепарабельное банахово пространство V с базисом, что найдется оператор $T \in \mathrm{L}(V, V)$, который не факторизуется ни через какое пространство $C(K)$, но второй сопряженный к которому T^{**} факторизуется компактно через пространство c_0.*

Пространство V в последних двух следствиях строится из пространств W и Z, указанных в следствии 2.4, стандартным образом — сложением счетного их числа (для $s_n \searrow 2$ и $p_n \nearrow 2$) по типу l_2. Нам надо лишь проверить (для доказательства следствия 2.6), что если T факторизуется через некоторое пространство $C(K)$, то он является ∞-ядерным. А это вытекает из теоремы 1.2 [8]. В этой теореме рассматриваются ∞-интегральные по Гротендику операторы; мы приводим ее формулировку для случая операторов, ∞-интегральных по Пичу, т.е. $C(K)$-факторизуемых операторов в смысле приведенного выше определения (доказательство почти дословно повторяет рассуждения из [8]):

Лемма 2.7. *Пусть X^* обладает свойством Радона–Никодима* (см., например, [8], [12], [11, п. 24.2.6, 24.2.9]), $Y \not\supset c_0$ *и* $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. *Если T факторизуется через $C(K)$, то $T \in \mathrm{N}_\infty(X, Y)$.* $\square$

Замечание 2.8. Три последних следствия значительно усиливает основную теорему из [18], а также, например, теорему 3.2 из [14]: в последней соответствующие пространства не обладали свойством BAP (одно из них даже не обладало свойством аппроксимации). С другой стороны, в теореме 3.2 [14] операторы из $\mathrm{N}_1^{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{N}_p$ и из $\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{N}_\infty$ приближались конечномерными операторами по соответствующим reg-нормам. В последних наших следствиях это в принципе невозможно, в силу того, что $Z^{**} \in$ MAP и тождественное вложение $W^* \widehat{\otimes}_r Z \to W^* \widehat{\otimes}_r Z^{**}$ изометрично. В следствиях 2.4–2.6 операторы из $\mathrm{N}_p^{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{N}_p$ и $\mathrm{N}_s^{\mathrm{reg}} \setminus \mathrm{N}_s$ лежат весьма "далеко" от множества конечномерных операторов из W в Z (соответственно, из V в V). Следствие 2.6 связано с вопросом о возможности "строгой" l_p-факторизации операторов, вторые сопряженные к которым такую факторизацию допускают. *Автору неизвестна* литература, в которой можно было бы найти ответ на этот вопрос для случая показателей p, отличных от единицы, двойки и бесконечности. Последний случай (наиболее сильный контрпример) — это как раз следствие 2.6 (более слабый вариант подобного утверждения можно найти, например, в [14]). По поводу случая $p = 1$ см., в частности, работу [16].

Замечание 2.9. Следствие 2.4 показывает, что избавиться от аппроксимационных условий типа $Y^{***} \in \mathrm{AP}_1$ и $X^* \in \mathrm{AP}_s^{\mathrm{dual}}$ в теореме 2.1 нельзя. Более того, заметим, что в лемме 1.1,2) из [14], которую мы использовали при доказательстве второй части предыдущей теоремы, пространство E есть фактор–пространство пространства l_q, где $q > s > 2$, и, следовательно, E^* имеет котип 2 (все это видно из доказательства леммы). Поэтому E^* обладает свойствами AP_r для всех $r \geqslant 2$ (см. [15], введение). Следовательно, в теореме 2.3 и в следствии 2.4 $Z^{***} \in \mathrm{AP_r}$ для каждого $r \geqslant 2$ (так как $Z^{***} \simeq Z^* \oplus E^*$). Это показывает, что *заменить условие "$Y^{***} \in \mathrm{AP}_1$" в теореме 2.1 на более слабое "$Y^{***} \in \mathrm{AP}_s$" нельзя.*

Отметим еще ряд применений теоремы 2.3. Хорошо известно, что произведение двух абсолютно 2-суммирующих операторов является ядерным оператором. Естественно было бы ожидать, что и $\Pi_p \circ \Pi_{p'} \subset \mathrm{N}_1$, где $1/p + 1p' = 1$. Последнее включение, вообще говоря, не верно (что, видимо, хорошо известно, но авторы не могут привести ссылку на соответствующую литературу, — наверное, надо отнести этот результат к математическому фольклору). Сейчас мы приведем более сильный (контр)пример к этому включению.

