Представлено М.А. Лифшицем

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

В.В. Высоцкий

Аннотация. Рассматривается частица, движущаяся в веществе под действием постоянного внешнего поля. Вещество состоит из неподвижных шаров одинакового радиуса, случайно распределенных в пространстве $\mathbb{R}^3$. При столкновениях с ними движущаяся частица отражается с коэффициентом упругости $\alpha \in (0,1)$. Мы изучаем асимптотику положения частицы $X(t)$ при времени $t \to \infty$. Для $X(t)$ получена предельная теорема. Ее доказательство основывается на ФЦПТ для цепей Маркова.

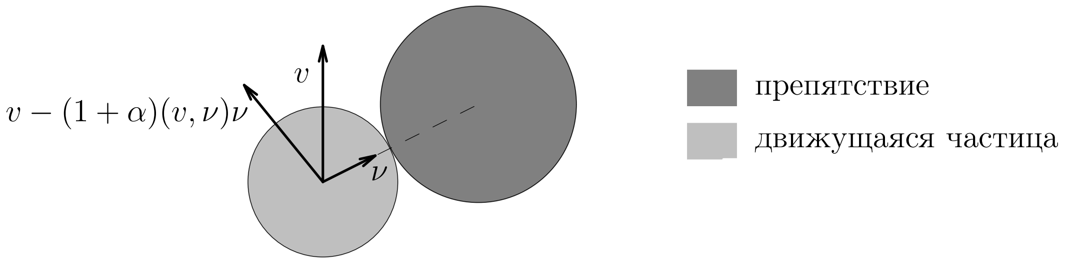
Ключевые слова и фразы: модель Лоренца, случайная среда, положение частицы, ФЦПТ для цепей Маркова, предельные теоремы.

1. Описание модели Лоренца и постановка задачи

1.1. **Описание модели.** Рассмотрим частицу сферической формы, движущуюся в некоем веществе под действием внешнего поля. Поле сообщает движущейся частице постоянное ускорение a. Вещество состоит из неподвижных частиц (шаров одинакового радиуса), случайно распределенных в пространстве $\mathbb{R}^3$. В дальнейшем движущуюся частицу условимся называть "частицей", а частицы среды – "препятствиями". При столкновении с препятствием скорость v частицы меняется на

$$v - (1+\alpha)(v,\nu)\nu,$$

где $0 \le \alpha \le 1$ – коэффициент упругости, а ν – единичный вектор, идущий вдоль прямой, проведенной в момент столкновения через центры столкнувшихся частиц.



При описанном преобразовании меняется только нормальная компонента вектора v, то есть $(v,\nu)\nu$, которая умножается на $(-\alpha)$.

Теперь зададим распределение препятствий. Вещество, в котором движется частица, считается изотропным. Поэтому естественно полагать, что центры препятствий образуют пуассоновское случайное поле. Единственный недостаток такого предположения состоит в том, что препятствия могут пересекаться.

1.2. **История вопроса.** Согласно [5], данная модель была предложена Х.А. Лоренцем для описания проводимости в металлах. Лоренц рассматривал случай $\alpha = 1$, когда столкновения частицы с препятствиями абсолютно упругие. Обобщение ситуации на неупругие столкновения (т.е. $\alpha < 1$) взято нами из [5].

В физике модель Лоренца используют для описания движения частицы, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массами частиц вещества (в этом случае препятствиям можно приписать бесконечные массы, что соответствует их неподвижности). Например, данная модель хорошо описывает движение электронов в гелии (см. [10]).

Физическая литература, посвященная модели Лоренца, весьма обширна. В ней основным объектом изучения (см., например, [5], [4] и [3]) является уравнение Больцмана. Этому уравнению должна удовлетворять плотность $p(x, v, t)$, которая соответствует вероятности нахождения частицы, обладающей скоростью v, в точке x, в момент времени t. Напомним, что уравнение Больцмана получается как следствие закона сохранения вещества. Работа [5], например, посвящена доказательству существования стационарного (т.е. не зависящего от t) решения уравнения Больцмана для случая $\alpha < 1$. Характерно то, что вопрос сходимости $p(x, v, t)$ к стационарному решению оставлен там без внимания.

Стоит обратить внимание на одну из модификаций модели, которую называют периодическим газом Лоренца. В этом случае препятствия распределены в пространстве периодически (то есть не случайно), но зато случайными являются начальное положение частицы и ее скорость; все столкновения считаются абсолютно упругими. Такие модели называются бильярдами. Довольно подробный обзор методов и задач теории бильярдов содержится в [8].

Описанная модель движения частицы допускает еще одну интересную трактовку, см. [9]: под действием гравитации (которую естественно считать постоянной) частица просачивается сквозь неподвижное вещество. Поэтому модель Лоренца может изучаться в рамках теории перколяции. Если рассмотреть большое количество просачивающихся частиц, пренебрегая их взаимодействиями между собой, мы получим модель перемешивания двух сыпучих веществ (порошков).

1.3. **Постановка задачи и формулировка результата.** Нашей целью является изучение асимптотики положения частицы $X(t)$ при времени t, стремящемся к бесконечности. Случай $\alpha = 1$ был полностью исследован в работе [7], согласно которой положение частицы (после должной нормировки) слабо сходится к некоторому диффузионному процессу; здесь имеется в виду слабая сходимость траекторий в пространстве непрерывных функций.

При $\alpha = 1$ довольно интересен и одномерный случай, в котором частица при столкновении просто меняет скорость на противоположную. Несложно показать, что если внешнее поле отсутствует, то $X(t)$ есть телеграфный процесс. Эта ситуация подробно разобрана в [2], где также устанавливается связь положения частицы с телеграфным уравнением.

В данной работе рассмотрен случай движения в $\mathbb{R}^3$, с наличием внешнего поля и условием на коэффициент упругости $\alpha \in (0,1)$. Таким образом, наши результаты существенно дополняют [7].

Не умаляя общности, мы считаем, что $X(0) = 0$. Пусть также неслучайна и начальная скорость $v_0 \in \mathbb{R}^3$. Для удобства выберем такой ортонормированный базис $\mathbb{R}^3$, в котором ускорение имеет вид $a = (0, 0, |a|)^\top$.

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, и $|a| \neq 0$. Существуют константа $c_1 > 0$ и трехмерная корреляционная матрица K такие, что при любой начальной скорости $v_0 \in \mathbb{R}^3$ для положения частицы $X(t)$ справедливо*

$$\frac{X(t) - c_1 a t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, K), \qquad t \to \infty. \tag{1}$$

При этом

$$K = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

где $c_2, c_3 \geq 0$.

Замечание. *Явное выражение констант c_1, c_2, c_3, зависящих от параметров модели a, α, λ, не представляется возможным (параметр λ, означающий среднюю длину свободного пробега, вводится в разделе 2.1).*

Доказательство будет получено сведением задачи к исследованию цепей Маркова. Нам потребуется изучить условия, при выполнении которых к цепи Маркова можно применить функциональную центральную предельную теорему (ФЦПТ). Основная сложность состоит в том, что рассматриваемая цепь задана на несчетном и некомпактном пространстве состояний. Кроме того, для нее не выполнено условие Дёблина, поэтому классические методы (см., например, [1]) не применимы. Задачу удается решить, используя сравнительно новый подход (см. [6]), основанный на стохастических аналогах функций Ляпунова.

Методы нашего доказательства существенно отличаются от методов, использованных в [7]. Их схожесть можно обнаружить лишь на достаточно глубоком уровне. Доказательства из [7] основаны на теории мартингалов, а наши – на ФЦПТ для цепей Маркова, которая получается при помощи результатов той же теории.

2. Первоначальное исследование модели

В этой части осуществляется формулировка задачи на языке цепей Маркова.

2.1. **Время между столкновениями.** Предположим, что частица в момент времени t_0 обладает скоростью u_0. Пусть τ означает случайное время, через которое произойдет ближайшее столкновение частицы и препятствия. Найдем распределение τ. Заметим, что распределение τ не зависит от t_0, поэтому будем считать, что $t_0 = 0$.

Сперва мы введем несколько обозначений. Пусть r есть сумма радиусов частицы и препятствия. Для произвольного $v \in \mathbb{R}^3$ определим единичную полусферу

$$\mathcal{S}_v := \big\{u \in \mathbb{R}^3 : |u| = 1, (u, v) \geq 0\big\}.$$

Скорость частицы в момент времени t будем стандартно записывать как $v(t)$. Для произвольного множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ через $N(A)$ обозначим количество центров препятствий, попавших в A. Далее, λ_3 будет означать меру Лебега в $\mathbb{R}^3$. Наконец, пусть пуассоновское поле, задающее распределение препятствий, имеет интенсивность $(\pi\lambda r^2)^{-1}$, где $\lambda > 0$ – некий параметр.

