А.И. Назаров, Р.С.Пусев

Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме с весом для некоторых гауссовских процессов

1 Введение

Теория малых уклонений для норм гауссовских процессов интенсивно развивается в последние годы (см., например, обзоры [1]-[2]). Наиболее разработанным здесь является случай L_2-нормы. Пусть $X(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, центрированный гауссовский процесс с ковариацией $G(t,s) = \mathsf{E}X(t)X(s)$, $t, s \in [a,b]$, и пусть ψ — неотрицательная функция на $[a,b]$. Положим

$$\|X\|_\psi = \left(\int_a^b X^2(t)\psi(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Нас интересует точная асимптотика при $\varepsilon \to 0$ величины $\mathsf{P}\left\{\|X\|_\psi \leqslant \varepsilon\right\}$. Неявное решение задачи было получено в [3]. Затем многие авторы, начиная с [4]–[6], занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях.

В силу разложения Карунена-Лоэва имеет место равенство по распределению

$$\|X\|_\psi^2 = \int_a^b X^2(t)\psi(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2, \tag{1}$$

где ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, независимые стандартные гауссовские с.в., а $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_n \lambda_n < \infty$, являются собственными значениями интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int_a^b G(t,s)\sqrt{\psi(t)\psi(s)}\,f(s)\,ds, \quad t \in [a,b]. \tag{2}$$

Таким образом, исходная задача сводится к описанию поведения при $\varepsilon \to 0$ вероятности $\mathsf{P}\left\{\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \xi_n^2 \leqslant \varepsilon^2\right\}$. Основная трудность заключается в том, что явные формулы для собственных значений известны лишь для немногих процессов (см. [7]–[9]). Если же известна достаточно точная асимптотика λ_n, то асимптотика вероятности малых уклонений с точностью до константы может быть получена с помощью теорем сравнения, полученных в [7].

В работах [10]-[11] был разработан новый подход, позволяющий получать асимптотику малых уклонений в L_2-норме для гауссовских процессов, ковариация которых является функцией Грина самосопряженного дифференциального оператора из довольно широкого класса. Настоящая работа обобщает этот результат на случай взвешенных процессов.

Напомним некоторые обозначения. Функция $G(t,s)$ называется функцией Грина краевой задачи для дифференциального оператора L, если она удовлетворяет граничным условиям и уравнению $LG = \delta(t-s)$.

Пространство $W_p^m(0,1)$ — это банахово пространство $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций y, у которых $y^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0,1]$ и $y^{(m)} \in L_p(0,1)$.

2 Асимптотика с точностью до константы для взвешенных процессов

Рассмотрим самосопряженный дифференциальный оператор L порядка 2ℓ, определенный на пространстве $\mathcal{D}(L)$ функций, удовлетворяющих 2ℓ граничным условиям.

Лемма 2.1. *Пусть функция $\psi \in W_\infty^\ell(0,1)$ и $\psi > 0$ на $(0,1)$. Пусть $G(t,s)$ — функция Грина краевой задачи*

$$Lv = \mu v \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad v \in \mathcal{D}(L).$$

Тогда функция

$$\mathcal{G}(t,s) = \sqrt{\psi(t)\psi(s)}G(t,s) \tag{3}$$

является функцией Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}v \equiv \psi^{-1/2}L(\psi^{-1/2}v) = \mu v \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}), \tag{4}$$

где пространство $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ состоит из функций v, удовлетворяющих условию

$$\psi^{-1/2}v \in \mathcal{D}(L). \tag{5}$$

Доказательство. Согласно равенству (3)

$$\frac{1}{\sqrt{\psi(t)}}\mathcal{G}(t,s) = \sqrt{\psi(s)}G(t,s),$$

значит,

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}}\mathcal{G}(\cdot,s) \in \mathcal{D}(L).$$

Из определения оператора $\mathcal{L}$ следует

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(t,s) = \frac{\sqrt{\psi(s)}}{\sqrt{\psi(t)}}LG(t,s).$$

Вспоминая, что $LG(t,s) = \delta(t-s)$, получаем

$$\mathcal{L}\mathcal{G}(t,s) = \delta(t-s).$$

Лемма доказана. □

Замечание 1. Задача (4)–(5) с помощью замены $y = \psi^{-1/2} v$ переписывается так:

$$Ly = \mu\psi y \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad y \in \mathcal{D}(L).$$

Теорема 2.2. *Пусть ковариационная функция $G_X(t,s)$ центрированного гауссовского процесса $X(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, является функцией Грина самосопряженного оператора L порядка 2ℓ*

$$Lv \equiv (-1)^\ell v^{(2\ell)} + \left(p_{\ell-1} v^{(\ell-1)}\right)^{(\ell-1)} + \ldots + p_0 v; \tag{6}$$

$$p_m \in L_1(0,1), \quad m = 0, \ldots, \ell-2; \qquad p_{\ell-1} \in L_\infty(0,1);$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} U_j^0(v) &\equiv v^{(k_j)}(0) + \sum_{k<k_j} \alpha_{jk}^0 v^{(k)}(0) = 0, \\ U_j^1(v) &\equiv v^{(k_j')}(1) + \sum_{k<k_j'} \alpha_{jk}^1 v^{(k)}(1) = 0, \end{aligned}\right\} j = 1, \ldots, \ell, \tag{7}$$

