Санкт-Петербургский государственный университет

О.И.РЕЙНОВ

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2005

УДК 513.83:513.88
Р е й н о в О. И. Вероятностные методы в конечномерном функциональном анализе – СПб.: 2005
ISBN

Учебное пособие основано на специальном курсе лекций, который читался автором на математико–механическом факультете СПбГУ для студентов старших курсов кафедры математического анализа. Упор в изложении материала сделан на возможностях применения различных вероятностных методов при решении нетривиальных задач геометрической теории конечномерных нормированных пространств. Основные объекты исследования — сечения подпространствами большой размерности центрально–симметричных ограниченных выпуклых тел, лежащих в конечномерных векторных пространствах. Основной вопрос, вокруг которого постоянно происходит действия, — это насколько близким может оказаться полученное сечение к некоторому эллипсоиду, если только размерности как основного пространства, так и его подпространства, производящего сечения, достаточно велики?

Для чтения книги достаточно знания элементарных фактов из теории меры и интеграла Лебега, высшей алгебры и теории операторов в нормированных пространствах.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей, но оно может быть полезно и специалистам как по математическому и функциональному анализу, так и по другим (таким как геометрия) областям математики.

Библиогр. 9 назв. Ил. 7.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Учебное пособие основано на специальном курсе лекций, который читался автором на математико–механическом факультете СПбГУ для студентов старших курсов. Упор в изложении материала сделан на возможностях применения различных вероятностных методов при решении нетривиальных задач геометрической теории конечномерных нормированных пространств. Основные объекты исследования — сечения подпространствами большой размерности центрально– симметричных ограниченных выпуклых тел, лежащих в конечномерных векторных пространствах. Основной вопрос, вокруг которого постоянно происходит действия, — это насколько близким может оказаться полученное сечение к некоторому эллипсоиду, если только размерности как основного пространства, так и его подпространства, производящего сечения, достаточно велики?

Работа, пожалуй, распадается на три основные, но тесно связанные между собой, части. Это — разработка абстрактных методов решения рассматриваемых задач при помощи интегрирования по евклидовым сферам и многообразиям Грассмана и применения этих методов к классическим конечномерным пространствам; применение вероятностного подхода в случае так называемых пространств конечных котипов, и, наконец, изложение основ метода объемных отношений, база которого была заложена еще в 1977 году московским математиком Б.С. Кашиным, и который получил свое замечательное продолжение в дальнейших работах С. Шарека.

При разработке данного спецкурса была частично использована следующая литература (которая вполне может быть рекомендована и для дальнейшего чтения):

T.Figiel, J.Lindenstrauss, V.D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies,* Acta Mathematica, **Vol. 139**, 1977, 53–94.

Gilles Pisier, *The volume of convex bodies and Banach space geometry* (Cambridge tracts in mathematics, **94**). — Cambridge University Press, 1989, 250 pp.

Nikole Tomczak–Jaegermann, *Banach–Mazur distances and finite–dimensional operator ideals.* — Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics, **38**, 1989, 395 pp.

V.D.Milman, G.Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces.* **Vol. 1200** of Lecture Notes in Mathematics. Springer–Verlag, 1986, 156 pp.

Для чтения книги достаточно знания элементарных фактов из теории меры и интеграла Лебега, высшей алгебры и теории операторов в нормированных пространствах.

[0]This work was done with partial support by Grant VNP Minobrazovanija 3.1 №4733, by Grant "Scientific schools" №00-15-96-022 and by a grant of the Swedish Royal Academy of Sciences. This research is supported by a grant from Higher Education Commission, Pakistan.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей, но оно может быть полезно и специалистам как по математическому и функциональному анализу, так и по другим (таким как геометрия) областям математики, тем более, что на русском языке литературы с материалом, о котором пойдет речь в данном пособии, до сих пор не имеется (последняя, связанная с геометрической теорией конечномерных нормированных пространств, книга на русском языке была издана еще в 1969-м году; см. [ГЛюб]).

Я признателен своим студентам, которые прочитали некоторые части этой книжки и внесли значительные коррективы в первоначальный ее вариант, и беседы с которыми привели к появлению целого ряда добавлений и улучшений. Приношу свою искреннюю благодарность Виноградову О.Л., который в свое время целиком прослушал этот спецкурс и предоставил в полное мое распоряжение подробный конспект лекций, без которого написание данного учебного пособия затянулось бы на неопределенное время.

Санкт–Петербург, октябрь 2005 О.И.Р.

Забегая вперед: обозначения и некоторые понятия

Список обозначений и некоторых связанных с этими обозначениями фактов, приводимых ниже, ни в коем случае не претендует на полноту. Мы приводим, в основном, только те обозначения, которые интенсивно используются в настоящем учебном пособии. Надеемся, что этот список облегчит восприятие материала пособия, поскольку к нему можно обратиться в любой момент чтения текста, вместо того, чтобы искать подзабытое определение или даже некоторые утверждения, перелистывая страницы пособия в поисках необходимого.

$C, c, C', K, k, \ldots$	обозначения для всевозможных абсолютных постоянных, значения которых, вообще говоря, не существенны; в одном и том же параграфе один символ типа C может обозначать различные константы
$C(p), c(\varepsilon), M_p, \ldots$	обозначения для всевозможных постоянных, зависящих только от указанного параметра в данном конкретном случае
$\overline{1,n}$	обозначение, заменяющее $1, 2, \ldots, n$
$\asymp$	например, для положительных числовых последовательностей: $s_n \asymp t_n$, если $0 < c\, s_n \le t_n \le C\, s_n$
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathbb{R}^n$	n -мерное арифметическое пространство; декартово произведение n экземпляров прямых
$\mathbb{C}^n$	комплексное арифметическое n -мерное пространство; декартово произведение n экземпляров комплексных прямых
евклидово пространство	$l_2^n = (\mathbb{R}^n, \\| \cdot \\|_2)$ (о нормах $\\| \cdot \\|_p$ см. ниже)
унитарное пространство	$l_2^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^n, \\| \cdot \\|_2)$
шар	произвольное ограниченное абсолютно выпуклое замкнутое тело в пространстве $\mathbb{R}^n$
Vol	мера Лебега (объем) в пространстве $\mathbb{R}^n$; при линейном преобразовании T пространства $\mathbb{R}^n$ объем меняется так: $\mathrm{Vol}\,(T(A)) = \lvert \det T \rvert \ \mathrm{Vol}\ A$
$Vr(E)$	объемное отношение пространства E : $Vr(E) := \inf_{Э \subset B} \left(\dfrac{\mathrm{Vol}\ B}{\mathrm{Vol}\ Э} \right)^{1/n}$,

	где infimum берется по всем эллипсоидам $Э$, содержащимся в шаре B; пример: $Vr(l_1^n) \leqslant \sqrt{\frac{2\,e}{\pi}}$
$\mathcal{O}(n)$	группа ортогональных преобразований пространства l_2^n
$\mathfrak{G}_{n,k}$	грассманово многообразие всех k -мерных подпространств пространства $\mathbb{R}^n$
$\lvert\cdot\rvert$	евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ (так что $\lvert x\rvert^2 = (x,x)$ и $l_2^n = (\mathbb{R}^n, \lvert\cdot\rvert)$
$\lVert\cdot\rVert$	общее обозначение для нормы
$\lVert\cdot\rVert_X$ $\lVert f\rVert_{C[a,b]}$ $\lVert f : C[a,b]\rVert$	это — если необходимо указать, в каком конкретном пространстве рассматривается норма; например, если в пространстве $C[a,b]$, то можно использовать указанные слева обозначения; для операторов имеются и другие возможности (см. ниже);
B_2^n	замкнутый единичный шар в пространстве l_2^n
$V_n(2)$	объем евклидова шара B_2^n : $V_n(2) = \mathrm{Vol}\ B_n^2 = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}$
$S^{n-1}, n>1$	единичная евклидова сфера в пространстве $\mathbb{R}^n$: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \lvert x\rvert^2 = \sum_{k=1}^n \lvert x_k\rvert^2 = 1\}$
ρ	геодезическая метрика на сфере S^{n-1} : длина дуги окружности большого круга, соединяющей две данные точки
A_ε	для множества $A \subset S^{n-1}$ это — его геодезическая ε -окрестность: $A_\varepsilon := \{x \in S^{n-1} : \rho(x,A) \leq \varepsilon\}$
$B(x,\theta)$	для $x \in S^{n-1}$ $B(x,\theta) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x,y) \leqslant \theta\}$; это — шапка на сфере с центром в точке x и радиуса θ
шапка	см. $B(x,\theta)$
M_f	медиана (среднее Леви́) непрерывной функции на некоторой сфере S^k : M_f есть единственное число, для которого $\mu\ \{x \in S^k : f(x) \geqslant M_f\} \geqslant 1/2$ и $\mu\ \{x \in S^k : f(x) \leqslant M_f\} \geqslant 1/2$; здесь μ — вероятность Хаара (см. " μ ") на сфере S^k;
$M(l_1^n)$	например, медиана $M(l_1^n)$ нормы пространства l_1^n

	на евклидовой сфере ведет себя так (при $n \to \infty$): $M(l_1^n) \asymp \sqrt{n}$
эллипсоид	образ евклидова шара B_2^n в $\mathbb{R}^n$ при алгебраическом изоморфизме
эллипсоид Джона	эллипсоид Джона шара (см. "шар") B есть эллипсоид $Э$ максимального объема, вписанный в данный шар; таковой всегда существует и единствен с точностью до ортогонального преобразования (до изометрии); его замечательное свойство состоит в том, что если $B \subset \mathbb{R}^n$, то $Э \subset B \subset \sqrt{n}Э$
$\{e_k\}_{k=1}^n$,	так мы обычно обозначаем стандартный базис в l_2^n, состоящий из единичных ортов
(x,y)	скалярное произведение векторов в гильбертовом (в частности, евклидовом, унитарном) пространстве
$< x, x' >$ или $< x', x >$	значение функционала $x' \in X^*$ на элементе $x \in X$
X^*	пространство, сопряженное к нормированному X, со своей стандартной нормой $\|x'\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \mid < x', x > \mid$
$x, y', \ldots$	обычно, элементы пространств $X, Y^*, \ldots$
$C(K)$	банахово пространство непрерывных на компакте K вещественнозначных функций
$\|f\|_\infty = \max_K \mid f \mid$	норма функции $f \in C(K)$
$\mathfrak{B}(T)$	борелевская σ -алгебра топологического пространства T
(Ω, Σ, μ)	пространство с положительной σ -конечной мерой
$\nu \prec \mu$	абсолютная непрерывность одной меры относительно другой: $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$; последнее равносильно следующему: $\lim_{\mu(A)\to 0} \nu(A) = 0$
μ	мера на некоторой σ -алгебре; чаще всего это — вероятность Хаара на каком-либо метрическом компакте (к примеру, на S^{n-1})
мера Хаара	у нас: мера на борелевской σ -алгебре некоторого метрического компакта, инвариантная относительно действия группы изометрий этого компакта
$L^p(\mu), \quad 0 < p \leqslant +\infty$	L^p -пространство, построенное на пространстве с мерой (Ω, Σ, μ) ; его элементы — классы эквивалентности μ -измеримых функций, для которых конечна величина

$\\|f\\|_p$	$\left(\int_\Omega \|f\|^p\, d\mu\right)^{1/p}$, $0<p<+\infty$, либо $\operatorname{vrai}\sup_\Omega \|f\|$, $p=+\infty$; при $p\in[1,+\infty]$ это — норма на $L^p(\mu)$
функции Радемахера	см. $\{r_n\}_k$
$L_p(\mu)$, $0<p\leqslant+\infty$	$L_p(\mu)=L^p(\mu)$
L^p -пространство	у нас это $L^p(\mu)$ для некоторой меры μ
$(L^p)^*=L^{p'}$, $1\leqslant p<+\infty$	двойственность задается естественным образом; это равенство для пространств с конечными мерами равносильно теореме Радона–Никодима
l^p (или l_p), $0<p\leqslant+\infty$	это $L^p(\mathbb{N},\mu)$, где мера μ на $\mathbb{N}$ такова, что $\mu\{n\}=1\quad\forall n\in\mathbb{N}$; как линейное пространство, состоит из всех числовых последовательностей $x=\{x_1,x_2,\dots\}$, для которых конечна величина
$\\|x\\|_p$	$\left(\sum_1^\infty \|x_j\|^p\right)^{1/p}$, $0<p<+\infty$, либо $\sup_j \|x_j\|$, $p=+\infty$; при $p\in[1,+\infty]$ это — норма
B_p^n, $0<p\leq+\infty$	замкнутый единичный "шар" в пространстве l_p^n; при $p\geq 1$ это настоящий (выпуклый) шар
$V_n(p):=\mathrm{Vol}\ B_p^n$	объем единичного шара в l_p^n; для любого $p>0$ он равен $\dfrac{\left(2\,\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}$; в частности, для $p=1$ получаем: $V_n(1)=\dfrac{2^n}{n!}$
l_∞	все ограниченные последовательности с $\sup$-нормой
c_0	подпространство в l_∞, состоящее из стремящихся к нулю числовых последовательностей
l_p^n	$=(\mathbb{R}^n,\\|\cdot\\|_p)$, где для $x\in\mathbb{R}^n$ $\quad\\|x\\|_p:=\left(\sum_1^n \|x_j\|^p\right)^{1/p}$
$l_p^n\subset l_q^n$	при $p\leqslant q$ норма вложения $\leqslant 1$
$\operatorname{conv} A$	выпуклая оболочка множества A, лежащего в линейном пространстве X; $\operatorname{conv} A=\{\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j : x_j\in X, \lambda_j\geqslant 0, \sum_{j=1}^m\lambda_j=1\}$
$\Gamma(A)$	абсолютно выпуклая оболочка лежащего в линейном пространстве X множества A: $\Gamma(A)=\{\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j : x_j\in X, \sum_{j=1}^m \|\lambda_j\|\leqslant 1\}$
$\overline{\operatorname{conv}}\,A$	замкнутая выпуклая оболочка множества A
$\overline{\Gamma}(A)$	замкнутая абсолютно выпуклая оболочка множества A

$\operatorname{span} B$	линейная оболочка множества B
$\overline{\operatorname{span}}\, B$	замкнутая линейная оболочка множества B
p_B	функционал Минковского множества B для ограниченного абсолютно выпуклого множества B в нормированном пространстве X : $p_B(x) := \inf\{\lambda > 0 :\ x \in \lambda B\}$; p_B — норма на линейной оболочке $\operatorname{span} B$
X_B	пространство $\operatorname{span} B$ с нормой p_B
$(\mathbb{R}^n, B)$	пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой, порождаемой шаром B
$L(X,Y)$	пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y с нормой $\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\|$; непрерывность оператора равносильна его ограниченности
$L(X)$	$L(X) = L(X,X)$; это – нормированная алгебра
$\|T : L_s \to L_r\|$	так можно обозначать обычную норму оператора T, который в данном случае рассматривается как оператор, действующий в указанных пространствах (возможно, он задан и в других)
$I_{sr},\ s, r \ge 1$	формально тождественный оператор из l_s^n в l_r^n; его норма ≤ 1, если $s \le r$ и $\le n^{\|1/p-1/q\|}$, если числа s, r лежат по одну сторону от двойки
$x' \otimes y$	одномерный оператор из X в Y : $(x' \otimes y)(x) :=< x', x > y$
конечномерный оператор	конечная линейная комбинация одномерных операторов; конечномерный оператор представим в виде $\sum_{k=1}^m x'_k \otimes y_k$
$\operatorname{trace} A$	след оператора A (в конечномерном пространстве); след оператора есть след его матрицы в каком–либо алгебраическом базисе (он не зависит от выбора базиса); след равен сумме всех собственных чисел оператора, взятых с учетом их алгебраической кратности; если $A = \sum_{k=1}^m x'_k \otimes y_k$, то $\operatorname{trace} A = = \sum_{k=1}^m < x'_k, y_k >$ и сумма справа не зависит от представления оператора в виде суммы одномерных; в конечномерных пространствах $\operatorname{trace} AB = \operatorname{trace} BA$
$\nu(A)$	ядерная норма оператора $A : X \to Y$; в случае конечномерных пространств вычисляется по формуле $\nu(A) = \sup\limits_{\|S\|\leqslant 1} \operatorname{trace} AS\ \ (S : Y \to X)$
$N(X,Y)$	пространство линейных операторов в конечномерных пространствах, снабженное ядерной нормой ν

W_k — матрицы Уолша $2^k \times 2^k$; $W_0 = (1)$, матрица W_k состоит двух строк–матриц:
первая строка — $(W_{k-1} \quad W_{k-1})$
вторая строка — $(W_{k-1} \ -W_{k-1})$

$\{r_n\}_k$ — последовательность функций Радемахера; одно из самых коротких определений:
$$r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t),\ n \in \mathbb{N};$$
эти функции обычно рассматриваются на $[0,1]$ и принимают там попеременно значения ± 1 (на диадических интервалах)

неравенство Хинчина — $\forall p \in (0,\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \{c_n\}_0^n \subset \mathbb{R}$
$$\alpha_p \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^n c_k r_k(t)\right|^p dt \le \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^n c_k r_k(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} \le$$
$$\le \beta_p \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^n c_k r_k(t)\right|^p dt$$

неравенство Хинчина–Кахана — для всякого $p > 0$ существуют такие положительные числа $\widetilde{A}_p$ и $\widetilde{B}_p$, что для произвольного нормированного пространства X, для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X справедливы неравенства
$$\widetilde{A}_p \left(\int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||^2\, dt\right)^{p/2} \leqslant \int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||^p\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{B}_p \left(\int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||^2\, dt\right)^{p/2};$$
при $p = 1$ точная константа $\widetilde{A}_1$ равна $1/\sqrt{2}$

$d(X,Y)$ — расстояние Банаха–Мазура между двумя нормированными пространствами X, Y :
$$d(X,Y) = \inf\left\{\|T\|\,\|T^{-1}\|\right\},$$
где $\inf$ берется по всем изоморфизмам $T : X \to Y$; если $\dim X = \dim Y$, то $d(X,Y) \le \dim X \le \infty$

$\mathcal{F}_n$ — компакт Минковского (метрика — $\ln d(X,Y)$); получается факторизацией по всем изометриям множества всех n -мерных нормированных пространств (или всех шаров в $\mathbb{R}^n$)

$\operatorname{diam} \mathcal{F}_n$ — диаметр компакта Минковского $\asymp n$ (относительно расстояния Банаха–Мазура $d(X,Y)$)

$d(X, l_2^{dim\, X})$ — всегда не превосходит $\sqrt{dim X}$

$d(l_p^n, l_q^n)$ — если $1 \le p \le q \le 2$ или $2 \le p \le q \le \infty$, то
$$d(l_p^n, l_q^n) = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}};$$
если $1 \le p \le 2 \le q \le \infty$, то
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad cn^\alpha \le d(l_p^n, l_q^n) \le Cn^\alpha,$$

	где $\alpha = \max\{1/p - 1/2, 1/2 - 1/q\}$
$(1+\varepsilon)$-изометрия	для $\varepsilon > 0$ пространства X, Y $(1+\varepsilon)$-изометричны, если найдется обратимый оператор $T \in L(X, Y)$, для которого $\|T\|\,\|T^{1}\| \le 1+\varepsilon$ (в этом случае, конечно, $d(X,Y) \le 1+\varepsilon$); так, любое n-мерное нормированное пространство 2-изометрично некоторому подпространству пространства $l_\infty^{5^n}$
$k(X,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$	$= \max\{k \in \mathbb{N} : \ \exists\, E \subset X : \dim E = k,\ d(E, l_2^k) \leqslant 1+\varepsilon\}$
$k(X)$	$k(X) := k(X,1)$ — максимальная размерность подпространства пространства X, 2-изометричного евклидову пространству соответствующей размерности (более коротко, максимальная размерность 2-евклидова подпространства); например, для любого n-мерного нормированного X $k(X) \geqslant C \ln n$ (теорема Дворецкого); еще пример: $k(l_\infty^n) \asymp \ln n$
$C_p(X)$	константа котипа p пространства X: наименьшая постоянная (возможно, равная $+\infty$), для которой при любом конечном наборе векторов $\{x_j\} \subset X$ выполняется неравенство $$\left(\sum \|x_j\|^p\right)^{1/p} \leqslant C_p(X)\ \left(\int_0^1 \left\|\sum r_j(t)\, x_j\right\|^2\right)^{1/2}$$
пространство котипа p	пространство X, для которого $C_p(X) < +\infty$

"Может случиться, что трудно и даже невозможно найти математический объект с некоторыми данными свойствами, но очень просто указать случайный объект, который обладает этими свойствами почти наверное..."

Jean–Pierre Kahane

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ

Введение

Нет литературы по данной тематике на русском языке, поэтому вполне резонно опубликовать данный спецкурс.

Ω — совокупность объектов, $\mathcal{P}$ — свойство, $\mathcal{P}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Существует ли $\omega \in \Omega$, для которого справедливо $\mathcal{P}(\omega)$? ИДЕЯ: На Ω надо ввести вероятность (меру $\mu(\Omega) = 1$) и рассмотреть вопрос: $\mu\{\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\omega)$ верно $\} > 0$.

Пример. Пусть мы находимся в пространстве $l_1^n := (\mathbb{R}^n, \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|)$. Единичный шар этого пространства — n -мерный октаэдр. Рассмотрим сечение шара $DB_1^n := \{\|x\|_1 \leqslant 1\}$ каким-либо $k-$ мерным подпространством. Для каких $k = \overline{1, n}$ это сечение близко к евклидову шару соответствующей размерности? Растет ли k вместе с n? Или мы никогда (ни при каких больших n) не получим почти евклидово сечение сколь угодно большой размерности? В этом примере можно попытаться ввести вероятностную меру, видимо, на семействах всех k -мерных подпространств (для каждого k) пространства l_1^n (для каждого n) и пробовать отыскать те $k = k(n)$, для которых мера почти евклидовых k -мерных подпространств ненулевая. Надо надеяться, что если действовать таким образом, то "хорошие" размерности $k(n)$ не будут по-крайней мере оставаться ограниченными. Таким образом, при подобном подходе к решению этой задаче должна возникнуть достаточно хорошая мера на семействах $\Omega_n = \{k-$мерные подпространства в $l_1^n\}$, при помощи которой мы, хотя бы и немного, но продвинемся в решении проблемы.

Примерно именно так позже и будут разворачиваться события, в частности, "внутри пространств" l_1^n. Сейчас же мы предложим решение при помощи подобного вероятностного подхода одной интересной задачи совсем из другой области анализа, а именно, из теории случайных полиномов (или, точнее, случайных тригонометрических рядов). Теоремы 1 и 2, которые мы собираемся здесь сформулировать и доказать, представляют собой конкретные и, главное, достаточно прозрачные примеры задач, при решении которых вероятностный метод дает почти наилучшие результаты. Видимо, можно сказать, что в качестве основного пространства Ω будет выступать множество "случайных полиномов". Начнем с формулировки первой теоремы.

Теорема 1 (Зигмунд–Салем). *Существует такая абсолютная положительная постоянная C, что для любого $N \in \mathbb{N}$, для всякого тригонометрического полинома $P_0(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n\, e^{int}$ существует набор из плюс–минус единиц $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{N}$, для которого*

$$\|P\|_\infty = \max_t |P(t)| \leqslant C \left(\sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \, \ln N \right)^{1/2},$$

где $P(t) = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n c_n\, e^{int}$. ■

С другой стороны, напомним, что, конечно же, $\|P\|_\infty \geqslant \|P\|_2 = \|P\|_{L^2(dt/(2\pi))} = \left(\sum_{n=0}^{N} |c_n|^2\right)^{1/2}$; поэтому полином из теоремы 1 — почти экстремально "плохой" (см., однако, ниже замечание 5).

Ниже нам понадобятся функции Радемахера на отрезке $[0,1]$. Последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций Радемахера можно рассматривать как последовательность независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с одинаковыми вероятностями: $r_n = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$ с вероятностями $1/2$.

Теорема 2. *Существует такая абсолютная постоянная $C > 0$, что для любого $N \in \mathbb{N}$ и для всякого тригонометрического полинома $P(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n\, e^{int}$*

$$\mathbb{P}\left\{ \|P_r\|_\infty \geqslant C \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n| \ln N \right)^{1/2} \right\} < \frac{1}{N^2},$$

где $P_r(t) = \sum_{n=0}^{N} r_n\, c_n\, e^{int}$. Более того, для любого полинома вида $P(t) = \sum_{finite} r_n\, P_n(t)$, где $P_n(t)$ — произвольные полиномы степени не выше N (т.е. $P_n(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(n)} e^{ikt}$) имеет место оценка

$$\mathbb{P}\left\{ \|P\|_\infty \geqslant C \left(\sum \|P_n\|_\infty^2 \ln N \right)^{1/2} \right\} < \frac{1}{N^2}.$$

Перед тем как доказывать теорему 2 (и, следовательно, теорему 1) нам надо установить два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right) \leqslant e^{\lambda^2/2}$.

Для доказательства достаточно, например, разложить e^{λ} и $e^{-\lambda}$ по формуле Тейлора. ■

Лемма 2. *Если P — вещественный тригонометрический полином степени не выше N, $N \geqslant 100$, $P(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nt + b_n \sin nt$, то существует интервал I такой, что его длина $|I| = \dfrac{1}{N^2}$ и на I $|P| \geqslant \frac{1}{2}\|P\|_\infty$.*

Доказательство. Для нормы производной P' имеем оценки (при $N \geqslant 100$):

$$\|P'\|_\infty \leqslant N \sum_{n=1}^{N} \left(|a_n| + |b_n|\right) \leqslant N\,(2N)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\right)^{1/2} =$$

$$= N^{3/2}\,(2\pi)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} |P(t)|^2\, dt\right)^{1/2} \leqslant 2\pi N^{3/2} \|P\|_\infty \leqslant N^2 \|P\|_\infty.$$

По теореме Лагранжа о среднем, $|P(t) - P(t_0)| \leqslant |t - t_0|\, \|P'\|_\infty,\ \forall t, t_0$. Выберем точку t_0, в которой модуль полинома достигает своего максимума: $|P(t_0)| = \|P\|_\infty$, и рассмотрим интервал $I = \left[t_0 - \frac{1}{2N^2}, t_0 + \frac{1}{2N^2}\right]$. Тогда для всех $t \in I$ имеем:

$$|P(t)| \geqslant |P(t_0)| - |t - t_0|\, \|P'\|_\infty \geqslant \|P\|_\infty - \frac{1}{2N^2} \cdot N^2 \|P\|_\infty = \frac{1}{2}\|P\|_\infty \quad \blacksquare$$

Замечание 2. Уточнение неравенства, использованного при доказательстве леммы 2 и самой леммы: $\|P\|_\infty \leqslant N\|P'\|_\infty$; это —неравенство Бернштейна; поэтому интервал I в доказательстве леммы 2 может быть выбран таким образом, что $|I| = 1/N$.

Замечание 3. Рассмотрим последовательность функций Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ как последовательность независимых случайных величин. Пусть символ $\mathbb{E}$ обозначает математическое ожидание. Тогда

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda r_n}\right) \leqslant e^{\lambda^2/2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

(см. лемму 1). Этот элементарный факт будет использован через несколько строчек.

Доказательство теоремы 2. Пусть $N \geqslant 100$. Предположим, что все полиномы P_n вещественны (по поводу комплексного случая см, замечание 4). Положим для сокращения записи $M := \|P\|_\infty, r := \sum \|P_n\|_\infty^2$. Фиксируем t. Тогда

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda P(t)}\right) = \mathbb{E}\left(\prod e^{\lambda r_n P_n(t)}\right) = \prod \mathbb{E}\left(e^{\lambda r_n P_n(t)}\right) \leqslant \prod e^{\frac{\lambda^2 \|P_n\|_\infty^2}{2}} = e^{\lambda^2 r/2}$$

(второе равенство есть следствие независимости последовательности случайных величин $\{r_n\}$). Используя эту оценку и применяя сначала лемму 2, а затем — лемму 1, получаем:

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda \frac{M}{2}}\right) \leqslant N^2 \mathbb{E}\left(\int_I \left(e^{\lambda P(t)} + e^{-\lambda P(t)}\right)\, dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant N^2 \mathbb{E}\left(\int_0^{2\pi} \left(e^{\lambda P(t)} + e^{-\lambda P(t)}\right)\, dt\right) \leqslant 2\pi N^2 \cdot 2e^{\lambda^2 r/2}.$$

Таким образом, $\mathbb{E}\left(e^{\lambda M/2}\right) \leqslant e^{\lambda^2 r/2+\ln 4\pi N^2}$, откуда (после умножения правой части на $\dfrac{1}{N^2}\cdot N^2$) $\mathbb{E}\left(e^{\lambda M/2-\lambda^2 r/2-\ln 4\pi N^4}\right) \leqslant 1/N^2$, или $\mathbb{E}\left(e^{\lambda/2\left[M-\lambda r-2/\lambda \ln 4\pi N^4\right]}\right) \leqslant 1/N^2$.

Из последнего соотношения, используя неравенство Чебышева, получаем:

$$\mathbb{P}\{M \geqslant \lambda r + \frac{2}{\lambda}\ln 4\pi N^4\} \leqslant \frac{1}{N^2}.$$

Выберем $\lambda = \sqrt{\dfrac{1}{r}\ln 4\pi N^4}$. Тогда

$$\mathbb{P}\left\{\|P\|_\infty \geqslant \sqrt{\sum \|P_n\|_\infty^2 \ln 4\pi N^4} + 2\sqrt{\sum \|P_n\|_\infty^2 \ln 4\pi N^4}\right\} \leqslant \frac{1}{N^2} \quad \blacksquare$$

Замечание 4. Комплексный случай выводится из рассмотренного в доказательстве случая вещественных полиномов выделением вещественной и мнимой частей (с ухудшением константы).

Замечание 5. Можно "руками" построить тригонометрический полином P вида $P(t) = \sum_{n=0}^{N} \pm e^{int}$, для которого $\|P\|_\infty \leqslant 5\sqrt{N}$ (см. [KaCa, стр. 153]). Полиномы, обладающие подобным экстремальным свойством (по существу лежащие на пересечении сфер пространств L_∞ и L_2 одинакового радиуса) принято называть полиномами Рудина–Шапиро.

ГЛАВА 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§1 Основные обозначения и определения

I. Стандартные обозначения.

Обычно буквой K мы обозначаем какой-либо метрический компакт; $C(K)$ — банахово (т.е. полное нормированное линейное, над полем вещественных или комплексных чисел) пространство с нормой $\|f\|_\infty = \max_K |f|$.

(Ω, Σ, μ) — пространство с положительной мерой.

$L^p(\mu)$ — банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых относительно меры μ функций на некотором множестве Ω, для которых конечна следующая величина:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < +\infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}_\Omega |f|, & p = +\infty. \end{cases}$$

l^p (или l_p): это $L^p(\mathbb{N}, \mu)$, где μ на $\mathbb{N}$ — считающая мера, т.е. $\mu\{n\} = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $\|x\|_p := \left(\sum_1^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} < \infty$.

$l_p^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$

Мы часто рассматриваем разные нормы на пространстве $\mathbb{R}^n$ и, в частности, стандартные инъекции $l_p^n \hookrightarrow l_q^n \ \forall\, p \geqslant q$; норма вложения $\leqslant 1$.

Вообще, имеет место естественное включение $l_p \hookrightarrow l_q \ \forall\, p \geqslant q$ с единичной нормой; в случае, когда $q = \infty$, l_∞ — пространство всех ограниченных последовательностей с $\sup$-нормой; c_0 — его подпространство, состоящее из стремящихся к нулю числовых последовательностей.

Норма в произвводьном нормированном пространстве X обычно обозначается нами через $\|\cdot\|_X$.

II. Меры и измеримые функции.

Пусть $p \in (0, +\infty]$ и (Ω, Σ, μ) — некоторое пространство с положительной мерой.Через $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, или просто $L^p(\mu)$, когда не возникает недоразумений, принято обозначать линейное пространство (классов эквивалентных почти всюду) функций f на Ω, для которых конечна величина

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}, & 0 < p < +\infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}_\Omega |f|, & p = +\infty. \end{cases} \tag{1}$$

При $p \in [1, +\infty]$ пространство $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ оказывается банаховым (то есть полным нормированным) пространством с нормой (1).

Для $p \in [1, +\infty]$ через p' обычно обозначается *сопряженный к p показатель,* который определяется из соотношения $1/p + 1/p' = 1$ (как всегда, используется стандартное соглашение: $1/\infty = 0$). С этими обозначениями, при

$p \in [1, +\infty)$ (банахово) сопряженное к $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ пространство реализуется как пространство $L^{p'}(\Omega, \Sigma, \mu)$, то есть $(L^p(\mu))^* = L^{p'}(\mu)$: всякий линейный непрерывный функционал на $L^p(\mu)$ имеет вид $\Phi(f) = \int_\Omega f g_\Phi \, d\mu$, где $g_\Phi \in L^{p'}(\mu)$, с соответствующим равенством норм: $\|\Phi\| = \|g_\Phi\|_{p'}$.

Теорема (Радона–Никодима). *Пусть Ω, Σ, μ — пространство с σ-конечной положительной мерой, $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ — счетно-аддитивная функция конечной вариации*[1] *Эквивалентны следующие условия:*

(1) *$\nu \prec \mu$ (абсолютная непрерывность меры ν относительно скалярной меры μ, т.е. $\mu A = 0 \implies \nu A = 0$);*
(2) $\exists! \, f \in L^1(\mu) : \forall A \in \Sigma \qquad \nu A = \int_A f \, d\mu$.