Предложение 2.10. 1) *Для любого $q \in (2, \infty)$ Существуют два пространства F и Z и операторы $T \in \mathrm{QN}_0(F, Z), U \in \mathrm{QN}_q(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $TU \notin \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, но $\pi TU \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z^{**})$.*

2) *Для каждого $s > 2$ существуют два пространства F и Z и операторы $T \in \mathrm{QN}_s(F, Z)$, $U \in \mathrm{QN}_0(Z^{**}, F)$ такие, что Z^{**} имеет базис, $TU \notin \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, но $\pi TU \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z^{**})$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 2.3 были использованы пространства E и F, построенные в лемме 1.1 из [14]. Из доказательства первой части этой леммы (см. диаграмму 1 в [14]) вытекает, что пространство F может быть выбрано так, что оно рефлексивно и имеет тип 2 и котип q. Во второй части этой леммы (см. ее доказательство, диаграмму 2 в [14]) пространство E есть фактор–пространство пространства l_t при некотором $t \in (2, \infty)$. В частности, в утверждении 1) теоремы 2.3 при $2 < q < \infty$ пространство F^* имеет тип q', где $1 < q' < 2$. Аналогично, в утверждении 2) этой теоремы пространство E^* имеет тип t', где $1 < t' < 2$. Поэтому всякий абсолютно 1-суммирующий оператор, действующий из пространства F (соответственно из E), является абсолютно 0-суммирующим (см. [11], теоремы 20.2.1 и 21.2.5). Таким образом, в утверждении 1) теоремы 2.3 $T \in \mathrm{QN}_0(F, Z)$, а в утверждении 2) — $U \in \mathrm{QN}_0(Z^{**}, F)$ (так как $U = U_0 \circ \psi$; см. доказательство). После этих предварительных замечаний приступим к доказательству утверждений

1) и 2) нашего предложения.

Рассмотрим пространства F, Z и операторы T, U из теоремы 2.6:

$$Z \xrightarrow{\pi} Z^{**} \xrightarrow{U} F \xrightarrow{T} Z \xrightarrow{\pi} Z^{**}.$$

Нам надо показать, что $TU \notin \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$. Если $TU \in \mathrm{N}_1(Z^{**}, Z)$, то

$$TU = \sum z^{***} \otimes z_n \in Z^{***} \widehat{\otimes}_1 Z$$

и

$$\operatorname{trace} \pi \circ (TU) = \sum \langle z^{***}, \pi z \rangle = \sum \langle \pi^* z^{***}, z_n \rangle = \operatorname{trace} (TU) \circ \pi = 0,$$

так как $TU\pi$ — нулевой оператор. С другой стороны,

$$\operatorname{trace} (\pi T) \circ U = \operatorname{trace} U \circ (\pi T) = 1. \quad \square$$

§3 Свойства $\mathrm{AP}(l_p)$ и l_p-факторизация операторов

Верно ли, что если сопряженный к T оператор T^* факторизуется компактно через пространство l_p, то сам оператор T допускает (строгую) факторизацию через пространство $l_{p'}$?

Ответы на этот вопрос отрицателен, если $p = 1$ или $p = \infty$ (см. [14], [13], [16]). Ответ до сих пор неизвестен при других значениях показателя p, т.е. при $1 < p \neq 2 < \infty$.

Остановимся немного на ситуации, поясняющей сложности при решении этой задачи. Определения и детали, связанные с приводимыми ниже рассуждениями, можно найти ниже.

Рассмотрим банахово тензорное произведение $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, ассоциированное с идеалом K_p компактно l_p-факторизуемых операторов в банаховых пространствах (в частности, всякий тензор в рассматриваемой ситуации порождает оператор, факторизуемый через пространство l_p компактным образом). Каждый тензор $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, как и всякий оператор $S \in \mathrm{K}_p(X, Y)$, допускает представление вида (3.3) причем для заранее заданного числа $\varepsilon > 0$ это представление для z может быть выбрано так, что выполняется соотношение (3.4) где $k_p^0(z)$ — норма элемента z в его тензорном произведении. Каждый оператор S, как говорилось только что, также допускает подобного рода разложение в ряд одномерных операторов, но с оценкой справа через его K_p-норму: $\dots \le k_p(S) + \varepsilon$. При этом нормы k_p^0 и k_p на конечномерных операторах вида (3.2) определяются весьма схожим способом (см. ниже).

На первый взгляд, различия между тензором $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ и соответствующим ему оператором $S = \widetilde{z}$ не видно, особенно, если посмотреть на их разложения в ряды вида (3.3). Однако, существенная разница в их определении прослеживается при рассмотрении конечномерных операторов (или тензоров): для конечномерного оператора S из (3.2) (пусть ему соответствует тензор z) его норма в пространстве $\mathrm{K}_p(X, Y)$ вычисляется как инфимум левой части соотношения (3.4) *по всем* соответствующим представлениям вида (3.3) оператора S, тогда как норма ассоциированного тензорного элемента z — как инфимум левой части соотношения (3.4) по всем разложениям оператора S *в конечную сумму одномерных отображений.* Эта разница оказывается весьма существенной, и нам известно, что, по-крайней мере для $p = 1, p = \infty$, рассматриваемые две нормы, вообще говоря, не совпадают между собой даже на конечномерных операторах (относительно случая $p = \infty$ см. [14, следствие 3.4 и предшествующие этому следствию доказательства]; случай $p = 1$ рассмотрен в [16], но без подробного доказательства соответствующее утверждение появилось уже в статье [14, следствие 4.2]).