где α_{jk}^i — некоторые постоянные,

$$0 \leqslant k_1 < \ldots < k_\ell \leqslant 2\ell - 1, \quad 0 \leqslant k_1' < \ldots < k_\ell' \leqslant 2\ell - 1.$$

Предположим, что

$$\varkappa \equiv \sum_{j=1}^{\ell} (k_j + k_j') < 2\ell^2.$$

Пусть функция $\psi \in W_\infty^\ell(0,1)$ и $\psi(x) > 0$, $x \in [0,1]$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение

$$\mathsf{P}(\|X\|_\psi \leqslant \varepsilon) \sim \mathcal{C}\, \varepsilon^\gamma \exp\left(-\frac{2\ell-1}{2}\left(\frac{\vartheta_\ell}{2\ell \sin\frac{\pi}{2\ell}}\right)^{\frac{2\ell}{2\ell-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{2\ell-1}}\right), \tag{8}$$

где

$$\gamma = -\ell + \frac{\varkappa+1}{2\ell-1}, \quad \vartheta_\ell = \int_0^1 \psi^{1/(2\ell)}(x)\, dx,$$

$$\mathcal{C} = C_{\text{dist}} \frac{(2\pi)^{\ell/2} (\pi/\vartheta_\ell)^{\ell\gamma} (\sin\frac{\pi}{2\ell})^{\frac{1+\gamma}{2}}}{(2\ell-1)^{1/2} (\frac{\pi}{2\ell})^{1+\frac{\gamma}{2}} \Gamma^\ell(\ell - \frac{\varkappa}{2\ell})}. \tag{9}$$

В (9) константа “расхождения” C_{dist} задается формулой

$$C_{\text{dist}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{1/2}}{\left(\pi/\vartheta_\ell \cdot \left[n + \ell - 1 - \frac{\varkappa}{2\ell}\right]\right)^\ell},$$

где μ_n — собственные значения краевой задачи

$$Ly = \mu\psi y, \quad U_j^0(y) = 0, \quad U_j^1(y) = 0, \quad j = 1, \ldots, \ell.$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1, числа λ_n в разложении (1) равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные числа краевой задачи

$$\mathcal{L}v \equiv \psi^{-1/2}L(\psi^{-1/2}v) = \mu v, \quad U_j^0(\psi^{-1/2}v) = 0, \quad U_j^1(\psi^{-1/2}v) = 0, \quad j = 1, \ldots, \ell.$$

Выражение для $\mathcal{L}v$ можно переписать так:

$$\mathcal{L}v = (-1)^\ell \left(\psi^{-1}v^{(\ell)}\right)^{(\ell)} + \left(q_{\ell-1}v^{(\ell-1)}\right)^{(\ell-1)} + \ldots + q_0 v,$$

причем $q_k \in L_1(0,1)$, $k = 0, \ldots, \ell-2$, $q_{\ell-1} \in L_\infty(0,1)$, $\psi^{-1} \in W_\infty^\ell(0,1)$, $\psi^{-1} > 0$ в силу условий на функцию ψ и функции p_k, $k = 0, \ldots, \ell-1$. Значит, мы вправе применить Предложение 7.2 из [10], которое дает (8). $\square$

Хотя мы написали "явное" выражение для C_{dist}, в общем случае вычисление этой константы представляет собой непростую задачу. Однако, если собственные функции ковариации случайного процесса могут быть выражены через элементарные или специальные функции, явные формулы для константы "расхождения" могут быть получены методом, разработанным в [11] (см. также [17]). В следующих разделах приводятся примеры таких процессов. В разделе 3 мы рассмотрим процессы, для которых собственные функции выражаются через тригонометрические функции. В разделах 4 и 5 исследуются процессы, собственные функции ковариации которых выражаются через функции Бесселя.

3 Процессы, связанные с тригонометрическими функциями

Пусть $u \leqslant 1$. Рассмотрим процесс $W_{(u)}(t) \equiv W(t) - utW(1)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Это центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией $G_{W_{(u)}}(t,s) = s \wedge t - (2u - u^2)st$, то есть при $u \in (0,1]$ процесс $W_{(u)}$ представляет собой рассматриваемый на отрезке $[0,1]$ броуновский мост из нуля в нуль длины $(2u-u^2)^{-1}$ (см., например, [12], 4.4.20). При $u = 1$ этот процесс совпадает со стандартным броуновским мостом, а при $u = 0$ — со стандартным винеровским процессом.

