ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ФРЕЙМА

Олег И. Рейнов

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $\{e_j\}_{j=1}^N$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, — последовательность ортонормированных элементов в H. Тогда для любого вектора $e \in H$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle e, e_j \rangle|^2 \leq ||e||^2. \tag{1}$$

Это — неравенство Бесселя. Для *полной* ортонормированной последовательности $\{e_j\}_{j=1}^N$ (то есть, для ортонормированного базиса в H) имеется более сильное свойство системы:

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle e, e_j \rangle|^2 = ||e||^2 \quad \text{for every} \quad e \in H. \tag{2}$$

Это — равенство Парсеваля.

Соотношения (1) и (2), несомненно, являются одними из самых важных в классической теории гильбертовых пространств. Мы можем, однако, пойти дальше, рассматривая счетные или несчетные бесконечные (ортогональные или нет) семейства в гильбертовых пространствах, даже не обязательно сепарабельных, и стараясь определить семейства, которые обладают свойствами, похожими на (1) и (2). Если говорить коротко, мы на этом пути естественным образом можем придти к "переполненным" семействам, свойства которых очень похожи на свойства гильбертовых базисов в сепарабельных (или несепарабельных) пространствах — в том смысле, что основные их свойства выглядят почти как свойства последовательностей в (1) и (2). Если такие "переполненные" несчетные семейства

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда РФФИ: Грант 06-01-00457

рассматриваются в сепарабельных H, то, конечно, их элементы не дают нам обычный гильбертов базис, поскольку семейство несчетно и, таким образом, линейно зависимо.

Снова будем кратки и скажем лишь, что мы — на пути к получению нового класса семейств, не базисных, но ведущих себя очень похоже на базисы, со свойствами, которые могут быть очень полезны в теории гильбертовых пространств. Это *фреймы.*

Точнее, пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ есть некоторое семейство в H (мы предполагаем, обычно, что все рассматриваемые множества не пусты, каково сейчас и $\mathbb{A}$). Говорят, что семейство $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ есть *фрейм,* если существуют такие постоянные A и B, где $0 < A \leq B < \infty$, что для любого $e \in H$ выполняются следующие соотношения:

$$A\,||e||^2 \leq \sum_{\alpha\in\mathbb{A}} |\langle e, e_\alpha\rangle|^2 \leq B\,||e||^2 \tag{3}$$

(см. [1, 3] для прекрасного введения в теорию фреймов). В этом случае A — *нижняя (frame-)граница* и B — *верхняя (frame-)граница* для этого фрейма. Если семейство $E := \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ удовлетворяет условиям, аналогичным (1), то говорят о *бесселевом семействе.* Если семейство $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ удовлетворяет условиям, аналогичным (2), то говорят о *парсевалевом семействе* и в этом случае $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ — по необходимости фрейм, так что мы получаем *парсевалев фрейм.* Более точно, E называется *бесселевым семейством,* (соответственно, *бесселевой последовательностью*), если существует константа $B > 0$ такая, что для всякого $e \in H$

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{A}} |\langle e, e_\alpha\rangle|^2 \leq B\,||e||^2$$

(соответственно, и множество индексов $\mathbb{A}$ счетно). Если E — фрейм со свойством из (3), то говорят, что это — *парсевалев фрейм,* когда в (3) $A = B = 1$. Более общо, если $A = B > 0$ в (3) то фрейм E называется *жестким фреймом.* Еще пара определений: фрейм E является *равномерным,* если $||e_\alpha|| = ||e_\beta||$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$; фрейм E *точен,* если семейство $E \setminus \{e_\gamma\}$ уже не фрейм каково бы ни было $\gamma \in \mathbb{A}$.

Теория фреймов (см. [1, 3]) замечательно развивалась (и продолжает развиваться) в течение последних примерно 30 лет. Мы не собираемся здесь упоминать даже начальные (но довольно интересные и иногда нетривиальные) результаты теории. Буквально сейчас, несколькими строками ниже, мы наметим некоторые пути возможных обобщений понятия фрейма (и затем рассмотрим один из них). Более общая ситуация рассмотрена в работе автора [5], где впервые было введено понятие пространственного измеримого фрейма. В данной работе ниже мы интересуемся частным случаем этой ситуации — пространственный измеримый фрейм с одномерными компонентами. Отметим, что, как показывает теорема 1 из [5], изучение измеримых пространственных фреймов сводится, по существу, к исследованию "измеримых одномерных пространственных фреймов" (таких, как в нашей работе).