Если $1 \le p \le \infty$ и S — конечномерный оператор из X в Y, то его K_p^0-норма есть величина

$$k_p^0(S) := \inf \left\{ (\sup_{1 \leqslant i \leqslant} |a_i|) \, \varepsilon_p(x'_j) \, \varepsilon_{p'}(y_j) \right\}, \tag{3.1}$$

где точная нижняя грань берется по всем *конечным* представлениям оператора S в виде

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_j \, x'_j \otimes y_j. \tag{3.2}$$

Пополнение алгебраического тензорного произведения $X^* \otimes Y$ (которое рассматривается нами как линейное пространство всех конечномерных операторов) по этой норме k_p^0 мы будем обозначать через $X^* \tilde{\tilde{\otimes}}_p Y$, оставляя за нормой в этом пополнении все то же обозначение k_p^0. Каждый тензорный элемент $z \in X^* \tilde{\tilde{\otimes}}_p Y$ представим в виде сходящегося ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \, x'_j \otimes y_j, \qquad \alpha_j \to 0, \tag{3.3}$$

причем для заранее заданного числа $\varepsilon > 0$ это представление может быть выбрано так, что

$$\big(\sup_{1 \leqslant i < \infty} |a_i|\big) \, \varepsilon_p(x'_j) \, \varepsilon_{p'}(y_j) \leq k_p^0(z) + \varepsilon \tag{3.4}$$

Тензорное произведение $X^* \tilde{\tilde{\otimes}}_p Y$ естественным образом порождает в $\mathrm{L}(X, Y)$ линейное подпространство операторов $\mathrm{K}_p(X, Y)$; это есть факторпространство рассматриваемого тензорного произведения по ядру естественного отображения $X^* \tilde{\tilde{\otimes}}_p Y \to \mathrm{L}(X, Y)$. соответствующая норма на этом пространстве операторов обозначается нами через k_p. $[\mathrm{K}_p, k_p]$ есть банахов операторный идеал, и он является частным случаем так называемых идеалов (r, p, q)-ядерных операторов — $\big[\mathrm{N}_{(r,p,q)}, \nu_{(r,p,q)}\big]$: $[\mathrm{K}_p, k_p] = \big[\mathrm{N}_{(\infty,p,p')}, \nu_{(\infty,p,p')}\big]$ (подробности можно найти в книге [11, с. 280-291]). Каждый оператор $S \in \mathrm{K}_p(X, Y)$ представим в виде сходящегося в $\mathrm{K}_p(X, Y)$ ряда (3.3), и для заранее заданного числа $\varepsilon > 0$ это представление может быть выбрано так, что

$$\big(\sup_{1 \leqslant i < \infty} |a_i|\big) \, \varepsilon_p(x'_j) \, \varepsilon_{p'}(y_j) \leq k_p(S) + \varepsilon. \tag{3.5}$$

Теперь мы посмотрим на обсуждаемый сейчас операторный идеал с другой стороны. Будем говорить, что оператор $S : X \to Y$ *компактно факторизуется через пространство* l_p, (в терминологии А.Пича [11], является *p-компактным*), если существуют два компактных оператора $A : X \to l_p$ и $B : l_p \to Y$, для которых $S = BA$. В качестве нормы такого компактно l_p-факторизуемого оператора мы берем величину $\inf \|A\| \, \|B\|$, где точная нижняя грань берется по всевозможным факторизациям оператора S указанного вида.

Одна из основных теорем, относящаяся к теории компактно l_p-факторизуемых операторов, формулируется так:

$$k_p(S) = \inf \{\|A\| \, \|B\| : \, S = BA : X \to l_p \to Y; \, A, B \text{ — компактны}\}$$

и *идеал* K_p *совпадает с идеалом всех операторов, компактно факторизуемых через* l_p; в случае $p = \infty$ компактная факторизуемость через l_∞ — то же самое, что и компактная факторизуемость через c_0 (см. [11], теоремы 18.3.2, 18.1.3). Сопряженный к $[\mathrm{K}_p, k_p]$ идеал $[\mathrm{D}_{p'}, d_{p'}]$ описывается при помощи следующей теоремы. [11, пп. 17.4.2, 17.4.3, 17.4.7]; в этих утверждениях $q \in [1, \infty)$.