В этом и следующем разделах мы будем предполагать, что для начальной скорости u_0 выполнено условие

$$|u_0^\perp|^2 > r|a|, \tag{2}$$

где через $u_0^\perp$ обозначена проекция u_0 на ортогональное дополнение вектора a.

Сосчитаем вероятность того, что на произвольном временном интервале $[t, t + dt)$ частица не испытает столкновений. Очевидно, это есть вероятность того, что множество

$$\mathcal{A}_{t,dt} := \left\{X(t) + v(t)s + \frac{as^2}{2} + r\mathcal{S}_{v(t)+as},\ s \in [0, dt)\right\}$$

не содержит ни одного центра препятствий. Теперь (здесь и далее $o(dt)$ при $dt \to 0$)

$$\begin{aligned} \lambda_3\big\{\mathcal{A}_{t,dt}\big\} &= \lambda_3\big\{v(t)s + r\mathcal{S}_{v(t)+as},\ s \in [0, dt)\big\} + o(dt) \\ &= \lambda_3\big\{v(t)s + r\mathcal{S}_{v(t)},\ s \in [0, dt)\big\} + o(dt) \\ &= \pi r^2|v(t)|dt + o(dt). \end{aligned} \tag{3}$$

По определению пуассоновского поля, $\mathbb{P}\big\{N(\mathcal{A}_{t,dt}) = 0\big\} = \exp\big\{-(\pi\lambda r^2)^{-1}\lambda_3\{\mathcal{A}_{t,dt}\}\big\}$. Значит, вероятность того, что на малом временном интервале $[t, t+dt)$ частица не испытает столкновений, равна $1 - \lambda^{-1}|v(t)|dt + o(dt)$. Отсюда видно, что параметр λ имеет смысл средней длины свободного пробега.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$ – разбиение отрезка $[0, t]$. Отсутствие столкновений на этом временном интервале равносильно отсутствию центров препятствий во множествах $\mathcal{A}_{t_{i-1},t_i}$. Из условия (2) достаточно громоздкими выкладками можно получить дизъюнктность указанных множеств. Поэтому, из определения пуассоновского поля,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big\{\tau > t\big\} &= \mathbb{P}\big\{N(\mathcal{A}_{t_0,t_1}) = 0, \dots, N(\mathcal{A}_{t_{k-1},t_k}) = 0\big\} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}\big\{N(\mathcal{A}_{t_{i-1},t_i}) = 0\big\} \\ &= \exp\Big\{-(\pi\lambda r^2)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_3\{\mathcal{A}_{t_{i-1},t_i}\}\Big\}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (3) (в котором, можно показать, $o(dt) = o_t(dt)$ равномерно по t на любом отрезке), находим распределение τ:

$$\mathbb{P}\big\{\tau > t\big\} = e^{-\lambda^{-1}\int_0^t |u_0+as|ds}. \tag{4}$$

Для τ существует очень удобное представление. Пусть η – экспоненциально распределенная величина со средним λ. Определим функцию $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ как решение функционального уравнения

$$\int_0^{F(v,t)} |v + as|ds = t.$$

Тогда, поскольку $F(v, \cdot)$ монотонна и

$$F\left(v, \int_0^t |v + as|ds\right) = t,$$

справедливо представление

$$\tau \overset{d}{=} F(u_0, \eta).$$

2.2. **Вектор нормали.** При столкновении с препятствием скорость частицы $u_1 = u_0 + a\tau$ меняется на $u_1 - (1 + \alpha)(u_1 \cdot \nu)\nu$. Напомним, что ν – это случайный вектор внутренней нормали к препятствию в точке столкновения. Распределение этого вектора, сосредоточенного на полусфере $\mathcal{S}_{u_1}$, нам и предстоит найти.

Обозначим за $u_\perp$ единичный вектор, перпендикулярный множеству $\{u_0 + at,\, t \geq 0\}$; очевидно, что $u_1 \perp u_\perp$. Вектор $\nu \in \mathcal{S}_{u_1}$ может быть задан своими сферическими координатами $(\varphi_\nu^{u_\perp}, \theta_\nu^{u_1})$ относительно векторов $u_\perp$ и u_1. Под этим подразумевается то, что его долгота $\varphi_\nu^{u_\perp} \in [0, 2\pi)$ отмеряется от $u_\perp$, а его широта $\theta_\nu^{u_1} \in [0, \pi/2]$ отмеряется от u_1. Заметим, что и для любого $v \in \{u_0 + at,\, t \geq 0\}$ числа $(\varphi_u^{u_\perp}, \theta_u^v)$ имеют смысл сферических координат произвольного вектора $u \in \mathcal{S}_v$, поскольку $v \perp u_\perp$. А так как сферические координаты однозначно задают единичный вектор, то для любых $v \in \{u_0 + at,\, t \geq 0\}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $\theta \in [0, \pi/2]$ корректно определено множество

$$\mathcal{S}_{v,\varphi,\theta} := \big\{u \in \mathbb{R}^3 : |u| = 1, \varphi_u^{u_\perp} < \varphi, \theta_u^v < \theta\big\} \subset \mathcal{S}_v.$$

Если произошло событие $\big\{\varphi_\nu^{u_\perp} < \varphi, \theta_\nu^{u_1} < \theta, \tau \in [t, t + dt)\big\}$, то центр препятствия, с которым произошло первое столкновение, принадлежит множеству

$$\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta} := \left\{X(t) + v(t)s + \frac{as^2}{2} + r\mathcal{S}_{v(t)+as,\varphi,\theta},\, s \in [0, dt)\right\} \subset \mathcal{A}_{t,dt}.$$

На временном интервале $[0, t)$ столкновений не было. Учитывая эти соображения, а также свойство ординарности пуассоновского поля,

$$\mathbb{P}\big\{\varphi_\nu^{u_\perp} < \varphi, \theta_\nu^{u_1} < \theta, \tau \in [t, t + dt)\big\} = \mathbb{P}\big\{N(\mathcal{A}_{0,t}) = 0, N(\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta}) = 1\big\} + o(dt)$$

(слагаемое $o(dt)$ соответствует попаданию более одного центра препятствия в "маленькое" множество $\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta}$, для объема которого уже известно, что $\lambda_3\{\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta}\} \leq \lambda_3\{\mathcal{A}_{t,dt}\} = O(dt)$).

Как уже говорилось, из (2) следует, что множества $\mathcal{A}_{0,t}$ и $\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta} \subset \mathcal{A}_{t,dt}$ не пересекаются. Значит,

$$\mathbb{P}\big\{\varphi_\nu^{u_\perp} < \varphi, \theta_\nu^{u_1} < \theta, \tau \in [t, t+dt)\big\} = \mathbb{P}\big\{N(\mathcal{A}_{0,t}) = 0\big\}\,\mathbb{P}\big\{N(\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta}) = 1\big\} + o(dt).$$

Подставив $\varphi := 2\pi$, $\theta := \pi/2$, выразим $\mathbb{P}\big\{\tau \in [t, t+dt)\big\}$. Теперь, после несложных преобразований, для условной вероятности

$$\mathbb{P}\Big\{\varphi_\nu^{u_\perp} < \varphi, \theta_\nu^{u_1} < \theta \,\Big|\, \tau \in [t, t+dt)\Big\} = \frac{\mathbb{P}\big\{N(\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta}) = 1\big\}}{\mathbb{P}\big\{N(\mathcal{A}_{t,dt,2\pi,\pi/2}) = 1\big\}} + o(dt).$$

Для вычисления последнего требуется найти $\lambda_3\big\{\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta}\big\}$. Применим те же рассуждения, которые были использованы в (3) при подсчете $\lambda_3\big\{\mathcal{A}_{t,dt}\big\}$. В конечном счете там вычислялся объем цилиндрического множества, являющегося прямым произведением отрезка и полусферы. Здесь же вместо полусферы будет сегмент сферы, и $\lambda_3\big\{\mathcal{A}_{t,dt,\varphi,\theta}\big\} = \pi(r\sin\theta)^2\varphi/(2\pi)|v(t)|dt + o(dt) = (r\sin\theta)^2\varphi|v(t)|dt/2 + o(dt)$.