Теорема 3.1. *Пусть $a > 0$.*

1. *Для стандартного броуновского моста $W_{(1)} = B$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 \frac{B^2(t)}{(a^2+t^2)^2}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2^{3/2}}{\pi^{1/2}(1+a^2)^{1/4}(\operatorname{arcctg} a)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(\operatorname{arcctg} a)^2}{8a^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

2. *Пусть $u < 1$. Тогда для "удлиненного" броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 \frac{W_{(u)}^2(t)}{(a^2+t^2)^2}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4a^{1/2}(1+a^2)^{1/4}}{(1-u)\pi^{1/2}\operatorname{arcctg} a} \cdot \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{(\operatorname{arcctg} a)^2}{8a^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

Доказательство. Согласно Предложению 1.9 из [11] и Лемме 2.1, числа λ_n в разложении (1) равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = \dfrac{\mu y}{(a^2+t^2)^2} & \text{на} \quad [0,1], \\ y(0) = y(1) = 0, & \text{если } u = 1, \\ y(0) = (y' + \alpha y)(1) = 0, & \text{если } u < 1, \end{cases}$$

где $\alpha = (1-u)^{-2} - 1$. Из [13], 2.377, учитывая условие $y(0) = 0$, получаем

$$y(t) = c\sqrt{t^2+a^2}\sin\left(\frac{\sqrt{\mu+a^2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\right).$$

Второе граничное условие дает уравнение на собственные значения, из которого следует, что

$$\mu_n = \begin{cases} \left(\dfrac{an\pi}{\operatorname{arcctg} a}\right)^2 - a^2, & \text{если } u = 1, \\ \left(\dfrac{az_n}{\operatorname{arcctg} a}\right)^2 - a^2, & \text{если } u < 1, \end{cases}$$

где $z_1 < z_2 < \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\zeta\cos(\zeta) + \left[1 + \alpha(1+a^2)\right]\frac{\operatorname{arcctg} a}{a}\sin(\zeta) = 0.$$

Пользуясь Теоремой 1 из [14], получаем утверждение теоремы при $u = 1$. В случае $u < 1$, с учетом Теоремы 2.2, достаточно показать, что

$$C^2_{\text{dist}} \equiv \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{az_n}{\operatorname{arcctg} a}\right)^2 - a^2}{\left(\frac{a\pi}{\operatorname{arcctg} a}\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{(1-u)^2 a}. \tag{10}$$

Положим

$$F(\zeta) = \cos(\zeta) + \frac{\operatorname{arcctg} a}{a}\left[1 + \alpha(1+a^2)\right]\frac{\sin(\zeta)}{\zeta}.$$

По теореме Адамара о разложении на множители (см. [15], §8.2.4)

$$F(\zeta) \equiv F(0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta^2}{z_n^2}\right).$$

Значит,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n^2 - (\operatorname{arcctg} a)^2}{z_n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(\operatorname{arcctg} a)^2}{z_n^2}\right) = \frac{F(\operatorname{arcctg} a)}{F(0)} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a(1-u)^2 F(0)}. \tag{11}$$

Для вычисления бесконечного произведения $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n^2}{\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$ применим к функциям $F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)=\cos(\zeta)$ теорему Иенсена (см. [15], §3.6.1). При $|\zeta|=\pi k$ и $k\to\infty$

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|}\rightrightarrows 1. \tag{12}$$

При больших k в круге $|\zeta|<\pi k$ существует ровно $2k$ корней $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2},\ldots,\pm\frac{(2k-1)\pi}{2}$ функции $\Psi(\zeta)$ и ровно $2k$ корней $\pm z_j$, $j=1\ldots,k$, функции $F(\zeta)$. Значит, с учетом (12),

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n^2}{\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2}=\frac{|F(0)|}{|\Psi(0)|}=|F(0)|. \tag{13}$$

Из формул (11) и (13) получаем (10). $\square$

Доказательство двух следующих теорем аналогично доказательству теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть $a>1$.*

1. *Для стандартного броуновского моста $W_{(1)}=B$ при $\varepsilon\to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1\frac{B^2(t)}{(a^2-t^2)^2}\,dt\leqslant\varepsilon^2\right\}\sim\frac{4}{\pi^{1/2}(a^2-1)^{1/4}\left(\ln\frac{a+1}{a-1}\right)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{a+1}{a-1}\right)^2}{32a^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

2. *Пусть $u<1$. Тогда для "удлиненного" броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon\to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1\frac{W_{(u)}^2(t)}{(a^2-t^2)^2}\,dt\leqslant\varepsilon^2\right\}\sim\frac{8(a^2-1)^{1/4}a^{1/2}}{(1-u)\pi^{1/2}\ln\frac{a+1}{a-1}}\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{a+1}{a-1}\right)^2}{32a^2}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 3.3. *Пусть $a>0$.*

1. *Для стандартного броуновского моста $W_{(1)}=B$ при $\varepsilon\to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1\frac{B^2(t)}{(t+a)^2}\,dt\leqslant\varepsilon^2\right\}\sim\frac{2\sqrt{2}}{(a+1)^{1/4}a^{1/4}\pi^{1/2}\left(\ln\frac{a+1}{a}\right)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{a+1}{a}\right)^2}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