Оператор $S \in \mathrm{L}(X, Y)$ *принадлежит пространству* $\mathrm{D}_q(Y, X)$ *тогда и только тогда, когда существует такая постоянная* $C > 0$ *и такие вероятностные меры* $\mu \in W(B_{X^*}, w^*)$ *и* $\nu \in W(B_{Y^{**}}, w^*)$, *что*

$$|\langle Sx, y' \rangle| \leqslant C \, \left(\int_{B_{X^*}} |\langle x, x' \rangle|^q \, d\mu(x') \right)^{1/q} \, \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y'', x' \rangle|^{q'} \, d\nu(y'') \right)^{1/q'}$$

для всех $X \in X$ *и* $y' \in Y^*$; *при этом норма оператора* S *в* D_q *есть* $d_q(S) := \inf C$ *и с этой нормой*

$$[\mathrm{D}_q, d_q] = [\Pi_{q'}^{\mathrm{dual}}, \pi_{q'}^{\mathrm{dual}}]. \circ [\Pi_q, \pi_q]$$

Далее мы более подробно рассмотрим некоторые факты, связанные с наличием, либо отсутствием у банаховых пространств аппроксимационных свойств относительно тензорных норм k_p^0, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Договоримся коротко обозначать свойство аппроксимации относительно k_p^0 через $\mathrm{AP}(l_p)$ Мы пишем $X \in \mathrm{AP}(l_p)$, если пространство X обладает свойством $\mathrm{AP}(l_p.)$ Стоит напомнить, что $X \in \mathrm{AP}(l_p)$, *если для любого банахова пространства* Y *каноническое отображение из* $Y^* \tilde{\tilde{\otimes}}_p X$ *в* $\mathrm{L}(Y, X)$ *взаимно однозначно.* Это эквивалентно тому, что для любого Y имеет место каноническая изометрия $Y^* \tilde{\tilde{\otimes}}_p X = \mathrm{K}_p(Y, X)$ (как отмечалось выше, в подобного рода определениях можно рассматривать, если несколько модифицировать их, и произвольные тензорные произведения типа $Y \tilde{\tilde{\otimes}}_p X$).

Свойства $\mathrm{AP}(l_r)$ "сепарабельно определены", т.е. банахово пространство удовлетворяет условию k_r^0-аппроксимации в том и только том случае, если все его сепарабельные подпространства удовлетворяют этому условию.

Автору неизвестно, *существуют ли пространства без свойства* $\mathrm{AP}(l_p)$ *для какого-нибудь* p, *отличного от единицы, двойки или бесконечности.* Нетрудно показать, что каждое банахово пространство обладает свойством $\mathrm{AP}(l_2)$. С другой стороны, первым автором показано, что *существуют сепарабельные банаховы пространства без свойств* $\mathrm{AP}(l_1)$ *и* $\mathrm{AP}(l_\infty)$ (см. [16], [14], [13]).

Лемма 3.1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Если существует банахово пространство без свойства* $\mathrm{AP}(l_p)$, *то существует и сепарабельное рефлексивное пространство, не обладающее свойством* $\mathrm{AP}(l_{p'})$. *Более того, если* $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y \neq \mathrm{K}_p(X,Y)$, *то существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство* W_0 *и ненулевой тензор* $z_0 \in W_0^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, *что оператор* $\widetilde{z}_0$ *равен нулю.*

Доказательство. Пусть $z := \sum_{k=1}^\infty \mu_k x_k' \otimes y_k$ — такой ненулевой элемент некоторого тензорного произведения $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, что $\widetilde{z} = 0$; Здесь (μ_k) — положительная последовательность из c_0, $(x_k') \in l_p\{X^*\}$ и $(y_k) \in l_{p'}\{Y\}$. Факторизуем компактный диагональный оператор $\Delta := (\mu_k) : l_p \to l_p$ компактно через некоторое сепарабельное рефлексивное пространство W таким образом, чтобы имела место следующая диаграмма: $\Delta = A_1A_2A_3 : l_p \xrightarrow{A_3} l_p \xrightarrow{A_2} W \xrightarrow{A_1} l_p$, в которой все операторы компактны и взаимно однозначны, и положим

$$z_1 := \sum_{k=1}^\infty A_1^* e_k \otimes y_k \in W^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y,$$

$$z_2 := \sum_{k=1}^\infty x_k' \otimes A_3 e_k \in X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p l_p,$$

где через (e_k) обозначается последовательность ортов в любом из пространств l_r. Отметим, что

$$A_1A_2\widetilde{z}_2 = \sum_{k=1}^\infty x_k' \otimes A_1A_2A_3 e_k = \sum_{k=1}^\infty x_k' \otimes \Delta e_k = \sum_{k=1}^\infty \mu_k x_k' \otimes e_k.$$

Поэтому

$$(A_1 A_2 \widetilde{z}_2)^* e_k = \mu_k x'_k. \tag{3.6}$$

Пусть $U \in \mathrm{D}_{p'}(Y, X^{**})$ — такой оператор из сопряженного к $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$ пространства, что trace $U \circ z = 1$. Так как оператор A_3, а следовательно, и оператор $\widetilde{z}_2$ компактны, то имеет смысл рассматривать сильный бидуальный оператор $\widetilde{z}_2^\pi : X^{**} \to \widetilde{z}_2(X) \subset l_p$. Пусть $W_0 := \overline{A_2 \widetilde{z}_2^\pi(X^{**})} = \overline{A_2 \widetilde{z}_2^\pi(X)} \subset W$ и $A_4 : X^{**} \to A_2^{-1} W_0$ — приведение оператора $\widetilde{z}_2^\pi$. В силу идеальных свойств класса $\mathrm{D}_{p'}$, оператор $A_2 A_4 U$ лежит в пространстве $\mathrm{D}_{p'}(Y, W_0)$.

