ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В L_2-НОРМЕ И СПЕКТР КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С НЕРАСПАДАЮЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.И. Назаров[1]

Аннотация

С помощью уточнения классического результата об асимптотике спектра краевой задачи для самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора получены точные асимптотики малых уклонений в L_2-норме для нового класса гауссовских случайных процессов с нулевым средним, включающего, в частности, проинтегрированный обобщенный процесс Слепяна, проинтегрированный центрированный Винеровский процесс и проинтегрированный центрированный Броуновский мост.

We sharpen a classical result on the spectral asymptotics of the boundary value problems for self-adjoint ordinary differential operator. Using this result we obtain the exact L_2-small ball asymptotics for a new class of zero mean Gaussian processes. This class includes, in particular, integrated generalized Slepian process, integrated centered Wiener process and integrated centered Brownian bridge.

Введение

Задача о малых уклонениях норм гауссовских процессов интенсивно изучается в последние годы (см., например, обзоры [1] и [2]). В настоящей статье обсуждается наиболее изученный случай L_2-нормы. Рассмотрим гауссовский процесс $X(t)$, $0 \le t \le 1$, с нулевым средним и ковариационной функцией $G_X(t,s) = EX(t)X(s)$, $s,t \in [0,1]$. Положим $\|X\| = \|X\|_{L_2(0,1)}$ и рассмотрим функцию

$$Q(X;\varepsilon) = \mathbf{P}\{\|X\| \le \varepsilon\}.$$

Задача определения асимптотики $Q(X;\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ была решена в работе [3], но в неявной форме. Далее большое количество работ (см., например, ссылки в [2] и в [4]) были направлены на упрощение выражения для $Q(X;\varepsilon)$ при различных предположениях.

В силу хорошо известного разложения Кархунена – Лоэва справедливо равенство по распределению

$$\|X\|^2 = \int\limits_0^1 X^2(t)\,dt \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \eta_n^2,$$

где η_n, $n \in \mathbb{N}$, – независимые стандартные гауссовские с.в., а $\lambda_n = \lambda_n(X) > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_n \lambda_n < \infty$ – собственные числа интегрального уравнения

$$\lambda y(t) = \int\limits_0^1 G_X(s,t)y(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Таким образом, задача сводится к изучению асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ вероятности $\mathbf{P}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \eta_n^2 \le \varepsilon^2\right\}$. К сожалению, явные формулы для собственных чисел могут быть получены лишь для небольшого числа процессов.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ No.07-01-00159

В работе [5] был развит новый подход вычисления асимптотики с точностью до константы для малых уклонений гауссовских процессов X в L_2-норме при условии, что G_X является функцией Грина краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора с **распадающимися** граничными условиями (условиями типа Штурма). Эта работа была дополнена статьей автора [6], где были вычислены точные константы в асимптотиках малых уклонений для многих гауссовских процессов. Независимо часть результатов [6] была получена в [7], [8].

Подход [5] основан на классических результатах Биркгофа о спектральных асимптотиках краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов. Как известно (см., например, [9, §4], [10, гл.XIX]), для собственных чисел μ_n регулярных (в частности, самосопряженных) краевых задач имеет место асимптотическое разложение по степеням n. При этом первый член разложения определяется только старшим коэффициентом оператора, а формулы для остальных членов довольно сложны. Оказалось, что в случае распадающихся граничных условий второй член асимптотики полностью определяется суммой порядков граничных условий и потому может быть вычислен явно без дополнительных предположений. Наличие же двучленной асимптотики с оценкой остатка для μ_n (и, следовательно, для $\lambda_n = \mu_n^{-1}$) дало возможность применить схему из [4] и теорему сравнения [11] для получения окончательного результата.

В общем случае нераспадающихся граничных условий собственные числа краевой задачи разбиваются на две подпоследовательности, причем формулы для вторых членов асимптотических разложений этих подпоследовательностей, вообще говоря, нельзя упростить. Однако из леммы Лифшица, приведенной ниже, можно усмотреть, что в этой ситуации асимптотика с точностью до константы для малых уклонений соответствующего процесса в L_2-норме зависит лишь от суммы этих вторых членов. Как показано в настоящей работе, эта сумма по-прежнему определяется суммой порядков граничных условий, что дает возможность обобщить результаты [5] на существенно более широкий класс процессов.