Таким образом,

$$\mathbb{P}\Big\{\varphi_\nu^{u_\perp} < \varphi, \theta_\nu^{u_1} < \theta \,\Big|\, \tau \in [t, t+dt)\Big\} = \frac{\varphi\sin^2\theta}{2\pi} + o(dt).$$

Отсюда мы делаем вывод, что

$$\mathbb{P}\big\{\varphi_\nu^{u_\perp} < \varphi\big\} = \frac{\varphi}{2\pi}, \qquad \mathbb{P}\big\{\theta_\nu^{u_1} < \theta\big\} = \sin^2\theta,$$

и $\varphi_\nu^{u_\perp}$ независима с $\theta_\nu^{u_1}$, а также независимы величины ν и τ.

Значительное неудобство состоит в том, что распределение ν зависит скорости перед столкновением u_1. Чтобы от этого избавиться, определим σ как такой единичный вектор, что ν идет вдоль биссектрисы угла между векторами σ и u_1. Тогда

$$(u_1, \nu)\nu = \frac{1}{2}\big(u_1 + |u_1|\sigma\big).$$

Покажем, что σ равномерно распределен на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ и независим с u_1. Действительно, поскольку $\varphi_\sigma^{u_\perp} = \varphi_\nu^{u_\perp}$ и $\theta_\sigma^{u_1} = 2\theta_\nu^{u_1}$, то

$$\mathbb{P}\big\{\varphi_\sigma^{u_\perp} < \varphi\big\} = \frac{\varphi}{2\pi}, \qquad \mathbb{P}\big\{\theta_\sigma^{u_1} < \theta\big\} = \frac{1-\cos\theta}{2}.$$

При любых фиксированных u_1 и $u_\perp$ это соответствует равномерному распределению. Значит, σ распределен на S^2 равномерно. Следовательно, σ независим с u_1 (а также с $u_\perp$ и, аналогично, с u_0).

Таким образом, столкновение с препятствием удобнее описывать при помощи вектора σ: при столкновении скорость v движущейся частицы меняется на

$$v - \frac{1+\alpha}{2}\big(v + |v|\sigma\big),$$

где $\sigma \in S^2$ – равномерно распределенный вектор, независимый с v.

2.3. **Формулировка через цепь Маркова.** Обозначим за V_n скорость частицы непосредственно перед n-м столкновением (то есть до того, как она изменилась скачком). Пусть $\{\sigma_n\}_{n\geq 1} \subset S^2$ – равномерно распределенные векторы, $\{\eta_n\}_{n\geq 0}$ – экспоненциально распределенные величины со средним λ, причем $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}, \{\eta_n\}_{n\geq 0}$ независимы в совокупности. Тогда, на основании результатов двух предыдущих разделов,

$$V_{n+1} = V_n - \frac{1+\alpha}{2}\big(V_n + |V_n|\sigma_n\big) + a\tau_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Здесь

$$\tau_n := F\Big(V_n - \frac{1+\alpha}{2}\big(V_n + |V_n|\sigma_n\big), \eta_n\Big) \tag{6}$$

– случайное время, протекающее между столкновениями с номерами n и $n+1$; вектор σ_n описывает n-е столкновение.

Величины V_n образуют цепь Маркова. Осталось лишь задать начальное условие V_1. Напомним, что при $t = 0$ частица имеет неслучайную скорость $v_0 \in \mathbb{R}^3$. Соответственно,

$$V_1 := v_0 + aF(v_0, \eta_0),$$

где

$$\tau_0 := F(v_0, \eta_0)$$

– случайное время до первого столкновения.

Отождествим полученную цепь Маркова и исходную модель.

Стоит отметить, что при таком отождествлении мы получаем довольно значительное несоответствие. Во-первых, в новой модели частица, столкнувшись с препятствием в некоторой точке пространства, совсем не обязательно снова испытает столкновение, оказавшись на том же месте. Причиной этого является постулированная независимость всех σ_n и η_n. Получается, что при столкновениях вещество "изменяется", и весьма специфическим образом. Во-вторых, распределение случайных времени и нормали было получено нами при некотором условии на начальную скорость. Разумеется, величины $V_n - \frac{1+\alpha}{2}(V_n + |V_n|\sigma_n)$ и v_0 этому условию удовлетворять не обязаны. Если же мы хотим избавиться от данного несоответствия, то нам придется либо положить $r = 0$, либо оправдать его дополнительной изменчивостью среды.

3. Начало доказательства теоремы 1

Сперва мы изучим величины $X_n := X(t_n)$, описывающие положение частицы в момент n-ого столкновения; здесь $t_n := \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i$ – время, прошедшее с начала движения.

Рассмотрим новую цепь Маркова

$$\Phi_n := \begin{pmatrix} V_n \\ \sigma_n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}; \qquad \Phi_0 := \begin{pmatrix} v_0 \\ -v_0/|v_0| \end{pmatrix}.$$

Чуть позже станет ясно, что указанные начальные данные соответствуют частице, имеющей начальную скорость v_0 (в нулевой момент времени происходит фиктивное "столкновение", не меняющее v_0). Заметим, что V_n независимо с σ_n. Введя обозначение

$$\widehat{x} := v - \frac{1+\alpha}{2}\big(v + |v|\sigma\big), \qquad x = \begin{pmatrix} v \\ \sigma \end{pmatrix} \in X := \mathbb{R}^3 \times S^2,$$

перепишем (5) и (6) как

$$V_{n+1} = \widehat{\Phi_n} + aF(\widehat{\Phi_n}, \eta_n). \tag{7}$$

А для новой цепи

$$\Phi_{n+1} = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi_n} + aF(\widehat{\Phi_n}, \eta_n) \\ \sigma_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad n \geq 0.$$

Координаты векторов в $\mathbb{R}^3$ будем обозначать верхними индексами; напоминаем, что $a^3 = |a|$. Так как $V^1_{n+1} = \widehat{\Phi_n}^1$, $V^2_{n+1} = \widehat{\Phi_n}^2$, а $V^3_{n+1} = \widehat{\Phi_n}^3 + |a|\tau_n$, то

$$X_{n+1} = X_n + \begin{pmatrix} \widehat{\Phi_n}^1 \tau_n \\ \widehat{\Phi_n}^2 \tau_n \\ ((V^3_{n+1})^2 - (\widehat{\Phi_n}^3)^2)/(2|a|) \end{pmatrix} = X_n + \frac{1}{|a|} \begin{pmatrix} V^1_{n+1} V^3_{n+1} - \widehat{\Phi_n}^1 \widehat{\Phi_n}^3 \\ V^2_{n+1} V^3_{n+1} - \widehat{\Phi_n}^2 \widehat{\Phi_n}^3 \\ ((V^3_{n+1})^2 - (\widehat{\Phi_n}^3)^2)/2 \end{pmatrix},$$

и отсюда

$$X_{n+1} = \frac{1}{|a|} \begin{pmatrix} \widehat{\Phi_{n+1}}^1 \widehat{\Phi_{n+1}}^3 - \widehat{\Phi_0}^1 \widehat{\Phi_0}^3 \\ \widehat{\Phi_{n+1}}^2 \widehat{\Phi_{n+1}}^3 - \widehat{\Phi_0}^2 \widehat{\Phi_0}^3 \\ ((\widehat{\Phi_{n+1}}^3)^2 - (\widehat{\Phi_0}^3)^2)/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{|a|} \sum_{i=1}^{n+1} \begin{pmatrix} V^1_i V^3_i - \widehat{\Phi}_i^{\,1} \widehat{\Phi}_i^{\,3} \\ V^2_i V^3_i - \widehat{\Phi}_i^{\,2} \widehat{\Phi}_i^{\,3} \\ ((V^3_i)^2 - (\widehat{\Phi}_i^{\,3})^2)/2 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Кроме того,

$$t_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \tau_i = \frac{1}{|a|} \sum_{i=0}^{n} V^3_{i+1} - \widehat{\Phi}_i^{\,3} = \frac{1}{|a|} \big(\widehat{\Phi_{n+1}}^3 - \widehat{\Phi_0}^3 \big) + \frac{1}{|a|} \sum_{i=1}^{n+1} V^3_i - \widehat{\Phi}_i^{\,3}. \tag{9}$$

Введя обозначения

$$f(x) := \frac{1}{|a|} \begin{pmatrix} v^1 v^3 - \widehat{x}^1 \widehat{x}^3 \\ v^2 v^3 - \widehat{x}^2 \widehat{x}^3 \\ ((v^3)^2 - (\widehat{x}^3)^2)/2 \end{pmatrix}, \quad h(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v^3 - \widehat{x}^3 \end{pmatrix}, \qquad x = \binom{v}{\sigma} \in X,$$