Положим

$$z_0 := \sum_{k=1}^\infty j^* A_1^* e_k \otimes y_k \in W_0^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y = j^* \otimes 1\!\!1(z_1),$$

где $j : W_0 \to W$ — тождественное вложение, и пусть $U_0 := A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 U \in \mathrm{D}_{p'}(Y, W_0)$ (оператор $A_2|_{A_2^{-1}W}$ рассматривается как оператор со значениями в пространстве W_0). Ясно, что $z_0 \in W_0^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y$, и при этом (см. (3.6))

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace} U_0 \circ z_0 &= \sum_{k=1}^\infty \langle j^* A_1^* e_k, A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 U y_k \rangle = \\
&= \sum_{k=1}^\infty \langle A_1^* e_k, j A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 U y_k \rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle e_k, A_1 A_2 \widetilde{z}_2 U y_k \rangle = \\
&= \sum_{k=1}^\infty \langle (A_1 A_2 \widetilde{z}_2)^* e_k, U y_k \rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle \mu_k x'_k, U y_k \rangle = \operatorname{trace} U \circ z \neq 0.
\end{aligned}$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что $\widetilde{z}_0 = 0$, так как таков элемент z :

$$0 = \widetilde{z} = \widetilde{z}_1 \widetilde{z}_2 = \widetilde{z}_1 j A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 \pi_X,$$

и так как $\widetilde{z}_0 = \widetilde{z}_1 j$ и множество $A_2|_{A_2^{-1}W} A_4 \pi_X$ плотно в W_0, то $\widetilde{z}_0 = 0$ на всем W_0.

Поэтому рефлексивное сепарабельное пространство W_0^* не имеет свойства аппроксимации относительно тензорной нормы $k_{p'}^0$. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если существует банахово пространство без свойства $\mathrm{AP}(l_p)$, то существует и рефлексивное сепарабельное пространство, не обладающее свойствами $\mathrm{AP}(l_p)$ и $\mathrm{AP}(l_{p'})$.*

Доказательство. По лемме 3.1, существует рефлексивное сепарабельное W_1 без свойства $\mathrm{AP}(l_{p'})$. По той же лемме, примененной к двойственной ситуации ("существует X без свойства $\mathrm{AP}(l_{p'})$"), найдем рефлексивное сепарабельное банахово пространство W_2 без свойства $\mathrm{AP}(l_p)$. Пространство $W := W_1 \oplus W_2$ рефлексивно, сепарабельно и обладает как свойством $\mathrm{AP}(l_p)$, так и свойством $\mathrm{AP}(l_{p'})$. $\square$

Следствие 3.3. *Если существует банахово пространство без свойства $\mathrm{AP}(l_p)$, то существуют такие сепарабельное рефлексивное пространство E и ненулевой тензорный элемент $z \in E^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p E$, что $\widetilde{z} = 0$.*

Доказательство. Пусть, в условиях нашего утверждения, W_0^* — сепарабельное рефлексивное пространство без свойства $\mathrm{AP}(l_{p'})$ из леммы 3.1. Применим снова ту же лемму (для показателя p'), взяв в качестве пространства Y в ней это банахово пространство W_0^*. Мы получим, что для некоторого сепарабельного рефлексивного пространства W_1 найдется ненулевой тензорный элемент $v_0 \in W_1^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_{p'} W_0^*$, порождающий нелевой оператор. Сепарабельное рефлексивное пространство $E := W_1^* \oplus W_0$ удовлетворяет нашим требованиям, так как $W_0^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p W_1^* \neq \mathrm{K}_p(W_0, W_1^*)$. $\square$

Сейчас мы собираемся привести теорему, несколько обобщающую теорему 1 из [16]. Насколько важно для нас это обобщение будет видно ниже (см., следствие 3.6, теорему 3.10).

Перед тем как сформулировать наш результат, посмотрим, что мы на самом деле получили, доказывая теорему 1 в [16]. В этой теореме (и ее доказательстве) рассматривались фиксированные банаховы пространства X и Y, и изучались свойства K_p-операторов, действующих из X в Y^{**}. В доказательстве (которое проходило методом от противного) использовалось только два следующих предположения (мы придерживаемся обозначений настоящей работы):

1_{K_p}) каноническое отображение $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Y^{**} \to \mathrm{K}_p(X, Y^{**})$ биективно, и

2_{K_p}) биективно либо каноническое отображение $X^*\tilde{\tilde{\otimes}}_p X^{**} \to \mathrm{K}_p(X, X^{**})$, либо каноническое отображение $Y^{****}\tilde{\tilde{\otimes}}_{p'} Y^{***} \to \mathrm{K}_{p'}(Y^{***}, Y^{***})$.

