УДК 517.972.9

В. Н. Малозёмов

О МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1°. Перу Николая Максимовича Гюнтера принадлежит один из лучших учебников по вариационному исчислению. Его книга [1] была подписана к печати 27 мая 1941 г. Как отметил в предисловии В. И. Смирнов, последняя корректура была сдана Н. М. Гюнтером 29 апреля 1941 г. за пять дней до его кончины, последовавшей 4 мая 1941 г. С волнением берем мы в руки это сочинение замечательного математика.

Учебник Н. М. Гюнтера отличает полнота и тщательность анализа изучаемых вопросов. Он и сегодня читается с большим интересом. Вместе с тем, за прошедшие 65 лет вариационное исчисление получило дальнейшее развитие как вширь, так и вглубь [2–5]. Даже некоторые конкретные вопросы, рассмотренные в [1], мы теперь понимаем лучше. В этой связи остановимся на классической задаче о минимальной поверхности вращения и дополним анализ Н. М. Гюнтера случая двух стационарных кривых.

2°. Напомним постановку задачи о минимальной поверхности вращения:

$$\begin{gathered} J(y) := 2\pi \int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx \to \min, \\ y(-a) = y(a) = A. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь a, A - положительные константы. Решение будем искать на множестве функций $y(x)$, положительных и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-a, a]$.

Как известно [1, с. 36-40], двухпараметрическое семейство лагранжевых кривых (экстремалей) для задачи (1) определяется формулой

$$y(x) = \lambda \operatorname{ch} \frac{x+c}{\lambda}. \tag{2}$$

В силу симметричности краевых условий $c = 0$. Константу $\lambda > 0$ найдем из уравнения

$$\lambda \operatorname{ch} \frac{a}{\lambda} = A. \tag{3}$$

Обозначив $t = a/\lambda,\ \varphi(t) = \operatorname{ch}(t)/t$, перепишем последнее уравнение в виде

$$\varphi(t) = \frac{A}{a}. \tag{4}$$

Исследуем уравнение (4).

Функция $\varphi(t)$ на полуоси $(0, +\infty)$ имеет производную

$$\varphi'(t) = \frac{t\,\mathrm{sh}\,t - \mathrm{ch}\,t}{t^2} = \frac{\mathrm{sh}\,t}{t^2}(t - \mathrm{cth}\,t).$$

Отметим, что

$$\mathrm{cth}\,t = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = 1 + \frac{2}{e^{2t} - 1}.$$

Ясно (рис. 1), что у разности $t - \mathrm{cth}\,t$ существует единственный положительный корень t_0, причем $t_0 > 1$. Эта разность отрицательна при $0 < t < t_0$ и положительна при $t > t_0$. Значит, t_0 является единственной точкой минимума функции $\varphi(t)$ на $(0, +\infty)$ (рис. 2). При этом

$$\varphi(t_0) = \frac{\mathrm{ch}\,t_0}{\mathrm{cth}\,t_0} = \mathrm{sh}\,t_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{cth}^2\,t_0 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{t_0^2 - 1}} =: k_0.$$

Нетрудно сосчитать, что $k_0 = 1.50888$.

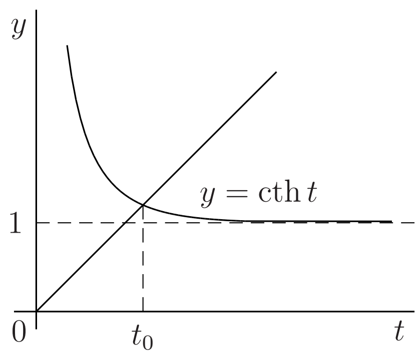

Рис. 1.

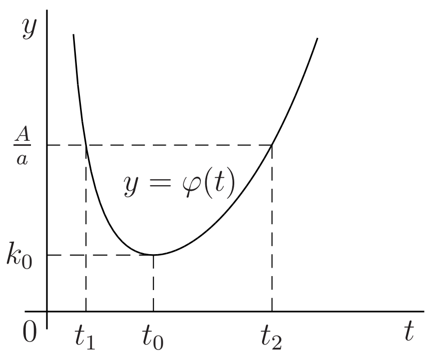

Рис. 2.

Приходим к следующему выводу:

- при $A/a > k_0$ уравнение (4) имеет два решения $0 < t_1 < t_2$,
- при $A/a = k_0$ уравнение (4) имеет одно решение t_0,
- при $A/a < k_0$ уравнение (4) не имеет решений.

Нас интересует первый случай, когда уравнение (4) имеет два решения. Соответственно уравнение (3) также имеет два решения $\lambda_1 = a/t_1$, $\lambda_2 = a/t_2$, причем $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Это значит, что при $A/a > k_0$ существуют две стационарные кривые $y_k(x) = \lambda_k\,\mathrm{ch}(x/\lambda_k)$, $k = 1, 2$. На обеих кривых выполняется усиленное условие Лежандра. Какой из них отдать предпочтение с точки зрения поставленной задачи – минимизации поверхности вращения?