Теорема Радона–Никодима равносильна теореме об общем виде линейных непрерывных функционалов на пространствах типа L^p, формулировка которой упоминалась выше.

Мера μ называется *вероятностной мерой* (или просто *вероятностью*), если $\mu(\Omega) = 1$.

Пусть у нас имеется счетное семейство пространств с вероятностными мерами: $\{(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)\}_{j=1}^{\infty}$. Положим

$$\Omega^{(n)} := \prod_{j=n+1}^{\infty} \Omega_j, \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что если $A \subset \prod_{j=1}^n \Omega_j$, то $A \times \Omega^{(n)} \subset \Omega^{(0)}$. Семейство $\mathcal{P}$ множеств вида $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n \times \Omega^{(n)}$, где $n \in \mathbb{N}$, $A_j \in \Sigma_j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$, образует полукольцо, причем $\Omega^{(0)} \in \mathcal{P}$. Для $A = A_1 \times A_2 \times \ldots A_n \times \Omega^{(n)} \in \mathcal{P}$ положим $\mu_0(A) := \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j)$ (напомним, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ мера μ_m является вероятностью, и поэтому естественно, хотя бы интуитивно, считать, что последний множитель $\Omega^{(n)}$ в равенстве, определяющем множество A, не оказывает никакого влияния на вводимую нами "меру" $\mu_0(A)$.) Оказывается, что так определенная функция множества μ_0 является счетно аддитивной на $\mathcal{P}$. По теореме о стандартном продолжении меры, существует единственное вероятностное пространство (Ω, Σ, μ) (заметим, что $\Omega = \Omega^{(0)}$) со следующими свойствами:

(1) Ω является декартовым произведением множеств $\Omega^{(j)}$;
(2) Σ является σ-алгеброй, которая содержит все множества из полукольца $\mathcal{P}$ (по существу, она порождена всеми множествами из $\mathcal{P}$),

[1] Счетно аддитивные функции со значениями в нормированных пространствах ($\nu : \Sigma \to X$, X – нормированное) называются векторными мерами. Вариация $|\nu|$ векторной меры ν определяется так. Для измеримого множества $A \in \Sigma$ полагают: $|\nu|(A) = \sup \sum_{j=1}^k \|\nu(A_j)\|_X$, где супремум берется по всевозможным конечным измеримым разбиения множества A. Векторная мера μ имеет конечную (в иной терминологии, — ограниченную) вариацию, если $\nu(\Omega) < +\infty$.

(3) μ является полной вероятностной мерой на (Ω, Σ) такой, что

$$\mu\left(A_1 \times A_2 \times \dots A_n \times \Omega^{(n)}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(A_j)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $A_j \in \Sigma_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$

По определению, (Ω, Σ, μ) есть *произведение пространств* $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$, которое обозначается следующим образом:

$$(\Omega, \Sigma, \mu) = \prod_{j=1}^{\infty} (\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j).$$

Замечание. Определение произведения вероятностных пространств легко обобщается на тот случай, когда меры в пространствах $(\Omega_j, \Sigma_j, \mu_j)$ положительны и σ-конечны. Одно из наиболее полных изложений конструкции произведения пространств с мерами можно найти, например, в монографии [ДШв1, глава III, §11.]

Естественно, центральными примерами произведений пространств с мерами (не обязательно вероятностных) служат конечномерные евклидовы пространства с их классическими мерами Лебега. Эти меры, с одной стороны, порождаются стандартным объемом, первоначально заданным на ячейках (или, если угодно, на параллелепипедах) и затем продолженным на измеримые по Лебегу множества, а с другой стороны, являются произведением одномерных прямых с их естественной лебеговской мерой. Аналогичным примером служит n-мерная евклидова сфера с ее "инвариантной относительно вращений" нормированной мерой Лебега (мерой Хаара; — подробно об этом одном из важнейших для наших целей случае речь пойдет ниже).

Еще один пример замечательной меры — это инвариантная относительно ортогональных преобразований *гауссовская мера* γ_n на $\mathbb{R}^n$, которая определяется равенством

$$\gamma_n := \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) dx_1, dx_2, \dots, dx_n,$$

то есть, $\gamma_n = e^{-\|x\|_2^2/2}\, dx$. Она, конечно, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а в некотором "разумном смысле" после "разумного проектирования" на единичную сферу порождает на последней ее естественную меру, о которой только что говорилось. Приведем еще один пример несколько другого характера, на этот раз — пример произведения бесконечного числа вероятностных пространств.

Пример. Обозначим через $\mathbb{D}$ счетное произведение "двуточий", а именно, положим $\mathbb{D} := \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$. На каждом экземпляре множества $\{-1, +1\}$ введем дискретную вероятностную меру, принимающую в каждой из двух точек ± 1 одинаковое значение, то есть меру $\dfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$, где, как обычно, через δ_a обозначается мера Дирака с единичной нагрузкой в точке a. Произведением счетного числа этих вероятностей будет равномерно распределенная на $\mathbb{D} = \{\varepsilon : \varepsilon = \{\pm 1\}_{\mathbb{N}}\}$ мера $d\varepsilon$. Эта мера очень тесно связана с равномерно распределенной вероятностной мерой на канторовом множестве.

III. Пространство непрерывных функций.

Определение. μ — мера Радона на компакте (или на топологическом пространстве) при условии, что она задана на борелевской σ-алгебре, регулярная в следующем смысле:

$$\forall B \quad \mu B = \sup\{\mu M : M \subset B, \ \text{M} - \text{компакт}, \mu M < +\infty\}.$$

Если K — компакт, то $F \in C^*(K), F \geqslant 0$ $(\forall f \in C(K), f \geqslant 0, \ F(f) \geqslant 0) \implies \exists !$ конечная мера Радона $\mu \geqslant 0$ на K: $F(f) = \int_K f\, d\mu$, при этом $\|F\| = \mu K$.

Упражнения. 1) K — метрический компакт $\iff$ $C(K)$ — сепарабельно. Это равносильно также тому, что единичный шар в $C(K)*$ является метризуемым $*$-слабым компактом.

[Указание: $\implies$ — рассмотреть ε-сети и семейство функций – расстояния от точки до элементов сетей; применить теорему Стоуна–Вейерштрасса. $\impliedby$ — рассмотреть единичный шар B сопряженного к $C(K)$ пространства в $*$-слабой топологии и выбрав счетное всюду плотное подмножество $\{f_n\} \subset C(K)$, ввести на нем метрику по формуле

$$(b_1, b_2) := \sum_j 2^{-j} \frac{|\langle b_1 - b_2, f_j\rangle|}{1 + |\langle b_1 - b_2, f_j\rangle|}$$

Диагональный процесс Кантора показывает, что с этой метрикой шар B компактен. Далее, компакт K отождествляется с подмножеством шара, состоящим из δ-мер.]

2) Обобщить предыдущее упражнение (на сколько возможно) на случай произвольных нормированных пространств.

IV. Шары и функционалы Минковского.

Определение. Для множества A, лежащего в линейном пространстве X, *выпуклая оболочка* $\operatorname{conv} A := \{\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j : x_j \in X, \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^m \lambda_j = 1\}$; *абсолютно выпуклая оболочка* $\Gamma(A) := \{\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j : x_j \in X, \sum_{j=1}^m |\lambda_j| \leqslant 1\}$. Если X — нормировано, то замкнутая выпуклая и, соответственно, замкнутая абсолютно выпуклая оболочки множества A обозначаются через $\overline{\operatorname{conv}} A$ и, соответственно, $\overline{\Gamma}(A)$.

Определение. Если B — ограниченное абсолютно выпуклое множество в нормированном пространстве X, то *функционал Минковского* множества B есть $p_B(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$.

В условиях последнего определения, p_B — норма на линейной оболочке $\operatorname{span} B$. Пространство $\operatorname{span} B$ с этой нормой обозначается через X_B; если ограниченное абсолютно выпуклое множество B замкнуто в *банаховом* пространстве X, то X_B — полное, то есть банахово пространство (см., например, [Шеф, стр.83]).

Пример. Рассмотрим сепарабельное пространство $C[0,1]$ и оператор тождественного вложения $j : C[0,1] \to L^2[0,1]$. Пусть B — (замкнутый) единичный шар в $C[0,1]$; тогда, мы можем отождествить $j(B)$ с B и написать в пространстве $L^2[0,1]: \quad j(B) = B$. Пространство $\left(L^2[0,1]\right)_B$ есть, конечно, естественная изометричная копия пространства $C[0,1]$, и мы видим, что в бесконечномерном случае p_B существенно отличается от стандартной нормы $\|\cdot\|_2$ (в конечномерном случае все нормы эквивалентны).

Пусть E — n-мерное нормированное пространство с единичным шаром B_E. Пространство E можно при помощи линейного изоморфизма реализовать как $\mathbb{R}^n$ с некоторой нормой $\|\cdot\|_E$ и, поэтому, рассматривая в дальнейшем конечномерные нормированные пространства, мы всегда можем считать, что имеем дело с нормами в $\mathbb{R}^n$. Действительно, если $\{\varphi_k\}_{n=1}^n$ и $\{e_k\}_{n=1}^n$ — соответственно, некоторый алгебраический базис в E и стандартный базис (орты) в $\mathbb{R}^n$, то отображение "базис в базис" есть линейный изоморфизм, переводящий шар B_E в некоторое замкнутое (топологически — хотя бы по евклидовой норме $\mathbb{R}^n$ — замкнутость множества от нормы не зависит) абсолютно выпуклое подмножество $B \subset \mathbb{R}^n$. Полагая $\|\cdot\|_E := p_B$, мы получаем изометричную копию пространства E в виде пары $\{\mathbb{R}^n, B\}$.

Далее, рассматривая подобные реализации конечномерных пространств, *мы будем называть шарами в* $\mathbb{R}^n$ *произвольные ограниченные замкнутые абсолютно выпуклые множества с непустой внутренностью.*

Еще одно замечание общего характера: если E — нормированное пространство (конечномерное), а F —его подпространство (автоматически замкнутое), то, естественно, $B_F = B_E \cap F$.

Замечание. Мы будем обозначать через $L(X,Y)$ пространство всех линейных непрерывных операторов из нормированного пространства X в нормированное пространство Y (если $X = Y$, то мы пишем просто $L(X)$). В терминах шаров оценки для норм операторов означают: $\|A\| \leqslant d \iff A(B_X) \subset d\,B_Y$. Напомним, что $A \in L(X,Y)$ — изоморфизм, если с некоторыми положительными постоянными $c\|x\| \leqslant \|Ax\| \leqslant d\|x\|, \forall x \in X$. Если $c = d = 1$, то A — изометрия (изометрическое вложение). Легко описать последние два понятия в терминах образов шаров.

V. Конечномерные пространства.

Под $\mathbb{R}^n$ мы обычно будем понимать как вещественное n-мерное арифметическое пространство с каноническим алгебраическим базисом $\{e_k\}_{k=1}^n$, так и соответствующее евклидово пространство со стандартным шаром, который обозначается через B_2^n (то есть пространство l_2^n),

Определение. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$. Мы говорим, что B — *эллипсоид,* если существует обратимый $A \in L(\mathbb{R}^n)$, для которого $B = A(B_2^n.)$

Отметим, что если имеется другой линейный изоморфизм, скажем A_0, который порождает тот же эллипсоид, что и A, — $A_0(B_2^n) = B$, — то по необходимости $A^{-1}A_0$ и $A_0^{-1}A$ сохраняют евклидов шар B_2^n, что означает ортогональность операторов $A^{-1}A_0$ и $A_0^{-1}A$. Поэтому линейный изоморфизм A *единствен с точностью до ортогонального преобразования.*

Замечание. Если оператор $A \in L(\mathbb{R}^n)$ — как в определении, то он допускает полярное разложение $A = UV$, где U — изометрическая сюръекция, а V — самосопряженный положительный оператор Таким образом, V переводит B_2^n в "настоящий (стандартный) эллипсоид", а U осуществляет затем некоторое дополнительное ортогональное преобразование. A есть изометрия пространства l_2^n на пространство $\mathbb{R}^n$ с шаром B.

Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ (в l_2^n) мы обозначаем через $(\cdot,\cdot)$. Эллипсоид B порождает на $\mathbb{R}^n$ другое скалярное произведение, которое мы на время обозначим через $(\cdot,\cdot)_B$. Подробнее: эллипсоидом порождается норма p_B, по которой однозначно и определяется скалярное произведение: $(x,y)_B := \frac{1}{4}\left(p_B(x+y)^2 - p_B(x-y)^2\right)$. На $\mathbb{R}^n$ теперь возникают две евклидовы структуры: $l_2^n = (\mathbb{R}^n, |\cdot|, (\cdot,\cdot))$ (здесь мы принимаем короткое удобное обозначение $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ для канонической евклидовой нормы) и $E_B = (\mathbb{R}^n, p_B, (\cdot,\cdot)_B)$. Если эллипсоид B возникает в результате действия оператора A (см. предыдущее замечание), то A осуществляет унитарную эквивалентность этих евклидовых структур.

VI. Об операторах в конечномерных пространствах.

Если E — конечномерное линейное пространство, то мы обозначаем по-прежнему через $L(E)$ множество всех линейных отображений в E (на E можно ввести какую–либо норму, хотя бы евклидову, — все линейные операторы будут непрерывны в этой норме; поэтому наше обозначение согласуется с предыдущими обозначениями и соглашениями).

Определение. Пусть $A \in L(E)$, где E — конечномерное линейное пространство. Реализуем E каким–либо линейным образом как пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть матрица оператора A в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ обозначается снова через A. *След оператора* A есть след матрицы A, то есть (мы одновременно вводим и обозначение для следа), если матрица $A = \{a_{ij}\}$, то $\operatorname{trace} A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Упражнения. 1) Показать, что определение следа не зависит как от конкретной реализации E в виде пространства $\mathbb{R}^n$, так и от выбора базиса (то есть выбора матрицы для оператора A) в $\mathbb{R}^n$. Можно также просто определить след оператора $A \in L(E)$ как след его матрицы в каком–либо алгебраическом базисе самого пространства E.

2) След оператора $A \in L(E)$ равен сумме всех его собственных чисел, взятых с учетом их алгебраических кратностей.

3) Любой непрерывный конечномерный оператор $T : X \to Y$ в произвольных нормированных пространствах X и Y допускает хотя бы одно представление в виде $T = \sum_{k=1}^m x'_k \otimes y_k$, где $\{x'_k\} \subset X*$, а $\{y_k\} \subset Y$. Последнее обозначение, использующее тензорные произведения, означает всего лишь, что оператор T действует следующим образом: если $x \in X$, то $Tx = \sum \langle x'_k, x\rangle y_k$.

4) Учитывая предыдущее упражнение, показать , что если A — оператор в конечномерном пространстве E , то для любого его разложения вида $A = \sum_{k=1}^m e'_k \otimes e_k$ имеет место формула $\operatorname{trace} A = \sum \langle e'_k, e_k\rangle$. Таким образом, с одной стороны, правая часть последнего соотношения не зависит от разложения оператора A в конечную сумму одномерных операторов и, с другой стороны, последнее равенство позволяет ввести понятие следа конечномерного оператора

в бесконечномерных нормированных пространствах (надо только решить еще дополнительное *упражнение:* Если T — конечномерный оператор из упражнения 3), то сумма $\sum\langle x'_k, y_k\rangle$ не зависит от от представления T в виде тензорной суммы одномерных операторов).

5) Показать, что для любых конечномерных пространств E и F и операторов $A \in L(E,F)$, $T \in L(F,E)$ имеет место равенство $\operatorname{trace} AT = \operatorname{trace} TA$, а также, что след тождественного оператора в конечномерном пространстве равен размерности этого пространства.

Определение. *Ядерная норма* на пространстве всех операторов $L(E,F)$, где E и F — конечномерны, вводится следующим образом: если $A \in L(E,F)$, то

$$\nu(A) := \sup_{\substack{S\in L(F,E)\\ \|S\|\leqslant 1}} \operatorname{trace} AS.$$

С этой нормой пространство линейных операторов (в конечномерных пространствах) обозначается обычно так: $N(E,F)$.

Упражнения. 1) Показать, что ν — норма. Поскольку на конечномерных пространствах все нормы эквивалентны между собой, то ядерная норма эквивалентна обычной.

2) В условиях определения $\forall E,F,A,S \qquad |\operatorname{trace} AS| \leqslant \nu(A)\,\|S\|$.

3) Предыдущее неравенство позволяет описать банаховы сопряженные пространства: установить двойственности (с проверкой изометричности)

$$L(E,F)^* = N(F,E) \qquad N(E,F)^* = L(F,E) \qquad \forall\ textf.d.\, E,F.$$

4) Норма α на пространстве линейных операторов $L(X,Y)$ называется кросснормой, если для любого одномерного оператора $x'\otimes y$ справедливо равенство $\alpha\,(x'\otimes y) = \alpha(x')\,\alpha(y)$. Показать, что какова бы ни была кросснорма α на пространстве всех линейных операторов в конечномерных пространствах, имеют место неравенства $\|\cdot\| \leqslant \alpha \leqslant \nu$.

5) Как уже было сказано, ядерная и обычная нормы эквивалентны. Установить следующие *точные* соотношения (рассматриваемые пространства E, F конечномерны):

$$\|\cdot\| \leqslant \nu \leqslant \min\{\dim E; \dim F\}\,\|\cdot\| \qquad \text{in } L(E,F).$$

§2 Функции Радемахера и неравенство Хинчина–Кахана

В теории вероятности простейшими нетривиальными примерами случайных величин служат величины, принимающие значения ± 1 с одинаковой вероятностью $1/2$ (опыт с бросанием монеты). Одна из реализаций подобной серии испытаний Бернулли — последовательность функций Радемахера[2]. *Функции Радемахера*, играющие существенную роль не только в теории вероятностей, обычно определяются следующими соотношениями

---

[2] Вот другая реализация последовательности независимых бернуллиевских случайных величин. Положим $\mathbb{D} := \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ и рассмотрим равномерно распределенную на $\mathbb{D}$ вероятностную меру δ. Обозначим через ε_n $(n = 1,2,\dots)$ функцию на $\mathbb{D}$, вырезающую n-ю координату точки, $\varepsilon_n : \mathbb{D} \to \{-1,+1\}$. Семейство функций $\{\varepsilon_n\}$ может рассматриваться как семейство независимых бернуллиевских случайных величин на вероятностном пространстве $(\mathbb{D}, \mathfrak{B}(\mathbb{D}), \delta)$, где $\mathfrak{B}(\mathbb{D})$ борелевская σ-алгебра. Случайные величины $\{\varepsilon_n\}$ имеют то же распределение, что и функции Радемахера.

Определение. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ n-я *функция Радемахера* задается равенством

$$r_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t \in \Delta_n^i := \left(\dfrac{i-1}{2^n}, \dfrac{i}{2^n}\right), \ i\text{– нечетное,} \\ -1 \text{ при } t \in \Delta_n^i := \left(\dfrac{i-1}{2^n}, \dfrac{i}{2^n}\right), \ i\text{– четное,} \\ 0 \text{ в других случаях} \end{cases}$$

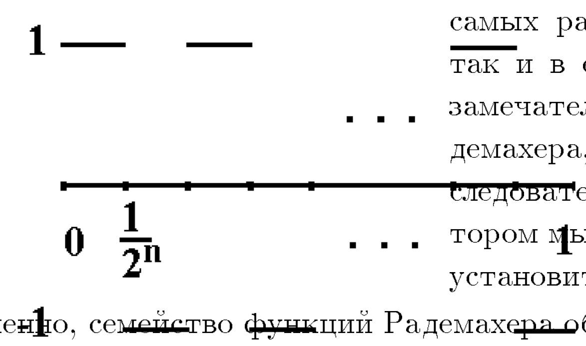
$i = 1, 2, \ldots, 2^n$.

Непосредственно видно, что определение функций Радемахера можно записать совсем коротко следующим образом: для $n = 0, 1, \ldots,$ и $t \in [0,1]$ $r_n(t) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi t$.

Если рассматривать последовательность функций Радемахера как последовательность случайных величин[3], то они являются независимыми с нулевыми средними. Они образуют ортонормированную систему на промежутке $[0,1]$. Если H — гильбертово пространство, то для любого конечного набора векторов $\{x_j\}$ в H выполняется тождество $\int_0^1 \left\|\sum x_j r_j(t)\right\|^2 \, dt = \sum \|x_j\|^2$ (для двух слагаемых это — тождество параллелограмма).

Замечание. Для одномерного гильбертова пространства — это ортонормированность семейства функций Радемахера в пространстве $L_2[0,1]$ (см. ниже).

С точки зрения теории вероятности, это — простейший пример независимых одинаково распределенных случайных величин. Своей простотой и необыкновенной широтой применения функции Радемахера недаром привлекают внимание специалистов в самых различных областях как математики, так и в ее прикладных задачах. Есть одно замечательное свойство системы функций Радемахера, выделяющее ее среди множества последовательностей независимых величин, о котором мы не можем не сказать перед тем, как установить ортонормированность этой системы.



Именно, семейство функций Радемахера обладает тем свойством, что на ее линейной оболочке нормы, индуцированные из различных пространств $\mathrm{L}_p[0,1]$, почти совпадают между собой. Точный смысл этому придают следующие *неравен-*

[3] У нас случайная величина — это просто измеримая функция.

ства Хинчина[4]: $\forall p \in (0,\infty) \forall n \forall \{c_n\}_0^n \subset \mathbb{R}$

$$\alpha_p \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^n c_k r_k(t)\right|^p dt \le \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^n c_k r_k(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} \le \beta_p \int_0^1 \left|\sum_{k=0}^n c_k r_k(t)\right|^p dt \tag{1}$$

где положительные постоянные α_p и β_p зависят только от показателя p, но не от количества слагаемых и коэффициентов c_k.[5] Качественно, неравенства (1) означают, что вполне корректно определена операция тождественного вложения гильбертова пространства $\mathcal{R}_2 := \overline{\operatorname{span}}\{r_n\}_{n=0}^\infty$ (рассматриваемого как замкнутое подпространство в $\mathrm{L}_2[0,1]$) в любое пространство $\mathrm{L}_p[0,1]$ и что это вложение "почти сохраняет нормы." Это уже пример применения в геометрической теории нормированных пространств: из сказанного вытекает, что каждое $\mathrm{L}_p[0,1]$ содержит "изоморфную копию" некоторого бесконечномерного гильбертова пространства (напомним, что как L_p, так и большинство других банаховых пространств не только не являются гильбертовыми, но и не изоморфны никакому гильбертову пространству). Не удивительно, что и у нас в дальнейшем функции Радемахера вместе с неравенством Хинчина будут играть одну из ключевых ролей при случайном выборе большого евклидова подпространства, например, в конечномерных пространствах l_p^n .

Сейчас мы покажем, что функции Радемахера образуют ортонормированную систему в пространстве $\mathrm{L}_2[0,1]$ и, кроме того, установим такое важное свойство этой системы, как независимость[6] (в смысле теории вероятностей).

Пусть $F_0, F_1, \dots, F_n$ — произвольные функции, определенные по крайней мере на множестве из трех чисел $\{0,1,-1\}$. Рассмотрим интеграл

$$J := \int_0^1 F_0(r_0(t))F_1(r_1(t))\dots, F_n(r_n(t))\,dt.$$

Поскольку множество, на котором функции Радемахера могут принимать нулевые значения, имеет нулевую лебегову меру, то, при преобразовании интеграла, мы можем не брать точки этого множества в расчет.

Обозначим через W_k, $k = 1,2,\dots,n-1$, "хвост" подынтегральной функции: $W_k(t) := F_{k+1}(r_{k+1}(t))\dots, F_n(r_n(t))$. Производя замену переменной по формуле

[4] Александр Яковлевич Хинчин (1894–1959) — русский математик. Один из основоположников российской школы теории вероятностей. Великолепный мастер преподавания математики, он опубликовал несколько замечательных книг популярного, но весьма строгого с математической точки зрения, характера.

[5] См., например, [Зиг1, стр. 341, теорема 8.4]; там неравенство Хинчина записано в несколько другой, но эквивалентной форме. Мы воспроизведем последнюю ниже — см. (2).

[6] Набор $\{f_k\}_{k=1}^n$ измеримых относительно пространства с вероятностной мерой (Ω,Σ,μ) функций, определенных на Ω, называется набором независимых функций, если для любых промежутков Δ_k, $k = 1,2,\dots,n$ на прямой справедливо равенство $\mu\{\cap_{k=1}^n f_k^{-1}(\Delta_k)\} = \prod_{k=1}^n \mu\{f_k^{-1}(\Delta_k)\}$ Последовательность функций $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ называется последовательностью независимых функций, если для любого n независимым является конечный набор $\{f_k\}_{k=1}^n$.

$s := t - j2^{-k}$ и замечая, что при $m > k$ $\quad r_m(t + j2^{-k}) \equiv r_m(t)$, мы видим, что имеет место равенство

$$\int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} W_k(t)\,dt = \int_0^{2^{-k}} W_k(t)\,dt.$$

Поэтому

$$\int_0^1 F_k(r_k(t))W_k(t)\,dt = \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} F_k(r_k(t))W_k(t)\,dt =$$

$$= [\,\underbrace{F_k(1) + F_k(-1) + \cdots + F_k(-1)}_{2^k \text{ слагаемых}}\,] \int_0^{2^{-k}} W_k(t)\,dt =$$

$$= \left[2^k \sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{j2^{-k}}^{(j+1)2^{-k}} F_k(r_k(t))\,dt\right] \int_0^{2^{-k}} W_k(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 F_k(r_k(t))\,dt \int_0^1 W_k(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 F_0(r_0(t))F_1(r_1(t))\ldots F_n(r_n(t))\,dt =$$

$$= \int_0^1 F_0(r_0(t))\,dt \int_0^1 F_1(r_1(t))\,dt \cdots \int_0^1 F_n(r_n(t))\,dt.$$

В частности:

a) система функций Радемахера образует последовательность независимых случайных величин, — достаточно в качестве $\{F_k\}$ взять набор характеристических функций каких–либо промежутков, и мы попадем в условия определения независимости последовательности функций;

b) система функций Радемахера ортогональна, — достаточно в качестве $\{F_k\}$ взять набор одинаковых функций: $F_1(t) = \cdots = F_n(t) = t$, и заметить, что интеграл по промежутку $[0,1]$ от каждой функции Радемахера с положительным индексом, очевидно, равен нулю;

c) функции Радемахера нормированы, — это очевидно.

Поскольку последовательность функций Радемахера образует ортонормированную систему, для любого конечного набора $\{c_k\}$ справедливо равенство

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=0}^n c_k r_k(t)\right|^2 dt\right)^{p/2} = \left(\sum_{k=0}^n |c_k|^2\right)^{1/2}.$$

Поэтому неравенство Хинчина (1) может быть переписано в другой эквивалентной форме (именно в этом виде мы и будем его применять):

$$a_p \left(\sum_k |a_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_k r_k(t)\, a_k\right|^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant b_p \left(\sum_k |a_k|^2\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Отметим один весьма существенный для дальнейших применений факт: в последнем неравенстве $b_p \leqslant 2\sqrt{p}$ для любого $p > 0$. Можно показать (нам это не понадобиться), что $\overline{\lim\limits_{p\to+\infty}}\, (b_p/\sqrt{p}) \leqslant \exp(-1/2)$.

Важным для дальнейшего обобщением неравенства Хинчина будет установленное Ж.-П. Каханом неравенство Хинчина–Кахана — векторнозначное неравенство Хинчина. Мы приведем формулировку соответствующей теоремы и докажем упомянутое неравенство в одном очень важном случае.

Теорема (Ж.-П. Кахан). *Для всякого $p > 0$ существуют такие положительные числа $\widetilde{A}_p$ и $\widetilde{B}_p$, что для произвольного нормированного пространства X, для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X справедливо неравенство*

$$\widetilde{A}_p \left(\int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||^2\, dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||^p\, dt\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{B}_p \left(\int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||^2\, dt\right)^{1/2}. \quad \blacksquare$$

Элементарное и вместе с тем, по-видимому, наиболее простое из известных доказательств неравенства Хинчина–Кахана можно найти, например, в [Мак].

Мы приведем доказательство теоремы Кахана для одного важнейшего частного случая. Результат, формулируемый ниже, получен польскими математиками Р.Латала и К.Олешкевичем[7], причем постоянная $1/\sqrt{2}$, найденная ими, неулучшаема[8].

Теорема (Р.Латала, К.Олешкевич). *Для любого нормированного пространства X, любого $n \in \mathbb{N}$ и любых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||^2\, dt\right)^{1/2} \leqslant \int_0^1 ||\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k||\, dt.$$

[7] R. Latala, K. Oleszkiewicz, On the best constant in the Khinchin-Kahane inequality, Studia Math., 1994, vol 109, N11, 101-104.

[8] Приводимое ниже доказательство взято из работы "*Подкорытов А.Н., Рейнов О.И., О неравенстве Хинчина-Кахана, Алгебра и анализ. 1998, том 10, вып. 1, с. 265-270.*"

Перейдем к *доказательству теоремы Латала-Олешкевича.* Её можно переформулировать следующим образом. Зафиксируем произвольный набор x векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и свяжем с ним функцию

$$f_x(t) = || \sum_{k=1}^{n} r_k(t)\, x_k \,||.$$

Очевидно, утверждение теоремы равносильно тому, что

$$\int_0^1 f_x^2(t)\, dt \leqslant 2 \left(\int_0^1 f_x(t)\, dt \right)^2. \tag{3}$$

Это неравенство мы и будем доказывать. Функция f_x устроена довольно просто: на промежутках вида $\left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right)$, $j = 1, \dots, 2^n$, она постоянна. Множество всех таких вещественно-значных функций образует линейное пространство E размерности 2^n. В нøм естественно ввести скалярное произведение

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt \text{ для любых } f, g \in E,$$

которое порождает евклидову норму

$$||f||_E = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_0^1 f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Ясно, что функции Радемахера образуют ортонормированную систему в E, которая, конечно, не является базисом, так как размерность E равна 2^n, а функций Радемахера только n. Дополним эту систему функциями Уолша. Функцией Уолша $w(t)$ порядка k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ называется произведение k различных функций Радемахера $w(t) = r_{n_1}(t) \cdots r_{n_k}(t)$, где $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_k \leqslant n$. Порядок функции Уолша w будем обозначать $k = \operatorname{ord} w$. При этом функция Уолша нулевого порядка (обозначим ее w_0) – это функция всюду равная 1. Ясно, что функции Уолша первого порядка совпадают с функциями Радемахера. Легко видеть, что функции Уолша образуют ортогональную систему в E. Обозначим ее W_n. Так как имеется ровно C_n^k функций Уолша $k-$ го порядка, то система W_n состоит из $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ функций. Следовательно, W_n является ортонормированным базисом в E. Поэтому каждая функция f из E раскладывается по базису W_n:

$$f = \sum_{w \in W_n} (f, w) w.$$

В силу ортонормированности системы W_n для любых функций $f, g \in E$ справедливы равенство

$$(f, g) = \sum_{w \in W_n} (f, w)(g, w) \quad \text{и}$$

$$\text{теорема Пифагора} \quad ||f||_E^2 = \sum_{w \in W_n} (f, w)^2.$$

Интересующая нас функция f_x обладает важным для дальнейшего свойством – ее график симметричен относительно прямой $t = 1/2$, то есть $f_x(t) = f_x(1-t)$, и, следовательно, график функции $f_x(t)r_j(t)$ симметричен относительно точки $(\frac{1}{2}, 0)$ (это немедленно следует из равенства $r_j(t) = -r_j(1-t)$). Поэтому $(f_x, r_j) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, то есть $(f_x, w) = 0$, если $\operatorname{ord} w = 1$.

Определим операцию "дифференцирования" для функций из E:

$$Df(t) = \sum_{w \in W_n} \operatorname{ord} w \ (f, w) w(t).$$

Ясно, что это линейная операция. Решающее значение в доказательстве играет неравенство

$$Df_x(t) \leqslant f_x(t) \text{ для всех } t \in [0, 1].$$

Его доказательство мы ненадолго отложим, а сейчас покажем, как получить из него неравенство (3). Так как $(f_x, w) = 0$, если $\operatorname{ord} w = 1$, то из неравенства $Df_x \leq f_x$ следует, что

$$||f_x||_E^2 = \int_0^1 f_x^2(t)dt \geqslant \int_0^1 f_x(t) Df_x(t) dt = \sum_{w \in W_n} \operatorname{ord} w \ (f_x, w)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 2 \sum_{\substack{w \in W_n \\ w \neq w_0}} (f_x, w)^2.$$

Таким образом, с помощью теоремы Пифагора получаем

$$||f_x||_E^2 \geqslant 2(||f_x||_E^2 - (f_x, w_0)^2),$$

то есть

$$\int_0^1 ||r_1(t)x_1 + \dots + r_n(t)x_n||^2 dt = ||f_x||_E^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2(f_x, w_0)^2 = 2\left(\int_0^1 ||r_1(t)x_1 + \dots + r_n(t)x_n|| dt\right)^2.$$

Итак, осталось доказать неравенство $Df_x \leq f_x$. Для этого получим сначала "разностное" представление для введенной нами операции "дифференцирования". Всякая функция f из E единственным образом представима в виде суперпозиции $f(t) = F(r_1(t), \dots, r_n(t))$, где F – некоторая функция, определенная на векторах $(\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^n$. Докажем, что

$$\begin{aligned} 2Df = {} & F(r_1, \dots, r_n) - F(-r_1, r_2, \dots, r_n) + \\ & + F(r_1, \dots, r_n) - F(r_1, -r_2, \dots, r_n) + \\ & \dots \\ & + F(r_1, \dots, r_n) - F(r_1, \dots, r_{n-1}, -r_n). \end{aligned}$$

Так как любая функция f из E раскладывается по базису W_n, то это тождество достаточно доказать лишь для функций Уолша. Для функции w_0 нечего доказывать. Пусть $w \in W_n$ и $\operatorname{ord} w \geqslant 1$, то есть $w = r_{n_1} \cdots r_{n_k}$. Этой функции соответствует функция $F(u_1, \ldots, u_n) = u_{n_1} \cdots u_{n_k}$. Поэтому

$$F(r_1, \ldots, r_n) - F(\ldots, r_{j-1}, -r_j, r_{j+1} \ldots) = \\ = \begin{cases} 2F(r_1, \ldots, r_n), & \text{если } j \in \{n_1, \ldots, n_k\} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Просуммировав эти равенства по $j = 1, \ldots, n$, получим, что сумма приращений функции F по всем координатам равна $2kF(r_1, \ldots, r_n) = 2 \operatorname{ord} w\ w = 2Dw$, что и требовалось доказать.