Итак, в каких направлениях возможно обобщения понятия "фрейм"?

$\mathbb{A}$) Один из путей — заменить каждый вектор e_α в (3) набором векторов $\{e_{\alpha,j}\}_j$. Как это проделать? Скалярные произведения в (3) представляют собой, грубо говоря, (орто)проекторы из H на соответствующие одномерные подпространства. Таким образом, если мы хотим изменить ситуацию в желаемом направлении, то естественным является рассмотрение, для каждого α, подпространства E_α вместо одномерного подпространства $\mathrm{span}\,\{e_\alpha\}$; при этом, вместо "проекции" $\langle\cdot, e_\alpha\rangle$ надо взять ортогональную проекцию π_{E_α} (из H на E_α). Описанный путь — это направление, в котором пошли P. G. Casazza и G. Kutyniok [2]. Вот их соответствующее определение.

Пусть I — некоторое множество индексов и пусть $\{v_i\}_{i\in I}$ есть семейство "весов", т. е. $v_i > 0$ для всех $i \in I$. Семейство замкнутых подпространств $\{W_i\}_{i\in I}$ гильбертова пространства H есть *frame of subspaces* по отношению к $\{v_i\}_{i\in I}$ для H, если существуют константы $0 < C \leq D < \infty$ такие, что

$$C\,||f||^2 \leq \sum_{i\in I} v_i^2 ||\pi_{W_i}(f)||^2 \leq D\,||f||^2 \quad \text{for all} \quad f \in H.$$

Понятия границ, верхней и нижней границ, жестких, парсевалевых и т. п. "фреймов подпространств" определяются естественным образом. Дальнейшие обобщения в этом направлении на случай "измеримых фреймов подпространств" предложено автором в [5].

$\mathbb{B}$) Другой путь для обобщений. Просто изменим сумму в (3) на интеграл, что означает изменение множества индексов $\mathbb{A}$ на пространство с положительной мерой, например, (Ω, Σ, μ). В данный момент подробности опускаем, поскольку ниже это будет проделано в формальном определении.

Перед тем, как перейти к изложению основного материала, приведем некоторые используемые обозначения.

Для простоты изложения в этой работе мы рассматриваем только пространства над полем вещественных чисел. Все изложенное ниже, однако, справедливо и в комплексном случае.

Всюду далее через H обозначается гильбертово пространство. Мы отождествляем пространство H с его сопряженным. Скалярное произведение векторов $h, f \in H$, один из которых рассматривается как линейный непрерывный функционал на H, записывается как в виде $\langle f, h \rangle$, так и в виде $\langle h, f \rangle$. Под подпространством гильбертова пространства понимается замкнутое линейное подпространство.

Если E — подпространство в H, то π_E — ортогональный проектор из H на E. Всякий ортогональный проектор самосопряжен. Напомним, что оператор U из гильбертова пространства H в гильбертово пространство H_0 частично изометричен, если на некотором подпространстве $H_1 \subset H$ он изометричен, а на его ортогональном дополнении обращается в нуль. Частично изометрический оператор $U : H \to H_0$ — факторотображение из H на образ $U(H)$; если $U(H) = H_0$, то сопряженный оператор вкладывает изометрически пространство H_0 в H.

Для произвольного гильбертова пространства H через Id_H обозначается тождественное отображение в H.

Пусть (Ω, μ) — пространство с мерой. Функция $\overline{g} : \Omega \to H$ называется *скалярно измеримой,* если для всякого вектора $h \in H$ измерима скалярнозначная функция $\langle h, \overline{g}(\cdot) \rangle : \Omega \to H$. Мы будем рассматривать интегралы от подобных векторнозначных функций. Множество очень полезной информации о векторном интегрировании или о нескалярно-значных измеримых функциях можно найти в прекрасно написанной монографии J. Diestel'a и J. J. Uhl'a [4].

Интегральные фреймы. Мы рассматриваем один частный случай понятия "измеримый пространственный фрейм", введенного автором в работе [5], и начинаем изучение "интегральных" фреймов с их определения, простейших свойств и их связи с теорией операторов в гильбертовых пространствах.