из (8) и (9) получаем

$$X_n - c_1 a t_n = \frac{1}{|a|} \begin{pmatrix} \widehat{\Phi_n}^1 \widehat{\Phi_n}^3 - \widehat{\Phi_0}^1 \widehat{\Phi_0}^3 \\ \widehat{\Phi_n}^2 \widehat{\Phi_n}^3 - \widehat{\Phi_0}^2 \widehat{\Phi_0}^3 \\ ((\widehat{\Phi_n}^3)^2 - (\widehat{\Phi_0}^3)^2)/2 \end{pmatrix} - \frac{c_1}{|a|} a \big(\widehat{\Phi_n}^3 - \widehat{\Phi_0}^3 \big) + \sum_{i=1}^{n} [f - c_1 h](\Phi_i).$$

Значит,

$$\Big| X_n - c_1 a t_n - \sum_{i=1}^{n} [f - c_1 h](\Phi_i) \Big| \leq \frac{2.5}{|a|} \big(|\widehat{\Phi_n}|^2 + |\widehat{\Phi_0}|^2 \big) + c_1 \big(|\widehat{\Phi_n}| + |\widehat{\Phi_0}| \big). \tag{10}$$

Пусть $n(t)$ означает (случайное) число столкновений, произошедших к моменту времени t. Поскольку

$$\frac{X(t) - c_1 a t}{\sqrt{t}} = \frac{X(t_{n(t)}) - c_1 a t_{n(t)}}{\sqrt{t}} + \frac{\big(X(t) - X(t_{n(t)}) \big) - c_1 a \big(t - t_{n(t)} \big)}{\sqrt{t}},$$

то для доказательства (1) достаточно

$$\left| \frac{\big(X(t) - X(t_{n(t)})\big) - c_1 a\big(t - t_{n(t)}\big)}{\sqrt{t}} \right| \xrightarrow{d} 0, \qquad t \to \infty \tag{11}$$

и существования $c_1 > 0$ и матрицы K таких, что

$$\frac{X(t_{n(t)}) - c_1 a t_{n(t)}}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, K), \qquad t \to \infty.$$

С учетом (10), последнее утверждение вытекает из

$$\frac{|\widehat{\Phi_{n(t)}}|^2}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} 0, \qquad t \to \infty. \tag{12}$$

и существования $c_1 > 0$ и K, для которых

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=1}^{n(t)} [f - c_1 h](\Phi_i) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, K), \qquad t \to \infty. \tag{13}$$

Нам, очевидно, потребуется подробно изучить цепь Маркова Φ_n. Необходимые общие сведения о цепях Маркова изложены в части 4. Часть 5 посвящена доказательству того, что цепь Φ_n обладает нужными свойствами. Наконец, в части 6, на основании полученных свойств Φ_n, доказываются (11), (12) и (13). Утверждение (13), представляющее наибольшую сложность, будет выведено при помощи ФЦПТ, примененной к последовательности $[f - c_1 h](\Phi_i)$.

Таким образом, задача изучения положения частицы оказалась сведена к изучению различных свойств цепи Маркова Φ_n.

4. Сведения о цепях Маркова

Все формулировки и определения даются в соответствии с книгой [6]; в этой части многочисленные указания на данный источник опускаются. Основной задачей является описание условий, которые достаточны для применения закона больших чисел (ЗБЧ) и ФЦПТ к цепи Маркова. Также будет дано эффективное средство для проверки этих условий.

Рассмотрим (произвольную!) цепь Маркова Φ_n, принимающую значения в произвольном пространстве X, снабженном счетнопорожденной σ-алгеброй $\mathcal{F}$. Предположим, что у цепи Φ_n существует переходная функция $P(x, \cdot)$. Переходную функцию за n шагов стандартно запишем как $P^n(x, \cdot)$. Через π будем обозначать инвариантную меру цепи (которая в рассматриваемых нами ситуациях существует и единственна). При вычислении вероятностей и ожиданий начальное распределение $\mathcal{L}(\Phi_0)$ будем указывать при помощи нижнего индекса. Например, запись $\mathbb{P}_x\big\{\Phi_n \in A\big\}$ подразумевает, что $\mathcal{L}(\Phi_0) = \delta_x$, а $\mathbb{E}_\pi \Phi_n$ означает, что $\mathcal{L}(\Phi_0) = \pi$. Наконец, через P будем обозначать марковский переходный оператор цепи. Все рассматриваемые далее функции считаются измеримыми.

4.1. **Определения.** Пусть φ – ненулевая мера на $\mathcal{F}$. Цепь Маркова Φ_n называется *неприводимой относительно* φ, если

$$\varphi(A) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}_x\Big\{\exists\, n \in \mathbb{N} : \Phi_n \in A\Big\} > 0, \qquad x \in X, A \in \mathcal{F}.$$

Мера ψ называется *максимальной неприводимой* для цепи Φ_n, если
1) Φ_n неприводима относительно ψ
2) Φ_n неприводима относительно произвольной меры φ, если и только если $\varphi \prec \psi$.
Цепь Маркова, обладающую максимальной неприводимой мерой ψ, называют *ψ-неприводимой.* Согласно предложению 4.2.2, если цепь неприводима относительно какой-то меры φ, то у нее существует максимальная неприводимая мера. Заметим, что все максимальные неприводимые меры эквивалентны.

ψ-неприводимая цепь называется *периодической с периодом* d (мы изменили определение из [6] при помощи теоремы 5.4.4), если d есть минимум из чисел $d' \in \mathbb{N}$ таких, что существуют множества $D_1, \dots, D_{d'} \in \mathcal{F}$, обладающие свойствами
1) для любого $x \in D_i$ выполняется $P(x, D_{i+1}) = 1, \quad i = 0, \dots, d' - 1 \ (\mathrm{mod}\ d')$
2) множества D_i не пересекаются, и $\psi\Big(X \setminus \bigcup_{i=1}^{d'} D_i\Big) = 0$.
Цепь называется *апериодической*, если $d = 1$.

Пусть X – локально компактное, метризуемое, сепарабельное топологическое пространство, а $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$. Цепь Φ_n называется *слабо феллеровской*, если функция $P(\cdot, A)$ полунепрерывна снизу для любого открытого множества A.

Множество $C \in \mathcal{F}$ называется *маленьким (small)*, если существуют $n \in \mathbb{N}$ и ненулевая мера μ на $\mathcal{F}$ такие, что

$$P^n(x, A) \geq \mu(A), \qquad x \in C, A \in \mathcal{F}.$$

Если ψ-неприводимая цепь Φ_n (на обладающем соответствующими свойствами пространстве X) является слабо феллеровской, а $\mathrm{Int}\,(\mathrm{supp}\,\psi) \neq \varnothing$, то любое компактное множество является маленьким (см. теорему 6.0.1, а также предложение 5.5.3).

Пусть μ – заряд на $\mathcal{F}$, а функционал $f : X \to [0, \infty)$. Определим *f-норму* заряда μ как

$$\|\mu\|_f := \sup_{g:|g| \leq f} \int_X g d\mu = \int_X f d|\mu|.$$

1-норму называют *нормой полной вариации*; в этом случае пишут не $\|\mu\|_1$, а просто $\|\mu\|$. Пусть P_1 и P_2 – марковские переходные функции, а функционал $U : X \to [1, \infty)$. Положим

$$|||P_1 - P_2|||_U := \sup_{x \in X} \frac{\|P_1(x, \cdot) - P_2(x, \cdot)\|_U}{U(x)}.$$

Цепь Маркова Φ_n называется *эргодической*, если существует такая мера π, что для любого $x \in X$ выполняется $\|P^n(x, \cdot) - \pi\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что π является единственной инвариантной мерой. Цепь Маркова называется *U-равномерно эргодической*, если существует такая мера π, что $|||P^n - \pi|||_U \to 0$ при $n \to \infty$ (формально полагаем $\pi(x, \cdot) := \pi(\cdot)$). Заметим, что из U-равномерной эргодичности следует

cU-равномерная эргодичность, где $c > 1$. Для ψ-неприводимых апериодических цепей условие 1-равномерной эргодичности эквивалентно выполнению хорошо известного условия Дёблина (см. теорему 16.2.3).