Наконец, используя доказанное тождество для функции f_x, с помощью неравенства треугольника получаем

$$2Df_x = n||r_1x_1 + \cdots + r_nx_n|| - (|| - r_1x_1 + \cdots + +r_nx_n|| + \\ + \cdots + ||r_1x_1 + \cdots - r_nx_n||) \leqslant n\,||r_1x_1 + \cdots + r_nx_n|| - \\ - ||(n-2)r_1x_1 + \cdots + (n-2)r_nx_n|| = 2||r_1x_1 + \cdots + r_nx_n|| = 2f_x. \quad \blacksquare$$

ГЛАВА 2. ПЕРВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕТРИВИАЛЬНОСТИ

§1 Теорема Джона и лемма Дворецкого–Роджерса

В этом параграфе все будет происходить в фиксированном пространстве $\mathbb{R}^n, n > 0$. Поэтому мы в качестве обозначения для меры Лебега (объема) в этом пространстве выберем независимый от размерности символ Vol. Нам понадобится известное элементарное неравенство, которое мы, однако, сформулируем в виде леммы:

Лемма 1. *Для любого набора* $\{\alpha_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}_+^n$

$$\left(\prod_{j=1}^n \alpha_j\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \alpha_j,$$

причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда все числа α_j *совпадают между собой.*

Доказательство. Экспонента — строго выпуклая функция, и есть неравенство Йенсена. ■

Напомним (см. выше), что под шаром в $\mathbb{R}^n$ мы понимаем любое замкнутое ограниченное абсолютно выпуклое тело.

Теорема 1 (Ф. Джон). *Если* B *— шар в пространстве* $\mathbb{R}^n$, *то существует эллипсоид* D, *для которого* $D \subset B \subset \sqrt{n}D$. *В качестве такого эллипсоида можно взять эллипсоид максимального объема, вписанный в шар* B, *который существует и единствен с точностью до ортогонального преобразования.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть T — некоторый оператор в $\mathbb{R}^n$, который мы рассматриваем как оператор $T: l_2^n \to (\mathbb{R}^n, p_B)$. Образ шара B_2^n есть эллипсоид D, и этот эллипсоид лежит в B тогда и только тогда, когда $\|T\| \leqslant 1$. Среди всех таких эллипсоидов мы выберем тот, у которого объем максимален (ясно, что такой эллипсоид вписан в B, то есть для него $\|T\| = 1$). Почему подобный эллипсоид существует? Ну, какой–нибудь то вписанный в B эллипсоид $\widetilde{D}$ найдется, и ему соответствует оператор $\widetilde{T}$ с единичной нормой. Рассмотрим следующий максимум:

$$\max_{\|\widetilde{T}\|=1} \operatorname{Vol} \widetilde{T}\,(B_2^n)\,.$$

Так как объем образа $\widetilde{T}\,(B_2^n)$ с точностью до абсолютной константы есть детерминант оператора $\widetilde{T}$, а детерминант — непрерывная функция на компакте

$$\left\{\widetilde{T} \in L\,(l_2^n, \mathbb{R}_B^n):\ \|\widetilde{T}\| = 1\right\},$$

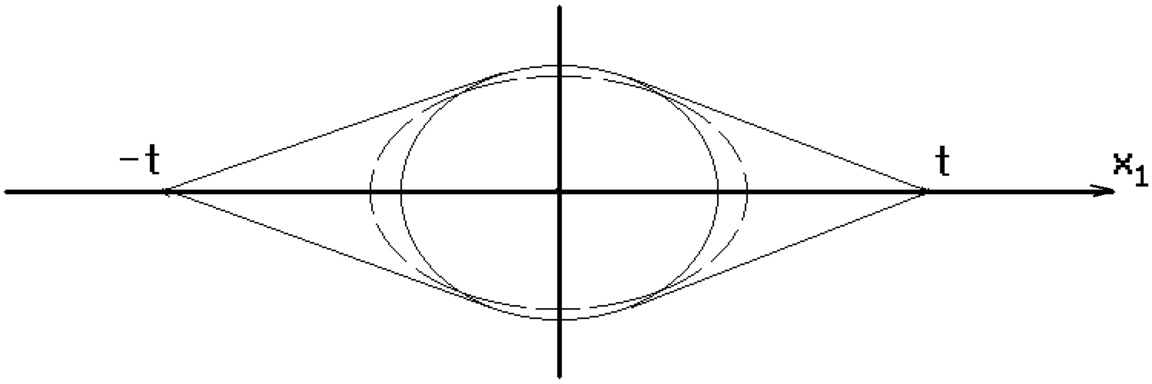
то указанный максимум достигается, скажем, на эллипсоиде D.

Шаг 2. Проверим включение $B \subset \sqrt{n}D$. Без ограничения общности, можно предполагать, что эллипсоид D является евклидовым шаром в R^n (вопрос: почему?)[9].

Предположим, что $B \not\subset \sqrt{n}\,D$, то есть, что существует точка $b, b \in B$, для которой $|b| > \sqrt{n}$ (вспомним, что когда–то мы договорились обычную евклидову норму обозначать так же, как и модуль). Поскольку неравенство строгое, мы можем считать, что эта точка b — внутренняя для B. Далее, применив, если необходимо, ортогональное преобразование (покрутив пространство), мы можем рассматривать точку b как вектор с координатами $(t, 0, \ldots, 0)$, где единственная ненулевая (первая) координата t строго больше корня из n : $t > \sqrt{n}$. Присоединим к шару D два симметричных друг другу конуса, образовав абсолютно выпуклое тело $K := \operatorname{conv}(D \cup \{+t; -t\})$ (отметим, что $K \subset B$ в силу выпуклости последнего множества). Мы сейчас построим *замкнутый эллипсоид Э того же объема,* что и наш шар D, *целиком лежащий внутри* B : $Э \subset \operatorname{Int} B$, что, естественно, приведет к противоречию.

Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$ (выбор уточним потом) и рассмотрим эллипсоид $Э$ того же объема, что единичный евклидов шар D :

$$Э := \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (1-\varepsilon)^{n-1}\, x_1^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon}\right\}, \qquad \text{где } y^2 := \sum_{k=2}^{n} x_k^2.$$



[9] Пусть $S \in L(\mathbb{R}^n)$ — такой оператор, что $S(D) = B_2^n$; обозначим $B_0 := S(B)$ и рассмотрим эти две пары:

$$D \subset B \qquad \text{и} \quad B_2^n \subset B_0.$$

Нужное нам включение $B \subset \sqrt{n}D$ равносильно (в силу биективности оператора S) тому, что $B_2^n \subset \sqrt{n}B_0$. При этом, так как $\operatorname{Vol} T(A) = |\det T| \operatorname{Vol} A$, то $\operatorname{Vol} S(D) = \det S \operatorname{Vol} D$ и $\operatorname{Vol} S(B) = \det S \operatorname{Vol} B$, откуда $S(D)$ (то есть B_2^n) имеет максимальный объем среди вписанных в B_0 эллипсоидов. Поэтому–то и можно сразу считать, что наш максимальный эллипсоид — обычный шар.

При $\varepsilon \to 0$ соотношение, определяющее эллипсоид $Э$, можно переписать так:

$$(1)\qquad \left((1-(n-1)\varepsilon)\, x_1^2 + y^2 + \varepsilon y^2 + o(\varepsilon) \leqslant 1\right), \qquad \text{или}$$

$$\left(x_1^2 + y^2 - 1\right)(1+\varepsilon) \leqslant \varepsilon\, \left(n x_1^2 - 1\right) + o(\varepsilon).$$

Теперь рассмотрим две возможности.

Если $|x_1| < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{t}\right)$, то при достаточно малых ε правая часть в (1) отрицательна, то есть $x_1^2 + y^2 < 1$, и часть эллипсоида $Э$ с такими первыми координатами лежит внутри шара, а значит и внутри B.

Если $|x_1| \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{t}\right)$, то, по выбору точки b, $|x_1| > \dfrac{1}{t}$, откуда вытекает, что и эта часть эллипсоида $Э$ (напомним, $b \in \operatorname{Int} B$) попадает во внутренность B.

Таким образом, $Э \subset \operatorname{Int} B$ и, следовательно, при достаточно малом $\alpha > 0$ эллипсоид $(1+\alpha)\, Э$ лежит в B, имея больший чем D объем.

Шаг 3 — единственность. Прежде чем переходить к проверке единственности эллипсоида максимального объема D, мы вычислим ядерную норму (см. предыдущий параграф) обратного оператора к оператору T, ассоциированному с этим эллипсоидом.

Лемма 2. *Пусть D — эллипсоид максимального объема, построенный на Шаге 1 и T — соответствующий ему изометрический оператор из l_2^n в $(\mathbb{R}^n, p_B)$. Ядерная норма обратного к T оператора равна n.*

Доказательство. Отметим еще раз, что мы рассматриваем операторы T и T^{-1} и считаем их обычную и ядерную нормы в соответствии со следующей диаграммой:

$$l_2^n \xrightarrow{\;T\;} \mathbb{R}_B^n := (\mathbb{R}^n, p_B) \xrightarrow{\;T^{-1}\;} l_2^n$$

По построению D (или оператора T, — см. Шаг 1),

$$|\det T| = \max_{\substack{S \in L(l_2^n, \mathbb{R}_B^n)\\ \|S\| \leqslant 1}} |\det S|.$$

Ниже норма $\|\cdot\|$ обозначает норму оператора, рассматриваемого как отображение из l_2^n в $\mathbb{R}_B^n$, а I — тождественное отображение в $\mathbb{R}^n$. Для всякого линейного $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\left|\det \frac{T+U}{\|T+U\|}\right| \leqslant |\det T|,$$

или $|\det(T+U)| \leqslant |\det T| \cdot \|T+U\|^n$, или, что то же самое (напомним, что оператор T обратим) $|\det(I + T^{-1} + U)| \leqslant \|T+U\|$, откуда $|\det(I + T^{-1} + U)| \leqslant (1 + \|U\|)^n$. Рассматривая вместо U операторы виды εU, где $\varepsilon > 0$ (ниже мы будем устремлять ε к нулю), получаем:

$$1+\varepsilon\|U\|\,n+o(\varepsilon)\geqslant(1+\varepsilon\|U\|)^n\geqslant\left|\det\left(I+\varepsilon T^{-1}U\right)\right|=\left|1+\varepsilon\ \mathrm{trace}\ T^{-1}U+o(\varepsilon)\right|;$$

При всех достаточно малых ε последние соотношения верны и без модулей; поэтому для любого оператора U с нормой, не большей единицы, $\mathrm{trace}\ T^{-1}U\leqslant n$ и, следовательно, $\nu(T^{-1})\leqslant n$. Обратное неравенство получается из того, что норма обратимого оператора T равна единице: $n=\mathrm{trace}\,I=\mathrm{trace}\,TT^{-1}\leqslant\nu(T^{-1})\,\|T\|\leqslant\nu(T^{-1})$ ■

Продолжим доказательство нашей теоремы. Итак, пусть $T,S:l_2^n\to\mathbb{R}_B^n$ — операторы, для которых $T(B_2^m)$ и $S(B_2^n)$ — эллипсоиды максимального объема, вписанные в B. Для более легкого восприятия дальнейшего изложения, полезно иметь перед глазами следующую диаграмму:

$$l_2^n\xrightarrow{\ S\ }\mathbb{R}_B^n\xrightarrow{\ S^{-1}\ }l_2^n\xrightarrow{\ T\ }\mathbb{R}_B^n$$

Как мы выяснили выше,

$$|\det T|=|\det S|=\max_{\substack{V\in L(l_2^n,\mathbb{R}_B^n)\\ \|V\|\leqslant1}}|\det V|.$$

Рассмотрим оператор TS^{-1} и его полярное разложение $TS^{-1}=UA$, где U — ортогональное преобразование (в l_2^n — напомним, что все операторы действуют в одном и том же *линейном* пространстве $\mathbb{R}^n$), а A — положительный самосопряженный оператор. Мы покажем, что в базисе из собственных векторов A представляется единичной матрицей, что, естественно, завершит доказательство теоремы. Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ — полный набор собственных чисел оператора A. Все эти собственные числа положительны и

$$\prod_{j=1}^n\lambda_j=\det A=\det\left(U^{-1}TS^{-1}\right)=1.$$

Далее, для следа этого оператора мы имеем, с одной стороны, оценку: $|\,\mathrm{traceA}\,|=|\,\mathrm{trace}\,U^{-1}TS^{-1}|\leqslant\|U^{-1}\|\,\|T\|\,\nu(S^{-1})\leqslant n$ (лемма 2), а с другой стороны, формулу $\mathrm{trace}\,A=\sum_{j=1}^n\lambda_j$. По лемме 1,

$$1=\left(\prod_{j=1}^n\lambda_j\right)^{1/n}\leqslant\frac1n\sum_{j=1}^n\lambda_j\leqslant1.$$

Следовательно, в последних соотношениях — всюду знаки равенства, и поэтому $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$. ■

Теорема 2 (лемма Дворецкого–Роджерса). *Пусть* B *— некоторый шар в* $\mathbb{R}^n$, *порождающий норму* $\|\cdot\|$, D *— эллипсоид максимального объема, вписанный в* B. *Ассоциированную с* D *норму обозначим через* $|\cdot|$. *Существует ортонорми-*

рованная относительно $|\cdot|$ *система* $\{f_j\}_{j=1}^n$, *для которой*

$$(2) \qquad \forall\, j=\overline{1,n} \qquad \|f_j\| \geqslant 2^{-\dfrac{n}{n-j+1}}$$

В частности,

$$\exists\, f_1, f_2, \ldots, f_{[n/2]}: \quad |f_j|=1,\ \|f_j\| \geqslant \frac{1}{4} \qquad \left(\forall\, j=\overline{1,\left[\frac{n}{2}\right]}\right).$$

Доказательство. Можно считать, что D обычный евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ (эллипсоид линейным преобразованием можно превратить в шар). Последовательность $\{f_j\}$ мы выберем по индукции. В качестве f_1 возьмем произвольный элемент из D, максимальной $\|\cdot\|$-нормы (очевидно, для него $|f_1|=\|f_1\|=1$).

Предположим, что для некоторого $j \geqslant 1$ мы уже построили ортонормированное множество $\{f_1,\ldots,f_j\}$ с необходимыми свойствами. В качестве f_{j+1} рассмотрим элемент максимальной $\|\cdot\|$-нормы, лежащий в пересечении $\operatorname{span}\{f_1,\ldots,f_j\}^{\perp} \cap D$. Нужное семейство построено. Мы имеем, в частности: если $x \in \operatorname{span}\{f_i,\ldots,f_n\}$, то $\|x\| \leqslant \|f_i\|$. Проверим справедливость неравенств (2). Для этого зафиксируем некоторое $j, j=\overline{1,n}$, и рассмотрим эллипсоид (выбор участвующих в определении этого эллипсоида чисел a, b произведем позже):

$$\text{Э} := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i : \ \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{j-1} a_i^2 + \frac{1}{b^2}\sum_{i=j}^{n} a_i^2 \right\}$$

Для любой точки $\sum_{i=1}^n a_i f_i \in \text{Э}$ имеем:

1) $\left|\sum_1^{j-1} a_i f_i\right| \leqslant a \implies \sum_1^{j-1} a_i f_i \in a\,B$;

2) $\left|\sum_j^{n} a_i f_i\right| \leqslant b,\ \left\|\sum_j^{n} a_i f_i\right\| \leqslant \|f_j\| \implies \sum_j^{n} a_i f_i \in (b\|f_j\|)\,B$.

Положим $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2\|f_j\|}$. В этом случае из 1) и 2) мы получаем, что $\text{Э} \in B$ и, следовательно, $\operatorname{Vol} B \leqslant \operatorname{Vol} D$. Но $\operatorname{Vol} \text{Э} = 2^{-(j-1)}\,(2\|f_j\|)^{-(n-j+1)} \operatorname{Vol} D$, и, таким образом, $2^{-n}\|f_j\|^{-(n-j+1)} \leqslant 1$. ■

Замечание. Основное свое применения лемма Дворецкого–Роджерса найдет при доказательстве теоремы Дворецкого о почти евклидовых сечениях большой размерности шаров в нормированных пространствах. В формулировке этой леммы уже неявно содержится намек на возможность существования подобного рода сечений: теорема 2 говорит о том, что в любом конечномерном пространстве $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ найдется набор из по крайней мере $C\dim X$ векторов, которые образуют ортонормированную относительно евклидовой структуры систему.

§2 Расстояние Банаха–Мазура

Определение. Для пары (вещественных или комплексных) нормированных пространств E, F положим $d(E,F) := \inf\left\{\|T\|\,\|T^{-1}\| : T : E \to F - \text{ изоморфизм } \right\}$.

Если не существует ни одного изоморфизма между пространствами E и F, то считаем, что $d(E,F) = +\infty$. Введенная величина называется *расстоянием Банаха–Мазура* между пространствами E и F.

Упражнение. Если пространства E и F конечномерны и $\dim E = \dim F$, то существует изоморфизм $T : E \to F$, для которого $\|T\| \|T^{-1}\| = d(E,F)$.

[Указание: См. ниже замечание 1.]

Замечание 1. В конечномерном случае $d(E,F) = 1 \iff$ пространства E и F изометричны между собой. Действительно, если $d(E,F) = 1$, то найдется последовательность $\{T_n\}$ изоморфизмов из E в F, для которых $\|T_n\| = 1$ и $\|T_n^{-1}\| \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Так как эта последовательность ограничена в конечномерном пространстве $L(E,F)$, то можно считать, что она сходится в $L(E,F)$ к некоторому оператору T. Этот предельный оператор, очевидно, является изометрией из E на F.

Замечание 2. Если пространства E, F бесконечномерны, то из равенства $d(E,F) = 1$, вообще говоря, не вытекает, что эти пространства изометричны между собой. Вот пример.

Пример (А. Пелчинский). Рассмотрим пространство c_0 сходящихся к нулю вещественных последовательностей с его стандартной нормой $\|x\|_0 := \max_j |x_j|$ для $x \in c_0$ и введем на нем еще две (эквивалентные стандартной) нормы: для $k = 0, 1$ и $x \in c_0$ положим

$$\|x\| := \|x\|_0 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2j} x_{j+k}^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим соответствующие банаховы пространства через E_0 и E_1. Чтобы увидеть, что $d(E_0, E_1) = 1$, достаточно рассмотреть операторы $T_n : E_0 \to E_1$, определяемые соотношением

$$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_n, x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}, \dots).$$

Ясно, что $\lim_n \|T_n\| \|T^{-1}\| \to 1$. Однако эти два пространства не изометричны между собой — их шары различаются по своим геометрическим свойствам: пространство E_0 строго выпукло[10], а E_1 — нет.

Замечание 3. $d_{\mathbb{R}}$ и $d_{\mathbb{C}}$ — совсем разные вещи:

Теорема 1 (Шарек, 1985). *Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $2n$-мерное вещественное нормированное пространство E : какое-бы n-мерное комплексное нормированное пространство F ни взять* (оно автоматически является $2n$-мерным вещественным), *$d_{\mathbb{R}}(E, F_{\mathbb{R}}) \geq C\sqrt{n}$, где $F_{\mathbb{R}}$ есть F, рассматриваемое как вещественное пространство.* ■

То есть, если в E вводить комплексную структуру, то оно сразу экстремально портится; см. ниже некоторые оценки для расстояния Банаха–Мазура.

[10] $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \implies c_1 x + c_2 y = 0$

Теорема 2 (Шарек, 1985). *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существуют* n*-мерные комплексные нормированные пространства* E *и* F, *для которых* $d_{\mathbb{R}}(E,F) = 1$ (то есть они не различимы как вещественные), *но* $d_{\mathbb{C}}(E,F) \geq C\,n$ (экстремально далеки друг от друга как комплексные). ■

Элементарные свойства:

1) $d(E,F) \leq d(E,G)\,d(G,F)$.

Это позволяет ввести метрику $(\log d)$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{F}_n}$ — все n-мерные нормированные пространства (или все нормы на $\mathbb{R}^n$, или все шары в $\mathbb{R}^n$). Если факторизовать $\widetilde{\mathcal{F}_n}$ по изометриям, то получим $\mathcal{F}_n$ — *компакт Минковского.*

Упражнение. Доказать, что $\mathcal{F}_n$ — компакт.

[Указание: Метрическое пространство $\mathcal{F}_n$ можно рассматривать как семейство Φ_n всех норм на $\mathbb{R}^n$ с соответствующей (индуцированной расстоянием Банаха–Мазура) метрикой. Напомним, что через B_2^n мы обозначаем евклидов шар. Положим $\widetilde{\Phi}_n := \{f \in C(B_2^n) : \ f \in \Phi_n\} \subset C(B_2^n)$. По теореме Арцела–Асколи, $\widetilde{\Phi}_n$ — компакт в $C(B_2^n)$ (ограниченность вытекает из теоремы Джона; см. также следующее свойство). Осталось рассмотреть естественное отображение $\widetilde{\Phi}_n \to \mathcal{F}_n$, — оно "на" и непрерывно.]

2) Из теоремы Джона вытекает весьма важный факт об оценке расстояния между конечномерными пространствами:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, E \ \text{ with } \ \dim E = n \qquad d(E, l_2^n) \leq \sqrt{n}.$$

Таким образом, принимая во внимание предыдущее свойство, получаем:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, E,F \ \text{ with } \ \dim E = \dim F = n \qquad d(E,F) \leq n.$$

Замечание 4. $\operatorname{diam} \mathcal{F}_n \geq C\,n$, где $C > 0$ — абсолютная постоянная (об этом будет сказано немного в следующем отступлении).

Остановимся ненадолго на двумерной ситуации:

Факт 1 (Asplund, 1960). *Пусть* X_2 — *пространство* $\mathbb{R}^2$ *с шаром "правильный шестиугольник".*

1)Для всякого 2-мерного нормированного пространства E $\quad d(E, l_\infty^2) \leq 3/2$, *причем* $d(E, l_\infty^2) = 3/2 \iff E = X_2$.

2)Для всякого 2-мерного нормированного пространства E $\quad d(E, X_2) \leq 3/2$, *причем* $d(E, X_2) = 3/2 \iff E = l_\infty^2$.

Факт 2 (Stromquist, 1981). *Существует такое двумерное нормированное пространство* X_0, *что для любого двумерного* E $\quad d(E, X_0) \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Таким образом, из последнего утверждения вытекает, что диаметр компакта $\mathcal{F}_2$ не больше трех вторых, что вместе с результатами Асплунда дает точное равенство: $\operatorname{diam} \mathcal{F}_2 = \frac{3}{2}$ (расстояние между X_2 и l_∞^2 равно в точности трем вторым).

Отметим, что построенное Stromquist'ом пространство X_0 оказывается "центром" компакта $\mathcal{F}_2$. Поскольку, очевидно, в конечномерной ситуации $d(E,F) = d(E^*,F^*)$, то центром в $\mathcal{F}_2$ является и сопряженное пространство X_0^*. Пространства X_0 и X_0^* не изометричны между собой, так что в компакте $\mathcal{F}_2$ имеется два центра.

До результата Stromquist'а естественными предположениями о величине диаметров компактов $\mathcal{F}_n$ были два: либо $\operatorname{diam}\mathcal{F}_n$ не больше, чем корень из n (что представлялось маловероятным, хотя ни одного примера пары n-мерных пространств с $d(E,F) > \sqrt{n}$ для больших размерностей не было), либо (во что верило большинство специалистов) диаметр компактов $\mathcal{F}_n$ растет с ростом n как степень n^α с $\alpha > 1/2$. Результат Stromquist'а побудил специалистов в конечномерном функциональном анализе наброситься на задачу о поведении величины $\operatorname{diam}\mathcal{F}_n$ при $n \to \infty$. И довольно скоро ленинградский математик Е. Глускин решил эту проблему, подтвердив, что имеет место экстремально худшая (или лучшая?) ситуация: $\operatorname{diam}\mathcal{F}_n \asymp n$ при $n \to \infty$.

Известны значения, или, по крайней мере, асимптотические поведения,[11] (см. [ГЛюб]) расстояний между классическими конечномерными L_p-пространствами. Следующая теорема, помимо ее важности самой по себе, будет играть еще и одну из ключевых ролей при выборе в конечномерных нормированных пространствах почти евклидовых подпространств большой размерности.

Теорема 3 (Гурарий–Кадец–Мацаев).

i) $1 \le p \le q \le 2$ *или* $2 \le p \le q \le \infty \implies d(l_p^n, l_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$;

ii) $1 \le p \le 2 \le q \le \infty \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad cn^\alpha \le d(l_p^n, l_q^n) \le Cn^\alpha$,

где $\alpha = \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right\}$, *а* $c > 0$ *и* $C > 0$ *— абсолютные постоянные.*

Замечание 5. В последнем случае $C = 1$ для комплексных пространств; для вещественных пространств $C = 1$, если размерность есть степень двойки: $n = 2^k$.

Приведем *доказательство* последней теоремы (помимо желания не терять полноту изложения, автор хочет познакомить читателя с элементами техники, которая применяется в подобного рода вопросах, в частности, с применением в геометрической теории операторов так называемых матриц Уолша, а также простейших фактов из теории интерполяции).

Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Матрицы Уолша* $W_k := \left(w_{mj}^{(k)}\right)_{2^k \times 2^k}$ определяются по индукции следующим образом: $W_0 = (w_{11}^{(0)}) = (1)$; для $k \geqslant 1$

$$w_{mj}^{(k)} := \begin{cases} w_{st}^{k-1}/\sqrt{2}, \text{ если } 1 \leqslant s,t \leqslant 2^{k-1} \text{ и } \begin{cases} m = s \text{ и } j = t, \text{ или} \\ m = s \text{ и } j = 2^{k-1}+t, \text{ или} \\ m = j = 2^{k-1}+s \text{ и } j = t \end{cases} \\ -w_{st}^{k-1}/\sqrt{2}, \text{ если } 1 \leqslant s,t \leqslant 2^{k-1} \text{ и } m = j = 2^{k-1}+s,\, j = 2^{k-1}+t. \end{cases}$$

Иначе говоря,

$$W_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W_{k-1} & W_{k-1} \\ W_{k-1} & -W_{k-1} \end{pmatrix} \qquad \text{для } k \geqslant 1.$$

[11] Полученные еще в 1966 году В.И. Гурарием, М.И. Кадецом и В.И. Мацаевым.

Матрицы Уолша пригодятся нам при рассмотрении вещественных пространств l_p^n при доказательстве утверждения (ii). Что касается комплексного случая, то там мы используем комплексные матрицы V_n, составленные из кратных корням из единицы: $V_n := \left(\varepsilon_{mj}^{(n)}\right)_{n\times n}$, где

$$\varepsilon_{mj}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\, e^{2\pi i m h j/n}, \qquad m, j = \overline{1,n}.$$

Нетрудно проверить, что W_k — ортогональная, а V_n — унитарная матрицы для $k \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$. Введем еще одно обозначение, которое удобно будет использовать при доказательстве теоремы Гурария–Кадеца–Мацаева. Для $s, t \in [1, +\infty]$ пусть I_{st} обозначает оператор тождественного отображения $l_s^n \to l_t^n$ (мы ниже будем рассматривать фиксированное n, поэтому индекс n в обозначение для оператора не включаем).

Доказательство утверждения (i). Как мы отмечали, $d(E, F) = d(E^*, F^*)$ для конечномерных пространств, поэтому достаточно рассмотреть лишь случай $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Так как $\|I_{pq}\|\,\|I_{qp}\| = n^{1/p-1/q}$ (достаточно применить неравенство Гельдера и посчитать норму $\|I_{qp}\|$ на векторе $e = (1, 1, \ldots, 1)$, для которого $\|e\|_q = n^{1/q}$), то $d(l_p^n, l_q^n) \leqslant n^{1/p-1/q}$. Чтобы получить обратное неравенство, покажем сначала, что $d(l_q^n, l_2^n) \geqslant n^{1/2-1/q}$. Для этого рассмотрим произвольный изоморфизм $T : l_q^n \to l_2^n$, считая, что $\|T^{-1}\| = 1$. Положим $f_j := Te_j$, $j = \overline{1,n}$, где $\{e_j\}_{j=\overline{1,n}}$ — набор ортов в l_q^n, и выберем последовательно знаки $\alpha_1 = 1$, $\alpha_j = \pm 1$ $(j = \overline{2,n})$ таким образом, чтобы в l_2^n выполнялись неравенства

$$\begin{gathered}(\alpha_1 f_1,\, \alpha_2 f_2) \geqslant 0,\\ (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2,\, \alpha_3 f_3) \geqslant 0,\\ \vdots\\ (\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_{n-1} f_{n-1},\, \alpha_n f_n) \geqslant 0.\end{gathered}$$

Так как $1 = \|e_j\|_q = \|T^{-1} f_j\|_q \leqslant \|f_j\|_2$, то $\|\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \|f_j\|_2^2 + \alpha \geqslant n$ (здесь $\alpha \geqslant 0$ — сумма выписанных выше скалярных произведений). Поэтому

$$\|T\| \geqslant \frac{\left\|T\left(\sum_{j=1}^n e_j\right)\right\|_2}{\left\|\sum_{j=1}^n e_j\right\|_Q} \geqslant n^{1/2-1/q}$$

и $d(l_q^n, l_2^n) \geqslant n^{1/2-1/q}$. Вместе с уже доказанным обратным неравенством это дает равенство $d(l_q^n, l_2^n) = n^{1/2-1/q}$. Используя свойство 1) расстояния Банаха–Мазура, окончательно получаем:

$$n^{1/2-1/q} = d(l_q^n, l_2^n) \leqslant d(l_p^n, l_2^n)\, d(l_q^n, l_p^n) \leqslant n^{1/2-1/p}\, d(l_q^n, l_p^n).$$

Доказательство утверждения (ii). . Мы можем считать, что $1/p - 1/2 \leqslant 1/2 - 1/q$ (иначе перейдем к сопряженным пространствам). Это неравенство равносильно неравенству $1/q \leqslant 1/p'$, или $p' \leqslant q$.

1) *Шаг 1.* Получение оценки сверху.

(i) Сначала мы разберемся со случаем, когда либо рассматриваемые пространства комплексные, либо они вещественные, но размерность их есть степень двойки.

Пусть $T : l_p^n \to l_q^n$ — оператор, соответствующий матрице Уолша W_k $(n = 2^k)$ в вещественном случае, и соответствующий унитарной матрице V_n в комплексном случае. Для оценки норм этих операторов мы воспользуемся так называемой интерполяционной техникой[12]. Справедливо следующее утверждение, представляющее собой давно ставшую классической интерполяционную теорему Рисса–Торина:

> *Пусть* (Ω, Σ, μ) *— пространство с мерой,* $1 \leqslant r_0, r_1, s_0, s_1 \leq \infty$. *Пусть, далее,* T *— оператор, действующий непрерывно из* $L_{s_i}(\mu)$ *в* $L_{r_i}(\mu,)$ *с нормами*
>
> $$M_i := \|T : L_{s_i} \to L_{r_i}\|, \qquad i = 0, 1.$$
>
> *Для* $0 < \theta < 1$ *положим*
>
> $$\frac{1}{s} = \frac{1-\theta}{s_0} + \frac{\theta}{s_1}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$
>
> *Тогда* T *действует как ограниченный оператор из* $L_s(\mu)$ *в* $L_r(\mu)$ *и*
>
> $$\|T : L_s \to L_r\| \leqslant M_0^{1-\theta}\, M_1^{\theta}.$$

Мы применяем эту теорему к нашему оператору T в случае, когда $s_0 = r_0 = 2$, $s_1 = 1$, $r_1 = +\infty$, $\theta = 2/p - 1$ и, следовательно, $s = p$ и $r = p'$. Оператор T определяется ортогональной (либо унитарной) матрицей, поэтому

$$\|T : l_2^n \to l_2^n\| = 1.$$

Далее, нетрудно видеть, что $\|Te_j\|_\infty = 1/\sqrt{n}$ для $j = \overline{1,n}$. Поэтому, если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in l_1^n$, то

$$\|Tx\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j|\, \|Te_j\|_\infty = n^{-1/2}\, \|x\|_1$$

и, таким образом,

$$\|T : l_1^n \to l_\infty^n\| = n^{-1/2}.$$

[12] С началами теории интерполяции операторов, по видимому, целесообразней всего познакомиться по книге [БеЛф]; комплексный вариант используемой нами классической теоремы Рисса–Торина появляется в этой книге уже на 10-й странице.