Посмотрим на условие (3) в определении классического фрейма с иной точки зрения. Положим $\Omega := \mathbb{A}$ и пусть μ_c есть "считающая" мера на $\mathbb{A}$, т. е. μ_c — мера на σ-алгебре всех подмножеств множества $\mathbb{A}$ с тем свойством, что для каждой точки $\alpha \in \mathbb{A}$ имеет место равенство $\mu_c(\{\alpha\}) = 1$. Отметим, что для любой неотрицательной функции φ на $\mathbb{A}$ выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{A}} \varphi(\alpha) = \int_{\mathbb{A}} \varphi(\alpha)\, d\mu_c(\alpha) \equiv \int_\Omega \varphi\, d\mu_c.$$

Таким образом, соотношения (3) могут переписаны в "интегральной" форме, и мы получаем, что семейство $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{A}}$ есть фрейм тогда и только тогда, когда существуют две постоянные A и B, где $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого $e \in H$ выполняются соотношения

$$A\,||e||^2 \leq \int_{\mathbb{A}} |\langle e, \cdot\rangle|^2\, d\mu_c \leq B\,||e||^2. \tag{3a}$$

Наша цель в настоящей работе — заменить дискретную меру на произвольную и посмотреть, что получится.

Определение 1. Семейство $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется *интегральным фреймом,* если для любого $h \in H$ функция $\varphi, \varphi(\omega) := \langle h, f_\omega\rangle$, измерима и существуют такие постоянные $C, D > 0$, что для всякого вектора $f \in H$ выполняются неравенства

$$C\,||f||^2 \leqslant \int_\Omega |\langle f, f_\omega\rangle|^2\, d\mu(\omega) \leqslant D\,||f||^2. \tag{4}$$

Постоянные C и D называются, соответственно, *нижней*и *верхней*границами (для) интегрального фрейма $\{f_\omega\}_\Omega$. Семейство $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется C-жестким интегральным фреймом, если константы C, D в (4) могут быть выбраны так, что $C = D$; оно называется *парсевалевым* (интегральный Parseval's frame), если $C = D = 1$; если для $F_\Omega := \text{span}\{f_\omega\}, \omega \in \Omega$, $H = \oplus \int_\Omega F_\omega$, то этот парсевалевым интегральный фрейм есть *ортонормированный интегральный базис* для H, Парсевалевы фреймы мы называем также *нормализованными жесткими интегральными фреймами.* Если в (4) имеет место только правое неравенство, то говорят о *бесселевом интегральном семействе с бесселевой верхней границей D.*

Замечание 1. Пусть $\{f_\omega\}_\Omega$ — некоторый интегральный фрейм в H. Для каждой точки $\omega \in \Omega$ положим $\overline{g}(\omega) := f_\omega$, определяя, таким образом, H-значную функцию $\overline{g}$ на Ω. По определению интегрального фрейма, эта функция скалярно измерима. Обратно, для любой скалярно измеримой гильбертовозначной функции $\overline{g} : \Omega \to H$ формула $f_\omega = \overline{g}(\omega)$ определяет интегральный фрейм в H, если только для некоторых положительных констант C_0, D_0 при всех $h \in H$

$$C_0\, ||h||^2 \leqslant \int_\Omega |\langle h, \overline{g}(\omega)\rangle|^2\, d\mu(\omega) \leqslant D_0\, ||h||^2. \tag{5}$$

Таким образом, *интегральные фреймы — это просто скалярно измеримые гильбертовозначные функции, удовлетворяющие соотношениям* (5). При этом, очевидно, границы данного интегрального фрейма совпадают с соответствующими границами (скалярно измеримой) H-значной функции. Мы говорим, что *функция $\overline{g}$ ассоциирована с нашим фреймом $\{f_\omega\}_\Omega$.*

Пусть у нас есть интегральный фрейм $\{f_\omega\}$ в H и пусть $\overline{g}$ — ассоциированная с ним скалярно измеримая H-значная функция. Рассмотрим формальную формулу

$$T\varphi = \int_\Omega \varphi\, \overline{g}\, d\mu \quad \text{для} \quad \varphi \in L_2(\Omega, \mu). \tag{6}$$

Ее надо понимать так (функция $\overline{g}$ всего лишь скалярно измерима, поэтому интеграл в (6) не обязан являться интегралом Бохнера). Интеграл в (6) есть линейный функционал на H, который на векторе h из H принимает значение

$$(T\varphi)(h) = \int_\Omega \varphi\, \langle \overline{g}, h\rangle\, d\mu. \tag{7}$$

Чтобы интеграл в (7) всегда (при любой функции φ из $L_2(\Omega,\mu)$) был определен и конечен необходимо и достаточно, чтобы скалярная функция $\langle\overline{g},h\rangle$ лежала в пространстве $L_2(\Omega\mu)$. И это должно быть при любом векторе h.