Пусть для $g : X \to \mathbb{R}$ выполнено условие $g \in L^1(\pi) = L^1(X, \mathcal{F}, \pi)$. Функциональное уравнение (относительно $\bar{g}$)

$$\bar{g} - P\bar{g} = g - \int_X g d\pi \tag{14}$$

называется *уравнением Пуассона.*

4.2. **Теоремы.**

Теорема 2. *Пусть цепь Маркова Φ_n эргодична, а функционал $g \in L^1(\pi)$. Тогда для любого начального условия $\Phi_0 = x \in X$ справедливо*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(\Phi_i) = \int_X g d\pi, \qquad \mathbb{P}_x \text{п.н.}$$

Доказательство. Вытекает из теоремы 17.0.1. □

Теорема 3. *Пусть цепь Маркова Φ_n ψ-неприводима и апериодична, а $U : X \to [1, \infty)$. Следующие утверждения эквивалентны:*
1) Φ_n U-равномерно эргодическая
2) Выполнено условие сдвига Ляпунова-Фостера: существуют маленькое множество C и константы $\beta > 0$ и b такие, что

$$PU(x) - U(x) \le -\beta U(x) + b\mathbf{1}_C(x), \qquad x \in X. \tag{15}$$

Кроме того, если выполнено (15)*, то $U \in L^1(\pi)$.*

Доказательство. С учетом предложения 5.5.3, эквивалентность условий *1)* и *2)* следует из теорем 15.0.1 и 16.0.1. Существование ожидания по инвариантной мере доказывается в теореме 14.0.1. □

Теорема 4. *Пусть цепь Маркова Φ_n U-равномерно эргодична, а для функционала $g : X \to \mathbb{R}$ выполняется $g^2 \le U$. Тогда у уравнения Пуассона* (14) *существует решение $\bar{g} \in L^2(\pi)$, и корректно определена константа*

$$\gamma_g^2 := \int_X \left(\bar{g}^2 - (P\bar{g})^2\right) d\pi \ge 0. \tag{16}$$

Если $\int_X g d\pi = 0$, то для любого начального условия $\Phi_0 = x \in X$ в пространстве $\mathcal{C}[0, 1]$

$$\frac{\sum_{i=1}^{[nt]} g(\Phi_i) + (nt - [nt])g(\Phi_{[nt]+1})}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \sqrt{\gamma_g^2} W(t), \qquad n \to \infty, \tag{17}$$

где $W(t)$ означает винеровский процесс.

Доказательство. Существование решения уравнения Пуассона легко получается из теоремы 17.4.2. Корректность определения γ_g^2 (то есть ее независимость от выбора решения $\bar{g}$ уравнения Пуассона) следует из предложения 17.4.1. Неотрицательность γ_g^2 следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$\int_X (P\bar{g})^2 d\pi = \int_X \left(\int_X \bar{g}(y)P(x,dy) \right)^2 d\pi(x) \leq \int_X \int_X \bar{g}^2(y)P(x,dy)d\pi(x) = \int_X \bar{g}^2 d\pi. \quad (18)$$

Наконец, последнее утверждение теоремы есть объединение теорем 17.4.4 и 17.5.4. $\square$

5. Изучение свойств цепи Φ_n

Пусть $x = \binom{v}{\sigma} \in X$. Мы будем часто использовать очевидные неравенства

$$\alpha|v| \leq |\widehat{x}| \leq |v|$$

(напомним, что рассматривается случай $0 < \alpha < 1$).

5.1. **ψ-неприводимость, апериодичность, маленькие множества.** Сперва покажем, что при любом начальном условии $\Phi_0 = x$ величина $V_2 = \widehat{\Phi_1} + aF(\widehat{\Phi_1}, \eta_1)$ принимает все значения из $\mathbb{R}^3$. Мы докажем, что $\widehat{\Phi_1}$ принимает все значения из $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, |\widehat{x}|) = \{u \in \mathbb{R}^3 : |u| \geq |\widehat{x}|\}$, и этого будет достаточно, поскольку при любом фиксированном $\widehat{\Phi_1}$ величина $F(\widehat{\Phi_1}, \eta_1)$ заметает все $\mathbb{R}_+$. Конечно же, предполагается, что η_i и σ_i заданы так, что они принимают все значения из $\mathbb{R}_+$ и S^2 соответственно.

При столкновении скорость $v \in \mathbb{R}^3$ меняется на $\tilde{v} := v - (1+\alpha)(v,\nu)\nu$, где ν может принимать все значения из $\mathcal{S}_v = \{u \in \mathbb{R}^3 : |u| = 1, (v,u) \geq 0\}$ (временно вернемся к старой форме записи). Несложно видеть, что обратное преобразование имеет вид $v = \tilde{v} - (1+\alpha^{-1})(\tilde{v},\nu)\nu$, где ν – то самое, что и в прямом преобразовании. Легко видеть, здесь уже $(\tilde{v},\nu) \leq 0$, то есть $\nu \in \mathcal{S}_{-\tilde{v}}$. Значит, скорость после столкновения может оказаться равной $v \in \mathbb{R}^3$, если скорость до столкновения принадлежала множеству $v^{-1} := \{u \in \mathbb{R}^3 : u = v - (1+\alpha^{-1})(v,\nu)\nu, \nu \in \mathcal{S}_{-v}\}$. Как и ранее, пусть σ – такой единичный вектор, что ν идет вдоль биссектрисы угла между σ и $-v$. Тогда σ заметает всю сферу S^2, и $v^{-1} = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = v + \frac{1+\alpha^{-1}}{2}(\sigma|v| - v), \sigma \in S^2\}$.

Напомним, что $\Phi_1 = \binom{\widehat{x}+aF(\widehat{x},\eta_0)}{\sigma_1}$. Чтобы доказать, что $\widehat{\Phi_1}$ может принять любое значение $v \in \mathbb{R}^3 \setminus B(0,|\widehat{x}|)$, требуется проверить, что $v^{-1} \bigcap \{\widehat{x} + as, s \geq 0\} \neq \varnothing$. Это равносильно существованию такого $s \geq 0$, что $\left|\widehat{x} + as - \frac{1-\alpha^{-1}}{2}v\right| = \frac{1+\alpha^{-1}}{2}|v|$. Но выражение в левой части непрерывно зависит от s и при достаточно больших s возрастает. А в нуле его значение не превосходит $\frac{1+\alpha^{-1}}{2}|v|$ (поскольку $|v| \geq |\widehat{x}|$). Таким образом, искомое s существует.

Итак, мы показали, что $\widehat{\Phi_1}$ принимает любые значения из $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,|\widehat{x}|)$. Произведя громоздкие вычисления, можно доказать, что распределение $\widehat{\Phi_1}$ имеет плотность, и эта плотность положительна на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,|\widehat{x}|)$. Интуитивно это совершенно ясно, ведь у $F(\widehat{x},\eta_0)$ существует положительная плотность на $\mathbb{R}_+$ (что видно из определения F), а у σ_1 существует (положительная) плотность на S^2.

Теперь легко видеть, что распределение $V_2 = \widehat{\Phi_1} + aF(\widehat{\Phi_1}, \eta_1)$ имеет положительную плотность на всем $\mathbb{R}^3$. Используя этот факт, несложно проверить ψ-неприводимость: цепь Φ_n неприводима относительно $\lambda_3 \otimes U_{S^2}$, где λ_3 – мера Лебега в $\mathbb{R}^3$, а U_{S^2} – равномерное распределение на S^2. Нужно лишь вспомнить, что $\Phi_2 = \binom{V_2}{\sigma_2}$, а V_2 и σ_2 независимы.

Отметим, что если $\alpha = 0$, то цепь Φ_n не будет ψ-неприводимой.

Мы только что видели, что при любом начальном условии $\Phi_0 = x$ у величины Φ_2 существует положительная плотность относительно меры $\lambda_3 \otimes U_{S^2}$. Значит, для *любого* $x \in X$ меры $P^2(x, \cdot)$ и $\lambda_3 \otimes U_{S^2}$ эквивалентны. Поэтому, легко видеть, цепь Φ_n апериодическая.

Можно показать, что в любой фиксированной точке пространства X плотность величины Φ_2 является непрерывной функцией от начального условия $\Phi_0 = x$. Отсюда по лемме Фату получаем, что цепь Φ_{2n} будет слабо феллеровской. Мы уже доказали неприводимость Φ_{2n} относительно $\lambda_3 \otimes U_{S^2}$. Из определения максимальной неприводимой меры ψ цепи Φ_{2n}, $\lambda_3 \otimes U_{S^2} \prec \psi$. Поэтому $X = \operatorname{supp} \lambda_3 \otimes U_{S^2} \subset \operatorname{supp} \psi \subset X$, и в частности $\operatorname{Int}(\operatorname{supp} \psi) \neq \varnothing$. Значит, все компактные множества будут маленькими (относительно переходных операторов цепи Φ_{2n}). Из этого вытекает, что все компактные множества являются маленькими и для исходной цепи Φ_n.