Таким образом в заметке [16] была, по существу, доказана

Теорема 3.4. *Пусть $p \in [1, \infty]$. Если пара банаховых пространств X, Y удовлетворяет условиям 1_{K_p}) и 2_{K_p}), то всякий оператор из X в Y, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l_p (эквивалентно, сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство $l_{p'}$), сам компактно факторизуется через l_p. Таким образом, в этом случае* $\mathrm{K}_p^{\mathrm{reg}}(X, Y) = \mathrm{K}_p(X, Y)$.

Доказательство. Как отмечалось, случай $1 < p < \infty$ рассматривается в точности так же, как и в [16]. Нам надо лишь пояснить, почему возможность факторизации сопряженного оператора T^* через $l_{p'}$ равносильна возможности факторизации T^{**} через пространство l_p при $p = 1, \infty$. Это следует из дополняемости пространств l_1 и l_∞, как и произвольных сопряженных пространств, в их вторых сопряженных. Что касается факторизации через c_0, то напомним, что идеал $\mathrm{N}_\infty = K_\infty$ состоит из операторов, компактно факторизуемых через c_0. $\square$

Следствие 3.5. *Пусть $p \in [1, \infty]$ и $T \in \mathrm{L}(X, Y)$. Если либо $X^* \in \mathrm{AP}(l_{p'})$, либо $Y^{****} \in \mathrm{AP}(l_p)$, либо $Y^{***} \in \mathrm{AP}(l_{p'})$, то всякий оператор из X в Y, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l_p, сам компактно факторизуется через l_p. Таким образом, в этом случае* $\mathrm{K}_p^{\mathrm{reg}}(X, Y) = \mathrm{K}_p(X, Y)$.

Доказательство. Напомним, что для произвольной тензорной нормы α банахово пространство Z^* удовлетворяет условию α-аппроксимации тогда и только тогда, когда для всякого пространства W каноническое отображение из $Z^*\widehat{\otimes}_{\alpha^{\mathrm{dual}}} W$ в $\mathrm{L}(Z, W)$ взаимно однозначно, и что если $Z^{**} \in \mathrm{AP}[\alpha]$, то и $Z \in \mathrm{AP}[\alpha]$. Осталось заметить, что при любом $p \in [1, \infty]$ имеет место равенство $(k_p^0)^{\mathrm{dual}} = k_{p'}^0$. $\square$

Следствие 3.6. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если существует не K_p-оператор, второй сопряженный к которому компактно факторизуется через пространство l_p, то* *существует и сепарабельное рефлексивное банахово пространство, не удовлетворяющее как условию k_p^0-аппроксимации, так и условию $k_{p'}^0$-аппроксимации. А тогда существует и вполне сепарабельное банахово пространство с базисом, сопряженное к которому не имеет как свойства* $\mathrm{AP}(l_p)$, *так и свойства* $\mathrm{AP}(l_{p'})$.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из предыдущей теоремы и следствия 3.2. Второе утверждение получается, если к сепарабельному рефлексивному пространству E без свойств $\mathrm{AP}(l_p)$ и $\mathrm{AP}(l_{p'})$ применить теорему Линденштраусса). Именно, пользуясь теоремой Линденштраусса, построим сепарабельное сопряженное пространство W^* с базисом, для которого W^{**} изоморфно прямой сумме $E^* \oplus \pi_W W$. Это и есть искомое вполне сепарабельное пространство. $\square$

Теорема 3.7. *Пусть* $P \in [1, \infty]$. *Предположим, что существует банахово пространство, не удовлетворяющее условию аппроксимации относительно тензорной нормы* k_p^0. *Тогда существуют сепарабельное рефлексивное пространство* X, *вполне сепарабельное банахово пространство* Z *и операторы* V, w, *удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $X \notin \mathrm{AP}(l_p), Z^{**}$ *имеет базис;*
2) $V \in \mathrm{D}_{p'}(Z^{**}, X), w \in \mathrm{K}_p(X, Z^{**}) = X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Z^{**}$;
3) $w(X) \subset \pi_Z Z, w \notin \mathrm{K}_p(X, \pi_Z Z)$;
4) $V|_{\pi_Z Z} = 0, \mathrm{trace}\ V \circ w = 1$.