2. *Пусть $u<1$. Тогда для "удлиненного" броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon\to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1\frac{W_{(u)}^2}{(t+a)^2}\,dt\leqslant\varepsilon^2\right\}\sim\frac{4(a+1)^{1/4}}{(1-u)a^{1/4}\pi^{1/2}\ln\frac{a+1}{a}}\cdot\varepsilon\cdot\exp\left(-\frac{\left(\ln\frac{a+1}{a}\right)^2}{8}\,\varepsilon^{-2}\right).$$

4 Процессы второго порядка, связанные с функциями Бесселя

Теорема 4.1. *Пусть $a > 0$ и $\beta \neq 0$.*

1. *Для стандартного броуновского моста $W_{(1)} = B$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 (t+a)^{2\beta-2} B^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$
$$\sim (a(a+1))^{(\beta-1)/4} \left(\frac{\beta}{(a+1)^\beta - a^\beta}\right)^{1/2} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\left((a+1)^\beta - a^\beta\right)^2}{8\beta^2}\varepsilon^{-2}\right). \quad (14)$$

2. *Пусть $u < 1$. Тогда для "удлиненного" броуновского моста $W_{(u)}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 (t+a)^{2\beta-2} W_{(u)}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim$$
$$\sim \left(\frac{a}{a+1}\right)^{(\beta-1)/4} \frac{\beta}{(1-u)\left((a+1)^\beta - a^\beta\right)} \cdot \frac{4\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{\left((a+1)^\beta - a^\beta\right)^2}{8\beta^2}\varepsilon^{-2}\right). \quad (15)$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1, числа λ_n в разложении (1) равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = \mu(t+a)^{2\beta-2} y & \text{на} \quad [0,1], \\ y(0) = y(1) = 0, & \text{если } u = 1, \\ y(0) = (y' + \alpha y)(1) = 0, & \text{если } u < 1, \end{cases}$$

где $\alpha = (1-u)^{-2} - 1$. Общим решением уравнения (см. [16], 8.491.11) является

$$y(t) = c_1\sqrt{t+a}\,J_{\frac{1}{2|\beta|}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}(t+a)^\beta\right) + c_2\sqrt{t+a}\,N_{\frac{1}{2|\beta|}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}(t+a)^\beta\right),$$

где J_ν и N_ν — функции Бесселя порядка ν первого и второго рода соответственно.

Далее доказательство будет проведено для случая $u < 1$, случай $u = 1$ рассматривается аналогично и проще. Подставляя $y(t)$ в граничные условия, получаем уравнение на собственные значения, из которого следует, что $\mu_n = z_n^2$, где $z_1 < z_2 < \ldots$ — положительные корни функции

$$F(\zeta) = \det\begin{bmatrix} J_\nu\left(\frac{a^\beta\zeta}{\beta}\right) & N_\nu\left(\frac{a^\beta\zeta}{\beta}\right) \\ \zeta J_\nu'\left(\frac{(a+1)^\beta\zeta}{\beta}\right) + \frac{\alpha(a+1)+\frac{1}{2}}{(a+1)^\beta} J_\nu\left(\frac{(a+1)^\beta\zeta}{\beta}\right) & \zeta N_\nu'\left(\frac{(a+1)^\beta\zeta}{\beta}\right) + \frac{\alpha(a+1)+\frac{1}{2}}{(a+1)^\beta} N_\nu\left(\frac{(a+1)^\beta\zeta}{\beta}\right) \end{bmatrix},$$

где $\nu = \frac{1}{2|\beta|}$. Введем обозначение $\vartheta = \frac{(a+1)^\beta - a^\beta}{\beta}$. С учетом Теоремы 2.2, нам достаточно показать, что

$$C_{\text{dist}}^2 \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^2 \vartheta^2}{\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^2} = (1+\alpha)\left(\frac{a}{a+1}\right)^{(\beta-1)/2}. \tag{16}$$

Положим $\Psi(\zeta) = \cos(\vartheta\zeta)$. Тогда, учитывая, что при $\nu > 0$ и $\zeta \to 0$

$$J_\nu(\zeta) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu, \qquad N_\nu(\zeta) \sim -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{-\nu},$$

получаем

$$\frac{|F(0)|}{|\Psi(0)|} = \frac{2\beta(1+\alpha)(a+1)^{1/2}}{\pi a^{1/2}(a+1)^\beta}.$$

Заметим, что $F(-\zeta) = F(\zeta)$. Поскольку при $\Re(\zeta) \geqslant 0$ и $|\zeta| \to \infty$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} J_\nu(\zeta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\cos\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)(1 + O(|\zeta|^{-1})), \\ N_\nu(\zeta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\sin\left(\zeta - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)(1 + O(|\zeta|^{-1})), \end{aligned} \tag{17}$$

при $|\zeta| = \pi k/\vartheta$ и $k \to \infty$ прямым вычислением получаем

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2\beta}{a^{\beta/2}(a+1)^{\beta/2}\pi}.$$

Применяя теорему Иенсена к функциям $F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, получаем (16). $\square$

Замечание 2. Переходя в соотношениях (14)-(15) к пределу при $\beta \to 0$, получаем утверждение Теоремы 3.3. А вот получить асимптотику малых уклонений в L_2-норме для процессов $t^\theta W_{(u)}(t)$ (см. [11], Теорема 3.3) формальным переходом к пределу при $a \to 0$ не удается.