3°. Для ответа на этот вопрос нужно записать уравнение Якоби, соответствующее стационарной кривой $y_k(x)$, и найти его главное решение. Уравнение Якоби в данном случае имеет вид [1, с. 85]

$$u'' - \frac{2}{\lambda_k}\operatorname{th}\left(\frac{x}{\lambda_k}\right)u' + \frac{1}{\lambda_k^2}u = 0.$$

Главное решение $u_k(x)$ определяется начальными условиями $u(-a) = 0$, $u'(-a) = 1$. Как показано в [1, с. 85]

$$u_k(x) = \frac{\lambda_k \operatorname{ch} t_k - a\operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k}\operatorname{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \frac{\operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k}\left(x\operatorname{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \lambda_k \operatorname{ch}\frac{x}{\lambda_k}\right). \tag{5}$$

Справедливость этой формулы легко проверить, однако вывести её совсем непросто.

4°. Существует более регулярный способ нахождения $u_k(x)$ [5, с. 124-127]. Для этого в двухпараметрическом семействе экстремалей (2) нужно выделить однопараметрическое семейство $y(x, \alpha)$, исходя из условий $y(-a) = A$, $y'(-a) = \alpha$. Здесь α - параметр. Распишем указанные условия подробно

$$\lambda \operatorname{ch}\frac{-a+c}{\lambda} = A, \quad \operatorname{sh}\frac{-a+c}{\lambda} = \alpha.$$

Отсюда следует, что $(-a+c)/\lambda = \operatorname{arsh}\alpha$ и

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad c = a + \lambda \operatorname{arsh}\alpha.$$

Таким образом,

$$y(x,\alpha) = \lambda(\alpha)\operatorname{ch}\frac{x + c(\alpha)}{\lambda(\alpha)}. \tag{6}$$

В этом семействе стационарная кривая $y_k(x)$ соответствует параметру $\alpha = \alpha_k$, такому, что $\lambda(\alpha_k) = \lambda_k$ и $c(\alpha_k) = 0$. Получаем

$$\operatorname{arsh}\alpha_k = -a/\lambda_k = -t_k, \quad \alpha_k = -\operatorname{sh} t_k.$$

Факт теории заключается в том, что

$$u_k(x) = y'_\alpha(x, \alpha_k). \tag{7}$$

Воспользуемся этой формулой. Поскольку

$$\lambda'(\alpha_k) = -\frac{A\alpha_k}{(1+\alpha_k^2)^{3/2}} = \frac{A\operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^3 t_k} = \frac{a}{t_k}\,\frac{\operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k} = \frac{\lambda_k \operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k},$$

$$c\,'(\alpha_k) = \lambda'(\alpha_k)\ \operatorname{arsh}\alpha_k + \frac{\lambda_k}{\sqrt{1+\alpha_k^2}} = -\frac{t_k\lambda_k \operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k} + \frac{\lambda_k}{\operatorname{ch} t_k} =$$

$$= \frac{\lambda_k \operatorname{ch} t_k - a \operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k},$$

то согласно (6)

$$y'_\alpha(x,\alpha_k) = \lambda'(\alpha_k) \operatorname{ch}\frac{x}{\lambda_k} + \lambda_k \operatorname{sh}\left(\frac{x}{\lambda_k}\right)\left[\frac{c'(\alpha_k)\lambda_k - x\lambda'(\alpha_k)}{\lambda_k^2}\right] =$$

$$= c'(\alpha_k)\operatorname{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \frac{\lambda'(\alpha_k)}{\lambda_k}\left[x \operatorname{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \lambda_k \operatorname{ch}\frac{x}{\lambda_k}\right] =$$

$$= \frac{\lambda_k \operatorname{ch} t_k - a \operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k} \operatorname{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \frac{\operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k}\left[x \operatorname{sh}\frac{x}{\lambda_k} - \lambda_k \operatorname{ch}\frac{x}{\lambda_k}\right].$$

Теперь (5) следует из (7).

Отметим, в частности, что

$$u_k(a) = \frac{2\lambda_k \operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch} t_k} - \frac{2a \operatorname{sh}^2 t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k} = -\frac{2a\, t_k \operatorname{sh} t_k}{\operatorname{ch}^2 t_k}\ \frac{t_k \operatorname{sh} t_k - \operatorname{ch} t_k}{t_k^2} =$$

$$= -\frac{2a^2}{A}\ \operatorname{th}(t_k)\,\varphi'(t_k). \qquad (8)$$

5°. Если стационарная кривая $y_k(x)$ является точкой (слабого) локального минимума функционала $J(y)$, то в ней выполняется необходимое условие оптимальности второго порядка: главное решение уравнения Якоби $u_k(x)$ положительно на $(-a,a)$. Поскольку $\varphi'(t_2) > 0$ (см. рис. 2), то согласно (8) $u_2(a) < 0$. Это значит, что $y_2(x)$ не является точкой локального минимума.