По теореме Рисса–Торина,

$$\|T : l_p^n \to l_{p'}^n\| \leqslant 1^{1-\theta} \left(n^{-1/2}\right)^{\theta} = n^{-1/2(2/p-1)} = n^{-1/p+1/2}.$$

Так как $p' \leqslant q$, то $\|T : l_p^n \to l_q^n\| \leqslant \|T : l_p^n \to l_{p'}^n\| \, \|T : l_{p'}^n \to l_q^n\| \leqslant n^{-1/p+1/2}$ (вторая норма в середине равна единице). Норма обратного оператора оценивается совсем просто:

$$\|T^{-1} : l_q^n \to l_p^n\| \leqslant \|I_{q2}\| \, \left\|T^{-1} : l_2^n \to l_2^n\right\| \, \|I_{2p}\| \leqslant n^{1/2-1/q} \, n^{1/p-1/2},$$

поэтому $\|T : l_p^n \to l_q^n\| \, \|T^{-1} : l_q^n \to l_p^n\| \leqslant n^{1/2-1/q}$.

(ii) Пусть теперь рассматриваемые пространства вещественны и их размерность n не есть степень двойки. Мы будем доказывать наше утверждение по индукции.

Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и некоторой константы $C > 0$ при всех m, $1 \leqslant m \leqslant 2^k$ выполнено неравенство $d(l_p^n, l_q^n) \leqslant C\, m^{\alpha}$, где через α мы для краткости обозначили число $\max\{1/p - 1/2, 1/q - 1/2\}$ (выбор постоянной $C > 0$ мы уточним позже, — окажется, что ее можно будет выбрать ни от чего не зависящей). Пусть $n = 2^k + m$, где $1 \leqslant m \leqslant 2^k$. Пусть, далее, для $s = p, q$ $E_s^{2^k}$ — подпространство в l_s^n, все элементы которого имеют нулевые координаты на местах, начиная с $(2^k + 1)$-го, а F_s^m — оставшийся "хвост", то есть "ортогональное" дополнение в l_s^n к подпространству $E_s^{2^k}$ (для евклидова случая $s = 2$ конечно же кавычки можно убрать: $l_2^n = E_2^{2^k} \oplus F_2^m$).

По индукционному предположению, по уже рассмотренному случаю (i) и определению расстояния Банаха–Мазура (см. упражнение после этого определения), найдется пара операторов

$$T_1 : E_p^{2^k} \to E_q^{2^k} \qquad \text{и} \;\; T_2 : F_p^m \to F_q^m,$$

для которых $\|T_1\| = \|T_1^{-1}\| \leqslant 2^{k\alpha/2}$ и $\|T_2\| = \|T_2^{-1}\| \leqslant C^{1/2}\, m^{\alpha/2}$. Положим $T = T_1 + T_2$. Если $x \in l_p^n$ и $x = x_1 + x_2$ — его (единственное) разложение в прямую сумму элементов из $E_p^{2^k}$ и, соответственно, из F_p^m, то

$$\|Tx\|_q \leqslant \|Tx_1\|_q + \|Tx_2\|_q \leqslant 2^{k\alpha/2}\, \|x_1\|_p + C^{1/2}\, m^{\alpha/2}\, \|x_2\|_p.$$

Выберем теперь число $C > 0$ таким образом, чтобы для любых $k \in \mathbb{N}$ и m, $1 \leqslant m \leqslant 2^k$, было справедливо неравенство $2^{k\alpha/2} + C^{1/2}\, m^{\alpha/2} \leqslant C^{1/2}\, \left(2^k + m\right)^{\alpha/2}$. При таком выборе C мы получим: $\|Tx\|_q \leqslant C^{1/2}\, n^{\alpha/2}\, \|x\|_p$ и, следовательно, $\|T\| \leqslant C^{1/2}\, n^{\alpha/2}$. Совершенно аналогично (в силу выбора нормировки) доказывается неравенство $\|T^{-1}\| \leqslant C^{1/2}\, n^{\alpha/2}$. Поэтому $d(l_p^n, l_q^n) \leqslant \|T\| \, \|T^{-1}\| \leqslant C\, n^{\alpha}$.

2) *Шаг 2.* Получение оценки снизу.

Нам понадобится обозначение для l-й координаты произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ $(l = \overline{1,n})$, а именно, мы будем писать $x = \sum_l x^{(l)} e_l$, имея ввиду разложение вектора x по каноническому базису пространства $\mathbb{R}^n$. Также договоримся о том, что *индексы* k *и* l, *появляющиеся ниже, будут изменяться в пределах от* 1 *до* n. Существенную роль в получении необходимой нам оценки сыграет замечательное *неравенство Хинчина* (см. § "Функции Радемахера и неравенство Хинчина–Кахана").

Неравенство Хинчина. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Существует такая постоянная* B_p *(зависящая только от* p *), что для любого конечного набора комплексных чисел* $\{a_k\}_k$ *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_k |a_k|^2\right)^{1/2} \leqslant B_p \left(\int_0^1 \left|\sum_k r_k(t)\, a_k\right|^p dt\right)^{1/p},$$

где $\{r_k\}_k$ *— последовательность функций Радемахера.*

Это неравенство означает, что на линейном пространстве, порожденном семейством функций Радемахера все L_p-нормы, $p \in [1, +\infty)$, эквивалентны между собой.

Пусть $T : l_p^n \to l_q^n$ — линейный изоморфизм, для которого $\|T^{-1}\| = 1$. Для получения оценки нормы оператора T снизу положим $x_k := Te_k$, $k = \overline{1,n}$, и начнем с рассмотрения соотношений

$$n = \sum_k \|e_k\|_q^2 = \sum_k \|T^{-1}x_k\|_q^2 \leqslant \sum_k \|x_k\|_p^2 = \sum_k \left(\sum_l \left|x_k^l\right|^p\right)^{2/p}. \tag{1}$$

Рассмотрим вектора $y_l := \sum_k \left|x_k^l\right|^p e_k$. Для них

$$y_l^{(k)} = \left|x_k^{(l)}\right|^p, \ \left(\sum_l y_l\right)^{(k)} = \sum_l \left|x_k^l\right|^p \ \text{и} \ \left\|\sum_l y_l\right\|_{2/p}^{2/p} = \sum_k \left(\sum_l \left|x_k^l\right|^p\right)^{2/p}.$$

Поэтому, продолжая (+), получаем:

$$n \leqslant \left\|\sum_l y_l\right\|_{2/p}^{2/p} \leqslant \left(\sum_l \|y_l\|_{2/p}\right)^{2/p} = \left(\sum_l \left(\sum_k \left|x_k^l\right|^2\right)^{p/2}\right)^{2/p}. \tag{2}$$

Применим ко внутренней сумме в правой части соотношений (2) неравенство Хинчина:

$$n \leqslant \left(\sum_l \left(B_p \int_0^1 \left|\sum_k r_k(t)\, x_k^{(l)}\right|^p dt\right)^{p/p}\right)^{2/p} = \tag{3}$$

$$= B_p^2 \left[\int_0^1 \left(\sum_l \left|\sum_k r_k(t)\, x_k^{(l)}\right|^p\right) dt\right]^{2/p}.$$

Так как

$$(4)\quad \left(\sum_k r_k(t)\,x_k\right)^{(l)} = \left(\sum_k r_k(t)\,\left(\sum_l x_k^{(l)} e_l\right)\right)^{(l)} =$$

$$= \left(\sum_l \left(\sum_k r_k(t)\,x_k^{(l)}\right) e_l\right)^{(l)} = \sum_k r_k(t)\,x_k^{(l)},$$

то, учитывая (4), из (3) мы получаем:

$$n \leqslant B_p^2 \left(\int_0^1 \left\|\sum_k r_k(t)\,x_k\right\|_p^p dt\right)^{2/p} \leqslant B_p^2 \left(\int_0^1 \|T\|^p \left\|\sum_k r_k(t)\,e_k\right\|_q^p dt\right)^{2/p} =$$

$$= B_p^2\,\|T\|^2 \left(\int_0^1 \left\|\sum_k r_k(t)\,e_k\right\|_q^p dt\right)^{2/p} = B_p^2\,\|T\|^2\,n^{(2/p)(p/q)} = \|T\|^2\,n^{2/q},$$

и, таким образом, $\|T\| \geqslant B_p^{-1}\,n^{1/2-1/q}$. ■

Замечание 6. Сравнивая рассуждения, проведенные на промежутке от формул (1) до формул (2), мы видим, что там было доказано некоторое элементарное неравенство типа теоремы Фубини–Тонелли: для $1 \leqslant p \leqslant 2$ правая часть из (1) не превосходит правой части соотношения (2). На самом деле, справедливо более общее хорошо известное неравенство подобного вида. Мы сформулируем его в самой общей форме (упражнение 1)). Дополнительно, мы приведем еще одно упражнение на применение неравенства Хинчина (это некоторый частный случай более общего факта)

Упражнения. 1) Пусть $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ — пространства с σ-конечными мерами и f — $\mu_1 \otimes \mu_2$-измеримая функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$. Если $0 < p \leqslant q < +\infty$, то

$$\left\{\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} |f(\omega_1,\omega_2)|^p\,d\mu_2\right)^{q/p} d\mu_1\right\}^{1/q} \leqslant \left\{\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} |f(\omega_1,\omega_2)|^q\,d\mu_1\right)^{p/q} d\mu_2\right\}^{1/p}.$$

[Указание: См. замечание 6; в рассуждениях, о которых упоминается в этом замечании, замените дискретные переменные (индексы) на "непрерывные" ω_1 и ω_2. Более подробно, можно рассмотреть (при фиксированной второй переменной) функцию одной переменной $F(\omega_1) := |f(\omega_1,\cdot)|^p$ на Ω_1, почти всюду принимающую свои значения в пространстве $L_{q/p}(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Далее надо аккуратно выписать две формулы для вычисления интегралов:

$$\left\|\int_{\Omega_1} F(\omega_1)\,d\mu_1(\omega_1)\right\|_{q/p} \quad \text{и} \quad \int_{\Omega_1} \|F(\omega_1)\|_{p/q}\,d\mu_1(\omega_1)$$

и применить что–то вроде неравенства треугольника.]

2) Пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$. Для любого L_p-пространства $L_p(\mu)$ и любой системы функций $\{g_k\} \subset L_p(\mu)$

$$\left(\sum_k \|g_k\|_p^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\left(\sum_k g_k^2\right)^{1/2}\right\|.$$

[Указание: Если не получается, то решение см. ниже в примере 2 в параграфе *"Пространства котипа p"*.]

§3. Мера Хаара

В этом параграфе мы приведем довольно любопытное доказательство существования на произвольном метрическом компакте, на котором действует некоторая группа изометрий, инвариантной относительно действия этой группы нетривиальной положительной меры (меры Хаара). Доказательство будет основываться на следующей комбинаторной олимпиадной задаче (первоисточник мне не известен).

Лемма 1 ("Marriage Theorem"). *На вечере собралось несколько юношей и девушек. При этом оказалось, что если выбрать любую группу юношей, то число девушек, знакомых по крайней мере с одним из юношей этой группы, будет не меньше числа юношей в группе. Можно образовать танцевальные пары из всех молодых людей таким образом, что каждый юноша будет танцевать в паре со знакомой девушкой.*

Доказательство. Доказываем лемму индукцией по n — числу юношей. При $n = 1$ доказывать нечего. Пусть $n > 1$ и утверждение верно для всех чисел, меньших n. Доказывая его для числа n, рассмотрим два случая.

1) Найдется такая группа A юношей, что $k := |A| < n$ и общее число всех знакомых с ними девушек равно k. Пусть каждый юноша из этой группы танцует со знакомой девушкой (это возможно по индукционному предположению). Для оставшейся группы юношей условие леммы будет выполнено (и, следовательно, опять таки по индукционному предположению, из оставшихся юношей и девушек мы сможем образовать пары надлежащим образом). Действительно, если имеется группа B из l не входящих в A юношей, то у юношей из $A \cup B$ имеется не менее чем $k + l$ знакомых девушек и, следовательно, у юношей из B имеется не менее чем l знакомых девушек (по свойству множества A).

2) У любой группы из $k < n$ юношей число знакомых девушек больше k. В этом случае, пусть один из юношей танцует со знакомой ему девушкой. Для оставшейся группы юношей мы можем, очевидно, применить индукционное предположение, что доказывает лемму и в этом случае. ■

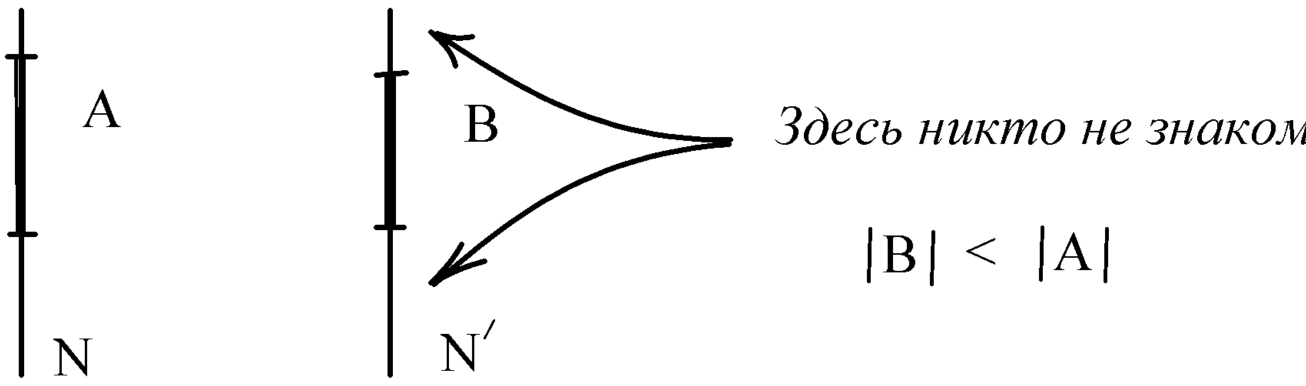
Лемма 2 (О 2ε-единственности минимальной ε-сети). *Пусть* (K, ρ) *– метрический компакт,* $\varepsilon > 0$, N *– минимальная* ε*-сеть в* K, N' *– другая минимальная* ε*-сеть в* K, ($|N| = |N'|$). *Существует биекция* $\varphi : N \to N'$, *для которой* $\rho(t, \varphi(t)) \le 2\varepsilon$, *какова бы ни была точка* $t \in N$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1. В качестве множества "юношей" будет выступать сеть N, а "девушки" составляют множество N'. Элементы $t \in N, s \in N'$ "знакомы", если $\rho(t, s) \le 2\varepsilon$. Проверим выполнение условия леммы 1.

Пусть это условие не выполнено, то есть

$$\exists\, A \subset N : \qquad \text{для } B := N' \cap \{s \in N' : s \text{ знакомо с } A\} \qquad |B| < |A|.$$

Покажем, что $(N \setminus A) \cup B$ является ε-сетью для K (тогда будет получено противоречие с минимальностью сети N).



Пусть $u \in K$. Если найдется такое $s \in B$, что $\rho(s,u) \le \varepsilon$, то все доказано. В противном случае,

$$\exists\, s \in N' \setminus B : \quad \rho(s,u) \le \varepsilon,$$

При этом $\rho(s, A) > 2\varepsilon$ (все $s \in N' \setminus B$ не знакомы с A). Но N – ε-сеть, откуда вытекает, что $\exists\, t \in N \setminus A : \ \rho(t,u) \le \varepsilon$. ■

Теорема 1 (о существовании меры Хаара). *Пусть* (K,ρ) *– метрический компакт,* G *– группа изометрий на* K. *Существует радоновская вероятностная мера* μ *на* K, *инвариантная относительно действия группы* G, *то есть регулярная вероятностная борелевская мера* μ, *обладающая следующим свойством:*

$$\mu\, g(A) = \mu\, A, \qquad \forall\, g \in G, \ \forall\, A \subset \mathfrak{B}(K),$$

или, что то же самое,

$$\mu(f \circ g) = \mu(f), \qquad \forall\, g \in G, \ \forall\, f \in C(K),$$

(то есть, $\int_K f(gt)\, d\mu(t) = \int_K f(t)\, d\mu(t) \quad \forall\, g \in G, \ \forall\, f \in C(K)$ *).*

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ зафиксируем некоторую минимальную ε-сеть N_ε в K и положим $\mu_\varepsilon(f) := |N_\varepsilon|^{-1} \sum_{t \in N_\varepsilon} f(t)$ для $f \in C(K)$. Каждая мера μ_ε есть дискретная вероятность на K $(\mu_\varepsilon(K) = 1)$, поэтому семейство $\{\mu_\varepsilon\}_\varepsilon$ лежит в единичном шаре $B = \overline{B} \subset C^*(K)$ сопряженного к $C(K)$ пространства, который является метризуемым компактом в своей *-слабой топологии. Поэтому существует последовательность $\{\mu_{\varepsilon_k}\}_k$, *-слабо сходящаяся в B к некоторой вероятностной мере μ : $\mu_{\varepsilon_k}(f) \to \mu(f)$, $\forall\, f \in C(K)$. Мы покажем, что мера μ инвариантна относительно G.

Сначала мы установим, что наш предел, то есть мера μ, не зависит от выбора набора минимальных ε-сетей. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ N'_ε — другая ε-сеть и $\{\mu'_\varepsilon\}_\varepsilon$ — соответствующее семейство дискретных вероятностей для этого набора сетей. По лемме 2, для любого $\varepsilon > 0$ существует биекция $\varphi = \varphi_\varepsilon : \ N_\varepsilon \to N'_\varepsilon$, такая что $\rho(t, \varphi(t)) \le 2\varepsilon, \forall\, t \in N_\varepsilon$. Если $f \in C(K)$, то

$$|\mu_\varepsilon(f) - \mu'_\varepsilon(f)| = \left| \frac{1}{|N_\varepsilon|} \sum_{t \in N_\varepsilon} \left(f(t) - f(\varphi(t))\right) \right| \le \sup_{t \in N_\varepsilon} |f(t) - f(\varphi(t))| \le \omega(2\varepsilon),$$

где $\omega(2\varepsilon) := \sup_{\rho(s,t)} |f(s) - f(t)|$ — модуль непрерывности. По теореме Кантора, правая часть последних соотношений стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. В частности, $\mu_{\varepsilon_k} \to \mu \iff \mu'_{\varepsilon_k} \to \mu$ в *-слабой топологии, что дает: $\mu = \mu'$.

Докажем, наконец, что мера μ инвариантна. Пусть $g \in G$.

$$\mu(f \circ g) = \lim_k \mu_{\varepsilon_k}(f \circ g) = \lim_k \frac{1}{|N_{\varepsilon_k}|} \sum_{t \in N_{\varepsilon_k}} f(gt).$$

Поскольку g — изометрия на K, то $N'_\varepsilon := g\,N_\varepsilon$ есть минимальная ε-сеть, и мы можем продолжить последние равенства, получая

$$\mu(f \circ g) = \lim_k \frac{1}{|N'_{\varepsilon_k}|} \sum_{s \in N'_{\varepsilon_k}} f(s) = \lim_k \mu'_{\varepsilon_k}(f) = \mu'(f) = \mu(f). \quad \blacksquare$$

Определение 1. Пусть (K, ρ) – метрический компакт, G – группа изометрий на K. *Мерой Хаара* на K называется произвольная ненулевая положительная радоновская мера на K, инвариантная относительно действия группы G.

Теорема 1 показывает, в частности, что мера Хаара в условиях определения всегда существует. Весьма важным является вопрос о единственности такой меры. К обсуждению этого вопроса мы обратимся после ряда замечаний к теореме 1.

Замечание 1. Возможен (и важен) случай, когда сама группа изометрий G является метрическим компактом, а в качестве умножения в G рассматривается операция взятия суперпозиции изометрий, причем, если ρ — инвариантная метрика на G, то $\rho(g_1, g_2) = \rho(hg_1, hg_2) = \rho(g_1h, g_2h) = \rho(g_1^{-1}, g_2^{-1})$ для $g_1, g_2, h \in G$. На самом деле всюду ниже только такие группы изометрий нам и будут встречаться.

Замечание 2. На группе G изометрий метрического компакта (K, ρ) можно ввести псевдометрику ("почти метрику" — некоторые точки этого псевдометрического пространства могут склеиваться, будучи, вообще говоря, различными элементами группы G). Именно, положим $d(g, h) := \sup_{t \in K} \rho(gt, ht)$ для $g, h \in G$. Поскольку изометрии из G сохраняют расстояния и действуют "на", то для любого элемента $g' \in G$ $d(g, h) = d(g'g, g'h) = d(gg', hg')$. Ясно, что $d(g, h) = 0$ тогда и только тогда, когда $g\,\big|_K = h\,\big|_K$. Введем на G отношение эквивалентности $\sim$, полагая $g_1 \sim g_2 \iff d(g_1, g_2) = 0$, и профакторизуем G по этому отношению, обозначив полученную группу (которая снова действует на K как группа изометрий) через H. В качестве операции умножения на H мы возьмем индуцированное из группы G умножение справа: $h_1h_2 := h_2 \circ h_1$. Группа G действует на метрическом компакте H (см. чуть ниже упражнение 1) естественным образом как группа изометрий. Поэтому к паре (H, G) (в теореме 1 вместо K рассматривается H) применимы как теорема 1, так и ее доказательство. Доказательство показывает (если принять во внимание сделанные замечания), что мера

μ на H, возникающая в этой ситуации, инвариантна как справа (это — то, что в точности содержится в доказательстве для случая рассматриваемой пары), так и слева:

$$\int_H f(hg)\,d\mu(g) = \int_H f(gh)\,d\mu(g) = \int_H f(g)\,d\mu(g) \tag{1}$$

для всех $h \in H$ и $f \in C(H)$.

Упражнения. 1) Показать, что $H = G/\sim$ есть компактное метрическое пространство с инвариантной (относительно умножения справа метрикой.

[Указание: Пусть $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность точек из H. Возьмем какое–либо не более чем счетное всюду плотное в K подмножество $\{t_j\}$. К числовому семейству $\{h_k(t_j)\}_{k,j}$ применим диагональный процесс Кантора (используя компактность множества K). Подпоследовательность $\{\widetilde{h}_l\}$, возникающая на диагонали после завершения этого процесса, сходится на всюду плотном множестве из K и каждый ее элемент представляет собой изометрию. Продолжим то, что получилось, на весь компакт K.]

Определение 2. Говорят, что группа изометрий G *действует на* K *транзитивно,* если для любой пары точек $s, t \in K$ найдется изометрия $g \in G$, для которой $gt = s$. Если G действует на K транзитивно, то K называется *однородным пространством группы* G. *Стабилизатором* или *группой изотропий* элемента $t \in K$ называется подгруппа $G_t := \{g \in G: \ gx = x\}$.

Отметим, что если G действует на K транзитивно, то

$$K = G/G_t, \tag{2}$$

(t — любая фиксированная точка из K); каждая точка $s \in K$ отождествляется с классом эквивалентности gG_t, где $g \in G$ и $gt = s$ (иными словами, прообраз точки s при указанной факторизации есть $\{h \in G: \ ht = s\}$ и $g_1 \sim g_2 \iff g_1 t = g_2 t$).

Упражнение. Если $K_n = \{1, 2, \dots, n\}$ и $G = \mathcal{P}_n$ — симметрическая группа (группа перестановок), то $\mathcal{P}_n$ действует транзитивно как в K_n, так и в множестве $K_{n,k} = \{A \subset K_n : |A| = k\}$ всех k-элементных подмножеств их K_n $(k = 1, 2, \dots, n)$. Возникают естественные изоморфизмы: $G_1 \cong \mathcal{P}_{n-1}$ в первом случае, и $G_{\{1,\dots,k\}} \cong \mathcal{P}_k \times \mathcal{P}_{n-k}$ во втором. Эти изоморфизмы позволяют вычислить число перестановок и числе сочетаний: $|\mathcal{P}_n| = n!$ и $\left|\mathcal{P}_{n,k}\right| = C_n^k$.

[Указание: По соотношению (2) $K_n = \mathcal{P}_n/\mathcal{P}_{n-1}$ и, следовательно, $n = |\mathcal{P}_n| \,/\, |\mathcal{P}_{n-1}|$, откуда, по индукции, $|\mathcal{P}_n| = n!$. Далее, $\left|K_{n,k}\right| = |\mathcal{P}_n| \,/\, [\,|\mathcal{P}_k|\,|\mathcal{P}_{n-k}|\,]$.]

Пример 1. Напомним, что $l_2^n = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ и $\mathcal{O}(n)$ — ортогональная группа на этом пространстве. Если зафиксировать некоторый (но произвольный) ортонормированный базис $e^o = \{e_1^0, \dots, e_n^0\}$ в l_2^n, то, сопоставляя каждому оператору $A \in \mathcal{O}(n)$ однозначно определяющее этот оператор n-элементное множество $Ae^o = \{Ae_1^0, \dots, Ae_n^0\}$, мы можем отождествить группу $\mathcal{O}(n)$ с семейством всех ортонормированных базисов в $\mathbb{R}^n$ (или, если угодно, в l_2^n,). Если еще определить факторотображение $\Phi : \mathcal{O}(n) \cong \{\text{ ОН базисы }\} \to S^{n-1}$, положив $\Phi(A) = Ae_1^0$, то соотношение (2) превратится в равенство $S^{n-1} = \mathcal{O}(n)/\mathcal{O}(n-1)$ (прообраз $\Phi^{-1}(t)$ точки $t \in S^{n-1}$ изоморфен подгруппе $\mathcal{O}(n-1)$).

Теорема 2 (о единственности меры Хаара на однородном пространстве). *Если группа G действует на K транзитивно, то мера Хаара на компакте K (которая существует в силу теоремы 1) единственна с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство. Группа G действует как на K, так и на H (см. замечание 2); поэтому на K и на H существуют меры (пусть они обозначаются, соответственно, через μ и ν), инвариантные относительно действия группы G. По самому определению компактной группы H, без ограничения общности можно считать, что $H = G$ (мы доказываем единственность меры Хаара на K; та вероятность Хаара, о которой идет речь в теореме 1, совпадает с вероятностью Хаара на K, инвариантной относительно действия H).

Обозначив через $\mathbb{1}$ функцию, тождественно равную единице (на том множестве, где она рассматривается; у нас — либо на G, либо на K), получим:
(3)
$$\nu(\mathbb{1})\,\mu(f) = \int_G\int_K f(t)\,d\mu(t)\,d\nu(g) = \int_G\int_K f(gt)\,d\mu(t)\,d\nu(g) = \int_K\int_G f(gt)\,d\nu(g)\,d\mu(t).$$

Во втором равенстве мы воспользовались инвариантностью меры μ. Внутренний интеграл в последнем выражении, в силу транзитивности группы G и инвариантности меры ν, от t не зависит. Действительно, пусть $s \in K, h \in G$ и $ht = s$. Тогда (см. конец замечания 2 и соотношения (1))

$$\int_G f(gt)\,d\nu(g) = \int_G f((hg)s)\,d\nu(g) = \int_G f((g\circ h)t)\,d\nu(g) = \int_G f(g(ht)\,d\nu(g) = \int_G f(gs)\,d\nu(g).$$

Таким образом, с помощью этого интеграла однозначно определяется некоторый положительный непрерывный линейный функционал на $C(K)$, который мы обозначим через $\widetilde{\nu}$, $\widetilde{\nu}(f) = \int_G f(gt)\,d\nu(g)$ для $f \in C(K)$.

Продолжая равенства (3), получим:

$$\nu(\mathbb{1})\,\mu(f) = \widetilde{\nu}(f)\,\mu(\mathbb{1}). \tag{4}$$

Теперь, предположим, что μ_1 — еще одна инвариантная мера на K. Тогда, по тем же соображениям, что и выше, получаем: $\nu(\mathbb{1})\,\mu_1(f) = \widetilde{\nu}(f)\,\mu_1(\mathbb{1})$. Умножая это равенство на (4) (записанное в противоположном порядке), мы приходим к искомому результату:

$$\nu(\mathbb{1})\,\mu(f)\,\widetilde{\nu}(f)\,\mu_1(\mathbb{1}) = \widetilde{\nu}(f)\,\mu(\mathbb{1})\,\nu(\mathbb{1})\,\mu_1(f),$$

то есть $\mu(f) = \dfrac{\mu(\mathbb{1})}{\mu_1(\mathbb{1})}\,\mu_1(f)$ для всех $f \in C(K)$. ■

Замечание 3. Всюду ниже мы будем считать, что $G = H$ — компактная метрическая группа с мерой Хаара ν. На K есть своя мера Хаара μ и эти меры связаны между собой соотношением (4). Если еще считать, что рассматриваемые нами меры — вероятности, то (4) превращается в тождество $\mu(f) = \widetilde{\nu}(f)$, или

$$\int_K f(t)\,d\mu(t) = \int_G f(gt)\,d\nu(g) \quad \text{для всех } f \in C(K).$$

Это же соотношение, естественно, выполняется и для всех борелевских функций, в частности, для характеристических функций борелевских множеств. Так как

$$\chi_A(gt) = \begin{cases} 0, & gt \notin A, \\ 1, & gt \in A, \end{cases}$$

то для любого фиксированного $t_0 \in K$

$$(5) \qquad \mu(A) = \nu\{g \in G : \ gt_0 \in A\}, \qquad \text{для любого борелевского } A \in \mathfrak{B}(K).$$

Итак, если обозначить через $\Phi : G \to K$ отображение, сопоставляющее изометрии g точку gt (t фиксировано), то для всякого фиксированного $t \in K$ и для любого борелевского $A \in \mathfrak{B}(K)$ имеет место равенство $\mu A = \nu\Phi^{-1}(A)$, и, таким образом, вероятность Хаара μ на K есть не что иное как образ вероятности Хаара ν, заданной на компактной группе G, при отображении Φ (и, о чем полезно еще раз сказать, не зависит от выбранной точки $t \in K$).

Замечание 4. Пусть T — отделимая локально компактная топологическая группа. Каждой функции f на T и каждому элементу a группы T сопоставим в соответствие новую функцию, которую мы будем называть *левым сдвигом* f на элемент a и обозначать через ${}_af$. Эта функция определяется соотношением $f(t) = f(at)$. *Правый сдвиг* f_a определяется аналогично с заменой at на ta. Эти сдвиги, конечно, совпадают, если группа T коммутативна. Под *левоинвариантной* (инвариантной относительно левых сдвигов) мерой, или *левой мерой Хаара* на T, понимают ненулевую положительную меру Радона μ на T, для которой

$$\mu({}_af) = \mu(f)$$

или

$$\int_T f(at)\,d\mu(t) = \int_T f(t)\,d\mu(t)$$

при всех $f \in \mathcal{K}(T)$ и $a \in T$. *Правые меры Хаара* определяются аналогично с заменой ${}_af$ на f_a.

Определим *отражение* $\widetilde{f}$ функции f на T равенством $\widetilde{f}(t) = f(t^{-1})$. Тогда, как легко видеть, если μ — левая мера Хаара, то $\nu = \widetilde{\mu} : f \to \mu(\widetilde{f})$ — правая мера Хаара и обратно. Это позволяет рассматривать на компактных группах только левые меры Хаара.

Следствие 1. *Если компактная метрическая группа G изометрий на K действует транзитивно, то нормированная мера Хаара ν на G единственна, причем эта мера Хаара на G инвариантна как слева, так и справа:*

$$\int_G f(hg)\,d\nu(g) = \int_G f(gh)\,d\nu(g), \qquad \forall\, h \in G,$$

и, кроме того, инвариантна относительно отражений:

$$\int_G f(g)\,d\nu(g) = \int_G f(g^{-1})\,d\nu(g). \tag{6}$$

Доказательство. Группа G действует на себе (или, если угодно, на H), очевидно, транзитивно ($h = (hg^{-1})g$ для любых $g, h \in G$), поэтому к мере ν применима теорема 2. Инвариантность меры ν как слева, так и справа уже отмечалась выше (см. замечание 2), а соотношение (6) — лишь переформулировка этого свойства меры ν : в обозначениях замечания 4, (6) означает, что $\nu = \widetilde{\nu}$. ■

Замечание 5. Мы договоримся везде далее в этом и в следующих параграфах обозначать меру Хаара на каком–либо рассматриваемом компактном метрическом пространстве (в частности, на компактной метрической группе) одним и тем же символом μ (часто, снабженным различными индексами или другими атрибутами) не зависимо от компакта, — всякий раз из контекста будет понятно, чья мера Хаара участвует в данных соотношениях и интегралах. Исключения будут представлять лишь отдельные случаи, в которых другое обозначение для некоторой меры Хаара будет оговариваться.

Пример 2. Пусть $n \geqslant 2$, $K = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, — единичная евклидова сфера; $G = \mathcal{O}(n)$ — группа ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{O}(n)$ действует транзитивно на S^{n-1}, и мы находимся в условиях теорем 1 и 2 и последний замечаний. Отметим также, что $\mathcal{O}(n)$ действует транзитивно на любом грассманиане $\mathfrak{G}_{n,k}$ (о чем речь пойдет несколько ниже) и на множестве ортонормированных базисов пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| = 1\}$ евклидова сфера и $\mathcal{O}(n)$ — ортогональная группа пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть, далее, μ и ν — вероятностные меры Хаара, соответственно, на S^{n-1} и $\mathcal{O}(n)$. Тогда*

$$\forall\, x_0 \in S^{n-1},\ \forall\, A \in \mathfrak{B}(S^{n-1}) \qquad \nu\{T \in \mathcal{O}(n):\ Tx_0 \in A\} = \mu\, A. \tag{7}$$

Доказательство. Это вытекает из соотношения (5), однако, полезно разобраться с доказательством для рассматриваемого конкретного случая более подробно.