Обозначим $\mathring{U}_{(\alpha)}(t)$ процесс Орнштейна-Уленбека, выходящий из нуля, то есть центрированный гауссовский процесс с ковариацией $G_{\mathring{U}_{(\alpha)}}(t,s) = (e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)})/(2\alpha)$.

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $q \neq 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 e^{2qt}\mathring{U}_{(\alpha)}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{e^{\alpha/2}}{e^{q/4}}\frac{4q}{\sqrt{\pi}(e^q-1)} \cdot \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{(e^q-1)^2}{8q^2}\varepsilon^{-2}\right). \tag{18}$$

Теорема 4.2 доказывается аналогично теореме 4.1.

Замечание 3. Полагая в соотношении (18) $\alpha = 0$, получаем уже известную асимптотику малых уклонений в L_2-норме с экспоненциальным весом для винеровского процесса (см. [11], Теорема 3.5), а переходя к пределу при $q \to 0$, получаем асимптотику малых уклонений в L_2-норме для процесса $\mathring{U}_{(\alpha)}(t)$ (см. [17], Следствие 3).

Обозначим $U_{(\alpha)}(t)$ стационарный процесс Орнштейна-Уленбека, то есть центрированный гауссовский процесс с ковариацией $G_{U_{(\alpha)}}(t,s) = e^{-\alpha|t-s|}/(2\alpha)$.

Теорема 4.3. *Пусть $\alpha > 0$ и $q \neq 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 e^{2qt} U_{(\alpha)}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim 8\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}\frac{e^{\alpha/2}}{e^{q/4}}} \left(\frac{q}{e^q-1}\right)^{3/2} \cdot \varepsilon^2 \cdot \exp\left(-\frac{(e^q-1)^2}{8q^2}\,\varepsilon^{-2}\right). \tag{19}$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1, числа λ_n в разложении (1) равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} y'' - (\alpha^2 - \mu e^{2qt})y = 0 \quad \text{на} \quad [0,1], \\ (y' - \alpha y)(0) = (y' + \alpha y)(1) = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Поскольку в этом случае $\varkappa = 2\ell^2$, общая формула (8) не применима. Поступим следующим образом, аналогично [10]. Положим $\vartheta = (e^q - 1)/q$ и рассмотрим приближенную последовательность собственных значений краевой задачи $\tilde{\mu}_1 = \vartheta^{-2}$, $\tilde{\mu}_n = \vartheta^{-2}(\pi(n-1))^2$, $n \geqslant 2$. Тогда по теореме сравнения Ли [7]

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{-1}\xi_j^2 \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \vartheta\mu_1^{1/2} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\vartheta\mu_n^{1/2}}{\pi(n-1)}\ \mathsf{P}\left\{\xi_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j^2}{\pi^2 j^2} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^2\right\}, \tag{21}$$

где ξ_0 — стандартная нормальная случайная величина, не зависящая от $\{\xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

В [10] было получено, что при $\varepsilon \to 0$

$$\mathsf{P}\left\{\xi_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_j^2}{\pi^2 j^2} \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^2\right\} \sim \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^{-2}\right).$$

Остается вычислить константу “расхождения”

$$\widetilde{C}_{\text{dist}} \equiv \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n^{1/2}}{\tilde{\mu}_n^{1/2}} = \vartheta\mu_1^{1/2}\prod_{n=2}^{\infty}\frac{\vartheta\mu_n^{1/2}}{\pi(n-1)}.$$

Общим решением уравнения (20) является (см. [13], 2.162 (12a))

$$y(t) = c_1 J_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{q}e^{qt}\right) + c_2 N_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{q}e^{qt}\right).$$

Используя граничные условия, получаем, что $\sqrt{\mu_n}$ — положительные корни функции

$$F(\zeta) = \det\begin{bmatrix} \zeta J'_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{1}{q}\zeta\right) - \alpha J_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{1}{q}\zeta\right) & \zeta N'_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{1}{q}\zeta\right) - \alpha N_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{1}{q}\zeta\right) \\ e^q\zeta J'_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{e^q}{q}\zeta\right) + \alpha J_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{e^q}{q}\zeta\right) & e^q\zeta N'_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{e^q}{q}\zeta\right) + \alpha N_{\left|\frac{\alpha}{q}\right|}\left(\frac{e^q}{q}\zeta\right) \end{bmatrix}.$$

В свою очередь, числа $\sqrt{\tilde{\mu}_n}$ являются положительными корнями функции

$$\Psi(\zeta) = \big((\vartheta\zeta)^2 - 1\big)\,\frac{\sin(\vartheta\zeta)}{\zeta}.$$