5.2. U-равномерная эргодичность.

Лемма 1. *Пусть η – экспоненциально распределенная с.в. со средним λ. Для любого $c \in \mathbb{R}$*

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E} e^{cF(v,\eta)} < \infty.$$

Следствие. *Для любого начального условия $\Phi_0 = x \in X$ величины τ_n имеют экспоненциальные моменты любого порядка. Более того,*

$$\sup_n \mathbb{E}_x e^{c\tau_n} < \infty. \tag{19}$$

Доказательство следствия. Действительно, $\tau_n = F(\widehat{\Phi_n}, \eta_n)$, а $\widehat{\Phi_n}$ независима с η_n. □

Доказательство леммы 1. Будем считать, что $c > 0$, иначе утверждение леммы тривиально. Пусть $s > 0$, а $v \in \mathbb{R}^3$. Поскольку $\big|-a|v|/|a| + as\big| = \big||a|s - |v|\big| \le |v + as|$, то для любого $t > 0$

$$\int_0^t \big|-a|v|/|a| + as\big| ds \le \int_0^t |v + as| ds.$$

Поэтому, учитывая определение F, получаем $F(v,\cdot) \le F(-a|v|/|a|,\cdot)$. Отсюда $\mathbb{P}\big\{F(v,\eta) > t\big\} \le \mathbb{P}\big\{F(-a|v|/|a|,\eta) > t\big\}$; последнее легко вычисляется. Теперь

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{cF(v,\eta)} &= -\int_0^\infty e^{ct} d\,\mathbb{P}\{F(v,\eta) > t\} \\
&= c\int_0^\infty e^{ct}\mathbb{P}\{F(v,\eta) > t\}dt - 1 \\
&\le c\int_0^\infty e^{ct}\mathbb{P}\{F(-a|v|/|a|,\eta) > t\}dt - 1 \\
&= c\int_0^\infty e^{ct}e^{-\lambda^{-1}\int_0^t ||a|s-|v||ds}dt - 1 \\
&= c\int_0^{|v|/|a|} e^{ct-\lambda^{-1}(|v|t-|a|t^2/2)}dt + c\int_{|v|/|a|}^\infty e^{ct-\lambda^{-1}(|a|t^2/2-|v|t+|v|^2/|a|)}dt - 1.
\end{aligned}$$

Оценим каждый из получившихся интегралов. Для первого интеграла используем такое соотношение: если $|v| \ge 4\lambda c$, то $ct - \lambda^{-1}(|v|t - |a|t^2/2) \le -ct$ при $t \in [0, |v|/|a|]$. Поэтому если $|v| \ge 4\lambda c$, то

$$\int_0^{|v|/|a|} e^{ct-\lambda^{-1}(|v|t-|a|t^2/2)}dt \le \int_0^{|v|/|a|} e^{-ct}dt < \int_0^\infty e^{-ct}dt < \infty,$$

и эта оценка не зависит от v. Если же $|v| < 4\lambda c$, то

$$\int_0^{|v|/|a|} e^{ct-\lambda^{-1}(|v|t-|a|t^2/2)}dt < \int_0^{4\lambda c/|a|} e^{ct+\lambda^{-1}|a|t^2/2}dt < \infty.$$

Оценивая второй интеграл, используем следующее неравенство: если $|v| \ge 5\lambda c$, то $ct - \lambda^{-1}(|a|t^2/2 - |v|t + |v|^2/|a|) \le -ct$. Таким образом, если $|v| \ge 5\lambda c$, то

$$\int_{|v|/|a|}^\infty e^{ct-\lambda^{-1}(|a|t^2/2-|v|t+|v|^2/|a|)}dt \le \int_{|v|/|a|}^\infty e^{-ct}dt < \int_0^\infty e^{-ct}dt < \infty.$$

Если же $|v| < 5\lambda c$, то

$$\int_{|v|/|a|}^\infty e^{ct-\lambda^{-1}(|a|t^2/2-|v|t+|v|^2/|a|)}dt < \int_0^\infty e^{6ct-\lambda^{-1}|a|t^2/2}dt < \infty.$$

$\square$

Пусть $c > 0$ – произвольная константа. Чтобы доказать U-равномерную эргодичность цепи Φ_n, воспользуемся теоремой 3. Проверим, что условие Ляпунова-Фостера (15) выполняется для функции $U(x) := e^{c|\widehat{x}|}$. Для переходного оператора

$$PU(x) = \mathbb{E}_xU(\Phi_1) = \mathbb{E}_xe^{c|\widehat{\Phi_1}|} = \mathbb{E}_xe^{c|V_1 - \frac{1+\alpha}{2}(V_1+|V_1|\sigma_1)|}.$$

Введем функцию

$$\gamma(|v|) := \int_{S^2} e^{c\left|v-\frac{1+\alpha}{2}(v+|v|\zeta)\right|-c|v|}dU_{S^2}(\zeta), \qquad v \in \mathbb{R}^3.$$

Эта функция монотонна, и $\gamma(|v|) \to 0$ при $|v| \to \infty$. Теперь, поскольку σ_1 независима с V_1 и Φ_0, то

$$\begin{aligned} PU(x) &= \mathbb{E}_x \gamma(|V_1|) e^{c|V_1|} \\ &\le \mathbb{E}_x \gamma(|V_1|) e^{c|\widehat{\Phi_0}|} e^{c|a|\tau_0} \\ &\le \mathbb{E}_x \left(\gamma(|\widehat{\Phi_0}/2|) \mathbf{1}_{\{|a|\tau_0 \le |\widehat{\Phi_0}|/2\}} + \gamma(0) \mathbf{1}_{\{|a|\tau_0 > |\widehat{\Phi_0}|/2\}} \right) e^{c|\widehat{\Phi_0}|} e^{c|a|\tau_0} \\ &\le \left(\gamma(|\widehat{x}/2|) \mathbb{E} e^{c|a|F(\widehat{x},\eta_0)} + \mathbb{E} e^{c|a|F(\widehat{x},\eta_0)} \mathbf{1}_{\{|a|F(\widehat{x},\eta_0) > |\widehat{x}|/2\}} \right) e^{c|\widehat{x}|} \\ &\le \left(\gamma(\alpha|v|/2) \mathbb{E} e^{c|a|F(\widehat{x},\eta_0)} + \mathbb{E} e^{c|a|F(\widehat{x},\eta_0)} \mathbf{1}_{\{|a|F(\widehat{x},\eta_0) > \alpha|v|/2\}} \right) U(x), \end{aligned}$$

где как обычно $x = \binom{v}{\sigma}$. Учитывая результат леммы 1, множитель при $U(x)$ стремится к нулю при $|v| \to \infty$. Поэтому для любого $\beta \in (0,1)$ существует такое $R > 0$, что

$$PU(x) - U(x) \le -\beta U(x), \qquad x \notin C_R := B(0,R) \times S^2.$$

Ясно, что для некоторого b

$$PU(x) - U(x) \le -\beta U(x) + b \mathbf{1}_{C_R}(x), \qquad x \in X.$$

Множество C_R – компакт, поэтому оно является маленьким.

Итак, условие (15) проверено, поэтому для любого $c > 0$ цепь Φ_n является $e^{c|\widehat{x}|}$-равномерно эргодической.

5.3. **Инвариантная мера.** Из определения U-равномерной эргодичности, у рассматриваемой нами цепи Маркова существует инвариантная мера π. Теорема 3 гарантирует, что $e^{c|\widehat{x}|} \in L^1(\pi)$ (при любом c).

Далее, для любого n, в силу независимости V_n и σ_n, мера $P^n(x, \cdot)$ есть произведение меры на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ и равномерной меры U_{S^2}. Поэтому и для инвариантной меры справедливо

$$\pi = \pi_V \otimes U_{S^2},$$

где π_V – вероятностная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$. Из соображений симметрии, π_V инвариантна относительно вращений вокруг третьей координатной оси.