Отождествим ортогональную группу с семейством ортонормированных базисов в $l_2^n = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ и устроим некоторое отображение Φ, которое, как в примере

1, свяжет меры Хаара μ и ν. Именно, зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ произвольный ортонормированный базис $e^0 = \{e_1^0, e_2^0, \ldots, e_n^0\}$ и сопоставим каждому ортогональному преобразованию $A \in \mathcal{O}(n)$ базис $Ae^0 = \{Ae_1^0, Ae_2^0, \ldots, Ae_n^0\}$. Ясно, что так определенное отображение, обозначим его через $\widetilde{\Phi}$, есть биекция, и, если теперь устроить еще отображение ψ : {ортонормированные базисы } $\to S^{n-1}$, сопоставляя каждому базису $\{f_j\}_{j=1}^n$ его первый элемент f_1, то суперпозиция $\Phi = \psi\,\widetilde{\Phi}$ будет являться факторотображением из $\mathcal{O}(n)$ на S^{n-1} с ядром, изоморфным подгруппе $\mathcal{O}(n-1)$ (группа $\mathcal{O}(n-1)$ вкладывается естественным образом в $\mathcal{O}(n)$ как подгруппа всех изометрий, оставляющих на месте вектор e_1^0).

При указанной факторизации сфера S^{n-1} представляется как однородное пространство $S^{n-1} = \mathcal{O}(n)/\mathcal{O}(n-1)$. При этом, $\mu = \Phi(\nu)$, что и доказывает соотношение (7) (ввиду произвола при выборе первого вектора в базисе e^0, как, впрочем, и самого этого базиса). ■

Пример 3 (многообразие Грассмана $\mathfrak{G}_{n,k}$). Точками грассманова многообразия $\mathfrak{G}_{n,k}$ являются k-мерные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$. Естественное действие ортогональной группы $\mathcal{O}(n)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ дает транзитивное действие ее на совокупности всех k-мерных подпространств в $\mathbb{R}^n$, и, таким образом, $\mathfrak{G}_{n,k}$ — однородное пространство ортогональной группы $\mathcal{O}(n)$.

Зафиксируем некоторое k-мерное подпространство F и найдем его группу изотропий (см. определение 2). Выберем ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ следующим образом: первые k элементов базиса лежат в подпространстве F, а остальные $n-k$ ему ортогональны. Всякая ортогональная матрица, переводящая подпространство F в себя, имеет в этом базисе блочно–диагональный вид

$$\begin{array}{l} k \text{ строк} \ \ \{ \\ n-k \text{ строк} \ \ \{ \end{array} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{где } A \in \mathfrak{O}(k),\ B \in \mathcal{O}(n-k).$$

Мы получаем, таким образом, $\mathfrak{G}_{n,k} = \mathcal{O}(n) \,/\, \mathfrak{O}(k) \times \mathcal{O}(n-k)$. Отметим также очевидный изоморфизм $\mathfrak{G}_{n,k} \cong \mathfrak{G}_{n,n-k}$, осуществляемый переходом к ортогональным дополнениям.

Многообразие Грассмана $\mathfrak{G}_{n,k}$ метризуемо, компактно и связно; метрику на $\mathfrak{G}_{n,k}$ можно ввести следующим образом:

$$\text{для } E, F \in \mathfrak{G}_{n,k} \qquad \rho(E,F) := \sup_{x \in S^{n-1} \cap E} \ \inf_{y \in S^{n-1} \cap F} |x - y|$$

(это — расстояние Хаусдорфа между единичными евклидовыми шарами подпространств E и F; напомним, что через $|\cdot|$ мы обозначаем евклидову норму в $\mathbb{R}^n$).

По теоремам 1 и 2, на многообразии Грассмана существует единственная инвариантная относительно ортогональных преобразований вероятностная мера.

Ниже, для подпространства F пространства $\mathbb{R}^n$ через $S(F)$ мы будем обозначать его евклидову сферу: $S(F) = S^{n-1} \cap F$.

Теорема 4. *Пусть* $n > 1$ *и* $1 < k \leqslant n$.

(1) *Если* $f \in C(S^{n-1})$, *то*

$$\int_{S^{n-1}} f(t)\,d\mu(t) = \int_{F \in \mathfrak{G}_{n,k}} \int_{S(F)} f(t)\,d\mu_F(t)\,d\mu(F). \tag{8}$$

(2) *Для каждого подпространства* $F_0 \in \mathfrak{G}_{n,k}$ *и любого борелевского подмножества* Ω *множества* $\mathfrak{G}_{n,k}$

$$\mu\,\Omega = \mu\{T \in \mathcal{O}(n) :\; TF_0 \in \Omega\}.$$

Доказательство. 1) Фиксируем $T \in \mathcal{O}(n)$ и $F \in \mathfrak{G}_{n,k}$. Тогда

$$\int_{S(F)} f(t)\,d\mu_F(t) = \int_{S(F)} Tf(t)\,d\mu_F(t) = \tag{9}$$

$$= \int_{S(TF)} f(s)\,d\mu_{TF}(s) = \int_{S(\widetilde{F})} f(t)\,d\mu_{\widetilde{F}}(t)$$

(в последнем равенстве мы всего лишь переобозначили k-мерное подпространство, по сфере которого бегает переменная s).

Из (9) вытекает, что правая часть соотношения (8) вычисляется как $\nu(f)$, где ν представляет собой инвариантную относительно ортогональных преобразований меру на S^{n-1}. Очевидно, эта мера нормирована (достаточно взять $f = \mathbb{1}$). Остается вспомнить, что мера Хаара на S^{n-1} единственна.

Утверждение 2) — это просто общее соотношение (5), переписанное для случая $K = \mathfrak{G}_{n,k}$, $G = \mathcal{O}(n)$, $A = \Omega$, $t_0 = F_0$. ■

ГЛАВА 3. ПОЧТИ ЕВКЛИДОВЫ ПОДПРОСТРАНСТВА

§1. Изопериметрическое неравенство для сферы и лемма Леви

Пусть $n > 1$. Через S^{n-1} здесь и всюду далее мы обозначаем единичную евклидову сферу в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$S^{n-1} := \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ |x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 1 \right\}$$

(напомним, что мы договорились евклидову норму в $\mathbb{R}^n$ обозначать также как и модуль числа; надо надеяться, что это ни в коем случае не приведет к недоразумению).

Нормированную меру Хаара (вероятность Хаара) — единственную инвариантную относительно ортогональных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ меру — мы будем (по–крайней мере в ближайших параграфах) обозначать просто через μ (нет смысла привешивать к этому символу размерность пространства, так как из контекста будет ясно, о каких размерностях идет речь; если в какой-то момент нам потребуется явно отметить, на сфере какой размерности мы находимся, то в тот момент мы об этом и скажем). Опять таки, объем (меру Лебега) в пространстве $\mathbb{R}^n$ мы по-прежнему обозначаем через Vol, не используя никакого индекса, указывающего на размерность пространства (даже если объем множеств будет вычисляться в пространствах разных размерностей), — к недоразумению это ни в коем случае не приведет.

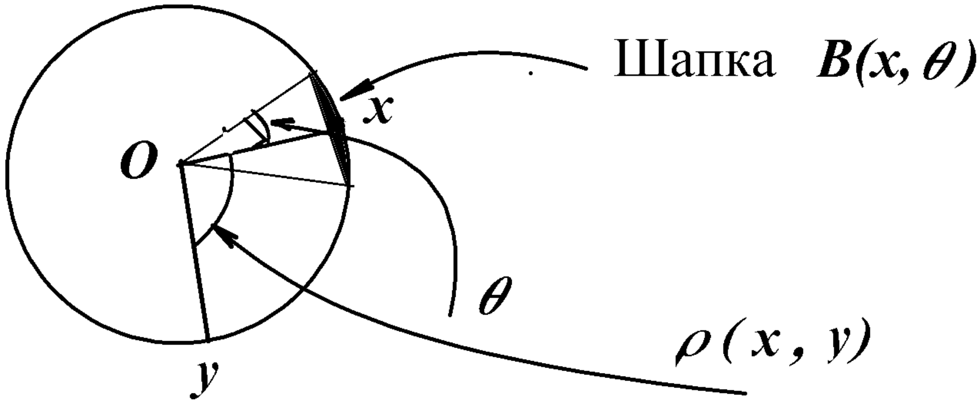
В качестве метрики на единичной сфере S^{n-1} мы возьмем *геодезическую метрику* ρ — расстояние между двумя точками на сфере измеряется как длина дуги окружности большого круга, соединяющей эти точки, то есть для $x, y \in S^{n-1}$ расстояние $\rho(x,y)$ есть угол между прямыми, соединяющими точки x и y с началом координат (мы навсегда договариваемся, что $0 \le \rho(x,y) < \pi$ для всех пар $x, y \in S^{n-1}$). Соответствующие замкнутые шары на S^{n-1} (пересечения этой сферы с полупространствами пространства $\mathbb{R}^n$) мы называем *шапками* и обозначаем через $B(x,\theta)$ ($x \in S^{n-1}$ — центр, а θ — радиус шапки): $B(x,\theta) := \left\{ y \in S^{n-1} : \ \rho(x,y) \leqslant \theta \right\}$.

Для множества $A \subset S^{n-1}$ его ε-окрестность $(\varepsilon > 0)$ мы обозначим через A_ε : $A_\varepsilon := \left\{ x \in S^{n-1} : \ \rho(x,A) \le \varepsilon \right\}$ (неравенство нестрогое!). Отметим, что если A — шапка $B(x,\theta)$, то A_ε есть шапка $B(x, \theta + \varepsilon)$.

Следующее неравенство, установленное в полной своей общности немецким математиком Е. Шмидтом[13] в 1948 году[14], имеет решающее значение почти для всего

[13] E. Schmidt, Die Brunn–Minkowski ungleichung, *Math. Nachr.*, **1**, (1948), 81–157.

[14] По-видимому, имеет смысл рекомендовать просмотреть один из "первоисточников" [Леви], в котором достаточно подробно, хотя и не на самом строгом уровне, обсуждается соответствующая изопериметрическая задача. Попутно напомним, что классическое изопериметрическое неравенство для пространства $\mathbb{R}^n$ заключается в следующем: "среди шаров заданного объема евклидов шар имеет наименьшую площадь поверхности". Более точную формулировку и доказательство последнего можно найти, например, в [Берж, р.539].



дальнейшего.

Теорема 1 (изопериметрическое неравенство[15]). *Пусть* $0 < a < 1$, $\varepsilon > 0$, $\mathcal{A} := \left\{A \subset S^{n-1} :\ \mu A = a\right\}$. *Минимум* $\min\limits_{A\in\mathcal{A}} \mu A_\varepsilon$ *достигается, причем на шапке соответствующей меры, то есть на множестве* $A = B(x,\theta)$, *где* $x \in S^{n-1}$ *— произвольная точка* (в силу инвариантности меры), *а* $\theta > 0$ *таково, что* $\mu\, B(x,\theta) = a$ (последним равенством θ определяется однозначно). ■

Сначала мы применим эту теорему к случаю $a = 1/2$; в этом случае шапка является полусферой, и соответствующий минимум достигается на множестве $B(x,\pi/2)$.

Далее мы рассматриваем (исключительно в целях упрощения обозначений в доказательствах) пространство размерности $n+2$ (однако, все наши договоренности об опускании индексов, указывающих на размерность, остаются в силе). Дополнительно, нам пригодится обозначение для обычной площади поверхности (меры Лебега) на сфере S^k $(k \in \mathbb{N})$: k-мерную площадь измеримого множества B мы обозначим через $|B|$.

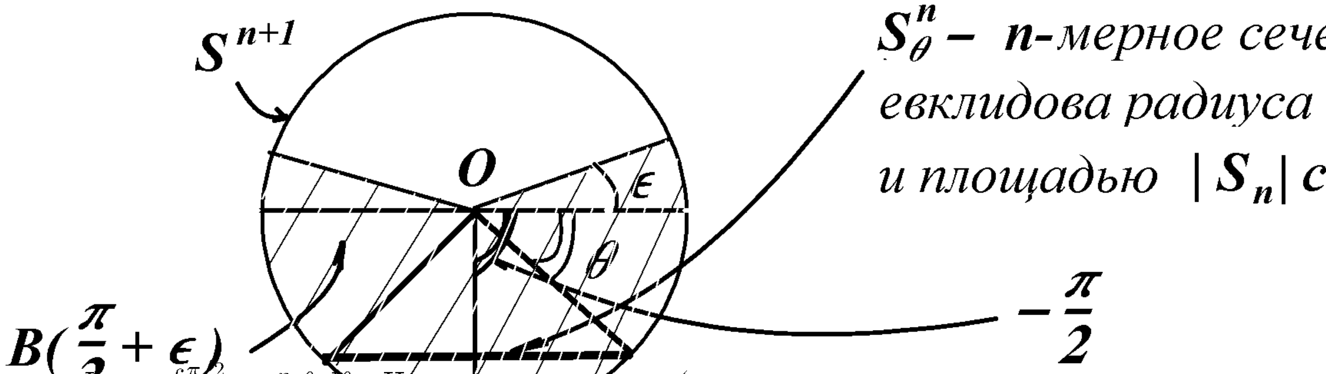
Следствие 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$, *для всякого измеримого множества* $A \subset S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *такого, что* $\mu\, A \geqslant 1/2$, *выполнено неравенство*

$$\mu\, A_\varepsilon \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, e^{-\varepsilon^2 n/2}.$$

Доказательство. Достаточно проверить доказываемое неравенство на шапке $B(\pi/2)$ $(= B(x,\pi/2)$, x - произвольное). Имеем:

$$\mu\, B(\frac{\pi}{2}+\varepsilon) = \frac{\left|B(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)\right|}{|S^{n+1}|} = \frac{\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\varepsilon} \cos^n\theta\, d\theta}{\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\theta\, d\theta}.$$

[15] Доказательство можно найти, например, в статье T.Figiel, J.Lindenstrauss, V.D. Milman, The dimension of almost spherical sections of convex bodies, *Acta Mathematica*, **139** (1977), 53–94, §8 — Appendix.



Положим $I_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta$. Нетрудно показать (это, конечно же, прекрасно известный факт), что $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ (достаточно проинтегрировать по частям), откуда $nI_nI_{n-1} = \cdots = I_1I_0 = \pi/2$; поэтому $nI_n^2 \geqslant nI_nI_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{n}{n+1}$ и, следовательно, $nI_n^2 \geqslant 1$ при $n \geqslant 1$ (при $n=1$ последнее неравенство проверяется непосредственно). Таким образом, $I_n \geqslant 1/\sqrt{n}$ для любого $n \geqslant 1$. Принимая это во внимание, получаем далее:

$$1-\mu\,B(\frac{\pi}{2}+\varepsilon) = \frac{\displaystyle\int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^n\theta\,d\theta}{2I_n} \underset{\theta=t/\sqrt{n}}{=} \frac{\displaystyle\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\pi\sqrt{n}/2} \cos^n \frac{t}{\sqrt{n}}\,dt}{2I_n\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Мы воспользовались неравенством $\cos t \leqslant e^{-t^2/2}$, справедливым при всех $t \in [0,\pi/2]$ (функция $e^{t^2/2}\cos t$ убывает на этом промежутке).

Вспоминая значение интеграла Эйлера–Пуассона, окончательно имеем:

$$1-\mu\,B(\frac{\pi}{2}+\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}\,e^{-\varepsilon^2 n/2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\varepsilon^2 n/2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,e^{-\varepsilon^2 n/2}. \quad \blacksquare$$

Определение. Пусть $f \in C(S^k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Медианой* (или *средним Леви*) функции f называется такое единственное число M_f, что $\mu\,\{x \in S^k:\ f(x) \geqslant M_f\} \geqslant 1/2$ и $\mu\,\{x \in S^k:\ f(x) \leqslant M_f\} \geqslant 1/2$.

Если $f \in C(S^k)$ и $A = \{x \in S^k:\ f(x) = M_f\}$, то, как нетрудно видеть, $A_\varepsilon = \{f \geqslant M_f\}_\varepsilon \cap \{f \leqslant M_f\}_\varepsilon$. Поэтому из следствия 1 моментально вытекает

Следствие 2 (лемма Леви). $f \in C(S^{n+1})$, $A = \{x \in S^{n+1}:\ f(x) = M_f\}$, $\varepsilon > 0 \implies \mu\,A_\varepsilon \geqslant 1 - \sqrt{\pi/2}\,e^{-\varepsilon^2 n/2}$. $\blacksquare$

Лемма Леви представляет собой так называемый "феномен концентрации меры вокруг одного, среднего, значения непрерывной функции". Мы используем эту лемму в случае, когда функция f будет некоторой нормой.

§2. Две леммы о конечных сетях единичных сфер

Лемма 1 (о мощности θ-сети). *Пусть* $k \in \mathbb{N}$, X *— произвольное* k*-мерное нормированное пространство,* $S(X)$ *— единичная сфера в* X, $0 < \theta < 1$. *Существует* θ*-сеть* N *в* $S(X)$ *мощности* $|N| \leqslant \left(1+\dfrac{2}{\theta}\right)^k$; *в частности,* $|N| \leqslant \exp\left(k \ln \dfrac{3}{\theta}\right)$.

Доказательство. Выберем в X в качестве N такое максимальное множество $\{x_j\}_{j=1}^m$, что

(i) $\forall\, j = \overline{1,m}$ $\quad \|x_j\| \leqslant 1$ и

(ii) $\forall\, i,j = \overline{1,m}$ $\quad \|x_i - x_j\| \geqslant \theta$.

Ввиду своей максимальности, N — θ-сеть. Посчитаем, насколько велико это множество (через $D(x,r)$ обозначаем замкнутые шары в X радиуса r с центром в точке x):

$$\bigcup_{j=1}^m D(x_j,\theta/2) \subset D(0,1+\theta/2), \quad D(x_j,\theta/2) \cap D(x_i,\theta/2) = \emptyset \qquad (i \neq j).$$

Отсюда $m\,(\theta/2)^k\ \mathrm{Vol}\ (D(0,1)) \leqslant (1+\theta/2)^k\ \mathrm{Vol}\ (D(0,1))$. ■

Лемма 2. *Пусть* $n,k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n+2$, $\varepsilon > 0$, $f \in C(S^{n+1})$. *Обозначим через* A^f *множество* $\left\{x \in S^{n+1} :\ f(x) = M_f\right\}$. *Пусть, далее,* E *— какое-либо* k*-мерное линейное подпространство в* $\mathbb{R}^{n+2}$. *Для любого множества* $N \subset E \cap S^{n+1}$ *мощности* $|N| < \sqrt{2/\pi}\, e^{\varepsilon^2 n/2}$ *существует ортогональное преобразование* $T \in \mathcal{O}(n+2)$, *для которого* $TN \subset A^f_\varepsilon$.

Доказательство. Используя лемму Леви, для фиксированного $x \in N$ получаем (мы применяем одно и то же обозначение для мер Хаара на различных компактах):

$$\mu\,\left\{T \in \mathcal{O}(n+2) :\ Tx \in A^f_\varepsilon\right\} = \mu\, A^f_\varepsilon \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\varepsilon^2 n/2} \geqslant 1 - \frac{1}{|N|},$$

так что $\mu\,\left\{T \in \mathcal{O}(n+2) :\ Tx \in A^f_\varepsilon,\ \forall\, x \in N\right\} > 0$. В частности, хотя бы один оператор с необходимыми свойствами найдется. ■

В каких ситуациях будут применяться эти леммы и какие возможности мы при этом получаем?

Рассмотрим некоторую непрерывную функцию f на сфере S^{n+1}. Пусть ω_f обозначает модуль непрерывности функции f, то есть для $\varepsilon \geqslant 0$

$$\omega_f(\varepsilon) = \sup_{\substack{s,t \in S^{n+1} \\ \rho(s,t) \leqslant \varepsilon}} |f(t) - f(s)|.$$

Как и выше, мы обозначаем через A^f множество $\{x \in S^{n+1}: f(x) = M_f\}$. Зафиксируем два положительных числа $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$, и пусть k — некоторое натуральное число (ниже мы выберем его в зависимости от ε и θ).

Если E_0 — k-мерное линейное подпространство в $\mathbb{R}^{n+2}$, то, используя лемму 1, мы можем выбрать на (евклидовой) сфере $S(E_0) := E_0 \cap S^{n+1}$ достаточно малую (в зависимости от размерности E_0) θ-сеть N. Если мощность этой сети не очень велика (ограничение на эту мощность дается в лемме 2), то мы можем ортогональным преобразованием пространства $\mathbb{R}^{n+2}$ "загнать" сеть в некоторое k-мерное подпространство E, точнее, на его сферу $S(E)$, таким способом, что вся сеть попадет в ε-окрестность A^f_ε множества A^f и, естественно, останется θ-сетью (на этот раз в $S(E)$). Теперь, на элементах новой сети, очевидно, будут выполняться неравенства $|f - M_f| \leqslant \omega_f(\varepsilon)$ и $|f - M_f| \leqslant \omega_f(\theta)$, и если $x \in S(E)$, то, выбрав θ-близкий к x элемент сети y, мы будем иметь: $|f(x) - M_f| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(y) - M_f| \leqslant \omega_f(\theta) + \omega_f(\varepsilon)$. Осталось уточнить выбор размерности k, для которой пройдут проведенные только что рассуждения.

Чтобы можно было применить лемму 2 в этих рассуждениях, достаточно иметь θ-сеть в E_0 мощности, строго меньшей, чем $\sqrt{2/\pi}\,\exp(\varepsilon^2 n/2)$. С другой стороны, на сфере k-мерного подпространства E_0 мы можем найти θ-сеть мощности не более $\exp(k \ln(3/\theta))$. Если мы возьмем какое-либо k таким, чтобы было выполнено неравенство $\exp(\varepsilon^2 n/2 - k\ln(3/\theta)) > \sqrt{\pi/2}$, или $k\ln(3/\theta) < \varepsilon^2 n/2 - \ln\sqrt{\pi/2}$, появятся все условия для применения наших лемм и для реализации приведенных выше рассуждений. Поэтому, достаточно взять (считая θ меньшим единицы) k, не превосходящим числа $(\varepsilon^2 n/2)\,(\ln(3/\theta))^{-1} - 1$, и, таким образом, k может быть выбрано так, что $k \geqslant (\varepsilon^2 n/2)\,(\ln(3/\theta))^{-1} - 2$. Последнее число выглядит не очень компактно, поэтому мы заменим его на несколько меньшее, но имеющее более приятный вид: при $k > 0$

$$k = \frac{k}{k+2}\,(k+2) \geqslant \frac{1}{3}\,\frac{\varepsilon^2 n}{2}\,\frac{1}{\ln(3/\theta)} = \frac{\varepsilon^2 n}{6}\,\frac{1}{\ln(3/\theta))}.$$

Пожалуй, стоит резюмировать все, что было сказано в виде отдельного утверждения.

Следствие 1. *Для натурального $n \in \mathbb{N}$ и положительных $\varepsilon > o$, $\theta > 0$ пусть*

$$K = K(\varepsilon, \theta, n) := \left[\frac{\varepsilon^2 n}{6}\,\frac{1}{\ln 3/\theta}\right].$$

Для любой функции $f \in C(S^{n+1})$, для любых чисел $\varepsilon, \theta > 0$, $0 < \theta < 1$, существуют такие подпространство $E \subset \mathbb{R}^{n+2}$ и θ-сеть N на единичной сфере $S(E) = E \cap S^{n+1}$, что

(1) $\dim E \geqslant K$;

(2) $\forall\, x \in N \qquad |f(x) - M_f| \leqslant \omega_f(\varepsilon)$;

(3) $\forall\, x \in S(E) \qquad |f(x) - M_f| \leqslant \omega_f(\varepsilon) + \omega_f(\theta)$. ∎

Заметим, что (как видно из изложенных рассуждений) (1) влечет (2), но мы поместили утверждения (2) в формулировку в силу его важности (все-таки в (2) имеется оценка близости значений функции f к ее среднему по Леви значению *на всей сфере евклидова подпространства* E).

Основное применение лемм 1 и 2 будет относиться к случаю, когда функция f является некоторой нормой p (к примеру, такой как $\|\cdot\|_\infty$) на пространстве $\mathbb{R}^n$ (или, если угодно, на $\mathbb{R}^{n+2}$). Как показывает следствие 1, в этом случае на подпространстве достаточно большой размерности p не очень сильно отличается от своего среднего (по Леви) значения. Если нам удастся показать, что это среднее (медиана) мало отличается от евклидовой нормы на указанном подпространстве, то мы получим "большое" евклидово подпространство в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^n, p)$. Другими словами, мы докажем существование "почти евклидова" сечения достаточно большой размерности единичного шара пространства $(\mathbb{R}^n, p)$. К этому мы и приступаем.

§3. Теорема о выборе k-мерного подпространства

Теорема 1 (о выборе k-мерного подпространства). *Пусть* $\varepsilon, \theta \in (0,1)$, $\|\cdot\|$ *— некоторая норма в* $\mathbb{R}^{n+2}$ *и* M *— ее среднее по Леви (медиана) на сфере* S^{n+1}. *Пусть, далее,* $b > 0$ *таково, что для всех* $x \in \mathbb{R}^{n+2}$ *справедливо неравенство* $\|x\| \leqslant b\,|x|$. *Тогда в* $\mathbb{R}^{n+2}$ *можно выбрать* k*-мерное подпространство* E, *где* $k \geqslant \left[\dfrac{\varepsilon^2 n}{6}\,\dfrac{1}{\ln 3/\theta}\right]$, *а в* $S(E) = S^{n+1} \cap E$ *—* θ*-сеть* N, *которые обладают свойствами:*

1) $\forall\, x \in N \qquad |\,\|x\| - M| \leqslant b\,\varepsilon$,
2) $\forall\, x \in S(E) \qquad |\,\|x\| - M| \leqslant b\,(\varepsilon + \theta)$.

Несмотря на то, что второе свойство есть непосредственное следствие первого, именно утверждение 2) и есть основной факт, устанавливаемый в этой теореме и применяемый всюду далее.

Замечание 1. Позже мы будем брать достаточно малые числа $\varepsilon' > 0$ и $\theta > 0$, и в качестве $\varepsilon > 0$ — число $M\varepsilon'/b$ (так, чтобы избавиться от b и остаться наедине с медианой, — тогда вся проблема о выборе больших евклидовых подпространств сведется к оценке медианы); при этом в случае таких ε ничего, по существу, от выбора θ зависеть не будет.

Чтобы показать, какого рода техника может быть применена при доказательстве подобных теорем, мы приведем два совершенно различных доказательства, при этом во втором доказательстве мы ограничимся только проверкой главного свойства подпространства E, а именно, свойства 2) (при этом мы получим ту же по порядку, что и в теореме, оценку для k, но несколько отличающуюся по форме); что касается первого свойства, то там мы получим его ослабленный вариант, вполне пригодный для всех дальнейших приложений.

Первое доказательство теоремы 1. Положим $f(x) := \|x\|$ для $x \in S^{n+1}$ и применим к этой функции f следствие 1 из предыдущего раздела. Возникающие по этому следствию пространство E и θ-сеть N обладают свойствами 1) и 2) теоремы 1, так как для любых $x, y \in S(E)$ $\|x-y\| \leqslant b\,|x-y| \leqslant b\,\rho(x,y)$ и, следовательно, для колебания функции f на сфере $S(E)$ выполняется неравенство $\omega_f(\delta) \leqslant b\,\delta, \quad \delta \geqslant 0.$ ■

Замечание 2. Незначительно уменьшая k (например, рассматривая значения $k \approx \left[\varepsilon^2 n/6\right]$), можно добиться, например, того, что теорема 1 верна для двух различных норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ с выбором одного k-мерного подпространства E.

Замечание 3. На самом деле, рассматривая размерности k порядка

$$k \approx \left[\frac{\varepsilon^2 n}{6}\,\frac{1}{\ln(3/\theta)}\right],$$

k-мерных подпространств E с указанным в теореме 1 свойством можно выбрать достаточно много: вспоминая доказательства следствия 1 и леммы 2 из предыдущего раздела, мы видим, что в случае таких k

$$\mu\,\{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}_{n+2,k}:\ \text{заключение теоремы 1 верно для } E \in \mathfrak{B}\} \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\varepsilon^2 n/3}.$$

Действительно, в доказательстве леммы 2 используется оценка

$$\mu\,\left\{T \in \mathcal{O}(n+2):\ Tx \in A_\varepsilon^f\right\} = \mu\,A_\varepsilon^f \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\varepsilon^2 n/2} \geqslant 1 - \frac{1}{|N|}, \tag{1}$$

и, если k такое, как указано в начале замечания, то в лемме 1

$$|N| \leqslant \exp\left(k\,\ln\frac{3}{\theta}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{6}\,\frac{1}{\ln\,3/\theta}\,\ln\frac{3}{\theta}\right) \leqslant \exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{6}\right).$$

Поэтому в доказательстве леммы 2 вместо (1) будет

$$\mu\,\left\{T \in \mathcal{O}(n+2):\ Tx \in A_\varepsilon^f\right\} \geqslant 1 - \frac{1}{|N|}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right)\,\exp\left(\frac{\varepsilon^2 n}{6}\right) = $$
$$= 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\varepsilon^2 n/3}\,\frac{1}{|N|}$$

и, следовательно,

$$\mu\,\left\{T \in \mathcal{O}(n+2):\ Tx \in A_\varepsilon^f\ \forall x \in N\right\} \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\varepsilon^2 n/3}.$$

Каждый оператор T дает нам пространство E со свойствами из теоремы 1. Осталось заметить, что поэтому

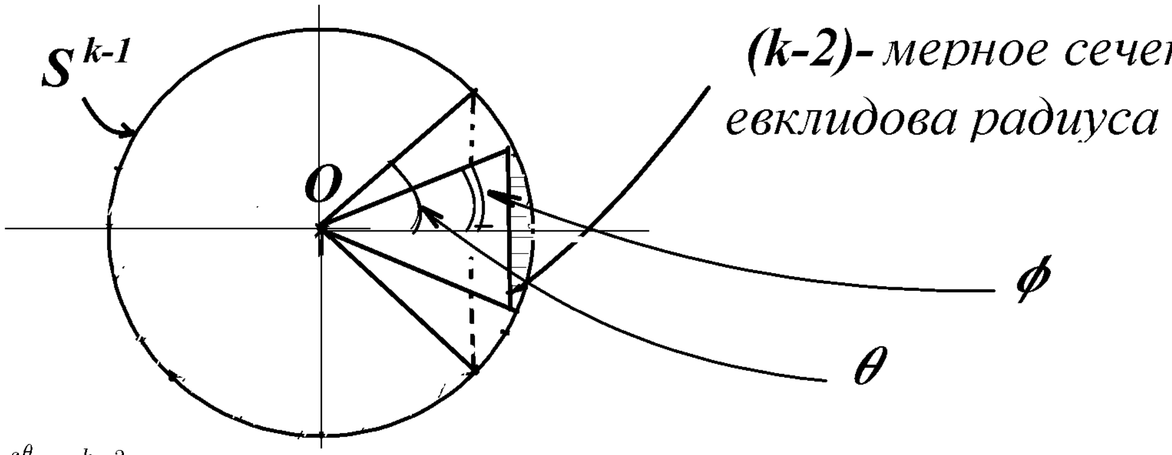
$$\mu\,\{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}_{n+2,k}:\ \text{заключение теоремы 1 верно для } E \in \mathfrak{B}\} \geqslant$$
$$\geqslant \mu\,\Big\{T \in \mathcal{O}(n+2):\ Tx \in A_\varepsilon^f\,\forall x \in N\Big\} \geqslant 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\varepsilon^2 n/3}.$$

Второе доказательство теоремы 1. Для наших целей можно считать, что n достаточно велико, — будем рассматривать размерности $k > 6$. Мы покажем, что найдется k-мерное подпространство E, для которого множество

$$A_\varepsilon := \Big\{x \in S^{n+1}:\ \|x\| = M\Big\}_\varepsilon$$

имеет непустое пересечение с любой шапкой $B(\theta)$ радиуса θ, лежащей на сфере $S(E) = E \cap S^{n+1}$, которую можно рассматривать как евклидову сферу S^{k-1}. После этого нетрудно будет, в частности, проверить, что на пересечении $E \cap A_\varepsilon$ выполняется соотношение 2) теоремы 1.

Пусть сначала E — произвольное k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^{n+2}$, $0 < \theta < 1$ и $B(\theta)$ — произвольная шапка на сфере $S^{k-1} = S(E)$. Как обычно, μ обозначает вероятность Хаара (сейчас — на этой сфере), а символ $|D|$ — меру Лебега (площадь поверхности) измеримого множества $D \subset S^{k-1}$. Оценим снизу величину $\mu\,B(\theta.)$



$$\mu\,B(\theta) = \frac{|S^{k-2}|\int_0^\theta \sin^{k-2}\varphi\,d\varphi}{|S^{k-1}|} =$$
$$= \frac{|S^{k-2}|\int_0^\theta \sin^{k-2}\varphi\,d\varphi}{|S^{k-2}|\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}\varphi\,d\varphi} = \frac{\int_0^\theta \sin^{k-2}\varphi\,d\varphi}{2\,I_{k-2}} \geqslant \frac{\frac{\theta}{2}\,\sin^{k-2}\frac{\theta}{2}}{2\,I_{k-2}}.$$

Через I_{k-2} мы обозначили интеграл $\int_0^{\pi/2}\sin^{k-2}\varphi\,d\varphi$. Ниже мы продолжим оценку меры шапки, а сейчас посмотрим, существует ли k-мерное E, для которого мера $\mu\,(E \cap A_\varepsilon)$ достаточно велика.