Из соотношений (17) следует, что при $|\zeta| = \pi(k - \frac{1}{2})$ и $k \to \infty$

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightrightarrows \frac{2|q|e^{q/2}}{\pi\vartheta^2}.$$

Кроме того,

$$\frac{|F(0)|}{|\Psi(0)|} = \frac{4\alpha e^{\alpha}|q|}{\pi\vartheta}.$$

Применяя теорему Иенсена к функциям $F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, с учетом двух последних соотношений, получаем

$$\widetilde{C}_{\mathrm{dist}} = \frac{\sqrt{2\alpha\vartheta}e^{\alpha/2}}{e^{q/4}}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 4. Соотношение (19) обобщает оценку вероятностей малых уклонений для процесса Орнштейна-Уленбека в [11] и [17], которая получается из него предельным переходом при $q \to 0$.

Теорема 4.4. *Пусть $q > 0$.*

1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^\infty \mathring{U}^2_{(\alpha)}(t)e^{-2qt}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2}{\pi^{\frac{1}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{|\alpha|}{q}\right)} \cdot (2q\varepsilon)^{\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{q}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}(q\varepsilon)^{-2}\right). \tag{22}$$

2. *Пусть $\alpha > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^\infty U^2_{(\alpha)}(t)e^{-2qt}\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2\left(\frac{\alpha}{q}\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\alpha}{q}\right)} \cdot (2q\varepsilon)^{\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{q}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8}(q\varepsilon)^{-2}\right).$$

Доказательство. Согласно Лемме 2.1, числа λ_n в разложении (1) равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} y'' - (\alpha^2 - \mu e^{-2qt})y = 0 & \text{на} \quad [0,\infty), \\ y(0) = 0, \quad |y(+\infty)| < \infty & \text{для} \quad \mathring{U}_{(\alpha)}, \\ (y' - \alpha y)(0) = 0, \quad |y(+\infty)| < \infty & \text{для} \quad U_{(\alpha)}. \end{cases}$$

Учитывая условие $|y(+\infty)| < \infty$, из [13], 2.162 (12a) получаем

$$y(t) = cJ_{\frac{|\alpha|}{q}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{q}e^{-qt}\right).$$

Из условия $y(0) = 0$ следует, что $\mu_n = (qx_n)^2$, где x_n обозначает n-й положительный корень функции Бесселя $J_{\frac{|\alpha|}{q}}(\zeta)$.

Из условия $(y' - \alpha y)(0) = 0$ следует, что $\mu_n = (qz_n)^2$, где z_n обозначает n-й положительный корень уравнения

$$\zeta J'_{\frac{\alpha}{q}}(\zeta) + \frac{\alpha}{q}J_{\frac{\alpha}{q}}(\zeta) = 0.$$

Применяя Лемму 3.2 из [11], получаем утверждение теоремы. □

Замечание 5. Полагая в соотношении (22) $\alpha = 0$, получаем уже известную асимптотику малых уклонений в L_2-норме с экспоненциальным весом для винеровского процесса на полуоси (см. [11], Теорема 3.4).

Рассмотрим процесс $\widehat{W}(t) \equiv W(t) - t^{-1}\int_0^t W(s)\,ds$. Это центрированный гауссовский процесс, в [18] было получено, что его ковариационная функция $G_{\widehat{W}}(t,s) = s^2/(3t) \wedge t^2/(3s)$.

Теорема 4.5. *Пусть $\beta > 0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 t^{2\beta-2}\widehat{W}^2(t)\,dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2\beta}\right)}\right)^{1/2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (2\beta\varepsilon)^{3(\beta-1)/(2\beta)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{8\beta^2}\varepsilon^{-2}\right).$$

Доказательство. Согласно Предложению 5.3 из [19] и Лемме 2.1, числа λ_n в разложении (1) равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' + \dfrac{2y}{t^2} = \mu t^{2\beta-2}y \quad \text{на} \quad [0,1], \\ y(0) = (y' + y)(1) = 0. \end{cases}$$

Из [16], 8.491.12, с учетом условия $y(0) = 0$, следует

$$y(t) = c\sqrt{t}J_{\frac{3}{2\beta}}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\beta}t^\beta\right).$$

Используя второе граничное условие, получаем, что $\mu_n = \beta^2 z_n^2$, где $z_1 < z_2 < \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\zeta J'_{\frac{3}{2\beta}}(\zeta) + \frac{3}{2\beta}J_{\frac{3}{2\beta}}(\zeta) = 0.$$

Применяя Лемму 3.2 из [11], получаем утверждение теоремы. □

Замечание 6. Согласно Теореме 2.2, в случае, когда вес отделен от нуля, и его производные до некоторого порядка ограничены, показатель γ в асимптотике малых уклонений, имеющей вид

$$\mathcal{C}\varepsilon^{\gamma}\exp(-D\varepsilon^{-d}), \tag{23}$$

зависит только от порядка соответствующего дифференциального оператора и порядка граничных условий. В случае же, когда вес на концах отрезка может обращаться в ноль либо неограниченно возрастать, это, вообще говоря, не так. В работе [11] была вычислена асимптотика малых уклонений в L_2-норме для процессов $t^{\theta}B(t)$ и $t^{\theta}W(t)$ (частичные результаты были получены также в [20]). Как следует из [11], [20] и Теоремы 4.5, асимптотика малых уклонений в L_2-норме с весом t^{θ} для процессов $B(t)$, $W(t)$ и $\widehat{W}(t)$ имеет вид (23), однако, в отличие от случая регулярного поведения веса, показатель γ в ней зависит от параметра θ веса.