В силу той же формулы (8) $u_1(a) > 0$. Покажем, что $u_1(x) > 0$ на $(-a,a]$, т.е. что на $y_1(x)$ выполняется усиленное условие Якоби. В этом случае теория гарантирует, что $y_1(x)$ - точка строгого локального минимума.

Имеем

$$u_1'(x) = \frac{1}{\lambda_1^2} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\lambda_1}\right)\Big[c'(\alpha_1)\lambda_1 - x\lambda'(\alpha_1)\Big].$$

В квадратных скобках стоит линейная по x функция, поэтому $u_1'(x)$ обращается в ноль на $(-a,a)$ не более, чем в одной точке. Так как $u_1(-a) = 0$, $u_1'(-a) = 1$ и $u_1(a) > 0$, то необходимо $u_1(x) > 0$ на $(-a,a]$. Действительно, если допустить, что существует точка $\xi \in (-a,a)$, в которой $u_1(\xi) = 0$, то в точке максимума η функции $u_1(x)$ на $[-a,\xi]$ будет $u_1(\eta) > 0$ и $u_1'(\eta) = 0$. Более того, в точке минимума $u_1(x)$ на $[\eta, a]$ производная $u_1'(x)$ еще раз обратится в ноль, что, как отмечалось, невозможно.

6°. Предпочтительность стационарной кривой $y_1(x)$ по сравнению с $y_2(x)$ можно установить более непосредственным путем, если показать, что $J(y_1) < J(y_2)$. Именно этим мы теперь и займемся.

Теорема. *Справедливо неравенство* $J(y_1) < J(y_2)$.

Доказательство. Воспользуемся формулами

$$2\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x + 1, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

Получим

$$J(y_k) = 2\pi\lambda_k \int_{-a}^{a} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{\lambda_k}\, dx = 2\pi\lambda_k \int_0^a \left(\operatorname{ch}\frac{2x}{\lambda_k} + 1\right) dx =$$

$$= 2\pi\lambda_k \left(\frac{\lambda_k}{2} \operatorname{sh}\frac{2a}{\lambda_k} + a\right) = 2\pi\left(\lambda_k^2 \operatorname{sh} t_k \operatorname{ch} t_k + a\lambda_k\right). \tag{9}$$

Поскольку $\operatorname{ch}(t_k)/t_k = A/a$, то

$$(2\pi a^2)^{-1} J(y_k) = \frac{\operatorname{sh} t_k \operatorname{ch} t_k}{t_k^2} + \frac{1}{t_k} = \left(\frac{A}{a}\right)^2 \operatorname{th} t_k + \frac{1}{t_k}\ . \tag{10}$$

Введем функцию

$$\psi(t) = \left(\frac{A}{a}\right)^2 \operatorname{th} t + \frac{1}{t}, \quad t \in (0, +\infty),$$

и вычислим ее производную:

$$\psi'(t) = \left(\frac{A}{a}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} - \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\left[\left(\frac{A}{a}\right)^2 - \varphi^2(t)\right].$$

Согласно определению функции $\varphi(t)$ и выбору точек t_1, t_2 имеем $\psi'(t_1) = 0$, $\psi'(t_2) = 0$, $\psi'(t) > 0$ при $t \in (t_1, t_2)$. В частности, $\psi(t_1) < \psi(t_2)$. Переписав формулу (10) в виде

$$(2\pi a^2)^{-1} J(y_k) = \psi(t_k),$$

придем к заключению теоремы. □

Замечание. Из (9) следует, что

$$J(y_k) = 2\pi\left(A\sqrt{A^2 - \lambda_k^2} + a\lambda_k\right), \quad k = 1, 2.$$

Действительно, нужно учесть, что $\operatorname{ch} t_k = A/\lambda_k$ и

$$\lambda_k^2 \operatorname{sh} t_k \operatorname{ch} t_k = A\lambda_k \operatorname{sh} t_k = A\lambda_k \sqrt{\operatorname{ch}^2 t_k - 1} = A\sqrt{A^2 - \lambda_k^2}\,.$$

7°. Более общие результаты, связанные с минимальными поверхностями, представлены в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. Л. -М., 1941. 308 с.
2. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. Пер. с англ. М., 1974. 488 с.
   (Young L.C. Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. London. 1969)
3. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М., 1979. 430 с.
4. *Буслаев В. С.* Вариационное исчисление. Л., 1980. 287 с.
5. *Коша А.* Вариационное исчисление. Пер. с венгерского. М.,1983. 280 с.
   (Kósa A. Variációszamitás. Budapest, 1973)
6. *Тужилин А. А., Фоменко А. Т.* Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М., 1991. 176 с.