По лемме Леви, $\mu\, A_\varepsilon \geqslant 1-\sqrt{\pi/2}\,\exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right)$. Так как для борелевских функций f на сфере S^{n+1} выполняется соотношение

$$\int_{S^{n+1}} f(x)\,d\mu(x) = \int_{\mathfrak{G}_{n+2,k}} \int_{\substack{S(E)\\ E\in\mathfrak{G}_{n+2,k}}} f(x)\,d\mu_E(x)\,d\mu(E), \tag{2}$$

то оно справедливо и для характеристической функции χ_{A_ε} множества A_ε. Для этой функции левая часть в (2) равняется мере $\mu\, A_\varepsilon$, и поэтому интеграл в правой части не меньше, чем $1-\sqrt{\pi/2}\,\exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right)$.

Из этого следует, что найдется по крайней мере одно пространство $E\in\mathfrak{G}_{n+2,k}$, для которого внутренний интеграл в правой части не меньше, чем $1-\sqrt{\pi/2}\,\exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right)$, то есть $\int_{S(E)}\chi_{A_\varepsilon}\,d\mu_E(x) = \int_{E\cap A_\varepsilon} d\mu_E(x) = \mu\,(E\cap A_\varepsilon) \geqslant 1-\sqrt{\pi/2}\,\exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right)$ (это легко увидеть, рассуждая от противного). Теперь, объединяя оценки для $\mu\, B(\theta)$ и последнюю, получаем: для того, чтобы пересекались множества $A_\varepsilon\cap E$ и $B(\theta)$, достаточно выполнения неравенства

$$\frac{\theta}{4}\,\frac{\sin^{k-2}\dfrac{\theta}{2}}{I_{k-2}} + 1-\sqrt{\pi/2}\,\exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right) > 1.$$

Посмотрим, подойдет ли нам размерность k, указанная в условиях теоремы. Мы уже оценивали сверху при доказательстве следствия 1 из изопериметрического неравенства интеграл I_n (в том доказательстве надо взять $\varepsilon=0$) и, хотя явно это и не было выписано, получили: $I_n\leqslant\sqrt{\pi/(2n)}$. Поэтому

$$\frac{\theta}{4}\,\frac{\sin^{k-2}\dfrac{\theta}{2}}{I_{k-2}} \geqslant \frac{\theta}{4}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{k-2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{k-2}\sqrt{\frac{2(k-2)}{\pi}}.$$

Нам надо, чтобы правая часть последнего соотношения была строго больше числа $\sqrt{\pi/2}\,\exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right)$, то есть достаточно получить строгое неравенство

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{\pi}\right)^{k-1}\sqrt{k-2} > \exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right), \qquad \text{или}$$

$$\exp\left[(k-1)\,\ln\frac{\theta}{\pi}+\ln\frac{\sqrt{k-2}}{2}\right] > \exp\left(-\varepsilon^2 n/2\right),$$

то есть $(k-1)\ln(\pi/\theta)-\ln(\sqrt{k-2}/2) < \varepsilon^2 n/2$. Так как $k>6$, то для выполнения последнего соотношения достаточно иметь следующее нестрогое неравенство: $k\ln(\pi/\theta)\leqslant\varepsilon^2 n/2$. Но среди таких чисел k присутствует число $K := \left[\dfrac{e^2 n}{2}\,\dfrac{1}{\ln(4/\theta)}\right]$.

Итак, в каждой шапке $B(\theta)$ обязательно найдется хотя бы одна точка из A_ε. Проверим справедливость утверждения 2) нашей теоремы. Пусть $x \in S(E)$ и $y \in B(x,\theta) \cap A_\varepsilon$. Тогда $|\,\|x\| - M| \leqslant |\,\|x\| - \|y\|\,| + |M - \|y\|\,| \leqslant b\theta + b\varepsilon$, что доказывает 2).

Мы легко можем получить и утверждение 1), но с несколько более плохой сетью: из того, что любая шапка $B(\theta)$ пересекается с A_ε сразу вытекает, что найдется 2θ-сеть, обладающая свойством 2). Действительно, достаточно покрыть сферу $S(E)$ конечным набором θ- шапок и выбрать в каждой из них по точке, принадлежащей множеству A_ε. Новый набор точек (уже из A_ε) будет 2θ-сетью и на этих точках x, очевидно, $|\,\|x\| - M| \leqslant b\varepsilon$. Впрочем, этого полученного факта о существовании хорошей 2θ-сети вполне достаточно для всех дальнейших применений (это будет видно уже из доказательства следующей теоремы) ■

Лемма 1. *Пусть* $0 < \theta < 1$, $\|\cdot\|$ *— некоторая норма на* $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$, M *— ее медиана. Если для некоторой* $(|\cdot|,\theta)$*-сети* N *на евклидовой сфере* S^m *выполнено условие*

$$\forall\, x \in N \qquad |\,\|x\| - M\,| \leqslant \alpha,$$

где $\alpha > 0$, *то на всей сфере* S^m *выполнено условие*

$$\forall\, x \in S^m \qquad \frac{1-2\theta}{1-\theta}\,M - \frac{\alpha}{1-\theta} \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{1-\theta}\,(M+\alpha).$$

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x \in S^m$ и выберем для него такой $x_1 \in N$, что $\alpha_2 := |x - x_1| \leqslant \theta$. Далее, найдем $x_2 \in N$, для которого $\left|\dfrac{x-x_1}{|x-x_1|} - x_2\right| \leqslant \theta$ и положим $\alpha_3 := |x - x_1 - \alpha_2\, x_2|$. Теперь выберем такой $x_3 \in N$, что $\left|\dfrac{x - x_1 - \alpha_2\, x_2}{|x - x_1 - \alpha_2\, x_2|} - x_3\right| \leqslant \theta$ и положим $\alpha_4 := |x - x_1 - \alpha_2\, x_2 - \alpha_3\, x_3,|$ и т.д.. Мы получим разложение элемента x в сходящийся ряд:

$$(3) \qquad x = x_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3 + \ldots, \qquad x_k \in N,\ |\alpha_k| \leqslant \theta^{k-1},\ k = 1,2,3,\ldots$$

Оценки сверху для коэффициентов в (3) верны по следующим соображениям:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k \left|\frac{x - x_1 - \alpha_2\, x_2 - \cdots - \alpha_k\, x_{k-1}}{|x - x_1 - \alpha_2\, x_2 - \cdots - \alpha_{k-1}\, x_{k-1}|} - x_k\right| \leqslant \alpha_k\, \theta$$

(в знаменателе как раз и стоит α_k).

Поскольку для всех $y \in N$ $\|y\| \leqslant (M+\alpha)$, то $\|x\| \leqslant (M+\alpha)\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \leqslant (M+\alpha)/(1-\theta)$. Обратно, пользуясь тем, что, по условию, $\|y\| \geqslant M - \alpha$ для всех $y \in N$ и тем, что $|x - x_1| = |\sum_{k=2}^\infty \alpha_k\, x_k| \leqslant (M+\alpha)\,\theta/(1-\theta)$, по неравенству треугольника получаем:

$$\|x\| \geqslant \|x_1\| - \|x - x_1\| \geqslant (M-\alpha) - \frac{\theta}{1-\theta}\,(M+\alpha) = \frac{1-2\theta}{1-\theta}\,M - \frac{\alpha}{1-\theta}. \quad ■$$

Пусть на пространстве $\mathbb{R}^{n+2}$ задана некоторая норма $\|\cdot\|$ и пусть $\|x\| \leqslant b\,|x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^{n+2}$, где $b > 0$ — некоторое фиксированное число. Наша ближайшая цель — применить разработанную технику и полученные первые результаты для нахождения в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^{n+2}, \|\cdot\|)$ "почти евклидова" (с точки зрения расстояния Банаха–Мазура) подпространства как можно большей размерности. Для этого мы применим теорему о выборе k-мерного подпространства и только что установленную лемму (мы найдем k-мерное E и достаточно хорошую θ-сеть на $S(E)$ и, зная поведение нормы $\|\cdot\|$ на элементах выбранной сети, получим хорошие оценки для этой нормы на всей сфере).

Именно, фиксируем произвольное положительное δ (оно будет задавать близость выбираемого подпространства к евклидову). По этому числу δ мы ниже найдем достаточно малые числа $\theta > 0$ и $\varepsilon' > 0$ (пока зафиксируем обозначения, а точный выбор этих чисел произведем несколько позже). Положим $\varepsilon := M\varepsilon'/b$ и применим к набору $(\mathbb{R}^{n+2}, \|\cdot\|, b, \varepsilon', \theta)$ теорему о выборе k-мерного подпространства. Получим:

существует такое подпространство $E \subset \mathbb{R}^{n+2}$, что

$$k := \dim E \geqslant \frac{\varepsilon^2 n}{6}\,\frac{1}{\ln 3/\theta} = C(\delta)\left(\frac{M}{b}\right)^2 n,$$

причем для элементов некоторой θ-сети $N \subset S(E) = E \cap S^{n+1}$ выполняются неравенства $|\,\|x\| - M\,| \leqslant b\,\varepsilon$, где M —медиана нормы $\|\cdot\|$.

Здесь через $C(\delta)$ мы обозначили некоторую постоянную, в которой, в частности, собрали все, что связано с θ и ε', и которая *зависит только от* δ, но никак ни от размерности n (напомним, что ε', θ выбираются только по δ, и сейчас мы завершим их выбор; при этом с уменьшением этих чисел $C(\delta)$ конечно же тоже будет уменьшаться, но по прежнему она будет зависеть лишь от δ).

Применим теперь лемму 1 с $\alpha := b\,\varepsilon$. Мы получим, что для всех $x \in S(E)$

$$\frac{1-2\theta}{1-\theta}\,M - \frac{b\,\varepsilon}{1-\theta} \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{1-\theta}\,(M + b\,\varepsilon),$$

или

$$\frac{1-2\theta}{1-\theta}\,M - M\,\frac{\varepsilon'}{1-\theta} \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{1-\theta}\,(M + M\,\varepsilon'). \tag{4}$$

Выбирая в последних соотношениях ε' и θ достаточно малыми, мы можем добиться того, что левая часть в (4) станет больше, чем $(1-\delta)\,M$, а правая — меньше, чем $(1+\delta)\,M$, и, в силу однородности норм, будет выполняться условие 2) в теореме 2 ниже.

Теорема 2 (1-я теорема о почти евклидовом сечении). *Пусть* $b > 0$ *и* $\|\cdot\|$ — *некоторая норма на пространстве* $\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющая условию* $\|x\| \leqslant b\,|x|$,

$x \in \mathbb{R}^n$. Для любого числа $\delta > 0$ существуют постоянная $C(\delta)$, не зависящая от размерности n, и подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$, обладающие свойствами

1) $\dim E \geqslant C(\delta)\, n \left(\dfrac{M}{b}\right)^2$ *и*
2) $\forall\, x \in E \qquad (1-\delta)\, M\, |x| \leqslant \|x\| \leqslant 1+\delta)\, M\, |x|.$

В частности, для этого подпространства E имеет место следующая оценка для расстояния его до евклидова пространства: $d\left(E, l_2^{\dim E}\right) \leqslant \dfrac{1+\delta}{1-\delta}$.

Доказательство. Все, что здесь нужно сказать, — это то, что в приведенных выше рассуждениях можно безобидно заменить размерность $n+2$ евклидова пространства на n (за счет незначительного уменьшения постоянной $C(\delta)$). ■

Замечание 4. Если мы сможем максимизировать отношение M/b, то мы получим максимальную размерность δ-евклидова подпространства, которое можно обнаружить в $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Ясно, что для получения хороших качественных и количественных результатов в духе последней теоремы надо научиться оценивать медианы заданных на пространстве $\mathbb{R}^n$ норм, что представляется достаточно не простой задачей. Поэтому один из оптимальных вариантов здесь — сведение оценок медианы к оценкам некоторых интегралов (все же, видимо, конкретные интегралы оценивать проще). Один из таких подходов будет указан в лемме 2 в конце параграфа, а сейчас, пока мы еще не умеем обращаться с медианами как положено, приведем вариант теоремы 2, доказательство которого опирается только на тривиальные свойства среднего по Леви.

Обозначения. *Для банахова пространства X и числа $\varepsilon > 0$ всюду далее*

$$k(X,\varepsilon) := \max\left\{k \in \mathbb{N} :\ \exists\, E \subset X : \dim E = k,\ d(E, l_2^k) \leqslant 1+\varepsilon\right\}$$

(последнее означает, что пространства E и l_2^k $1+\varepsilon$-изометричны) и

$$k(X) := k(X,1)$$

(максимальная размерность подпространства пространства X, 2- изометричного евклидову пространству соответствующей размерности).

Теорема 3 (2-я теорема о почти евклидовом сечении)**.** *Для всякого положительного числа ε существует такая постоянная $C(\varepsilon)$, что для любого конечномерного нормированного пространства X имеет место неравенство*

$$k(X,\varepsilon) \geqslant C(\varepsilon)\, \frac{\dim X}{d(X, l_2^{\dim X})^2}.$$

Доказательство. Как мы уже знаем, можно считать, что пространство X представляет собой n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ с некоторой нормой $\|\cdot\|$, что мы и будем делать. Далее, поскольку в конечномерном случае расстояние Банаха–Мазура между двумя пространствами одинаковой размерности может быть реализовано на некотором изоморфизме этих пространств (см. упражнение после определения этого расстояния), то мы можем найти такие числа $a > 0$ и $b > 0$, что на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ $a^{-1}\,|\cdot| \leqslant \|\cdot\| \leqslant b\,|\cdot|$, причем $ab = d := d(X, l_2^n)$. Из этих соотношений следует, что медиана M нормы $\|\cdot\|$ удовлетворяет неравенствам $M \geqslant a^{-1}$ и $M/b \geqslant d^{-1}$.

Действительно, первое неравенство вытекает из включения

$$\mu\left\{x \in S^{n-1}: \ \|x\| \geqslant \frac{1}{a}\right\} = 1 \geqslant \frac{1}{2},$$

и, значит, чтобы подойти к значению медианы, надо уменьшить последнее множество, увеличивая (в нетривиальном случае) дробь $1/a$. Второе неравенство очевидно: так как $ab = d$, то $M/b = Ma/d$, и, по первому неравенству, $M/b \geqslant 1/d$. Применяем теорему 2 с $\delta = \varepsilon$, несколько уменьшая, если необходимо, постоянную $C(\varepsilon)$ — в зависимости от ε. ∎

Одно из возможных применений доказанной теоремы состоит в следующем: если некоторое пространство (достаточно большой размерности) содержит d-изометричную копию евклидова пространства некоторой размерности k, то для любого $\varepsilon > 0$ оно содержит и $1+\varepsilon$-изометричную копию евклидова пространства размерности $c(\varepsilon)\,k$. Мы будем применять эту теорему примерно в следующей ситуации.

Будет дан некоторый конкретный набор $\{X_m\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных нормированных пространств с размерностями $\dim X_n = n$. В каждом из этих пространств, — в X_n, — мы выберем k-мерное подпространство, C-изометричное евклидову, где k будет зависеть от n, а C — от расстояния X_n до l_2^n. Теорема 3 позволит нам, незначительно уменьшая k (порядок роста k по сравнению с n останется прежним), найти в каждом X_n подпространство, $1+\varepsilon$- изометричное евклидову для любого заранее заданного положительного ε. Это дает нам возможность рассматривать только задачу о нахождении в X_n подпространства E_n, размерность которого максимально велика и для которого $d\left(X, l_2^{\dim X}\right) \leqslant 2$ (то есть всегда можно будет считать, что $\varepsilon = 1$ и интересоваться лишь поведением величин $k(X_n)$ при $n \to +\infty$).

Так, к примеру, $k(l_1^n) \asymp n$ (см. несколько ниже пример 1). При помощи теоремы 3 мы можем сделать вывод: для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ в пространстве l_1^n имеется подпространство F_n, размерность которого не меньше $C(\varepsilon)\,n$ и для которого $d(F_n, l_2^{\dim F_n}) \leqslant 1+\varepsilon$.

Итак, в дальнейшем мы в основном рассматриваем только оценки величин $k(X) = k(X,1)$ для конечномерных (и, если встретятся, бесконечномерных) пространств X.

В заключение параграфа мы докажем обещанную ранее лемму об оценке медианы произвольной нормы через более удобные в работе объекты, — а именно, через некоторые интегралы по сферам:

Лемма 2 (об оценке медианы). *Пусть* $a, b > 0$ *и* $\|\cdot\|$ — *некоторая норма на пространстве* $\mathbb{R}^n$, *удовлетворяющая условию*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \frac{1}{a}\,|x| \leqslant \|x\| \leqslant b\,|x|, \tag{5}$$

M — *медиана этой нормы. Положим* $A := \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\mu(x)$. *Существует абсолютная постоянная* $C > 0$, *для которой имеют место следующие утверждения:*

1) *если* $b \leqslant \sqrt{n}$, *то* $|M - A| \leqslant C$;
2) *если* $ab \leqslant \sqrt{n}$, *то* $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{A}{M} \leqslant C + 1$.

Перед тем как приступить к доказательству леммы, приведем один пример конкретного применения как леммы, так и предыдущих теорем.

Пример 1 (пространство l_1^n). Напомним, что $l_1^n := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, где норма $\|x\|_1$ порождается n-мерным октаэдром и на векторе $x \in \mathbb{R}^n$ вычисляется по формуле $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$. Мы покажем сейчас, что для любого $\varepsilon > 0$ в l_1^n найдется $C(\varepsilon)\,n$-мерное подпространство (то есть, по существу той же размерности, что и все пространство), пересечение которого с октаэдром будет $(1+\varepsilon)$-евклидовым шаром. Через $M(l_1^n)$ мы обозначаем медиану l_1-нормы на единичной евклидовой сфере в $\mathbb{R}^n$.

Действительно, используя неравенство Гельдера, мы видим, что для $x \in \mathbb{R}^n$ $|x| \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,|x|$, поэтому мы попадаем в условия леммы с $a = 1, b = \sqrt{n}$, и можно применять как первое, так и второе ее утверждения. Отсюда при $n > 3$ (мы интересуемся асимптотическим поведением величины $k(l_1^n)$):

$$M(l_1^n) \asymp \int_{S^{n-1}} \|x\|_1\, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{S^{n-1}} |x_j|\, d\mu = n \int_{S^{n-1}} |x_1|\, d\mu =$$

$$= n\, \frac{2 \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, \sin^{n-2}\varphi\, |S^{n-2}|\, d\varphi}{2\, I_{n-2}\, |S^{n-2}|} = \frac{n}{n-1}\, \frac{1}{I_{n-2}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{n\sqrt{n-2}}{n-1} \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{n},$$

так как $I_{n-2} \leqslant \sqrt{\pi/2}\,(n-2)^{-1/2}$ (см. второе доказательство теоремы о выборе k-мерного подпространства, либо доказательство следствия 1 из изопериметрического неравенства). В проведенных выкладках мы по пути воспользовались инвариантностью меры Хаара.

С другой стороны,

$$\int_{S^{n-1}} |x_1|\, d\mu \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} |x_1|^2\, d\mu\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{S^{n-1}} |x_j|^2\, d\mu\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

и, следовательно, $\int^{S^{n-1}} \|x\|_1\, d\mu \leqslant \sqrt{n}$. Поэтому $M/b \geqslant \mathrm{const}\,\sqrt{n}/\sqrt{n} = \mathrm{const}$ и для достижения нашей цели остается применить 1-ю теорему о почти евклидовом сечении.

Таким образом, $k(l_1^n) \asymp n$ при $n \to +\infty$. ■

Доказательство леммы 2. Для упрощения некоторых обозначений при применении леммы Леви переместимся в пространство $\mathbb{R}^{n+2}$. По неравенству Леви,

$$\mu\,\left\{x \in S^{n+1} :\ |\,\|x\| - M| > b\varepsilon\right\} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\varepsilon^2 n/2},$$

а в силу правого неравенства в (5), $\omega_{\|\cdot\|} \leqslant b\,\varepsilon$. Положим $t := b\,\varepsilon$. Так как $b \leqslant \sqrt{n}$, то

$$\mu\,\left\{x \in S^{n+1} :\ |\,\|x\| - M| > t\right\} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-t^2/2},$$

и, следовательно,

$$|A - M| = \left|\int_{S^{n+1}} (\|x\| - M)\ d\mu(x)\right| \leqslant \int_{S^{n+1}} |\|x\| - M|\ d\mu(x) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{|\,\|x\|-M| \in (j,j+1]} |\|x\| - M|\ d\mu(x) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-j^2/2} =: C.$$

В последнем неравенстве справа: $j+1$ — максимум подынтегральной функции на соответствующем промежутке, а $\sqrt{\pi/2}\,\exp\left(-j^2/2\right)$ — мажоранта для меры соответствующего множества интегрирования.

Пусть теперь $ab \leqslant \sqrt{n}$. Не умаляя общности, можно считать, что $a = 1$ (однородность нормы), так что $b \leqslant \sqrt{n}$, и могут быть применимы предыдущие оценки. По доказанному, $|A - M| \leqslant C \leqslant C\,M$ (так как $a = 1$ и $M \geqslant a$). Отсюда $A \leqslant (C+1)\,M$.

Далее, всегда $A \geqslant M/2$ — по определению медианы как, в частности, числа M, для которого мера множества, на котором данная функция не меньше M, не меньше одной второй: $A = \int_{S^{n+1}} \|x\|\, d\mu(x) \geqslant \int_{\|x\| \geqslant M} M\, d\mu(x) \geqslant M/2$. ■

Замечание 5. Так как при $p > 1$ $|\alpha^p - \beta^p| \leqslant c_p\,|\alpha - \beta|^p$ для положительных вещественных α, β, то из доказательства видно, что при $ab \leqslant \sqrt{n}$ $A_p^p := \int_{S^{n-1}} \|x\|^p\, d\mu(x) \asymp M^p$, то есть эти величины оцениваются друг через друга с некоторыми постоянными множителями, зависящими только от p (на самом деле, если более серьезно повозиться с принципом концентрации значений функции около ее среднего по Леви, можно увидеть, что то же самое справедливо и для всех $p > 0$).

§4. Применения: почти евклидовы сечения в l_p^n

В 1961 году А.Дворецкий[16] опубликовал свою замечательную теорему о сечениях выпуклых тел подпространствами большой размерности; в терминах теории операторов это можно сформулировать так: в любом бесконечномерном банаховом пространстве сидит 2-изометричная копия конечномерного евклидова пространства сколь угодно большой размерности. На самом деле, в доказательстве Дворецкого содержался и количественный аналог этого результата, а именно, он по существу установил тот факт, что для любого $n \in \mathbb{N}$ в любом n-мерном нормированном пространстве имеется почти евклидово подпространство размерности $\left[c\sqrt{\log n}\right]$.

В дальнейшем сложное доказательство Дворецкого неоднократно упрощалось, и в 1971 году В.Д. Мильман[17] привел достаточно простое ее доказательство, получив одновременно и точную по порядку оценку для размерности почти евклидовых сечений шаров в n-мерных пространствах — $c \log n$. Затем теорема Дворецкого еще не один раз передоказывалась с использованием различных вероятностных методов (например, с применением гауссовских случайных величин).

В нашем изложении мы будем придерживаться методов, развитых сначала Мильманом, а затем им же в соавторстве с другими математиками, и основанных на изопериметрическом неравенстве для сфер. Однако точную формулировку и доказательство теоремы Дворецкого мы ненадолго отложим (хотя для доказательства все уже подготовлено), и рассмотрим сначала примеры применений развитой в предыдущих разделах техники к некоторым конкретным классическим конечномерным пространствам.

Давайте для начала посмотрим, что дают нам непосредственно результаты предыдущих разделов, если применять их довольно грубо, не используя более тонкие методы. Нас прежде всего будут интересовать геометрические свойства пространств l_p^n. Напомним одно обозначение, введенное нами в предыдущем параграфе, и которое мы постоянно будем использовать ниже:

$$k(X) = k(X,1) = \max\left\{k \in \mathbb{N}:\ \exists\, E \subset X:\ \dim E = k,\ d(E, l_2^k) \leqslant 2\right\}$$

Мы знаем (теорема Гурария–Кадеца–Мацаева), что для любого $p \in [1,2]$ $d_p := d(l_2^n, l_p^n) = n^{|1/2-1/p|}$ и $d_p := d(l_2^n, l_p^n) \asymp n^{|1/2-1/p|}$ для любого $p \in [2,+\infty]$. С другой стороны, используя неравенство Гельдера, мы моментально получаем следующие соотношения между нормами в этих пространствах[18]:

1) $p \in [1,2] \quad \Longrightarrow \quad |\cdot| \leqslant \|\cdot\|_p \leqslant n^{1/p-1/2}\,|\cdot|$;
2) $p \in [2,+\infty] \quad \Longrightarrow \quad n^{1/p-1/2}\,|\cdot| \leqslant \|\cdot\|_p \leqslant |\cdot|$.

---

[16] A. Dvoretzky, Some results on convex bodies and Banach spaces, *Proc. Int. Symp. on linear spaces, Jerusalem* 1961, 192–197.

[17] В.Д. Мильман, Новое доказательство теоремы Дворецкого о кросс–пересечениях выпуклых тел, *Функциональный анализ и его приложен.*, **5**:4 (1971), 28–37.

[18] Например, если $1 \leqslant p \leqslant 2$, то $\sum_1^n |x_j|^2 = \|x\|_2^2 \sum_1^n (|x_j|/\|x\|_2)^2 \leqslant \|x\|_2^2 \sum_1^n (|x_j|/\|x\|_2)^p =$

Мы можем применить в каждом из этих двух случаев 2-ю теорему о почти евклидовом сечении. Получим:

$$k(l_p^n) \geqslant c_p\, n \frac{1}{d_p^2} = c_p\, n \frac{1}{n^{|2/p-1|}} = \begin{cases} c_p\, n^{2/p'}, & 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ c_p\, n^{2/p}, & 2 \leqslant p \leqslant +\infty. \end{cases}$$

Оказывается, что из этих двух оценок точной по порядку является лишь вторая, а первое неравенство очень грубое (впрочем, достаточно взять $p = 1$, чтобы убедиться в этом). Итак, при нахождении порядка роста чисел $k(l_p^n)$ нам необходимо использовать дополнительные более тонкие средства.

Мы приступаем к рассмотрению случая $1 \leqslant p \leqslant 2$; затем мы рассмотрим случай $2 \leqslant p < +\infty$ и, отдельно, $p = +\infty$, после чего и докажем теорему Дворецкого.

Теорема 1. *Если* $1 \leqslant p \leqslant 2$, *то* $k(l_p^n) \asymp n$.

Доказательство. Мы будем действовать по аналогии с уже изученным случаем $p = 1$ (см. предыдущий раздел), но вместо леммы 2 воспользуемся замечанием 5 к ней. Пусть $M(l_p^n)$ — медиана нормы $\|\cdot\|_p$.

$$M(l_p^n)^p \asymp A_p^p = \int_{S^{n-1}} \|x\|_p^p\, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{S^{n-1}} |x_j|^p\, d\mu = n \int_{S^{n-1}} |x_1|^p\, d\mu.$$

Используя оценку снизу интеграла $\int_{S^{n-1}} |x_j|\, d\mu$, установленную при рассмотрении примера 1 (о пространстве l_1^n) предыдущего раздела, получаем:

$$\left(\frac{C}{\sqrt{n}}\right)^p \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} |x_1|\, d\mu\right)^p \leqslant \int_{S^{n-1}} |x_1|^p\, d\mu \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} |x_1|^2\, d\mu\right)^{p/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p.$$

Следовательно, $M(l_p^n)^p \asymp \dfrac{n}{\sqrt{n^p}}$, или $M(l_p^n)^p \asymp n^{-p/2+1}$. По 1-й теореме о почти евклидовых сечениях (" $k(X) \geqslant c\, n\, (M/b)^2$ "),

$$k(l_p^n) \geqslant const_p\, n \left(\frac{n^{-1/2+1/p}}{n^{1/p-1/2}}\right)^2 = const_p\, n.$$

Обратное неравенство (с константой c=1) вытекает из общего известного нам факта: диаметр компакта Минковского $\mathfrak{F}_n$ не может быть больше n. ■

$\|x\|_2^{2-p} \sum_1^n |x_j|^p$, то есть $\|x\|_2^p \leqslant \|x\|_p^p$, и

$$\sum_1^n |x_j|^p = \sum_1^n (1 \cdot |x_j|^p) \leqslant \left(\sum_1^n 1^{(2/p)'}\right)^{1/(2/p)'} \left(\sum_1^n |x_j|^2\right)^{p/2} = n^{1-p/2}\, \|x\|_2^p,$$

то есть $\|x\|_p^p \leqslant n^{1-p/2}\, \|x\|_2^p$.

Теорема 2. *Если* $2 \leqslant p < +\infty$, *то* $k(l_p^n) \asymp n^{2/p}$, *причем для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $p > 0$ *справедливо неравенство*

$$k(l_p^n) \leqslant 16\, p\, n^{2/p}. \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку мы уже заметили выше, что $k(l_p^n) \geqslant c_p\, n^{2/p}$ при $2 \leqslant p < +\infty$, то нам остается лишь получить для таких p обратное неравенство (1). Для этого мы возьмем в l_p^n некоторое k-мерное подпространство E, 2–изометричное евклидову, и оценим сверху размерность k. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$, — такие вектора в E, что для любого набора $\{a_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{R}$ вещественных чисел справедливы неравенства[19]

$$\left(\sum_{j=1}^k |a_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\sum_{j=1}^k a_j f_j\right\|_p \leqslant 2\,\left(\sum_{j=1}^k |a_j|^2\right)^{1/2}. \tag{2}$$

В частности, если $t \in [0,1]$, то

$$k^{p/2} = \left(\sum_{j=1}^k r_j(t)^2\right)^{p/2} \leqslant \left\|\sum_{j=1}^k r_j(t)\, f_j\right\|_p^p = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^k r_j(t)\, f_j^{(i)}\right|^p,$$

где $\{r_j\}$ — последовательность функций Радемахера; через $x^{(i)}$ $(i = \overline{1,n})$ для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ обозначается его i-я координата.

Интегрируя по t по промежутку $[0,1]$ и применяя неравенство Хинчина, получаем:

$$k^{p/2} \leqslant \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^k r_j(t)\, f_j^{(i)}\right|^p dt \leqslant b_p^p \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k |f_j^{(i)}|^2\right)^{p/2}. \tag{3}$$

Для фиксированного $i = \overline{1,n}$

$$\sum_{j=1}^k |f_j^{(i)}|^2 \leqslant \left(\sum_{l=1}^n \left|\sum_{j=1}^k f_j^{(i)}\, f_j^{(l)}\right|^p\right)^{1/p} = \left\|\sum_{j=1}^k f_j^{(i)}\, f_j\right\|_p \underset{\text{по } (2)}{\leqslant} 2\,\left(\sum_{j=1}^k |f_j^{(i)}|^2\right)^{1/2},$$

[19] Пусть $T : l_2^n \to E$ — изоморфизм, для которого $\|T\| \leqslant 2$ и $\|T^{-1}\| = 1$, и пусть $f_j := Te_j$ для $j = \overline{1,k}$. Тогда $\|\sum a_j e_j\|_2 = \|\sum a_j\, T^{-1} f_j\|_2 \leqslant \|\sum a_j f_j\|_p = \|\sum a_j\, Te_j\|_p \leqslant 2\|\sum a_j e_j\|_2$.

откуда[20], сравнивая левую и правую части этих неравенств, мы заключаем, что

$$\left(\sum_{j=1}^{k}|f_j^{(i)}|^2\right)^{1/2} \leqslant 2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что $k^{p/2} \leqslant b_p^p \cdot 2^p \cdot n$, то есть $k(l_p^n)^{p/2} \leqslant (2b_p)^p\, n$. Наконец, вспоминая, что $b_p \leqslant 2\sqrt{p}$ для $p > 0$, мы окончательно получаем неравенство

$$k(l_p^n) \leqslant (2b_p)^2\, n^{2/p} \leqslant (4\sqrt{p})^2\, n^{2/p}. \quad \blacksquare$$

Теорема 3. $k(l_\infty^n) \asymp \ln n$.

Доказательство. Чтобы получить оценку сверху, воспользуемся теоремой 2, применив ее к $p = \ln n$ для $n > e^2$. Сначала заметим, что если $I : l_\infty^n \to l_{\ln n}^n$ — формально тождественный оператор, то $\|I^{-1}\| = 1$ и $\|I\| \leqslant e$, так как $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_{\ln n} \leqslant n^{1/\ln n}\,\|\cdot\|_\infty = e\,\|\cdot\|_\infty$ (неравенство Гельдера). Пусть $U : l_2^k \to l_\infty^n$ — оператор, осуществляющий 2-изометрическое вложение евклидова пространства в l_∞^n и $E = \operatorname{Im} T$ — его образ. Удобно иметь перед глазами следующую диаграмму:

$$(E, \|\cdot\|_{\ln n}) \xrightarrow{I^{-1}} (E, \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{U^{-1}} l_2^k \xrightarrow{U} (E, \|\cdot\|_\infty) \xrightarrow{I} (E, \|\cdot\|_{\ln n})$$

Положим $V := I\,U$, $V : l_2^k \to (E, \|\cdot\|_{\ln n})$. Оператор V осуществляет линейный изоморфизм между указанными пространствами, причем $\|V\|\,\|V^{-1}\| \leqslant 2e$, что, в частности, дает оценку для расстояния Банаха–Мазура: $d(l_2^k, (E, \|\cdot\|_{\ln n})) \leqslant 2e$. Итак, в пространстве $l_{\ln n}^n$ имеется подпространство E размерности k, расстояние от которого до евклидова пространства не больше $2e$. Воспользуемся теперь второй теоремой о почти евклидовых сечениях: для всякого $\varepsilon > 0$

$$k(E, \varepsilon) \geqslant C(\varepsilon)\,\frac{\dim E}{d\left(E, l_2^{\dim E}\right)^2} \geqslant C(\varepsilon)\,k/(4e^2).$$

Взяв $\varepsilon = 1$, мы получим неравенство $k((E, \|\cdot\|_{\ln n})) \geqslant C_1\,k$, где $C_1 > 0$ — абсолютная постоянная; следовательно, в $(E, \|\cdot\|_{\ln n})$, а значит и в $l_{\ln n}^n$, найдется 2-евклидово подпространство размерности не меньше $C_1\,k$. По теореме 2 (см.