5 Интегрированные процессы, связанные с функциями Бесселя

Пусть $X(t)$, $t\in[0,1]$, — центрированный гауссовский процесс. Пусть β_j, $j=1,\dots,m$, равны 0 или 1. Обозначим через $X_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t)$ m раз проинтегрированный процесс

$$X_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t)=(-1)^{\beta_1+\dots+\beta_m}\int_{\beta_m}^{t}\dots\int_{\beta_1}^{t_1}X(s)\,ds\,dt_1\dots dt_{m-1}.$$

Теорема 5.1. *При $\varepsilon\to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 t^2\left(\widehat{W}_1^{[1]}(t)\right)^2dt\leqslant\varepsilon^2\right\}\sim\frac{4\cdot 2^{\frac14}}{3^{\frac12}}\exp\left(-\frac{2^{\frac13}}{4\cdot 3^{\frac13}}\varepsilon^{-\frac23}\right).$$

Доказательство. Согласно Теореме 2.1 из [10] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_n=\mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases} y^{IV}-\left(\dfrac{2y'}{t^2}\right)'=\mu t^2y \quad \text{на} \quad [0,1],\\ y(1)=0,\\ y'(0)=0,\\ (y''+y')(1)=0,\\ \left(y'''-\dfrac{2y'}{t^2}\right)(0)=0.\end{cases}$$

Общее решение уравнения (см. [13], 4.37)

$$y(t)=c_1J_0(u)+c_2N_0(u)+c_3J_0(iu)+c_4N_0(iu), \tag{24}$$

где $u = \frac{2}{3}\mu^{1/4}t^{3/2}$. Граничные условия дают уравнение на собственные значения, из которого следует, что

$$\mu_n = \left(\frac{3z_n}{2}\right)^4,$$

где $z_1 < z_2 < \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\det \begin{bmatrix} J_0(\zeta) & N_0(\zeta) & J_0(i\zeta) & N_0(i\zeta) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ J_0(\zeta) & N_0(\zeta) & -J_0(i\zeta) & -N_0(i\zeta) \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0,$$

которое при вещественных ζ равносильно уравнению $J_0(\zeta) = 0$. Применяя Лемму 3.2 из [11], получаем утверждение теоремы. □

Теорема 5.2. *При $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\int_0^1 t^2 \left(\widehat{W}_1^{[0]}(t)\right)^2 dt \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2^{43/12}3^{1/6}}{\pi^{1/2}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{3}} \cdot \exp\left(-\frac{2^{\frac{1}{3}}}{4 \cdot 3^{\frac{1}{3}}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right).$$

Доказательство. Согласно Теореме 2.1 из [10] и Лемме 2.1, собственные значения ковариации равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные значения краевой задачи

$$\begin{cases} y^{IV} - \left(\dfrac{2y'}{t^2}\right)' = \mu t^2 y \quad \text{на} \quad [0,1], \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ (y'' + y')(1) = 0, \\ \left(y''' - 2y'\right)(1) = 0. \end{cases}$$

Подставляя формулу (24) в граничные условия, получаем уравнение на собственные значения, из которого следует, что

$$\mu_n = \left(\frac{3z_n}{2}\right)^4,$$

где $z_1 < z_2 < \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ J_0(\zeta) & N_0(\zeta) & -J_0(i\zeta) & -N_0(i\zeta) \\ J_1(\zeta) & N_1(\zeta) & -iJ_1(i\zeta) & -iN_1(i\zeta) \end{bmatrix} = 0. \qquad (25)$$

Уравнение (25) равносильно уравнению

$$F(\zeta) \equiv \det \begin{bmatrix} J_0(\zeta) + J_0(i\zeta) & N_0(\zeta) + N_0(i\zeta) + iJ_0(\zeta) \\ J_1(\zeta) + iJ_1(i\zeta) & N_1(\zeta) + iN_1(i\zeta) + iJ_1(\zeta) \end{bmatrix} = 0.$$

Перепишем выражение для $F(\zeta)$:

$$F(\zeta) = \begin{vmatrix} J_0(i\zeta) & N_0(\zeta)+iJ_0(\zeta) \\ iJ_1(i\zeta) & N_1(\zeta)+iJ_1(\zeta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_0(\zeta) & N_0(i\zeta) \\ J_1(\zeta) & iN_1(i\zeta) \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} J_0(i\zeta) & N_0(i\zeta) \\ iJ_1(i\zeta) & iN_1(i\zeta) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_0(\zeta) & N_0(\zeta)+iJ_0(\zeta) \\ J_1(\zeta) & N_1(\zeta)+iJ_1(\zeta) \end{vmatrix}.$$