Доказательство. Если существует банахово пространство, не обладающее свойством $\mathrm{AP}(l_p)$, то, по следствию 3.2, существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство без свойства $\mathrm{AP}(l_p)$, и это пространство мы обозначим через X. По следствию 3.3, без ограничения общности, мы можем считать, что найдется ненулевой тензорный элемент $z \in X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X$, порождающий нулевой оператор. Пусть $U \in \mathrm{D}_{p'}(X, X)$ — такой оператор, что $\mathrm{trace}\ U \circ z = 1$, и $z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \otimes x_k$ — некоторое представление элемента z в тензорном произведении $X^* \widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X$, так что $(x_k') \in l_p\{X^*\}$ и $(x_k) \in l_{p'}\{X\}$. Воспользуемся теперь следствием 1.4, согласно которому мы можем найти такие вполне сепарабельное банахово пространство Z и факторотображение $\Phi : Z^{**} \to X$, что Z^{**} имеет базис, $\operatorname{Ker}\Phi = \pi_Z Z$ и слабо p'-суммируемую последовательность (x_k) можно поднять до снова слабо p'-суммируемой последовательности $(z''_k) \subset Z^{**}$, так что $\Phi z''_k = x_k, k = 1, 2, \ldots$. Поскольку в Z^{**} есть базис, тензорное произведение $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Z^{**}$ можно канонически отождествить с пространством $\mathrm{K}_p(X, Z^{**})$. Определим оператор (или, что сейчас то же самое, тензорный элемент) $w \in X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Z^{**}$ равенством $w := \sum x'_k \otimes z''_k$ и положим $V := U\Phi \in \mathrm{L}(Z^{**}, X)$. Так как $\pi_Z Z = \operatorname{Ker} U$, то $V|_{\pi_Z Z} = 0$; далее,

$$\operatorname{trace} V \circ w = \operatorname{trace}(U\Phi) \circ w = \sum \langle x'_k, U\Phi z''_k\rangle = \sum \langle x'_k, Ux_k\rangle = \operatorname{trace} U \circ z = 1.$$

Заметим, что $z = \Phi \circ w$, и поскольку оператор $\widetilde{z} = 0$, то w отображает пространство X в ядро оператора Φ, которое, по построению, есть $\pi_Z Z$. Осталось показать, что $w \notin \mathrm{K}_p(X, \pi_Z Z)$.

Предположим противное, т.е. что оператор w, как оператор из X в $\pi_Z Z$, компактно факторизуется через пространство l_p. Рассмотрим какое-либо его разложение в ряд в пространстве $\mathrm{K}_p(X, \pi_Z Z)$, обозначив приведение оператора $w : X \to \pi_Z Z \subset Z^{**}$ через $w_1, w_1 : X \to \pi_Z Z$:

$$w = \sum \widetilde{x}'_k \otimes z_k,\ (\widetilde{x}'_k) \in l_p\{X^*,\}\,(z_k) \in l_{p'}\{\pi_Z Z\}.$$

С одной стороны, имеем:

$$\operatorname{trace} V \circ w_1 = \operatorname{trace}(U\Phi) \circ (\pi_Z Z \circ w_1) = \operatorname{trace} U\Phi \circ w = 1.$$

Мы воспользовались тем фактом, что тензорное произведение $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p \pi_Z Z$ канонически изометрично подпространству пространства $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p Z^{**}$.

С другой стороны,

$$\operatorname{trace} V \circ w_1 = \operatorname{trace}(U\Phi) \circ \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{x}'_k \otimes z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \widetilde{x}'_k, U(\Phi z_k)\rangle = 0,$$

так как $(z_k) \subset \pi_Z Z = \operatorname{Ker}\Phi$. $\square$

Следствие 3.8. *Если существует банахово пространство, не обладающее свойством* $\mathrm{AP}(l_p)$, *то существуют такие сепарабельное рефлексивное банахово пространство* X, *вполне сепарабельное банахово пространство* Z *и оператор* $T \in \mathrm{L}(X, Z)$, *что* Z^{**} *имеет базис,* $X \notin \mathrm{AP}(l_p)$, $T^{**} \in \mathrm{K}_p(X, Z^{**})$, *но* $T \notin \mathrm{K}_p(X, Z)$.

Доказательство. Достаточно, отождествив пространство Z с его каноническим образом $\pi_Z Z$ в Z^{**}, положить $T := w : X \to Z$ (в обозначениях предыдущего доказательства, $T = (\pi_Z)^{-1} w_1$, где $(\pi_Z)^{-1}$ отображает $\pi_Z Z$ в Z). $\square$

Следствие 3.9. *Если существует банахово пространство, не обладающее свойством* $\mathrm{AP}(l_p)$, *то существуют такие вполне сепарабельное банахово пространство* Z *и оператор* $V \in \mathrm{L}(Z^{**}, Z)$, *что* Z^{**} *имеет базис,* $\pi_Z V \in \mathrm{K}_p(Z^{**}, Z^{**})$, *но* $V \notin \mathrm{K}_p(Z^{**}, Z)$.