---

[20] Возможно, надо пояснить, как получается первое неравенство:

$$\left(\sum_{l=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{k} f_j^{(i)}\, f_j^{(l)}\right|^p\right)^{1/p} \geqslant \max_{1\leqslant l\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k} f_j^{(i)}\, f_j^{(l)}\right| \underset{l=i}{\geqslant} \left|\sum_{j=1}^{k} f_j^{(i)}\, f_j^{(i)}\right|,$$

так как $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_p$.

(1)), $C_1\,k \leqslant C_1 \cdot 16 \ln n\, n^{2/(\ln\, n)} = C_0 \ln n$, где C_0 — абсолютная постоянная. Следовательно, с некоторой другой абсолютной постоянной $C' > 0$ выполняется неравенство $k \leqslant C' \ln n$ и $k(l_\infty^n) \leqslant C' \ln n$.

Осталось для каждого $n \in \mathbb{N}$ найти в пространстве l_∞^n 2-евклидово подпространство размерности порядка $\ln n$. Здесь мы используем лемму о мощности θ-сети на сфере конечномерного пространства.

Мы установим более сильный факт о подпространствах в l_∞^n, а именно, докажем следующее утверждение:

Предложение 1. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и любого* n*-мерного нормированного пространства* X *существует* 2*-изометричное вложение* $T : X \to l_\infty^{5^n}$.

Доказательство. Пусть X — n-мерное нормированное пространство, $S^* := \{x' \in X^* :\ \|x'\| = 1\}$ — единичная сфера сопряженного к X пространства X^*. Напомним, что норма элемента $x \in X$ может быть вычислена по формуле $\|x\| = \max_{S^*} |\langle x', x\rangle|$ (максимум достигается, так как сфера компактна).

Лемма о мощности θ-сети утверждает, что для любого $\theta > 0$ на сфере S^* найдется θ-сеть с количеством элементом не более чем $(1 + 2/\theta)^n$. Мы возьмем $\theta = 1/2$ и найдем в S^* $1/2$-сеть $\left\{x_j'\right\}_{j=1}^{5^n}$. Определим оператор $T : X \to l_\infty^{5^n}$ формулой $Tx := (\langle x_1', x\rangle, \langle x_2', x\rangle, \ldots, \langle x_{5^n}', x\rangle)$. Понятно, что $\|T\| \leqslant 1$, так как $\|Tx\| = \max_j |\langle x_j', x\rangle| \leqslant \|x\|$.

Для получения неравенства в противоположную сторону, зафиксируем произвольный $x \in X$ с единичной нормой и возьмем какой–либо функционал $x' \in X^*$, $\|x'\| = 1$, на котором x достигает своей нормы: $\|x\| = \langle x', x\rangle$. Пусть x_j' — такой элемент нашей $1/2$-сети, что $\|x' - x_j'\| \leqslant 1/2$. Тогда $1 = \|x\| = \langle x' - x_j', x\rangle + \langle x_j', x\rangle \leqslant 1/2 + \max_j |\langle x_j', x\rangle| = 1/2 + \|Tx\|$, так что $\|Tx\| \geqslant 1/2$. Поскольку единичный вектор x был выбран произвольным образом, то для любого $x \in X$ будет выполняться неравенство $\|Tx\| \geqslant \|x\|$, что гарантирует обратимость оператора T и дает оценку для нормы обратного: $\|T^{-1}\| \leqslant 2$. ■

Замечание 1. Мы уже знаем, что если в пространство $l_\infty^{5^n}$ 2-изометрично вложено евклидово пространство, то размерность последнего по порядку не может быть больше, чем $c\,n$; поэтому утверждение предложения 1 не улучшаемо.

Вернемся к доказательству теоремы 3. Пусть $n = 5^m + l$, где $l \leqslant 4 \cdot 5^m - 1$. Пространство $l_\infty^{5^m}$ естественным образом отождествляется (изометрически) с подпространством в l_∞^n, состоящим из наборов по n чисел, последние $n - 5^m$ из которых есть нули. По предложению 1, при $k = m$ пространство l_2^k вкладывается в $l_\infty^{5^m}$, а, следовательно, и в l_∞^n, 2-изометрично. Остается заметить, что $\ln n \leqslant \ln 5^{m+1} \leqslant 2m \ln e^2$ и, таким образом, $k \geqslant (1/4) \ln n$. ■

§5. Теорема Дворецкого

Следующая наша цель — замечательная теорема Дворецкого, для доказательства которой нам потребуется одно вспомогательное техническое утверждение, впрочем представляющее и самостоятельный интерес.

Лемма 1 (об интеграле от максимума). *Существует такая абсолютная постоянная* $C > 0$, *что для всякого* m, $1 \leqslant m \leqslant n$, *имеет место неравенство*

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant j\leqslant m} |a_j|\, d\mu(a) \geqslant C \left(\frac{\ln m}{n}\right)^{1/2}.$$

В частном случае $m = n$ мы получаем оценку снизу для интеграла по сфере от l_∞^n-нормы, и, используя лемму об оценке медианы, — $M \asymp A := \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\mu(x)$, если $ab \leqslant \sqrt{n}$ (лемма 2 предыдущего раздела), — и 1-ю теорему о почти евклидовом сечении, приходим к утверждению:

Следствие 1. *Медиана* $M(l_\infty^n)$ *нормы пространства* l_∞^n *на единичной евклидовой сфере удовлетворяет асимптотическому соотношению*

$$M(l_\infty^n) \asymp \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2}.$$

Доказательство следствия 1. В случае, когда $X = l_\infty^n$, мы имеем: $k(l_\infty^n) \asymp \ln n$ (теорема 3 выше) и $n^{-1/2}\,|\cdot| \leqslant \|\cdot\|_\infty \leqslant |\cdot|$, то есть $a = n^{1/2}, b = 1$, и, следовательно, $ab = n^{1/2}$. По лемме об оценке медианы, с некоторой константой $C_1 > 0$ выполняется неравенство $M(l_\infty^n) \geqslant C_1\, A(l_\infty^n) = C_1 \int_{S^{n-1}} \|x\|_\infty\, d\mu(x)$, последний же интеграл, по лемме 1, не меньше $C \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{1/2}$. Поэтому $M(l_\infty^n) \geqslant \widetilde{C} \left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^{1/2}$. Неравенство в противоположную сторону можно получить из 1-й теоремы о почти евклидовом сечении. Действительно, по этой теореме, для любого n-мерного пространства X выполняется соотношение $k(X) \geqslant C_2 \left(\dfrac{M(X)}{b}\right)^2 n$, где $M(X)$ — медиана нормы пространства X, а величина b определяется из соотношения $\|\cdot\|_X \leqslant b\,|\cdot|$. Следовательно, $\ln n \asymp k(l_\infty^n) \geqslant C_2\, M(l_\infty^n)^2 n$ и, окончательно, $M(l_\infty^n) \leqslant C_3 \sqrt{(\ln n)/n}$. ■

Доказательство леммы 1. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывную относительно меры Лебега вероятностную меру ν, имеющую плотность $e^{-\pi\,|x|^2}$, то есть для борелевских подмножеств $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\nu(B) = \int \cdots \int_B \exp\left(-\pi \sum_{j=1}^n x_j^2\right) dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_n = \int_B e^{-\pi\,|x|^2}\, dx$$

Понятно, что эта мера инвариантна относительно действия ортогональной группы $\mathcal{O}(n)$. Каждую непрерывную функцию $f \in C(S^{n-1})$ мы распространим по лучам на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ по формуле $\widetilde{f}(x) := |x|\, f\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$. На сфере S^{n-1} рассмотрим меру

$\widetilde{\mu}$, полностью определяемую своими значениями на непрерывных функциях f : $\int_{S^{n-1}} f(t)\,d\widetilde{\mu} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x)\,d\nu(x)$. Поскольку правый интеграл инвариантен относительно ортогональных преобразований, тем же свойством обладает и левый; поэтому мера $\widetilde{\mu}$ также инвариантна на сфере и, следовательно, в силу теоремы единственности для меры Хаара, представляет собой некоторое кратное меры μ, то есть $\widetilde{\mu} = \lambda_n\,\mu$ для некоторого положительного числа λ_n. Таким образом, для любой непрерывной функции $f \in C(S^{n-1})$ справедливо равенство $\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(x)\,d\nu(x) = \lambda_n \int_{S^{n-1}} f(t)\,d\mu(t)$. В частности, оно верно и для функции f, тождественно равной единице, подставляя которую в это равенство, мы получаем:

$$\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} |x|\,d\nu(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\,d\nu(x)\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\!\cdots\!\int \sum_{j=1}^{n} x_j^2\,\exp\left(-\pi\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\,dx_1\,\ldots\,dx_n\right)^{1/2} = \left(n\int\limits_{\mathbb{R}} x_1^2\,e^{-\pi x_1^2}\,dx_1\right)^{1/2} \leqslant C_0\sqrt{n},$$

где C_0 — абсолютная постоянная[21].

Оценим сверху меру $\nu_\alpha := \nu\,\{a \in \mathbb{R}^n :\ \max_{1\leqslant j\leqslant m} |a_j| \leqslant \alpha\}$, где $\alpha \geqslant 1$ (выбор этого числа мы уточним позже). Имеем:

$$\nu_\alpha = \int\limits_{[-\alpha,\alpha]^m}\!\!\cdots\!\int \exp\left(-\pi\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)\,dx_1\,\ldots\,dx_m =$$

$$= \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\pi t^2}\,dt\right)^m = \left(1 - 2\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt\right)^m.$$

Так как[22] $\displaystyle\int_\alpha^\infty e^{-\pi t^2}\,dt \geqslant \frac{e^{-\pi\alpha^2}}{4\pi\alpha}$, то $\displaystyle\nu_\alpha \leqslant \left(1 - 2\frac{e^{-\pi\alpha^2}}{4\pi\alpha}\right)^m$. Положим $\alpha = \sqrt{(\ln\,m)/4}$. В этом случае $\displaystyle\frac{e^{-\pi\alpha^2}}{4\pi\alpha} = (2\pi)^{-1}\cdot(\ln\,m)^{-1/2}\,m^{-\pi/4}$ и

$$\nu_\alpha \leqslant \left(1 - \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{m^{\pi/4}\sqrt{\ln\,m}}\right)^m.$$

---

[21] Она равна числу $1/\sqrt{2\pi}$; чтобы убедиться в этом, достаточно проинтегрировать по частям, загнав экспоненту под знак дифференциала.

[22] Интегрируем по частям (экспоненту — под знак дифференциала):

$$I_\alpha := \int_\alpha^\infty e^{-\pi t^2}\,dt = \frac{e^{-\pi\alpha^2}}{2\pi\alpha} - \int_\alpha^\infty \frac{e^{-\pi t^2}}{2\pi t^2}\,dt.$$

Так как $2\pi t^2 \geqslant 2\pi\alpha^2$, то вычитаемый интеграл $\leqslant \dfrac{1}{2\pi\alpha^2}\,I_\alpha$. Поэтому $I_\alpha \geqslant \dfrac{e^{-\pi\alpha^2}}{2\pi\alpha} - \dfrac{1}{2\pi\alpha^2}\,I_\alpha$, откуда, так как $\alpha \geqslant 1$, $2I_\alpha \geqslant \dfrac{2\pi\alpha^2+1}{2\pi\alpha^2}\,I_\alpha \geqslant \dfrac{e^{-\pi\alpha^2}}{2\pi\alpha}$ и, следовательно, $I_\alpha \geqslant \dfrac{e^{-\pi\alpha^2}}{4\pi\alpha}$.

Пусть $M_0 > 0$ — такое число, что правая часть в последнем соотношении не превосходит $1/4$ для всех $m \geqslant M_0$ (такое M_0 существует, поскольку $\pi/4 < 1$). Вспоминая, что значение $\lambda_n \leqslant C_0\sqrt{n}$ и обозначая для краткости через G множество, на котором $\max_{1\leqslant j\leqslant m}|a_j| \geqslant \alpha = \sqrt{(\ln m)/4}$ (его ν-мера не меньше, чем $3/4$), мы получаем оценку интересующего нас интеграла от максимума:

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant j\leqslant m} |a_j|\, d\mu(a) = \lambda_n^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \max_{1\leqslant j\leqslant m} |a_j|\, d\nu(a) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_n^{-1} \int_G \frac{1}{2}\sqrt{\ln m}\, d\nu(a) \geqslant \frac{1}{C_0\sqrt{n}}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\ln m} = C\sqrt{\frac{\ln m}{n}}. \quad \blacksquare$$

Теорема 4 (Дворецкий). *Существует такая постоянная* $C > 0$, *что для любого конечномерного нормированного пространства* X

$$k(X) \geqslant C \ln \dim X.$$

Доказательство. По теореме Джона, существует эллипсоид $Э$ максимального объема, вписанный в единичный шар пространства X, и если $\|\cdot\|_Э$ — норма, ассоциированная с этим эллипсоидом, то $n^{1/2}\|\cdot\|_Э \leqslant \|\cdot\|_X \leqslant \|\cdot\|_Э$, где n — размерность пространства X. Не умаляя общности, мы можем считать, что эллипсоид $Э$ является евклидовым шаром B_2^n, а $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ (как уже не раз отмечалось ранее, мы всегда можем реализовать с помощью линейного изоморфизма пространство X как $\mathbb{R}^n$ с некоторым шаром B и произвести, если необходимо, дополнительное линейное преобразование, превратив эллипсоид в B_2^n). Таким образом, теперь $\|\cdot\|_Э = |\cdot|$.

Так как, в обозначениях из леммы об оценке медианы (соотношения (N)), у нас сейчас $ab = \sqrt{n}$ и $b = 1$, то мы сможем ниже применить эту лемму: $M \asymp A$, где M — медиана нормы пространства X, а A — интеграл от этой нормы по евклидовой сфере. Но сначала вспомним лемму Дворецкого–Роджерса.

По этой лемме, мы можем найти ортонормированный (относительно $|\cdot|$) базис $\{x_j\}_{j=1}^n$, для которого $\|x_j\| \geqslant 1/4$ по крайней мере при $j = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}$. По лемме об оценке медианы,

$$M \asymp A = \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\mu(x) = \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| d\mu(a) =$$

(используем инвариантность меры относительно $\mathcal{O}(n)$)

$$= \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{j=1}^n r_j(s)\, a_j x_j \right\| d\mu(a), \qquad s \in [0,1];$$

здесь $\{r_j\}$ — функции Радемахера. Интегрируя эти равенства по переменной s по отрезку $[0,1]$, получаем:

$$(1) \qquad M \asymp \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(s)\, a_j x_j \right\| ds\, d\mu(a) \geqslant \int_{S^{n-1}} \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|a_j x_j\|\, d\mu(a).$$

Последнее неравенство есть следствие неравенства треугольника для нормы, — надо только заметить, что внутренний интеграл в соотношении (1) представляет собой следующее усреднение по всевозможным выборам знаков:

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(s)\, a_j x_j \right\| ds = \text{Average} \left\| \sum_{j=1}^n \pm a_j x_j \right\| = \frac{1}{2^n} \sum_{\pm} \left\| \sum_{j=1}^n \pm a_j x_j \right\|,$$

и, следовательно, не превосходит[23] $\|a_j x_j\|$ для каждого $j = \overline{1,n}$. Применим к соотношению(1) лемму об интеграле от максимума модуля (для $m = [n/2]$):

$$M \asymp A \geqslant \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}]} |a_j| \cdot \frac{1}{4}\, d\mu(a) \geqslant \widetilde{C} \sqrt{\frac{\ln n}{n}},$$

где $\widetilde{C} > 0$ — абсолютная постоянная. По первой теореме о почти евклидовом сечении, мы окончательно приходим к неравенствам

$$k(X) \geqslant C' n \left(\frac{M}{b} \right)^2 = C' n M^2 \geqslant C\, n \left(\frac{\ln n}{n} \right) = C\, \ln n. \quad \blacksquare$$

§6. Евклидовы сечения в пространствах котипа p.

В этом параграфе буква C будет существенно занята в обозначениях так называемых констант котипа нормированных пространств, поэтому за различными постоянными (абсолютными, либо зависящими от каких–то параметров) мы зарезервируем букву K (обычно, с индексами).

Определение 1. Говорят, что *банахово пространство* X *есть пространства котипа* p, $p > 0$, (или *имеет котип* p), если для любого конечного набора векторов $\{x_j\}$ из пространства X с некоторой постоянной (зависящей только от пространства и p) выполняется неравенство

$$(1) \qquad \left(\sum \|x_j\|^p \right)^{1/p} \leqslant C \left(\int_0^1 \left\| \sum r_j(t)\, x_j \right\|^2 \right)^{1/2}.$$

---

[23] Так для $\{y_j\} \subset X$ и $j = 1$

$$\|y_1\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\pm} \left(y_1 + \sum_{k=2}^n \pm y_k \right) + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\pm} \left(y_1 + \sum_{k=2}^n \pm y_k \right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\pm} \left\| y_1 + \sum_{k=2}^n \pm y_k \right\| + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\pm} \left\| -y_1 - \sum_{k=2}^n \pm y_k \right\| \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\pm} \left\| \sum_{k=1}^n \pm y_k \right\|.$$

Упражнения. 1) Если пространство X имеет котип p, то есть, если в X выполняются соотношения (1) с какой–либо постоянной $C > 0$, то существует наименьшая постоянная C с этим свойством.

2) Любое гильбертово пространство имеет котип 2 с константой котипа, равной единице.

[Указание: Можно доказать по индукции. Но проще использовать ортонормированность системы функций Радемахера: $\int_0^1 \|\sum r_j(y)\, h_j\|^2\, dt = \int_0^1 \sum_{i,j} r_i(t)\, r_j(t)\, \langle h_i, h_j\rangle = \sum_j \|h_j\|^2$. См. параграф "Функции Радемахера и неравенство Хинчина–Кахана".]

Замечание 1. Наименьшую постоянную, которую можно подставить в неравенство (1), оставляя его справедливым при любых наборах векторов $\{x_j\}$ из X, мы обозначим через $C_p(X)$ (это — *константа котипа* p *пространства* X; если такой постоянной не существует, то полагают $C_p(X) = +\infty$).

Определение 2. Пусть X — банахово пространство, $\varepsilon > 0$ и $p \in [1, +\infty]$. Говорят, что X *содержит* l_p^n $(1+\varepsilon)$*-равномерно,* если для любого $n \in \mathbb{N}$ в X найдется такое n-мерное подпространство E, что $d(E, l_p^n) \leqslant 1+\varepsilon$. Пространство X *содержит* l_p^n *равномерно,* если для какого–либо $\varepsilon > 0$ оно содержит l_p^n $(1+\varepsilon)$-равномерно.

Теорема Дворецкого показывает, что *каждое бесконечномерное банахово пространство содержит* l_2^n $(1+\varepsilon)$*-равномерно,* каково бы ни было заранее заданное $\varepsilon > 0$.

Замечание 2. Пусть бесконечномерное пространство X имеет котип p. Для любого $n \in \mathbb{N}$ в X имеется 2-изометричная копия пространства l_2^n, в частности, для всякого $n \in \mathbb{N}$ мы можем найти в X такой набор векторов $\{x_j\}_{j=1}^n$, что

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \left\| \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|^2\right)^{1/2} \leqslant 2 \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2}.$$

Ясно, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ $1 \leqslant \|x_j\| \leqslant 2$. Для этих векторов имеем:

$$n^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p} \leqslant C_p(X) \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t)\, x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_p(X) \left(\int_0^1 2\sum_{j=1}^n |r_j(t)|\, dt\right)^{1/2} = C_p(X) n^{1/2},$$

откуда, в силу произвольности n, вытекает, что $p \geqslant 2$. Таким образом, бесконечномерное банахово пространство может иметь конечный котип лишь не меньший двух, или, по другому, если $p \in [1, 2)$ и $C_p(X) < \infty$, то $\dim X < +\infty$.

Замечание 3. Конечно же каждое конечномерное нормированное пространство имеет любой котип p, но константы котипов для этого пространства могут быть весьма большими по величине и сравнимыми с его размерностью.

Пример 1 (Пространства Лебега). При $2 \leqslant p < +\infty$ любое L_p-пространство имеет котип p.

Доказательство. Пусть $p \geqslant 2$ и $L_p(\sigma) = L_p(\mathfrak{S}, \sigma)$ — некоторое L_p-пространство. Пусть, далее, имеется набор функций $\{f_j\}_{j=1}^n \subset L_p(\mathfrak{S}, \sigma)$. Для них

$$\sum_{j=1}^n \|f_j\|_p^p = \sum_{j=1}^n \int_{\mathfrak{S}} |f_j(s)|^p \, d\sigma(s) = \int_{\mathfrak{S}} \sum_{j=1}^n |f_j(s)|^p \, d\sigma(s). \tag{2}$$

Так как $p \geqslant 2$, то, применяя неравенство Хинчина, для фиксированного $s \in \mathfrak{S}$ получаем:

$$\sum_{j=1}^n |f_j(s)|^p \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |f_j(s)|^2 \right)^{p/2} \leqslant$$
$$\leqslant \left(B_1 \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n r_j(t)\, f_j(s) \right| dt \right)^p \leqslant B_1^p K \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n r_j(t)\, f_j(s) \right|^p dt.$$

Следовательно, после интегрирования по s, принимая во внимание (2), мы приходим к соотношениям

$$\sum_{j=1}^n \|f_j\|_p^p \leqslant B_1^p K \int_0^1 \int_{\mathfrak{S}} \left| \sum_{j=1}^n r_j(t)\, f_j(s) \right|^p ds\, dt =$$
$$= B_1^p K \int_{\mathfrak{S}} \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t)\, f_j \right\|_p^p dt \leqslant \widetilde{K} \left(\int_{\mathfrak{S}} \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t)\, f_j \right\|_p^2 dt \right)^{p/2}.$$

и, таким образом, доказываем, что пространство $L_p(\sigma)$ есть пространство котипа p. ■

Пример 2. Если $1 \leqslant p \leqslant 2$, то любое L_p-пространство имеет котип 2.

Доказательство. Сначала мы приведем решение упражнения 2) из параграфа "Расстояние Банаха–Мазура" (см. два упражнения в самом его конце — после доказательства теоремы Гурария–Кадеца–Мацаева).

Итак, пусть $1 \leqslant p \leqslant 2$ и (Ω, Σ, σ) — произвольное пространство с σ-конечной мерой. Пусть, далее, $\{g_k\}_{k=1}^n$ — некоторый набор функций из $L_p(\sigma)$. Наша цель — установить справедливость неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^n \|g_k\|_p^2 \right)^{1/2} \leqslant \left\| \left(\sum_{k=1}^n |g_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_p. \tag{3}$$

Это получается так:

$$\left(\sum_{k=1}^n \|g_k\|_p^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^n \|\,|g_k|^2\|_{p/2}\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\left\|\sum_{k=1}^n |g_k|^2\right\|_{p/2}^{1/2} = \left\{\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n |g_k(\omega)|^2\right)^{p/2} d\sigma(\omega)\right\}^{1/p} = \left\|\left(\sum_{k=1}^n |g_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p$$

(мы воспользовались обратным неравенством треугольника, справедливым для нормы $\|\cdot\|_{p/2}$, поскольку $p/2 \leqslant 1$).

Теперь, используя (3) и неравенство Хинчина, нетрудно завершить доказательство нашего утверждения.

Пусть, как и выше, $1 \leqslant p \leqslant 2$ и $\{g_k\}_{k=1}^n$ — некоторый набор функций из $L_p(\sigma)$. Принимая во внимание (3), приходим к следующей цепочке соотношений:

$$\left(\sum_{k=1}^n \|g_k\|_p^2\right)^{1/2} \leqslant \left\|\left(\sum_{k=1}^n |g_k|^2\right)^{1/2}\right\|_p =$$

$$= \left\{\int_\Omega \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, g_k(\omega)\right|^2 dt\right)^{p/2} d\sigma(\omega)\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{K}_{2,p} \left\{\int_\Omega \left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, g_k(\omega)\right|^p dt\right) d\sigma(\omega)\right\}^{1/p} =$$

$$= \widetilde{K}_{2,p} \left(\int_0^1 dt \left(\int_\Omega \left|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, g_k(\omega)\right|^p d\sigma(\omega)\right)\right)^{1/p} =$$

$$= \widetilde{K}_{2,p} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, g_k\right\|_p^p\right)^{1/p} \leqslant \widetilde{K}_{2,p} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{k=1}^n r_k(t)\, g_k\right\|_p^2 dt\right)^{1/2} \quad \blacksquare$$

Перед тем как сформулировать и доказать основную теорему параграфа, напомним, что для банахова пространства Z

$$k(Z) := \max\{k \in \mathbb{N} : \ \exists\, E \subset Z : \dim E = k,\ d(E, l_2^k) \leqslant 2\}$$

Теорема 1 (сечения шаров с конечным котипом). *Существует абсолютная постоянная $K > 0$, обладающая следующим свойством. Если $n \in \mathbb{N}$ и X — банахово пространство котипа p с константой котипа $C_p(X)$ и размерности $\dim X \geqslant n$, то*

$$k(X) \geqslant K\, C_p(X)^2\, n^{2/p}.$$

Поскольку подпространство пространства котипа p есть, очевидно, снова пространства котипа p, причем с не большей константой котипа, то из теоремы моментально вытекает такое, формально более сильное,

Следствие 1. *Если X — пространство котипа p, то для любого $n \in \mathbb{N}$ всякое n-мерное подпространство E пространства X содержит 2-изометричную копию евклидова пространства l_2^k размерности, не меньшей, чем $K\,C_p(X)^2\,n^{2/p}$, где $K > 0$ — абсолютная постоянная, то есть*

$$k(E) \geqslant K\,C_p(X)^2\,(\dim E)^{2/p}. \quad \blacksquare$$

Замечание 4. Две теоремы из трех, доказанные в параграфе 5, частично содержатся в теореме 1. Действительно, как мы выяснили, для $p \in [1, +\infty)$ любое пространство типа L_p имеет (конечный) котип $\widetilde{p} := \max\{2; p\}$, и, следовательно, каково бы ни было $n \in \mathbb{N}$, конечномерные l_p^n имеют константы котипа $\widetilde{p}$ не большие, чем $C_{\widetilde{p}}(L_p,)$ то есть, равномерно (по n) ограниченные. Это так, потому что все l_p^n *изометрично вкладываются* в любое бесконечномерное пространство L_p (в терминологии, введенной в начале параграфа, L_p 1-равномерно содержит l_p^n).

Таким образом, $C_{\widetilde{p}}(l_p^n) \leqslant \widetilde{p}$ и из теоремы 1 мы получаем:

при $1 \leqslant p \leqslant 2$ пространства l_p^n 2-изометрично содержат евклидово пространство размерности по крайней мере $\left[\widetilde{K}\,n\right]$, а поскольку асимптотически (по n) большей размерности евклидовых пространств они содержать не могут, то качественно первая теорема из параграфа 5 установлена;

при $2 \leqslant p < +\infty$ пространства l_p^n 2-изометрично содержат евклидово пространство размерности по крайней мере $\left[\widetilde{K}\,n^{2/p}\right]$, и мы получаем основной результат, содержащийся в теореме 2 из параграфа 5 (теорема 1 не гарантирует того, что в l_p^n не может быть 2- евклидова подпространства большей размерности, здесь приходится, как при доказательстве в §5, "работать руками").

Упражнения. 3) Проверьте утверждение из замечания 3 об изометрических вложениях.

Для доказательства теоремы 1 потребуется вспомогательное утверждение об оценке медианы нормы на евклидовой сфере через константу котипа рассматриваемого конечномерного пространства.

Лемма 1. *Пусть $p \in [2, +\infty)$ и $X := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ — некоторое нормированное n-мерное пространство. Пусть, далее, $a, b > 0$ — такие числа, что $a^{-1}|\cdot| \leqslant \|\cdot\| \leqslant b\,|\cdot|$ и $ab \leqslant \sqrt{n}$ (напомним, что через $|\cdot|$ мы обозначаем обычную евклидову норму). Предположим еще что в X выбран такой $|\cdot|$-ортонормированный базис $\{f_j\}_{j=1}^n$, что $\|f_1\| \geqslant \|f_2\| \geqslant \ldots \geqslant \|f_n\|$. Если M — медиана нормы $\|\cdot\|$ на сфере $\{|x| = 1\}$, то*

$$M \geqslant K_0\,C_p(X) \max_{1 \leqslant m \leqslant n} \left\{\|f_m\|\,m^{1/p}\,n^{-1/2}\right\}$$

Отсюда следует теорема 1.

Доказательство теоремы 1. Возьмем какое–либо n-мерное подпространство E в X. По теореме Джона и лемме Дворецкого–Роджерса, в E найдется вписанный в единичный шар пространства E эллипсоид и ортонормированный относительно этого эллипсоида (наверное, позволительно допустить такую вольность речи) базис $\{f_j\}_{j=1}^m$, для которых $\|f_1\| \geqslant \|f_2\| \geqslant \ldots \geqslant \|f_n\|$ и $\|f_j\| \geqslant 1/4$ при $1 \leqslant j \leqslant \left[\dfrac{n}{2}\right]$. Как обычно, мы можем считать, что этот эллипсоид Джона порождает евклидову норму $|\cdot|$. В этом случае, $n^{-1/2}|\cdot| \leqslant \|\cdot\| \leqslant |\cdot|$, то есть в условиях леммы 1 у нас $a=\sqrt{n}$ и $b=1$. Применяем лемму 1:

$$M \geqslant K_0\, C_p(X) \max_{1\leqslant m\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]} \left\{\|f_m\|\, m^{1/p}\, n^{-1/2}\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} K_0\, C_p(X)\, n^{1/p}\, n^{-1/2} = \widetilde{K}\, C_p(X)\, n^{1/p-1/2}.$$

Отсюда (первая теорема о почти евклидовом сечении),

$$k(E) \geqslant K'\, n(\frac{M}{b})^2 \geqslant K\, C_p(X)^2\, n^{2/p}. \quad \blacksquare$$

Доказательство леммы 1. Используя последовательно лемму об оценке медианы, ортонормированность системы функций Радемахера и инвариантность относительно ортогональных преобразований меры Хаара μ на евклидовой сфере, неравенства Кохана и Хинчина, неравенство Гельдера, и взяв произвольное m, $1 \leqslant m \leqslant n$, получаем:

$$M \asymp \int_{S^{n-1}} \|x\|\, d\mu(x) = \int_{S^{n-1}} \left\|\sum_{j=1}^n x^{(j)} f_j\right\| d\mu(x) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t) x^{(j)} f_j\right\| ds\, d\mu(x) \geqslant$$

(применяем неравенство Кахана)

$$\geqslant K_{21} \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t) x^{(j)} f_j\right\|^2 ds\right)^{1/2} d\mu(x) \geqslant$$

$$\geqslant K_{21}\, C_p(X) \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n \|x^{(j)} f_j\|^p\right)^{1/p} d\mu(x) \geqslant$$

$$\geqslant K_{21}\, C_p(X)\, \|f_m\| \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^m |x^{(j)}|^p\right)^{1/p} d\mu(x) \geqslant$$

(а теперь — Гельдера)

$$\geqslant K_{21}\, C_p(X)\, \|f_m\|\, m^{1/q-1/2} \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}|^2 \right)^{1/2} d\mu(x) \geqslant$$

$$\geqslant K_{21}\, C_p(X)\, \|f_m\|\, m^{1/q-1/2}\, m^{1/2} \int_{S^{n-1}} |x^{(1)}|\, d\mu(x) \geqslant K\, C_p(X)\, \|f_m\|\, m^{1/q} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \blacksquare$$

Замечание 5. В некотором смысле двойственное понятие к понятию котипа есть так называемое свойство нормированных пространств иметь конечный тип. Именно, говорят, что *пространство* X *имеет тип* p, если если для любого конечного набора векторов $\{x_j\}$ из X с некоторой постоянной (зависящей только от пространства и p) выполняется неравенство

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum r_j(t)\, x_j \right\|^2 \right)^{1/2} \leqslant C \left(\sum \|x_j\|^p \right)^{1/p}.$$

Двойственность этих двух свойств выражается в том факте, что, если пространство X имеет тип p, то сопряженное пространство X^* имеет котип p', $1/p + 1/p' = 1$, и, если X^* имеет тип p, то X имеет котип p'. Обратное, вообще говоря, не верно: мы знаем, что пространство $L_1[0,1]$ имеет "наилучший" котип 2, но сопряженное к нему пространство $L_\infty[0,1]$ ни конечного типа, ни котипа не имеет (это просто проверить; с другой стороны, это должно быть ясно из общих соображений, — в $L_\infty[0,1]$ "сидят" по крайней мере все сепарабельные банаховы пространства, и наверное есть хотя бы одно плохое с точки зрения "тип–котип").