Конечность $\int_X e^{c|\widehat{x}|} d\pi$ при любом c позволяет нам доказать такое

Предложение 1. *Для любого начального условия $\Phi_0 = x$ величины V_n имеют экспоненциальные моменты любого порядка. Более того,*

$$\sup_n \mathbb{E}_x e^{c|V_n|} < \infty. \tag{20}$$

Доказательство. Оценим $|V_n| = |\widehat{\Phi_{n-1}} + a\tau_{n-1}| \le |V_{n-1}| + |a|\tau_{n-1} \le \cdots \le |\widehat{x}| + |a| \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i$. Отсюда, используя неравенство Гельдера и лемму 1,

$$\mathbb{E}_x e^{c|V_n|} \le e^{c|\widehat{x}|} \mathbb{E}_x \prod_{i=0}^{n-1} e^{c|a|\tau_i} \le e^{c|\widehat{x}|} \prod_{i=0}^{n-1} (\mathbb{E}_x e^{c|a|n\tau_i})^{1/n} \le e^{c|\widehat{x}|} \sup_{v \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E} e^{c|a|nF(v,\eta)} < \infty.$$

Таким образом, экспоненциальные моменты существуют, осталось лишь доказать (20). Заметим, что $e^{c|u|} \le e^{c\alpha^{-1}|\widehat{y}|}$, где $y = \binom{u}{\rho} \in X$. Цепь Φ_n $e^{c\alpha^{-1}|\widehat{y}|}$-равномерно эргодична, поэтому из определения

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x e^{c|V_n|} = \lim_{n\to\infty} \int_X e^{c|u|} P^n(x, dy) = \int_X e^{c|u|} d\pi(y) \le \int_X e^{c\alpha^{-1}|\widehat{y}|} d\pi(y) < \infty.$$

□

6. Окончание доказательства теоремы 1

Напомним, что нам требуется доказать утверждения (11), (12) и (13). Сперва получим две вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Для любого начального условия $\Phi_0 = x$ при $n \to \infty$*

$$\tau_n = O(\log n), \qquad |V_n| = O(\log n), \qquad \mathbb{P}_x \textit{п.н.}$$

Доказательство. Для доказательства первого соотношения напишем

$$\mathbb{P}_x\big\{\tau_n > 2\log n\big\} \le \frac{\mathbb{E}_x e^{\tau_n}}{n^2}.$$

Числитель дроби, согласно (19), оценивается константой, и мы получаем член сходящегося ряда. Осталось применить лемму Бореля-Кантелли.

Второе соотношение доказывается аналогично, при помощи оценки (20). □

Лемма 3. *Существует константа $c_4 > 0$ такая, что для любого начального условия $\Phi_0 = x \in X$ верно*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = c_4, \qquad \mathbb{P}_x \textit{п.н.}$$

Доказательство. Вспоминая про (9) и введенные обозначения, достаточно доказать

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widehat{\Phi_n}^3}{n} = 0, \qquad \mathbb{P}_x \textit{п.н.},$$

существование такой c_4, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n|a|} \sum_{i=1}^n h^3(\Phi_i) = c_4, \qquad \mathbb{P}_x \textit{п.н.},$$

и положительность c_4.

Так как $|\widehat{\Phi_n}| \le |V_n|$, то первое утверждение сразу следует из леммы 2. Для доказательства второго воспользуемся теоремой 2. Все ее условия выполнены, поскольку для функционала h^3 имеем $|h^3(x)| = |v^3 - \widehat{x}^3| \le (1+\alpha^{-1})|\widehat{x}| < (1+\alpha^{-1})e^{|\widehat{x}|} \in L^1(\pi)$. Положим $c_4 := |a|^{-1} \int_X h^3 d\pi$.

Осталось проверить, что $c_4 > 0$. Взяв в равенстве (7) ожидание $\mathbb{E}_x$ ($x \in X$ произвольное), для третьей координаты имеем

$$\int_X u^3 P^{n+1}(x, dy) = \int_X \widehat{y}^3 P^n(x, dy) + |a| \mathbb{E}_x F(\widehat{\Phi_n}, \eta_n), \qquad y = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix} \in X.$$

Но $|u^3| \le \alpha^{-1}e^{|\widehat{y}|}$, $|\widehat{y}^3| \le \alpha^{-1}e^{|\widehat{y}|}$, а цепь Φ_n является $\alpha^{-1}e^{|\widehat{y}|}$-равномерно эргодической. Поэтому после предельного перехода по $n \to \infty$

$$\int_X u^3 d\pi(y) = \int_X \widehat{y}^3 d\pi(y) + |a| \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x F(\widehat{\Phi_n}, \eta_n).$$

Отсюда по определению c_4

$$c_4 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x F(\widehat{\Phi_n}, \eta_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X \mathbb{E}F(\widehat{y}, \eta_0) P^n(x, dy) = \int_X \mathbb{E}F(\widehat{y}, \eta_0) d\pi(y) > 0.$$

В последнем переходе мы снова использовали эргодические свойства цепи, ведь $\mathbb{E}F(\widehat{y}, \eta_0) < e^{\mathbb{E}F(\widehat{y},\eta_0)} \le \mathbb{E}e^{F(\widehat{y},\eta_0)} \le \sup\limits_{v\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}e^{F(v,\eta_0)} < \infty$, согласно лемме 1. □

6.1. **Доказательство утверждений** (11) **и** (12)**.** Напомним, что случайная величина $n(t)$ означает число столкновений, произошедших к моменту времени t. Заметим, что

$$\lim_{t\to\infty} n(t) = \infty, \qquad \mathbb{P}_x\text{п.н.} \tag{21}$$

В самом деле, предположив противоположное, получаем, что для какого-то $k \ge 0$ с ненулевой вероятностью произойдет лишь k столкновений. То есть $\tau_k = \infty$ на множестве ненулевой меры.

Из леммы 3 и (21) вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t_{n(t)}}{n(t)} = c_4, \qquad \mathbb{P}_x\text{п.н.}$$

Но поскольку $t_{n(t)} \le t < t_{n(t)+1} = t_{n(t)} + \tau_{n(t)}$, то по лемме 2

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{n(t)} = c_4, \qquad \mathbb{P}_x\text{п.н.} \tag{22}$$

Отсюда, с помощью той же леммы 2, при $t \to \infty$

$$\tau_{n(t)} = O(\log t), \qquad |V_{n(t)}| = O(\log t), \qquad \mathbb{P}_x\text{п.н.}$$

Поэтому (12), очевидно, выполнено. Утверждение (11) также следует из этой оценки: ведь между моментами времени $t_{n(t)}$ и t столкновений не было, а $t - t_{n(t)} < \tau_{n(t)}$, поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\big(X(t) - X(t_{n(t)})\big) - c_1 a\big(t - t_{n(t)}\big)}{\sqrt{t}} \right| \\ = & \left| \frac{\widehat{\Phi_{n(t)}}\big(t - t_{n(t)}\big) + a\big(t - t_{n(t)}\big)^2/2 - c_1 a\big(t - t_{n(t)}\big)}{\sqrt{t}} \right| \\ < & \frac{|V_{n(t)}|\tau_{n(t)} + |a|\tau_{n(t)}^2/2 + c_1|a|\tau_{n(t)}}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

6.2. **Определение константы c_1 и матрицы K.** Положим

$$c_1 := c_4^{-1}|a|^{-1}\int_X f^3 d\pi.$$

Для проверки положительности c_1 покажем, что $\int_X f^3 d\pi > 0$. Несложные вычисления дают

$$\begin{aligned}
\int_X f^3 d\pi &= \frac{1}{2|a|}\int_X (v^3)^2 - \Big(v^3 - \frac{1+\alpha}{2}\big(v^3 + |v|\sigma^3\big)\Big)^2 d\pi_V(v)dU_{S^2}(\sigma)\\
&= \frac{1}{2|a|}\int_X (v^3)^2 - \Big(\frac{1-\alpha}{2}v^3 - \frac{1+\alpha}{2}|v|\sigma^3\Big)^2 d\pi_V(v)dU_{S^2}(\sigma)\\
&= \frac{1}{2|a|}\int_X \Big(1 - \frac{(1-\alpha)^2}{4}\Big)(v^3)^2 - \frac{(1+\alpha)^2}{4}|v|^2(\sigma^3)^2\, d\pi_V(v)dU_{S^2}(\sigma) \qquad (23)\\
&= \frac{1+\alpha}{8|a|}\int_{\mathbb{R}^3}\big(3-\alpha\big)(v^3)^2 - \frac{1+\alpha}{3}\big((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2\big)\, d\pi_V(v)\\
&= \frac{1+\alpha}{8|a|}\Big(\big(3-\alpha\big)I_3 - \frac{1+\alpha}{3}\big(I_1 + I_2 + I_3\big)\Big),
\end{aligned}$$

где $I_k := \int_{\mathbb{R}^3}(v^k)^2 d\pi_V$, $k = 1, 2, 3$.