Последние два соотношения можно, разумеется, рассматривать и для произвольного скалярно измеримого семейства $\{f_\omega\}_\Omega$ векторов гильбертова пространства H (а не только для интегральных фреймов), и с этим семейством, конечно, можно аналогичным образом ассоциировать скалярно измеримую функцию $\overline{g}:\Omega\to H$. Когда, в этом случае, соотношение (6) определяет отображение из $L_2(\Omega,\mu)$ в H? И если определяет, то когда соответствующий линейный оператор будет ограниченным?

Перед тем как формулировать и доказывать соответствующий факт, посмотрим, как будет выглядеть сопряженный к T оператор в случае, когда T определен и ограничен.

Итак, $T\varphi=\int_\Omega\varphi\,\overline{g}\,d\mu$. Для $h\in H$ имеем (первое скалярное произведение — в $L_2(\Omega,\mu)$):

$$\langle T^*h,\varphi\rangle=\langle T\varphi,h\rangle=\int_\Omega\varphi\,\langle\overline{g},h\rangle\,d\mu=\langle\langle\overline{g},h\rangle,\varphi\rangle$$

(в конце цепочки внешнее скалярное произведение — в $L_2(\Omega,\mu)$, а внутренне — из H!). Таким образом, если *Тограничен*, то

$$T^*h=\langle h,\overline{g}\rangle \quad \text{для всех} \quad h\in H. \tag{8}$$

Обратно, если соотношение (8) определяет ограниченный оператор, то в силу рефлексивности гильбертова пространства H определен и ограничен наш оператор T с той же формулой (4).

Предложение 1. *Пусть $\{f_\omega\}_\Omega$ — некоторое скалярно измеримое семейство в H. Следующие два утверждения равносильны.*

1) *Соотношение* (6) *определяет отображение E из $L_2(\Omega,\mu,)$ которое представляет собой линейный ограниченный оператор.*

2) *Семейство $\{f_\omega\}_\Omega$ имеет конечную верхнюю границу в том смысле, что оно удовлетворяет правому неравенству в* (4) *с некоторой константой D.*

Доказательство. 1) $\implies$ 2). Если T ограничен, то T^* также ограничен, причем для $h \in H$

$$\|T^*h\|^2 = \int_\Omega |\langle h, \overline{g}\rangle|^2 \, d\mu = \int_\Omega |\langle h, f_\omega\rangle|^2 \, d\mu(\omega). \tag{9}$$

Поэтому в качестве верхней границы для семейства $\{f_\omega\}$ можно взять число $||T^*|| = ||T||$.

2) $\implies$ 1). Пусть $D > 0$ — верхняя граница для $\{f_\omega\}$. Соотношение (8) формально определяет отображение T^*, которое, в силу условий и рассуждений перед формулировкой предложения, является линейным оператором из H в $L_2(\Omega, \mu)$. Как уже упоминалось выше, в силу рефлексивности H отображение T (формула (6)) вполне определено и представляет собой ограниченный оператор.

В случае, когда семейство $\{f_\omega\}_\Omega$ имеет конечную верхнюю границу, мы говорим об операторе T,

$$T\varphi = \int_\Omega \varphi \, f_\omega \, d\mu \quad \text{для} \quad \varphi \in L_2(\Omega, \mu), \tag{10}$$

как о *предфреймовском* операторе.

Одним из основных понятий в аналитических теориях (математический анализ, функциональный анализ, операторные идеалы, операторные алгебры и т. д.) является понятие полноты.

Напомним, что семейство подпространств $\{F_\omega\}$ полно в гильбертовом пространстве H, если

$$\overline{\operatorname{span}}_{\omega\in\Omega} \{F_\omega\} = H.$$

Соответственно, семейство $\{f_\omega\}$ полно в H, если семейство одномерных подпространств $\{\operatorname{span} f_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ полно. Имеет место следующий полезный факт.

Предложение 2. *Пусть $\{f_\omega\}_\Omega$ — интегральный фрейм в H. Соответствующее семейство одномерных подпространств, $F_\omega := \operatorname{span}\{f_\omega\}$, полно в H.*

Доказательство. Предположим, что семейство $\{F_\omega\}$ не полно. Возьмем ненулевой элемент $f \in H$ таким образом, что $f \perp \overline{\operatorname{span}}_{\omega\in\Omega} \{F_\omega\}$. Тогда $\int_\Omega |\langle f, f_\omega\rangle|^2 \, d\mu(\omega) = 0$

(поскольку все скалярные произведения $\langle f, f_\omega \rangle$ нули). Следовательно, наше семейство $\{f_\omega\}$ не есть интегральный фрейм.