Упражнения. 1) Показать, что $C[0,1]$ не имеет ни конечного типа, ни конечного котипа.

2) Каждое банахово пространство имеет тип 1 (с какой константой?). Гильбертово пространство имеет тип 2 с константой 1.

3) Если банахово пространство имеет тип $2+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то оно конечномерно.

4) Пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и $\varepsilon > 0$. Показать, что бесконечномерное L_p-пространство не может иметь котип $\max\{2;p\} - \varepsilon$.

5) Показать, что пространство L_p, $p \in [1, +\infty)$, имеет тип 2 при $p \geqslant 2$. При $1 \leqslant p \leqslant 2$ пространство L_p есть пространство типа p.

Гильбертово пространство — единственное (с точностью до банаховых изоморфизмов) пространство с тем свойством, что как оно, так и его сопряженное имеют тип 2. Более того, если X имеет тип 2, а X^* имеет котип 2, то X изоморфно гильбертову пространству. Этот замечательный факт установил польский математик С. Квапень[24].

[24] S.Kwapień, Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients, Studia Math. 44 (1972), pp. 583-595.

§7. Volume Ratio

Метод объемных отношений, о котором пойдет речь в этом параграфе, восходит еще к московскому математику Б.С. Кашину – 1970–е годы. Формально и явно величины $Vr(E)$ для конечномерных пространств (определение см. ниже) были введены польским математиком С. Шареком, но неявно применялись еще Б.С. Кашиным в теории аппроксимации.

Как обычно, основное действие в этом параграфе будет разворачиваться в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что Vol обозначает (лебеговский) объем в $\mathbb{R}^n$, B_2^n — евклидов шар, μ — нормированная мера Хаара (в ближайшее время, — на единичной сфере S^{n-1}; вообще говоря, мы договорились этим символом обозначать любую меру Хаара, так как из контекста всегда ясно, о какой конкретно мере идет речь, и недоразумений возникнуть не должно).

Пусть B — некоторый шар (то есть замкнутое абсолютно выпуклое тело) в $\mathbb{R}^n$ и $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство с единичным шаром B.

Определение 1. *Объемным отношением пространства* E называется величина

$$Vr(E) := \inf_{Э\subset B} \left(\frac{\mathrm{Vol}\ B}{\mathrm{Vol}\ Э}\right)^{1/n} = \left(\frac{\mathrm{Vol}\ B}{\mathrm{Vol}\ D}\right)^{1/n},$$

где infimum берется по всем эллипсоидам $Э$, содержащимся в шаре B, а D — эллипсоид Джона для B (эллипсоид максимального объема, вписанный в этот шар).

Очевидно, всегда $Vr(E) \geqslant 1$.

Лемма 1 (простейшие свойства функции Vr).

(1) $Vr(l_2^n) = 1$, *и это равенство имеет место только для пространства, изометричного евклидову.*

(2) *Объемное отношение сохраняется при нетривиальных линейных преобразованиях пространства* $\mathbb{R}^n$ *(то есть при изоморфизмах, или, что то же, при заменах алгебраических базисов).*

(3) *Для конечномерных нормированных пространств* E, F *одинаковой размерности*
$$Vr(E) \leqslant d(E,F)\, Vr(F).$$

Замечание 1. Свойство (2) позволяет при работе с величинами $Vr(E)$ считать, что эллипсоид D является обычным евклидовым шаром. Свойство (3) показывает, что объемное отношение $Vr(E)$ зависит только от пространства E (с точностью до изометрий), но никак не от конкретной реализации этого пространства как $\mathbb{R}^n$ с некоторой нормой.

Доказательство леммы 1. (1) Поскольку эллипсоид максимального объема, вписанный в B, существует, то точная нижняя грань в определении 1 превращается в минимум и, как уже отмечено в определении 1, достигается на этом эллипсоиде и (с точностью до ортогональных преобразований) только на нем.

(2) При линейных изоморфизмах пространства $\mathbb{R}^n$ объемы различных тел меняются пропорционально друг другу с одной и той же константой пропорциональности (детерминант линейного преобразования: $\mathrm{Vol}\; T(A) = |\det T|\; \mathrm{Vol}\; A.$), что не изменяет отношения этих объемов.

(3) Пусть $d := d(E,F)$ и n — размерность пространств E и F. Эти пространства можно реализовать как $\mathbb{R}^n$ с шарами B_E и B_F соответственно, причем можно считать (так как расстояние Банаха–Мазура достигается на некотором изоморфизме), что $B_F \subset B_E \subset d\,B_F$. Рассмотрим эллипсоид Джона $D_F \subset B_F$ шара B_F. Он содержится также в B_E и для него

$$\frac{\mathrm{Vol}\; B_E}{\mathrm{Vol}\; D_F} \leqslant \frac{d^n\; \mathrm{Vol}\; B_F}{\mathrm{Vol}\; D_F} = d^n\, Vr^n(F).$$

Переходим в этих соотношениях слева к infimum'у по всем эллипсоидам $\text{Э} \subset B_E$ и извлекаем корень n-й степени. ■

Основу всех дальнейших приложений объемного отношения составляет

Теорема 1 (Szarek[25]). *Пусть* B *— некоторый шар в* $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ *— соответствующая норма,* $E := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, Э *— какой-либо эллипсоид, вписанный в* B. *Пусть, далее,* $|||\cdot|||$ *— норма, порожденная этим эллипсоидом и* $A := \left(\dfrac{\mathrm{Vol}\; B}{\mathrm{Vol}\; \text{Э}}\right)^{1/n}$. *В этих обозначениях, для любого* $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *существует подпространство* $F \in E$ *размерности* k, *для которого*

$$|||\cdot||| \leqslant (4\pi\, A)^{\frac{n}{n-k}}\; \|\cdot\| \quad \text{на} \quad F$$

(очевидно, что $\|\cdot\| \leqslant |||\cdot|||$, так как эллипсоид вложен в шар B). *Более того, мера всех таких подпространств* F *не меньше, чем* $1 - 2^n$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько лемм, но сначала мы посчитаем объемы шаров $\mathrm{Vol}\; B_p^n$ и приведем оценки для объемных отношений некоторых классических конечномерных пространств, чтобы сразу показать, каким образом в конкретных случаях может быть применена теорема Шарека (см. следствие 3). Напомним, что $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-t}\, dt$ и $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$. Асимптотическое поведение Γ-функции на бесконечности задается следующим соотношением: $\Gamma(\alpha+1) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-\alpha}\, \alpha^{\alpha+1/2}$, $\alpha \to +\infty$.

Предложение 1 (объемы шаров в l_p^n). *Пусть* $p > 0$ *и* l_p^n, *как обычно, пространство* $\mathbb{R}^n$ *с единичным шаром* $B_p^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_p^p = \sum_{j=1}^n |x_j|^p \leqslant 1\}$ *(шар не обязательно выпуклый, так как при* $n > 1$ *и* $p < 1$ $\|\cdot\|_p$ *— не норма). Справедливо равенство*

$$V_n(p) := \mathrm{Vol}\; B_p^n = \frac{\left(2\Gamma\left(1 + \dfrac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1 + \dfrac{n}{p}\right)}. \tag{1}$$

[25] S.Szarek, On Kašin's almost Euclidean orthogonal decompositions of l_1^n, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **26** (1978), 691–694.

В частности, при $p=1$ $V_n(1)=\dfrac{2^n}{n!}$, *а при* $p=2$ $V_n(2)=\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)}$.

Замечание 2. Из формулы (1) вытекает, что для каждого $p\in(0,+\infty)$ существуют такие постоянные $c(p)>0$ и $C(p)>0$, что для любого $n\in\mathbb{N}$

$$c(p)\,n^{-1/p}\leqslant (V_n(p))^{1/n}\leqslant C(p)\,n^{-1/p}.$$

Доказательство предложения 1. Для вычисления величины $V_n(p)$ мы воспользуемся интегралом $I_p:=\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\|x\|_p^p\right)\,dx$, вычислив его двумя способами.

С одной стороны, этот интеграл равен

$$I_p=\underset{\mathbb{R}^n}{\int\cdots\int}\exp\left(-\sum_{j=1}^n|x(j)|^p\right)\,dx=\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-t^p}\,dt\right)^n=\left(2\int_0^\infty e^{-t^p}\,dt\right)^n=$$
$$=\left(2\int_0^\infty\frac{1}{p}t^{1-p}\,e^{-t^p}\,dt^p\right)^n=\left(2\cdot\frac{1}{p}\int_0^\infty s^{1/p-1}\,e^{-s}\,ds\right)^n=$$
$$=\left(2\cdot\frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n=\left(2\,\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n,$$

а с другой стороны, применяя формулу Ньютона–Лейбница, получаем:

$$I_p=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\|x\|_p}^\infty\frac{d}{dt}\left(-e^{-t^p}\right)\,dt\right)\,dx=\int_0^1\int\limits_{\{\|x\|_p\leqslant1\}}p\,t^{p-1}\,e^{-t^p}\,dx\,dt=$$
$$=\int_0^\infty p\,t^{p-1}\,e^{-t^p}\ \mathrm{Vol}\,\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x\|_p\leqslant t\}\,dt=$$
$$=V_n(p)\int_0^\infty p\,t^{n+p-1}\,e^{-t^p}\,dt=V_n(p)\int_0^\infty p\,s^{n/p}\,e^{-u}\,du\cdot\frac{1}{p}=$$
$$=V_n(p)\,\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right).\quad\blacksquare$$

Равенство (1) позволяет оценить интересующие нас объемные отношения. Сначала мы рассмотрим случай пространства l_1^n, а затем получим и соответствующее неравенство для $p\in[1,2]$.

Следствие 1. *Каково бы ни было* $n\in\mathbb{N}$, $Vr\,(l_1^n)\leqslant C_1$, *где абсолютная постоянная* $C_1\leqslant\sqrt{\dfrac{2\,e}{\pi}}$.

Доказательство. Поскольку, по неравенству Гельдера, $\|a\|_1=\sum_{j=1}^n 1\cdot|a_j|\leqslant n^{1/2}\left(\sum_{j=1}^n|a_j|^2\right)^{1/2}$, то $Э_n:=n^{-1/2}\,B_2^n\subset B_1^n$ и

$$Vr(l_1^n)^n\leqslant\frac{\mathrm{Vol}\ B_1^n}{\mathrm{Vol}\ Э_n}=\frac{2^n}{n!}\,\frac{n^{n/2}\,\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}}.\tag{2}$$

Заметим, что, на самом деле, по соображениям симметрии эллипсоид $Э_n = n^{-1/2}\, B_2^n$ есть эллипсоид Джона (вписанный эллипсоид максимального объема) для B_1^n, поэтому объемное отношение $Vr(l_1^n)$ совпадает с корнем n-ой степени из правой части последнего неравенства. Нам осталось оценить сверху эту правую часть. Для этого мы воспользуемся формулой Стирлинга и следующими соотношениями для Γ-функции (второе из них есть непосредственное следствие стандартного определения Γ-функции через интеграл Эйлера и неравенства Коши–Буняковского):

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \begin{cases} = \left(\dfrac{n}{2}\right)! & \text{при четном } n, \\ \leqslant \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{1/2} \Gamma\left(\dfrac{n+3}{2}\right)^{1/2} = & \\ \qquad = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{1/2} \left(\dfrac{n-1}{2}\right)! & \text{при нечетном } n. \end{cases} \tag{3}$$

Так как для любого натурального числа m

$$m! = \sqrt{2\pi m}\, \left(\frac{m}{e}\right)^m \exp\left(\frac{\theta_m}{12\, m}\right),$$

где $0 < \theta_m < 1$, то

$$\sqrt{2\pi m}\, \left(\frac{m}{e}\right)^m \leqslant m! \leqslant \sqrt{2\pi m}\, \left(\frac{m}{e}\right)^m e^{1/12}. \tag{4}$$

Поэтому из соотношений (2), (4) и (3) получается следующая оценка[26]:

$$(5)\qquad Vr(l_1^n)^n \leqslant \frac{2^n}{n!}\,\frac{n^{n/2}\,\Gamma\left(1+\dfrac{n}{2}\right)}{\pi^{n/2}} \leqslant \left(\sqrt{\frac{2e}{\pi}}\right)^n. \quad \blacksquare$$

Упражнения. 1) Показать, что эллипсоид Джона для единичного шара (октаэдра) пространства l_1^n есть евклидов шар B_2^n.

Следствие 2. *Каково бы ни было* $n \in \mathbb{N}$, *для любого* $p \in [1,2]$ $Vr\,(l_p^n) \leqslant C_p$, *где абсолютная постоянная* $C_p \leqslant Vr(l_1^n) \leqslant \sqrt{\dfrac{2e}{\pi}}$.

Доказательство. Мы воспользуемся той же идеей, что и в предыдущем доказательстве: грубо говоря, мы загоним евклидов шар в кратное шара из l_p^n, так, чтобы все действие происходило внутри B_1^n, и после этого используем следствие 1 (точнее, основное неравенство для частного объемов соответствующих шаров, установленное в доказательстве этого следствия). Именно,

$$(6)\qquad n^{-1/2}\,B_2^n \subset n^{-1/p'}\,B_p^n \subset B_1^n, \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2,$$

так как, по неравенству Гельдера, для $a = \{a\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$, с одной стороны,

$$\sum_{j=1}^n |a_j| \leqslant n^{1/p'}\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p}$$

[26] Вот некоторые подробности. Для четного n

$$Vr(l_1^n)^n \leqslant \frac{2^n\,n^{n/2}\,e^n}{\sqrt{2\pi n}\,\pi^{n/2}\,n^n}\cdot\left(\frac{n}{2}\right)! \leqslant \frac{2^n\,e^n}{\sqrt{2\pi n}\,\pi^{n/2}\,n^{n/2}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi(n/2)}\,n^{n/2}}{e^{n/2}\,2^{n/2}}\cdot e^{1/12} = \frac{2^{n/2}\,e^{n/2}}{\pi^{n/2}}\,\frac{e^{1/12}}{\sqrt{2}} < \left(\frac{2\,e}{\pi}\right)^{n/2}.$$

Для нечетного n

$$\begin{aligned} Vr(l_1^n)^n &\leqslant \frac{2^n\,n^{n/2}e^n}{\sqrt{2\pi n}\,\pi^{n/2}\,n^n}\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{n-1}{2}\right)! \leqslant \\ &\leqslant \frac{2^n\,n^{n/2}e^n}{\sqrt{2\pi n}\,\pi^{n/2}\,n^n}\cdot\frac{(n+1)^{1/2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi\,((n-1)/2)}\,(n-1)^{n/2-1/2}}{(2\,e)^{n/2-1/2}}\cdot e^{1/12} = \\ &= \frac{2^{n/2}\,e^{n/2}}{\sqrt{2}\,\pi^{n/2}}\cdot\sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n/2-1/2}\cdot\sqrt{e}\,e^{1/12} \leqslant \left(\frac{2\,e}{\pi}\right)^{n/2}, \end{aligned}$$

так как

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n/2-1/2} = \exp\left(\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\,\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\right) = e^{\frac{1}{2n}-\frac{1}{2}}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{e}\cdot\frac{e^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{e^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{12}}}{\sqrt{2}} \leqslant 1,\ n > 1.$$

и, с другой стороны,

$$\|a\|_p = \left(\sum_{j=1}^n (|a_j|^2)^{p/2}\right)^{1/p} \leqslant \left(\left(\sum_{j=1}^n 1^{(2/p)'}\right)^{1/(2/p)'}\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n (|a_j|^2)\right)^{1/2} = n^{1/2-1/p'}\,\|a\|_2,$$

поскольку $(1/p)\cdot(1/(2/p)') = p^{-1}\,(1-(1/(2/p))) = 1/p - 1/2 = 1/2 - 1/p'$.

Эллипсоид $n^{1/p'-1/2}\,B_2^n$ вписан в шар B_p^n, и поэтому интересующее нас объемное отношение может быть оценено сверху, если использовать (6) и следующие неравенства:

$$\frac{\mathrm{Vol}\ B_p^n}{\mathrm{Vol}\ \left(n^{1/p'-1/2}\,B_2^n\right)} = \frac{\mathrm{Vol}\ \left(n^{-1/p'}\,B_p^n\right)}{\mathrm{Vol}\ \left(n^{-1/2}\,B_2^n\right)} \leqslant \frac{\mathrm{Vol}\ B_1^n}{\mathrm{Vol}\ \left(n^{-1/2}\,B_2^n\right)} \leqslant \left(\sqrt{\frac{2\,e}{\pi}}\right)^n. \quad \blacksquare$$

Как приложение следствия 2 получаем другой подход к сечениям большой размерности в l_p^n :

Следствие 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Для любого* $k = 1, 2, \ldots, n-1$ *существует подпространство* $F \in l_p^n$ *размерности* k, *для которого*

$$d(F, l_2^n) \leqslant \left(4\pi\sqrt{\frac{2e}{\pi}}\right)^{\frac{n}{n-k}} = \left(4\sqrt{2\pi e}\right)^{\frac{n}{n-k}}.$$

В частности, для $k = n/2$ *при четном* n $d(F, l_2^n) \leqslant 32\pi e$. $\blacksquare$

Теперь мы, возвращаясь к теореме 1 и ее доказательству, предварительно рассмотрим три вспомогательные утверждения. Напомним, что обычную евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$ мы обозначаем так же, как и модуль числа, — $|\cdot|$, а через μ (возможно, с различными индексами и т.п.) — меру Хаара на соответствующем рассматриваемой ситуации многообразии.

Лемма 1. *Пусть* B *— некоторый шар в* $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ *— норма, порожденная этим шаром. Тогда*

$$\frac{\mathrm{Vol}\ B}{\mathrm{Vol}\ B_2^n} = \int_{S^{n-1}} \|x\|^{-n}\,d\mu(x),$$

где, как обычно, μ *— мера Хаара на сфере* S^{n-1}.

Доказательство. Объем $\mathrm{Vol}\ B$ равен интегралу $\int_B dx$. Перейдем в $\mathbb{R}^n$ к полярным (сферическим) координатам. Если точка x бегает по евклидовой сфере S^{n-1}, то точка $\dfrac{x}{\|x\|}$ будет пробегать сферу, соответствующую шару B. Каждая точка $x \in S^{n-1}$ фиксирует некоторый луч, исходящий из начала координат и проходящий через точки x и $\dfrac{x}{\|x\|} \in \{y \in B:\ \|y\| = 1\}$. Таким образом, в полярных координатах, при фиксированных прочих параметрах (то есть, при фиксации положения переменной точки x на евклидовой сфере) неотрицательный параметр r (расстояние от начала координат до точек шара B) будет изменяться в пределах от нуля до $\left|\frac{x}{\|x\|}\right|$, или $r \in [0, \frac{1}{\|x\|}]$.

Таким образом, с некоторым постоянным коэффициентом λ_n (не зависящим от B) интересующий нас объем будет равен

$$\text{Vol } B = \int_B dx = \lambda_n \int_{S^{n-1}} d\mu(x) \int_0^{1/\|x\|} nr^{n-1}\, dr = \lambda_n \int_{S^{n-1}} \|x\|^{-n}\, d\mu(x). \tag{7}$$

Подставив в соотношение (7) в качестве B евклидов шар, мы найдем значение коэффициента λ_n : $\text{Vol } B_2^n = \lambda_n \cdot 1$, то есть

$$\text{Vol } B = VolB_2^n \int_{S^{n-1}} \|x\|^{-n}\, d\mu(x). \quad \blacksquare$$

Замечание 4. В связи с утверждением из леммы 1, очень уместно привести здесь интересное *неравенство Урысона.* Пусть $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ — некоторое нормированное пространство с единичным шаром $B = \{x : \ \|x\| \leqslant 1\}$, реализованное в $\mathbb{R}^n$, и $\|\cdot\|_*$ — сопряженная норма (то есть, норма в сопряженном пространстве E^* : $\|x'\|_* = \sup\{\langle x', x\rangle : \ x \in B\}$). Тогда

$$\left(\frac{\text{Vol } B}{\text{Vol } B_2^n}\right)^{1/n} \leqslant \int_{S^{n-1}} \|x\|_*\, d\mu(x). \tag{8}$$

Как следствие соотношения (8) получается оценка

$$\left(\frac{\text{Vol } B}{\text{Vol } B_2^n}\right)^{1/n} \leqslant n^{-1/2} \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|_*\, d\gamma_n(x)\right)^{1/2}, \tag{9}$$

где γ — каноническая гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, $d\gamma_n = e^{-|x|_2^2/2}\, dx$. Действительно, переходя в интеграле справа к сферическим координатам, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_*\, d\gamma_n(x) = c_n \int_{S^{n-1}} \|x\|_*\, d\mu(x)$$

с постоянной $c_n = \int_{\mathbb{R}^n} |x|\, d\gamma_n(x)$, которая не превосходит $\sqrt{n}$, причем $C_n/\sqrt{n} \to 1$, когда $n \to +\infty$.

Неравенство (9) объясняет причину того, что для оценок объемов некоторых шаров в $\mathbb{R}^n$ очень часто вместо интегрирования по мерам Хаара на евклидовых сферах применяются вероятностными методы, связанные с интегрированием по гауссовским мерам и с гауссовскими случайными величинами.

Лемма 2. *Если f — непрерывная функция на евклидовой сфере S^{n-1}, то для всякого $k = 1, 2, \ldots, n$*

$$\int_{S^{n-1}} f(x)\, d\mu(x) = \int_{F \in \mathfrak{G}_{n,k}} d\mu(F) \int_{S^{k-1}(F)} f(x)\, d\mu_F(x).$$

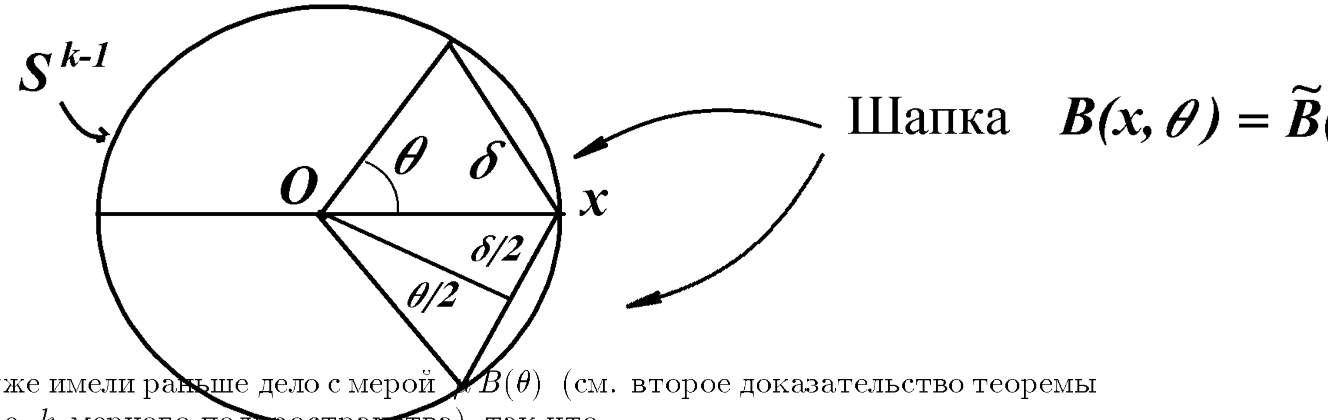
Здесь $\mathfrak{G}_{n,k}$ — многообразие Грассмана, $S^{k-1}(F)$ — евклидова единичная сфера в подпространстве F.

Доказательство. Это уже было в параграфе "Мера Хаара". ∎

Лемма 3. *Пусть $k \in \mathbb{N}, k > 1, \delta \in (0,1)$ и $\widetilde{B}(\delta)$ — некоторая евклидова шапка на сфере S^{k-1}, то есть $\widetilde{B}(\delta) := \widetilde{B}(x,\delta) := \{y \in S^{k-1} : \ |y - x| \leqslant \delta\}$ для некоторого $x \in S^{k-1}$. Тогда*

$$\mu\, \widetilde{B}(\delta) > \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^k.$$

Доказательство. Пусть θ — угол, определяемый из соотношений $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $\delta/2 = \sin(\theta/2)$. Ясно, что евклидова шапка $\widetilde{B}(\delta)$ на сфере совпадает с "геодезической" шапкой $B(\theta) = \{y \in S^{k-1} : \ \rho(y,x) \leqslant \theta\}$.



Мы уже имели раньше дело с мерой $\mu B(\theta)$ (см. второе доказательство теоремы о выборе k-мерного подпространства), так что

$$\mu\, \widetilde{B}(\delta) = \mu\, B(\theta) = \frac{\int_0^\theta \sin^{k-2}\varphi\, d\varphi}{2\int_0^{\pi/2} \sin^{k-2}\varphi\, d\varphi} > \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \sin^{k-2}\varphi\, \cos\varphi\, d\varphi,$$

так как интеграл в знаменателе не больше $\pi/2$, а на промежутке $(0, \pi/2)$ $1 > \cos\varphi > 0$. Вспоминая, что $0 < \delta < 1$ и, следовательно, $0 < \theta < \pi/3$, и интегрируя правую часть последнего соотношения, получаем:

$$\mu\, \widetilde{B}(\delta) \geqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{k-1}\, \sin^{k-1}\theta = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{k-1}\left(2\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{k-1}\left(2\cdot\frac{\delta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{k-1}\left(\frac{\sqrt{3}\,\delta}{2}\right)^{k-1} \geqslant \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^k \frac{1}{k-1}\left(\frac{\sqrt{3}\,\pi}{2}\right)^{k-1} \geqslant \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^k \frac{2^{k-1}}{k-1} \geqslant \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^k. \quad ∎$$

Доказательство теоремы 1. Совершая, если необходимо, подходящее линейное преобразование, без ограничения общности можно считать, что рассматриваемый эллипсоид $Э$ есть единичный евклидов шар B_2^n. Мы будем обозначать единичную евклидову сферу какого–либо подпространства F пространства $\mathbb{R}^n$ через $S(F)$. Зафиксируем k и рассмотрим следующее подмножества многообразия Грассмана:

$$\mathfrak{F} := \left\{ F \in \mathfrak{G}_{n,k} : \int_{S(F)} \|x\|^{-n} \, d\mu_F(x) \leqslant (2\,A)^n \right\}.$$

По неравенству Чебышёва, $\mu(\mathfrak{F}) \geqslant 1 - 2^{-n}$. Действительно,

$$\mu(\mathfrak{G}_{n,k} \setminus \mathfrak{F}) \leqslant \int_{\mathfrak{G}_{n,k}} \frac{\int_{S(F)} \|x\|^{-n} \, d\mu_F(x)}{(2\,A)^n} \, d\mu(F);$$

применяя лемму 2, а затем и лемму 1, приходим к соотношениям

$$\mu(\mathfrak{G}_{n,k} \setminus \mathfrak{F}) \leqslant \frac{1}{(2\,A)^n} \int_{S^{n-1}} \|x\|^{-n} \, d\mu(x) = \frac{1}{(2\,A)^n} \frac{\mathrm{Vol}\; B}{\mathrm{Vol}\; B_2^n} = \frac{1}{(2\,A)^n} A^n = \frac{1}{2^n}.$$

Покажем, что любое из подпространств $F \in \mathfrak{F}$ удовлетворяет заключению нашей теоремы. Для этого зафиксируем некоторое число r, $0 < r < 2$, и рассмотрим $m_r := \{x \in S(F) : \|x\| \leqslant r\}$ (выбор числа r мы осуществим несколько позже так, чтобы для $\delta = r/2$ могла бы быть применена лемма 3). Покажем, что $m_r \leqslant (2rA)^n$.

Применяя еще раз неравенство Чебышёва, получаем:

$$m_r = \mu \left\{ x \in S(F) : \frac{1}{\|x\|^n} \geqslant \frac{1}{r^n} \right\} \leqslant r^n \int_{S(F)} \|x\|^{-n} \, d\mu(x) \leqslant r^n \, (2A)^n$$

(последнее неравенство следует из того, что $F \in \mathfrak{F}$).

Выберем теперь число r таким, чтобы выполнялось равенство $(2Ar)^n = \left(\frac{r/2}{\pi}\right)^k$ (то есть, $r^{n-k} = \left(2^{n+k}\,\pi^k\,A^n\right)^{-1}$), и положим $\delta = r/2$. Так как $0 < \delta < 1$, то, по лемме 3, какой–бы $y \in S(F)$ ни взять, $\mu\{x \in S(F) : |x - y| \leqslant \delta\} > \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^k$.

С другой стороны, мы получили, что

$$m_r = \mu\{x \in S(F) : \|x\| \leqslant r\} \leqslant \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^k.$$

В частности, это означает, что для любого $y \in S(F)$ найдется такой $x \in S(F)$, что $\|x\| > r$ и $|x - y| \leqslant \delta$.

Так как, по условию, $\|\cdot\| \leqslant |\cdot|$, то для этой пары векторов, $\|x-y\| \leqslant r/2$ и, следовательно, $\|y\| \geqslant \|x\| - \|x-y\| > r - r/2$, откуда мы получаем, что на евклидовой сфере $\|\cdot\| \geqslant r/2$.

Если y — произвольный вектор из F, то, по доказанному, $\left\|\dfrac{y}{|y|}\right\| \geqslant r/2$, то есть $|y| \leqslant (2/r)\,\|y\|$ для всякого $y \in F$.

Нам осталось оценить сверху число $2/r$. Имеем:

$$r^{n-k} = \left(2^{n+k}\,\pi^k\,A^n\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2A}\right)^n \left(\frac{1}{2\pi}\right)^k,$$

откуда $(r/2)^{n-k} \geqslant \left(\dfrac{1}{4A\pi}\right)^n$.

Итак, $\|\cdot\| \geqslant \dfrac{r}{2}\,|\cdot| \geqslant \left(\dfrac{1}{4A\pi}\right)^{n/(n-k)} |\cdot|$, или

$$|\cdot| \leqslant (4A\pi)^{n/(n-k)}\,\|\cdot\|. \quad \blacksquare$$

В заключение мы приведем следующий поразительный результат из фундаментальной работы Б.С. Кашина[27], известный сейчас как "кашинское почти ортогональное разложение пространства l_1^n ":

Следствие 4. *Если* $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$, *то существует ортогональное разложение* $l_2^n = F_1 \oplus F_2$ *на два* k *-мерных подпространства, для которого*

$$\forall x \in F_1 \cup F_2 \qquad \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leqslant 32\pi e\,\|x\|_1.$$

Доказательство. Положим $Э_n := n^{-1/2}\,B_2^n$. Так как $Э_n \subset B_1^n$, то, по следствию 1 (см. (2) и (5)),

$$\left(\frac{\mathrm{Vol}\ B_1^n}{\mathrm{Vol}\ Э_n}\right)^{1/n} \leqslant \sqrt{\frac{2e}{\pi}},$$

и, применяя теорему 1, мы получаем:

$$\mu\,\{F \in \mathfrak{G}_{n,k} :\ p_{Э_n} \leqslant 32\pi e\,\|\cdot\|_1 \text{ на } F\} > \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Так как отображение $F \to F^{\perp}$ сохраняет меру μ на многообразии Грассмана $\mathfrak{G}_{n,k}$, то (10) справедливо также и при замене F на $F^{\perp}$. Таким образом, множество тех подпространств $F \in \mathfrak{G}_{n,k}$, для которых $p_{Э_n} \leqslant 32\pi e\,\|\cdot\|_1$ как на F, так и на $F^{\perp}$ одновременно, имеет ненулевую меру. Теперь достаточно взять одно из таких k -мерных подпространств F и положить $F_1 := F$ и $F_2 := F^{\perp}$. $\blacksquare$

[27] Б.С. Кашин, Диаметры некоторых конечномерных подмножеств и некоторые классы гладких функций, *Известия АН СССР (матем.)* **83,** 1977, 334–351.

Список литературы

[БеЛф] Й.Берг, Й.Лёфстрём, *Интерполяционные пространства, Введение*, Москва: Мир (1980), 264 с.

[Берж] М.Берже, *Геометрия Том I* , Москва: Мир (1984), 559 с.

[ГЛюб] И.М.Глазман, Ю.И.Любич, *Конечномерный линейный анализ в задачах*, Москва: Наука (1969).

[ДШв1] Н.Данфорд, Дж.Е.Шварц, *Линейные операторы (общая теория) Том I* , Москва: Иностранная литература (1962), 895 с.

[Зиг1] А.Зигмунд, *Тригонометрические ряды Том I* , Москва: Мир (1968), 615 с.

[КаСа] Б.С.Кашин, А.А.Саакян, *Ортогональные ряды*, Москва: Наука (1984), 496 с.

[Леви] П.Леви, *Конкретные проблемы функционального анализа*, Москва: Наука (1967), 510 с.

[Мак] Б.М.Макаров, *p -абсолютно суммирующие операторы и некоторые их приложения*, Алгебра и анализ **3** (1991), no. 2, 1-83.

[МГЛП] Б.М.Макаров, М.Г.Голузина, А.А.Лодкин, А.Н.Подкорытов,, *Избранные задачи по вещественному анализу*, Москва: Наука (1992), 432 с.

[Шеф] Х.Шеффер, *Топологические векторные пространства*, Москва: Мир (1971), 360 с.

198904, Санкт–Петербург,
Петродворец, Университетский проспект, д.28
Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет,
email: orein@or1146.spb.edu