Поскольку мера π_V симметрична относительно третьей координатной оси, то $I_1 = I_2$. Для нахождения этих интегралов будем действовать аналогично доказательству положительности c_4 в лемме 3. Из (7) выводим $\big(V^1_{n+1}\big)^2 = \big(\widehat{\Phi_n^1}\big)^2$; возьмем в этом равенстве ожидание и устремим $n \to \infty$. В силу эргодических свойств цепи Φ_n, мы получим $\int_X (v^1)^2 d\pi = \int_X (\widehat{x}^1)^2 d\pi$. Аналогично преобразованиям (23), $(3-\alpha)I_1 = \frac{1+\alpha}{3}(2I_1 + I_3)$ и $I_1 = \frac{1+\alpha}{7-5\alpha}I_3$. Подставляя это выражение в (23), $\int_X f^3 d\pi = \frac{3(3-\alpha)(1-\alpha^2)}{4|a|(7-5\alpha)}I_3$. Но $I_3 > 0$, так как $\frac{1+\alpha}{2}\sqrt{I_3} \geq \frac{1+\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^3} v^3 d\pi_V = \int_X h^3 d\pi = |a|c_4 > 0$. Положительность c_1 доказана.

Отметим, что для $g := f - c_1 h$ выполняется $\int_X g d\pi = 0$. Для первых двух координат это следует из простых вычислений, в которых используется представление $\pi = \pi_V \otimes U_{S^2}$ и симметрия меры π_V. А для третьей координаты – из равенства $c_4 = |a|^{-1}\int_X h^3 d\pi$.

Теперь определим матрицу K. Так как $|g(x)| \leq 2,5|a|^{-1}(1+\alpha^{-1})|\widehat{x}|^2 + c_1(1+\alpha^{-1})|\widehat{x}|$, то существует такое $c > 1$, что $|g(x)|^2 \leq ce^{|\widehat{x}|}$. Поэтому (цепь Φ_n $ce^{|\widehat{x}|}$-равномерно эргодическая) для функционалов g^1, g^2 и g^3 выполнены условия теоремы 4, и существуют решения уравнений Пуассона $\overline{g^1}, \overline{g^2}, \overline{g^3} \in L^2(\pi)$. Обозначив $\bar{g} := (\overline{g^1}, \overline{g^2}, \overline{g^3})^\top$, положим

$$K := c_4^{-1}\int_X \big(\bar{g}\,\bar{g}^\top - (P\bar{g})(P\bar{g})^\top\big)\, d\pi.$$

6.3. **Доказательство утверждения** (13)**.** Достаточно, чтобы для любого $u \in \mathbb{R}^3$

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{i=1}^{n(t)} g(\Phi_i), u\Big) = \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{i=1}^{n(t)}(g,u)(\Phi_i) \xrightarrow{d} \big(\mathcal{N}(0,K), u\big) = \mathcal{N}\big(0, (Ku,u)\big), \qquad t \to \infty.$$

Далее,

$$(Ku, u) = c_4^{-1} \int_X \big((\bar{g}, u)^2 - (P\bar{g}, u)^2\big)\, d\pi = c_4^{-1} \int_X \big((\bar{g}, u)^2 - (P(\bar{g}, u))^2\big)\, d\pi = c_4^{-1} \gamma^2_{(g,u)},$$

в последнем переходе мы использовали (16) и очевидное равенство $(\bar{g}, u) = \overline{(g, u)}$. Таким образом, для любого $u \in \mathbb{R}^3$ требуется получить

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=1}^{n(t)} (g, u)(\Phi_i) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, c_4^{-1} \gamma^2_{(g,u)}\big), \qquad t \to \infty. \tag{24}$$

Хотя это утверждение очень сильно напоминает ЦПТ для цепи Маркова, здесь количество слагаемых $n(t)$ случайно и не является независимым с этими слагаемыми.

Для произвольного $0 < \varepsilon < 1$ из (22) вытекает

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x \Bigg\{ \min_{(1-\varepsilon)c_4^{-1} t < k < (1+\varepsilon)c_4^{-1} t} \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=1}^{k} (g, u)(\Phi_i) \le \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=1}^{n(t)} (g, u)(\Phi_i) \Bigg\} = 1.$$

А для функционала (g, u) выполнены все условия теоремы 4. Поэтому, с учетом (17), для любого $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varlimsup_{t\to\infty} \mathbb{P}_x \Bigg\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=1}^{n(t)} (g, u)(\Phi_i) < z \Bigg\} \ &\le \ \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x \Bigg\{ \min_{(1-\varepsilon)c_4^{-1} t < k < (1+\varepsilon)c_4^{-1} t} \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=1}^{k} (g, u)(\Phi_i) < z \Bigg\} \\ &= \ \mathbb{P} \Bigg\{ \min_{(1-\varepsilon)c_4^{-1} < s < (1+\varepsilon)c_4^{-1}} \sqrt{\gamma^2_{(g,u)}}\, W(s) < z \Bigg\}. \end{aligned}$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем, что для любого $z \in \mathbb{R}$

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mathbb{P}_x \Bigg\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=1}^{n(t)} (g, u)(\Phi_i) < z \Bigg\} \le \mathbb{P} \Bigg\{ \sqrt{\gamma^2_{(g,u)}}\, W\big(c_4^{-1}\big) < z \Bigg\}.$$

Повторив те же рассуждения для max, получаем

$$\mathbb{P} \Bigg\{ \sqrt{\gamma^2_{(g,u)}}\, W\big(c_4^{-1}\big) < z \Bigg\} \le \varliminf_{t\to\infty} \mathbb{P}_x \Bigg\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=1}^{n(t)} (g, u)(\Phi_i) < z \Bigg\}.$$

Таким образом, (24) доказано.

6.4. **Изучение матрицы K.** Из соображений симметрии, предельное распределение $\mathcal{N}(0, K)$ должно быть инвариантно относительно вращений вокруг третьей координатной оси. Это означает, что при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$ для матрицы

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

выполняется $\mathcal{N}(0,K) \stackrel{d}{=} \mathcal{O}\mathcal{N}(0,K)$, откуда $K = \mathcal{O}K\mathcal{O}^\top$. Так как K – симметричная, то, сосчитав $\mathcal{O}K\mathcal{O}^\top$ для $\varphi := \pi/2$, убеждаемся, что K имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} c_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Из определения K

$$c_2 = c_4^{-1}\gamma_{g^2}^2, \qquad c_3 = c_4^{-1}\gamma_{g^3}^2,$$

и эти константы, разумеется, неотрицательны.

Автор глубоко благодарен своему руководителю М.А. Лифшицу за многочисленные советы и замечания. Автор также признателен М.И. Гордину за интерес к данной работе.

Список литературы

[1] Дж. Дуб (1956) Вероятностные процессы. М., ИЛ.
[2] М. Кац (1967) Несколько вероятностных задач физики и математики. М., Наука, стр. 103–115.
[3] J. Banasiak, G. Frosali, G. Spiga (2000) Inelastic scattering models in transport theory and their small mean free path analysis. Mathematical Methods in the Applied Sciences, v. 23, pp. 121–145.
[4] C. Buet, S. Cordier, B. Lucquin-Desreux and S. Mancini (2002) Diffusion limit of the Lorentz model: asymptotic preserving schemes. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, v. 36, № 4, pp. 631–655.
[5] Ph. A. Martin and J. Piasecki (1998) Lorentz's model with dissipative collisions. Preprint, arXiv: cond-mat/9810070.
[6] S.P. Meyn and R.L. Tweedie (1993) Markov Chains and Stochastic Stability. Springer-Verlag, London.
[7] K. Ravishankar and L. Triolo (1999) Diffusive limit of the Lorentz model with a uniform field starting from the Markov approximation. Markov Processes and Related Fields, v. 5, № 4, pp. 385–421.
[8] D.P. Sanders (2004) Fine structure of distributions and central limit theorem in diffusive billiards. Preprint, arXiv: nlin.CD/0411012.
[9] D.R. Wilkinson and S.F. Edwards (1982) Spontaneous interparticle percolation. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, v. 381, pp. 33–51.
[10] K.I. Wysokinski, W. Park, D. Belitz and T.R. Kirkpatrick (1995) Density expansion for the mobility in a quantum Lorentz model. Physical Review E, v. 52, № 1, pp. 612–622.

Владислав Высоцкий
кафедра теории вероятностей и математической статистики
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургский Государственный Университет
Библиотечная пл., 2
198504, Старый Петергоф
Россия
E-mail: vysotsky@vv9034.spb.edu