Теорема 1. *Пусть $\{f_\omega\}$ — семейство векторов в H. Следующие утверждения равносильны между собой.*

1) $\{f_\omega\}$ является интегральным фреймом;

21) предфреймовский оператор $T : L_2(\Omega, \mu) \to H$ ограничен и действует "на";

3) сопряженный оператор T^* является изоморфным (вообще говоря, вложением).

Более того, семейство $\{f_\omega\}$ представляет собой нормализованный жесткий интегральный фрейм ($C = D = 1$) тогда и только тогда, когда T есть факторотображение, что равносильно тому, что сопряженный оператор T^* является изометрическим (вложением).

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1)–3) установлена, по существу, выше. Для доказательства остальной части теоремы достаточно вспомнить определение интегрального фрейма и применить равенство (9).

Мы будем говорить об операторе T^* как о *фрейм-преобразовании.*

Пусть $\{f_\omega\}$ — интегральный фрейм, $\overline{g}$ — ассоциированная с ним скалярно измеримая функция. Рассмотрим суперпозицию

$$TT^* : H \xrightarrow{T^*} L_2(\Omega, \mu) \xrightarrow{T} H.$$

Для $f \in H$

$$TT^* f = T\left(\langle f, \overline{g} \rangle\right) = \int_\Omega \langle f, \overline{g} \rangle \, \overline{g} \, d\mu = \int_\Omega \langle f, f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega).$$

Таким образом, обозначая оператор TT^* через S, мы получаем ограниченный оператор S в H, для которого при всех $f \in H$ справедливы соотношения

$$Sf = \int_\Omega \langle f, f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega) \tag{11}$$

и

$$\langle Sf, f \rangle = \int_\Omega |\langle f, f_\omega \rangle|^2 \, d\mu(\omega). \tag{12}$$

Оператор S называется *фрейм-оператором* (для интегрального фрейма $\{f_\omega\}$).

Теорема 2. *Пусть $\{f_\omega\}$ — интегральный фрейм для H.*

1) Фрейм-оператор S ограничен, положителен, самосопряжен и обратим.

2) $\{f_\omega\}$ есть интегральный фрейм с границами $C, D > 0$ тогда и только тогда, когда $C\,Id_H \leqslant S \leqslant D\,Id_H$.

3). $\{f_\omega\}$ является нормализованным жестким фреймом тогда и только тогда когда $S = Id_H$.

Доказательство. 1) То, что S самосопряжен и положителен – очевидно. Обратимость самосопряженного оператора S вытекает из соотношений (11) и (12.

2). Это моментально получается из фрейм-неравенства (4) в определении интегрального фрейма и из соотношений (12).

3). Вытекает из доказанного утверждения 2) и определения нормализованного жесткого фрейма.

Теорема 3. *Если $\{f_\omega\}$ — интегральный фрейм для H, то фрейм-оператор S удовлетворяет следующим соотношениям. Если $f \in H$, то*

$$f = \int_\Omega \langle f, S^{-1} f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega) \tag{13}$$

и

$$f = \int_\Omega \langle f, S^{-1/2} f_\omega \rangle \, S^{-1/2} f_\omega \, d\mu(\omega). \tag{14}$$

Доказательство. Мы используем формулу (11). Имеем:

$$f = SS^{-1}f = \int_\Omega \langle S^{-1}f, f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle f, S^{-1} f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega).$$

Далее,

$$S^{-1/2}f = S^{-1}SS^{-1/2}f = S^{-1}\left(\int_\Omega \langle S^{-1/2}f, f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega)\right) =$$
$$= S^{-1}\left(\int_\Omega \langle f, S^{-1/2} f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega)\right) = \int_\Omega \langle f, S^{-1/2} f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega),$$

откуда, после применения к левой и последней частям этой цепочки равенств оператора $S^{1/2}$, окончательно получаем

$$f = S^{1/2} \int_\Omega \langle f, S^{-1/2} f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \langle f, S^{-1/2} f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega).$$

