ИЗМЕРИМЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФРЕЙМЫ I.

О.И.Рейнов.

Вводится новое понятие "Измеримого пространственного фрейма" и приводятся простейшие начальные свойства, связанные с ним. Более серьезное изучение этого понятия, так же как и существенные приложения, в частности к теории "Wavelets", в самое ближайшее время появятся в последующих частях работы.

Общая постановка задач,

Определение 1. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, $L_2 = L_2(\mu)$, и пусть φ — некоторая положительная функция из L_2. Семейство $(F_\omega)_{\omega\in |omega}$ замкнутых подпространств некоторого гильбертова пространства H называется *измеримым пространственным фреймом, ИПФ* для H относительно φ, если существуют постоянные $0 < C \le D < \infty$ для которых

$$(1) \qquad C\|f\|^2 \le \int_\Omega \varphi^2 \|\pi_{F_\omega}(f)\|^2 \, d\mu \le D\|f\|^2 \quad \forall f \in H.$$

Константы C, D называются frame–границами для ИПФ. Семейство (F_ω) называется C-точным ИПФ относительно φ, если в (1) постоянные C, D могут быть выбраны так, что $C = D$; называется ИПФ Парсеваля, если $C = D = 1$; если $H = \oplus \int_\Omega F_\omega$, то этот ИПФ — ортонормальный базис из ИПФ. Далее, этот ИПФ является φ равномерным, если $\varphi = const$. Если в (1) имеется только верхняя граница, то мы говорим о бесселевом измеримом семействе подпространств относительно φ с бесселевой верхней границей D.

† Работа выполнена при частичной поддержке фонда РФФИ грант 03-01-00373, а также грантов ВНП Минобразования 3.1 №4733 и "Научные школы" №00-15-96-022.

Теорема 1. *Пусть для каждого* $\omega \in \Omega \ \ \varphi(\omega) > 0$ *и пусть* $\{f_{\omega\, j}\}_{j\in J_\omega}$ *есть фрейм в* H *с границами* B_ω *и* A_ω. *Положим* $F_\omega = \overline{span}_{j\in J_\omega} \{f_{\omega\, j}\}$ *для всех* $\omega \in \Omega$. *Выберем в каждом из пространств* F_ω *ортонормированный базис* $\{e_{\omega\, j}\}_{j\in J_\omega}$. *предположим, что* $0 < A = \inf_{\omega\in\Omega} A_\omega \le B = \sup_{\omega\in\Omega} B_\omega < \infty$. *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\{\varphi(\omega)\, f_{\omega\, j}\}_{\omega\in\Omega\, j\in J_\omega}$ *есть фрейм для* H;

(2) $\{\varphi(\omega)\, e_{\omega\, j}\}_{\omega\in\Omega\, j\in J_\omega}$ *есть фрейм для* H;

(3) $\{F_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *ест ИПФ относительно* φ *для* H.

Доказательство. Так ка для каждого $\omega \in \Omega$, $\{f_{\omega\, j}\}_{j\in J_\omega}$ есть фрейм для H, с границами A_ω, A_ω, то получаем

$$A \int_\Omega \varphi^2 \|\pi_{F_\omega}(f)\|^2 \le \int_\Omega A_\omega \varphi^2 \|\pi_{F_\omega}(f)\|^2 \le \int_\Omega \sum_{j\in J_\omega} |\pi_{F_\omega}(f), \varphi\, f_{\omega j}|^2 \le$$
$$\int_\Omega B_\omega \varphi^2 \|\pi_{F_\omega}(f)\|^2 \le B \int_\Omega \varphi^2 \|\pi_{F_\omega}(f)\|^2.$$

Отметим, что

$$\int_\Omega \sum_{j\in J_o m} |\pi_{F_\omega}(f), \varphi\, f_{\omega j}|^2 = \sum_{\omega\in\Omega} \sum_{j\in J_\omega} | < f, \varphi(\omega) f_{\omega j} > |^2.$$

Поэтому, если $\{\varphi(\omega)\, f_{\omega\, j}\}_{\omega\in\Omega\, j\in J_\omega}$ есть фрейм для H с границами C, D, то $\{F_\omega\}$ есть ИПФ для H с границами C/B и D/A. Более того, если $\{F_\omega\}$ есть ИПФ с границами C, D, то вычисления выше показывают, что $\{\varphi(\omega)\, f_{\omega\, j}\}_{\omega\in\Omega\, j\in J_\omega}$ есть фрейм для H с границами AC, BD. Таким образом, $1 \iff 3$.

Для доказательства эквивалентности $2 \iff 3$ в выше приведенных вычислениях достаточно заметить, что

$$\varphi^2(\omega)\, \|\pi_{F_\omega}(f)\|^2 = \varphi^2(\omega)\, \| \sum_{j\in J_\omega} < f, e_{\omega j} > e_{\omega j} \| = \sum_{j\in J_\omega} | < f, \varphi(\omega) e_{\omega j} > |^2.$$

Это завершает доказательство. ■

Одно из основных понятий в аналитических теориях — понятие полоты. Напомним, что семейство подпространств $\{F_\omega\}$ полно в гильбертовом пространстве H, если

$$\overline{span}_{\omega\in\Omega} \{F_\omega\} = H.$$

Имеется следующий простой факт.

Лемма 2. *Пусть* $\{F_\omega\}$ *— семейство подпространств в* H, $\varphi \in L^2$. *Тогда соответствующий ИПФ является полным в* H.

Доказательство. Предположим, что $\{F_\omega\}$ не полно. Возьмем ненулевой элемент $f \in H$, такой что $f \perp \overline{span}_{\omega\in\Omega}\{F_\omega\}$. Тогда $\int_\Omega \varphi^2 \|\pi_{F_\omega}\|^2 = 0$. Отсюда — наше семейство не есть ИПФ. ∎

Простой критерий полноты:

Лемма 3. *Пусть* $\{F_\omega\}$ *семейство подпространств в* H. *Geспт* $\{e_{\omega j}\}_{j\in J_\omega}$ *— ортонормальный базис в* F_ω. *Эквивалентны:*

(1) $\{F_\omega\}$ *полно в* H;

(2) $\{e_{\omega j}\}_{\omega\in\Omega, j\in J_\omega}$ *полно.*

Приведем без доказательства (оно появится в части II работы) такой любопытный факт, аналогичный одному результату Pete Cazzasa.

Предложение 1. *Если выкинуть из ИПФ некоторое подпространство, то получится либо ИПФ с той же функцией* φ, *либо неполное семейство подпространств.*

Наконец, наследственное свойство ИПФ.

Лемма 4. *Пусть* $\{F_\omega\}$ *— ИПФ для* H *с функцией* φ *и границами* C, D. *Если* E *— подпространство в* H, *то* $\{F_\omega \cap E\}$ *— ИПФ для* E *с той же порождающей функцией и с теми же границами.*

Доказательство. Для $f \in E$ имеем:

$$\int_\Omega \varphi^2 \|\pi_{F_\omega}(f0\| = \int_\Omega \varphi^2 \|\pi_{F_\omega\cap V}(f)\|^2.$$

∎

198904, Санкт–Петербург,
Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
E-mail address: orein@or1146.spb.edu