Доказательство. В обозначениях доказательства теоремы 3.7, пусть P — ограниченный проектор из пространства Z^{***} на его подпространство $\Phi^* X^*$ (вспомним, что одним из основных свойств пространства Z и факторотображения Φ в следствии 1.4 была дополняемость подпространства $\Phi^* X^*$ в третьем сопряженном к Z пространстве). Положим $V := w_1 \Phi : Z^{**} \to X \to Z$, т.е. возьмем в качестве V приведение оператора $w\Phi$, отождествляя пространства Z и $\pi_Z Z$. Оператор $\pi_z V$, очевидно, лежит в пространстве $\mathrm{K}_p(Z^{**}, Z^{**})$. Если бы он, как оператор из Z^{**} в Z, допускал бы K_p-разложение в ряд, $V = \sum z_k''' \otimes z_k$, то мы имели бы для $z' \in Z^*$:
(3.7)

$$w_1^* z' = (\Phi^*)^{-1} P \Phi^* w_1^* z' = (\Phi^*)^{-1} P V^* z' = (\Phi^*)^{-1} P \sum \langle z', z_k \rangle z_k''' = \sum \langle z', z_k \rangle x_k^*,$$

где $x_k^* := (\Phi^*)^{-1} P z_k''' \in X^*$. Соотношения (3.7) означают, что $w_1 : X \to Z$ разлагается в K_p-сходящийся ряд $\sum x_k^* \otimes z_k$, что, как мы знаем, невозможно. $\square$

Соберем некоторые из полученных выше фактов о пространствах со свойствами $\mathrm{AP}(l_p)$ в одну самую общую теорему.

Теорема 3.10. *Для любого* $p \in [1, \infty]$ *следующие утверждения равносильны.*

1) *Каждое банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}(l_p)$;

1′) *Каждое сепарабельное рефлексивное банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}(l_p)$;

2) *Каждое банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}(l_{p'})$;

2′) *Каждое сепарабельное рефлексивное банахово пространство обладает свойством* $\mathrm{AP}(l_{p'})$;

3) *Не существует оператора, действующего в банаховых пространствах, который не был бы* K_p*-оператором, но второй сопряженный к которому лежал бы в идеале* K_p;

3′) *Не существует оператора, действующего во вполне сепарабельных банаховых пространствах с базисами, который не был бы* K_p*-оператором, но второй сопряженный к которому лежал бы в идеале* K_p;

4) *идеал* K_p *является регулярным;*

5) *идеал* $\mathrm{K}_{p'}$ *является регулярным;*

6) *идеал* $\mathrm{K}_p^{\mathrm{reg}}$ *является минимальным;*

7) *идеал* $\mathrm{K}_{p'}^{\mathrm{reg}}$ *является минимальным;*

8) *идеал конечномерных операторов плотен в идеале* $\mathrm{K}_p^{\mathrm{reg}}$;

9) *идеал конечномерных операторов плотен в идеале* $\mathrm{K}_{p'}^{\mathrm{reg}}$;

10) *для каждого сепарабельного рефлексивного банахова пространства* X *каноническое вложение* $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X \to \mathrm{L}(X,X)$ *взаимно однозначно;*

11) *для каждого банахова пространства* X *каноническое вложение* $X^*\widetilde{\widetilde{\otimes}}_p X \to \mathrm{L}(X,X)$ *взаимно однозначно.* $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Davie A.M., , Bull. London Math. Soc. (1973), 261-266.
2. Enflo P., , Acta Math. (1973), 309–317.
3. Figiel T., Johnson W. B., , Proc. Amer. Math. Soc. (1973), 197–200.
4. Gordon Y., Lewis D. R., Retherford H. R., , J. Funct. Anal. (1973), no. 1, 85-129.
5. James R. C., , Pacific J. Math. (1960), 563–571.
6. Lindenstrauss J., , Israel J. Math. (1971), 279-284.

7. Lindenstrauss J., Tzafriri L., , Springer-Verlag, Berlin – Heldelberg – New York, 1977.
8. Макаров Б. М., Самарский В. Г., , в кн. “Теория операторов и теория функций”. Л.: ЛГУ (1983), 122-144.
9. Persson A., p p , Studia Math. (1969), 213–232.
10. Persson A. and Pietsch A., , Studia Math. (1969), 19-62, $MR39\#4645$..
11. Пич А., , Москва: Мир, 1982, 536 с.
12. Рейнов О. И., , ДАН СССР (1975), 3, 528-531.
13. Рейнов О. И., , ДАН СССР (1981), no. 1, 43-47.
14. Reinov O. I., , Math. Nachr. (1982), 125-134.
15. Рейнов О. И., , в кн. “Теория операторов и теория функций”. Л.: ЛГУ (1983), 145-165.
16. Рейнов О. И., l , Вестник СПб ГУ. Сер.1 (2000), вып. 2 (No 8), 27-32.
17. Рейнов О. И., AP_s p $0 < s \leq 1$, Записки научн. сем. ПОМИ (2000), 277-291.
18. Oja E., Reinov O. I., , C. R. Acad. Sc. Paris. — Serie I (1987), 121-122.
19. Saphar P., , Studia Math. (1970), 71-100.

: orein51@mail.ru