Формула (13) дает нам возможность "реконструировать" элемент $f \in H$ по его *фрейм-коэффициентам* $\{\langle S^{-1} f, f_\omega \rangle\}$. Надо только научиться вычислять эти коэффициенты. Заметим еще, что так как S есть изоморфизм на H, то $\{S^{-1} f_\omega\}$ является интегральным фреймом, эквивалентным интегральному фрейму $\{f_\omega\}$, и этот интегральный фрейм мы называем *каноническим дуальным интегральным фреймом.*

Теорема 4. *Пусть $\{f_\omega\}$ — интегральный фрейм для H с фрейм-оператором S. Тогда для любого вещественного числа $a, a \neq 1$, семейство $\{S^{(a-1)/2} f_\omega\}$ также является интегральным фреймом для H, причем его фрейм-оператор есть S^a.*

Доказательство. Так как S — положительный изоморфизм из H на H, то таковым является и S^b для любого ненулевого вещественного b. Полагая $b = (a-1)/2$, получаем для произвольного $f \in H$:

$$\int_\Omega \langle f, S^b f_\omega \rangle \, S^b f_\omega \, d\mu(\omega) = S^b \left(\int_\Omega \langle f, S^b f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega) \right) =$$
$$S^b \left(\int_\Omega \langle S^b f, f_\omega \rangle \, f_\omega \, d\mu(\omega) \right) = S^b S \left(S^b f_\omega \right) = S^{1+2b} f = S^a.$$

Это показывает, что $\{S^{(a-1)/2} f_\omega\}$ — интегральный фрейм с фрейм-оператором S^a.

Формула (14) в совокупности с фрейм-соотношениями (4) из определения интегрального фрейма показывает, что если $\{f_\omega\}$ — интегральный фрейм в H с фрейм-оператором S, то семейство $\{S^{-1/2} f_\omega\}$ представляет собой *нормализованный жесткий интегральный фрейм.* То же самое получаем из последней теоремы, рассматривая $(a-1)/2 = -1/2$, т. е. $a = 0$.

Теорема 5. *Всякий интегральный фрейм эквивалентен нормализованному жесткому фрейму. Более точно, если $\{f_\omega\}$ — интегральный фрейм с фрейм-оператором S, то этот интегральный фрейм эквивалентен нормализованному жесткому фрейму $\{S^{-1/2} f_\omega\}$.*

Доказательство. Два интегральных фрейма для гильбертова пространства H эквивалентны между собой, если существует изоморфизм из H на H, переводящий элементы одного интегрального фрейма в элементы второго и это отображение фреймов есть "отображение на". В нашем случае утверждение теоремы теперь очевидно.

Частным случаем (в классической теории фреймов, весьма важным) является понятие интегрального базиса типа Рисса. Приведем определение.

Определение 2. Мы говорим, что семейство $\{f_\omega\}_\Omega$ есть *интегральный базис типа Рисса,* если существуют такие постоянные $A, B > 0$, что для любой функции $\varphi \in L_2(\Omega, \mu)$ имеют место неравенства

$$A\,||\varphi||^2 \leqslant ||\int_\Omega \varphi(\omega)\, f_\omega\, d\mu(\omega)||^2 \leqslant B\,||\varphi||^2. \tag{15}$$

В настоящей работе мы не собираемся изучать свойства введенного только что понятия. Исследование (достаточно тщательное) свойств этих базисов требует отдельного внимания, и мы предполагаем провести его в одной из наших ближайших работ. Интересен случай, когда $A = B = 1$. Это — случай так называемых ортонормированных интегральных базисов.

Введенное нами понятие интегрального базиса типа Рисса позволяет дать характеристику так называемых точных интегральных фреймов. Мы говорим, что интегральный фрейм $\{f_\omega\}$ является *точным,* если после удаления из этого семейства множества $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega_0}$, где $\Omega_0 \subset \Omega$ с $\mu(\Omega_0) > 0$, оставшееся семейство не образует интегральный фрейм.

Теорема 6. *Пусть $\{f_\omega\}$ — интегральный фрейм для H. Эквивалентны утверждения:*

1) *интегральный фрейм* $\{f_\omega\}$ *является точным;*

2) *семейство* f_ω *является интегральным базисом типа Рисса.*

Доказательство. Отметим, что интегральный фрейм f_ω точен тогда и только тогда, когда предфреймовское факторотображение T взаимно-однозначно. Поскольку T есть оператор "на", то это может быть в том и только том случае, когда оператор T обратим и обратный к нему ограничен (теорема Банаха). Обратимость этого оператора превращает семейство $\{f_\omega\}$ в интегральный базис типа Рисса.