Положим $\Psi(\zeta) = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}(\zeta)\cos(\zeta)$. Из соотношений (17) следует, что при $|\zeta| = \pi k$ и $k \to \infty$

$$\frac{|\pi\zeta F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightrightarrows 1.$$

Применяя теорему Иенсена к функциям $\pi\zeta F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n^4}{\left(\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^4} = \left|\frac{(\pi\zeta F(\zeta))|_{\zeta=0}}{\Psi(0)}\right| = 2^{5/2}.$$

Значит,

$$\mathsf{P}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{-1}\xi^2 \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim 2^{5/4}\cdot \mathsf{P}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right)^{-4}\xi^2 \leqslant \varepsilon^2\right\} \sim \\ \sim \frac{2^{5/4+7/3}3^{1/6}}{\pi^{1/2}}\varepsilon^{\frac{1}{3}}\exp\left(-\frac{2^{\frac{1}{3}}}{4\cdot 3^{\frac{1}{3}}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\right).$$

$\square$

Мы признательны Я.Ю. Никитину за внимание к работе.
Работа поддержана грантом РФФИ 04-01-00716.

Список литературы

[1] Li, W. V. and Shao, Q. M. *Gaussian processes: Inequalities, Small Ball Probabilities and Applications.* //Stochastic Processes: Theory and Methods. (Handbook of Statistics. V. 19.) /C.R. Rao, D. Shanbhag (eds.) — 2001. — P. 533-597.

[2] Lifshits, M. A. *Asymptotic behavior of small ball probabilities.* //Prob. Theory and Math. Stat. /B. Grigelionis et al. (eds.) — 1999. — P. 453-468.

[3] Сытая Г. Н. *О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве.* //Теория случайных процессов. — Киев, 1974. — Т. 2. — С. 93–104.

[4] Zolotarev, V. M. *Gaussian measure asymptotics in l_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero.* //12th Europ. Meeting of Statisticians. — Varna, 1979. — P. 254.

[5] Dudley, R. M., Hoffmann-Jørgensen, J., Shepp, L. A. *On the lower tail of Gaussian seminorms.* //Ann. Probab. — 1979. — V. 7. — P. 319–342.

[6] Ибрагимов И. А. *О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса.* //Записки научн. семин. ЛОМИ. — Л., 1979. — Т. 85. — С. 75–93.

[7] Li, W. V. *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms.* //J. Theor. Probab. — 1992. — V. 5, № 1. — P. 1–31.

[8] Dunker, T., Lifshits, M. A. and Linde, W. *Small deviations of sums of independent variables.* //Progr. Probab. V. 43. — Birkhäuser, 1998. — P. 59–74.

[9] Pycke, J.-R. *Un lien entre le développement de Karhunen-Loève de certains processus gaussiens et le laplacien dans des espaces de Riemann.* Thèse de doctorat de l'Université Paris 6. — 2003.

[10] Nazarov, A. I. and Nikitin, Ya. Yu. *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems.* //Probab. Theory Relat. Fields. — Springer-Verlag, 2004. — V. 129, № 4. — P. 469–494.

[11] Назаров А. И. *О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов.* //Нелинейные уравнения и математический анализ. (Проблемы матем. анализа. Вып. 26.) /Под ред. Т. Рожковской. — Новосибирск, 2003. — С. 179–214.

[12] Бородин А. Н., Салминен П. *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* — СПб.: Лань, 2000.

[13] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* — 6-е изд. — СПб.: Лань, 2003.

[14] Никитин Я. Ю., Харинский П. А. *Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме для одного класса гауссовских процессов.* //Записки научн. семин. ПОМИ. — СПб., 2004. — Т. 311. — С. 214–221.

[15] Титчмарш Е. *Теория функций.* — 2-е изд. — М.: Наука, 1980.

[16] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* — 5-е изд. — М.: Наука, 1971.

[17] Gao, F., Hannig, J., Lee T.-Y. and Torcaso, F. *Laplace transforms via Hadamard factorization with applications to small ball probabilities.* //Electronic J. Probab. — 2003. — V. 8, Paper № 13. — P. 1–20.

[18] Kleptsyna, M. L. and Le Breton, A. *A Cameron-Martin type formula for general Gaussian processes — a filtering approach.* //Stochastics and Stoch. Rep. — 2002. — V. 72, № 3–4. — P. 229–250.

[19] Karol, A. I., Nazarov, A. I. and Nikitin, Ya. Yu. *Tensor products of compact operators and logarithmic L_2-small ball asymptotics for Gaussian random fields.* Università Bocconi. Studi Statistici. № 74. — Milan, 2003.

[20] Deheuvels, P. and Martynov, G. *Karhunen-Loève expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions.* //Progr. Probab. V. 55. — Birkhäuser, 2003. — P. 57–93.