Теорема 7. *Пусть* $\{f_\omega\}$ — *нормализованный жесткий интегральный фрейм для* H.

1) *Если* $\Omega_0 \subset \Omega, \mu\Omega_0 > 0$, *таково, что для всякого* $\omega_0 \in \Omega_0$ *выполняется неравенство* $||f_{\omega_0}|| \geqslant \dfrac{1}{\mu\Omega_0}$, *то*

$$f_{\omega_0} \perp \operatorname*{span}_{\omega \notin \Omega_0}\{f_\omega\} \quad \text{для почти всех} \;\; \omega_0 \in \Omega_0.$$

2) *Если* $\Omega_0 \subset \Omega, \mu\Omega_0 > 0$, *таково, что для всякого* $\omega_0 \in \Omega_0$ *выполняется неравенство* $||f_{\omega_0}|| < \dfrac{1}{\mu\Omega_0}$, *то*

$$f_{\omega_0} \in \overline{\operatorname*{span}_{\omega \notin \Omega_0}}\{f_\omega\} \quad \text{для почти всех} \;\; \omega_0 \in \Omega_0.$$

Доказательство. Наш интегральный фрейм нормализован и жесткий, что означает:

$$(16) \qquad ||f||^2 = \int_\Omega |\langle f, f_\omega\rangle|^2 \, d\mu(\omega) = ||f||^2 \quad \text{для всех} \;\; f \in H.$$

Возьмем $\omega_0 \in \Omega_0$ и подставим f_{ω_0} в (16) вместо f :

$$(17) \qquad ||f_{\omega_0}||^2 = \int_\Omega |\langle f_{\omega_0}, f_\omega\rangle|^2 \, d\mu(\omega) = ||f||^2.$$

Проинтегрируем равенство (17) по Ω_0 :

(18)

$$\int_{\Omega_0} ||f_{\omega_0}||^2 \, d\mu(\omega_0) = \int_{\Omega_0} \left(\int_{\Omega_0} |\langle f_{\omega_0}, f_\omega\rangle|^2 \, d\mu(\omega) + \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |\langle f_{\omega_0}, f_\omega\rangle|^2 \, d\mu(\omega) \right) d\mu(\omega_0).$$

После этих предварительных манипуляций приступим последовательно к доказательству наших утверждений.

1). Так как

$$\int_{\Omega_0}\left(\int_{\Omega_0}|\langle f_{\omega_0}, f_\omega\rangle|^2\,d\mu(\omega)\right)\,d\mu(\omega_0)=\iint_{\Omega_0\times\Omega_0}|\langle f_{\omega_0}, f_\omega\rangle|^2\,d\mu(\omega)\,d\mu(\omega_0),$$

то из (18) получаем

$$\int_{\Omega_0}||f_{\omega_0}||^2\,d\mu(\omega_0)\geqslant\mu(\Omega_0)\int_{\Omega_0}||f_{\omega_0}||^2\,d\mu(\omega_0)\cdot\frac{1}{\mu(\Omega_0)}+\text{ неотрицательное слагаемое},$$

т. е.

$$\int_{\Omega_0}||f_{\omega_0}||^2\,d\mu(\omega_0)\geqslant\int_{\Omega_0}||f_{\omega_0}||^2\,d\mu(\omega_0)+\text{ неотрицательное слагаемое}.$$

Следовательно "неотрицательное слагаемое" равно нулю, что и доказывает утверждение 1).

2) Положим $E:=\overline{\operatorname{span}}_{\omega\notin\Omega_0}\{f_\omega\}$. Предположим, что найдется $\Omega_0'\subset\Omega_0$ положительной меры, для которого все f_{ω_0} с $\omega_0\in\Omega_0'$ не лежат в E. Можно считать, что это Ω_0. Подставим в соотношение (16) вектор $\pi_{E^\perp}f_{\omega_0}$ $(\omega_0\in\Omega_0)$:

$$0<||\pi_{E^\perp}f_{\omega_0}||^2=\int_\Omega|\langle\pi_{E^\perp}f_{\omega_0}, f_\omega\rangle|^2\,d\mu(\omega).\tag{19}$$

Используя (18) и проинтегрировав (19) по Ω_0, получим:

$$0<\int_{\Omega_0}||\pi_{E^\perp}f_{\omega_0}||^2\,d\mu(\omega_0)=\int_{\Omega_0}\int_{\Omega_0}|\langle\pi_{E^\perp}f_{\omega_0}, f_\omega\rangle|^2\,d\mu(\omega)\,d\mu(\omega_0)+0\leqslant$$
$$\leqslant\int_{\Omega_0}\int_{\Omega_0}||\pi_{E^\perp}f_{\omega_0}||^2\,||f_\omega||^2\,d\mu(\omega)\,d\mu(\omega_0).$$

Так как $||f_\omega||^2<\dfrac{1}{\mu(\Omega_0)}$ для почти всех $\omega\in\Omega_0$, то из последних неравенств следует:

$$0<\int_{\Omega_0}||\pi_{E^\perp}f_{\omega_0}||^2\,d\mu(\omega_0)<\int_{\Omega_0}||\pi_{E^\perp}f_{\omega_0}||^2\,d\mu(\omega_0)\cdot\mu(\Omega_0)\cdot\frac{1}{\mu(\Omega_0)}.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение 2).

Следствие 1. *Пусть* $\{f_\omega\}$ *— интегральный фрейм для* H *и* $\Omega_0 \subset \Omega, \mu(\Omega_0) > 0$. *Тогда* $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega\setminus\Omega_0}$ *— либо снова интегральный фрейм, либо неполная система. Иначе говоря, если выкинуть из интегрального фрейма существенную его часть, то останется либо снова интегральный фрейм, либо неполная в гильбертовом пространстве система.*

Доказательство. По теореме 5, можно считать, что рассматриваемый интегральный фрейм является нормализованным жестким интегральным фреймом. В этом случае, по теореме 7, семейство $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega_0}$ либо содержит существенную часть $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega_0'}, \mu(\Omega_0') > 0$, которая ортогональна остатку $\{f_\omega\}_{\omega\in\Omega\setminus\Omega_0}$, либо лежит в замкнутой линейной оболочке этого остатка.

Следующее утверждение показывает, что, как и в случае обычных фреймов, интегральные фреймы сохраняются при ортогональном проектировании. Стоит сравнить это достаточно простое предложение с формулируемой ниже теоремой, в котором приведена характеристика интегральных фреймов в терминах ортогональных проекций.

Предложение 3. *Пусть* $\{f_\omega\}$ *— интегральный фрейм для* H *с границами* C, D. *Если* E *— подпространство гильбертова пространства* H, *то* $\{\pi_E(f_\omega)\}$ *есть интегральный фрейм для* E *с теми же границами.*

Доказательство. Для $f \in E$, имеем:

$$\int_\Omega |\langle f_\omega, f\rangle|^2 \, d\mu(\omega) = \int_\Omega |\langle f_\omega, \pi_E(f)\rangle|^2 \, d\mu(\omega) = \int_\Omega |\langle \pi_E(f_\omega), f\rangle\rangle|^2 \, d\mu(\omega).$$

В заключение приведем без доказательства довольно трудную теорему обобщающую соответствующий результат D. Han'а и D.R. Larson'а (см. [1], теорема 4.10). Автор намеревается привести доказательство в последующей своей работе.

Теорема 8. *Семейство* $\{f_\omega\}$ *является нормализованным жестким интегральным фреймом для* H *тогда и только тогда, когда существует объемлющее гильбертово пространство* $\mathcal{H}, H \subset \mathcal{H}$, *и интегральный ортонормированный базис*

$\{e_\omega\}$ *для* $\mathcal{H}$ *такие, что естественный ортогональный проектор* Π_H *из* $\mathcal{H}$ *на* H *удовлетворяет условию* $\Pi_H e_\omega = f_\omega$ *для почти всех* $\omega \in \Omega$.

В случае обычных фреймов утверждение теоремы справедливо даже без предположения об ортогональности указанного проектора (P.G. Casazza, D. Han, D.R. Larson).

Литература

1. Casazza, P. G., *The art of frame theory*, Taiwanese J. Math. **4** (2000), 129-201.
2. Casazza, P. G. and Kutyniok, G., *Frames of subspaces*, Contemp. Math. **345** (2004), 87-114.
3. Christensen, O., *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser, Boston (2003).
4. Diestel, J, and Uhl, J. J., *Vector measures*, Math. Survey 15, Amer. Math. Soc., Providence RI (1977).
5. Reinov O. I., *Measurable space frames*, Math Track, SMS, Lahore, **2** (2006), 22-27.