Что касается точных констант малых уклонений, то выписать явные формулы для этих констант можно, если собственные функции ковариации случайного процесса могут быть выражены через элементарные или специальные функции. В этом случае асимптотики соответствующих определителей Фредгольма можно вычислить методами ТФКП (см. [6], [7]). В настоящей статье это продемонстрировано на примере нескольких известных процессов, порождающих краевые задачи с нераспадающимися граничными условиями.

Статья организована следующим образом. В §1 доказывается теорема о вторых членах асимптотики спектра краевых задач с нераспадающимися граничными условиями и выписывается асимптотика с точностью до константы для малых уклонений соответствующих гауссовских процессов. В §2 вычисляются точные константы малых уклонений для многократно проинтегрированного обобщенного процесса Слепяна, в §3 – для различных вариантов проинтегрированного центрированного Броуновского моста, а в §4 – для разновидностей проинтегрированного центрированного Винеровского процесса. Отметим, что асимптотики малых уклонений в L_2-норме для некоторых центрированных процессов были получены в [12].

Напомним некоторые обозначения. Для любого гауссовского процесса с нулевым средним $X(t)$, $0 \le t \le 1$, введем **центрированный процесс** $\overline{X}(t) = X(t) - \int_0^1 X(s)\,ds$ и

m-**кратно проинтегрированный** процесс

$$X_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t) = (-1)^{\beta_1+\dots+\beta_m} \underbrace{\int_{\beta_m}^{t} \dots \int_{\beta_1}^{t_1}}_{m} X(s)\,ds\,dt_1\dots$$

(здесь каждый индекс β_j равен либо нулю, либо единице, $0 \le t \le 1$). Для краткости верхний индекс иногда будет опускаться.

Функция $G(t,s)$ называется функцией Грина (самосопряженной) краевой задачи для дифференциального оператора L, если она удовлетворяет уравнению $LG = \delta(s-t)$ в смысле обобщенных функций, а также граничным условиям. Интегральный оператор, ядро которого – функция Грина, является обратным к оператору L. Если однородная краевая задача имеет нетривиальное решение φ_0 (не умаляя общности, будем считать его нормированным в $L_2(0,1)$), то функции Грина, очевидно, не существует. Если решение φ_0 единственно с точностью до постоянного множителя[2], то функция $G(t,s)$ называется **обобщенной функцией Грина**, если она удовлетворяет уравнению $LG = \delta(s-t) - \varphi_0(s)\varphi_0(t)$ в смысле обобщенных функций, а также граничным условиям и условию ортогональности

$$\int\limits_0^1 G(t,s)\varphi_0(s)\,ds = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \le t \le 1. \tag{0.1}$$

Обобщенная функция Грина является ядром интегрального оператора, обратного к оператору L на подпространстве функций, ортогональных φ_0 в $L_2(0,1)$. Более подробно со свойствами функции Грина и обобщенной функции Грина (на примере операторов второго порядка) можно познакомиться в [13, Глава 2, §1].

Пространство Соболева $W_p^m(0,1)$ – это банахово пространство функций y, имеющих непрерывные производные до $(m-1)$-го порядка включительно, причем $y^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$, и $y^{(m)} \in L_p(0,1)$. При $p=2$ это гильбертово пространство.

Положим $z_\ell = \exp(i\pi/\ell)$. Будем обозначать $\mathfrak{V}(...)$ определитель Вандермонда:

$$\mathfrak{V}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1\le j<k\le n} (\alpha_k - \alpha_j).$$

Приведем формулировку леммы, принадлежащей М.А. Лифшицу (см. [12]), которая неоднократно используется в статье.

Лемма. *Пусть $V_1, V_2 > 0$ – две независимые случайные величины с известным поведением малых уклонений; именно, пусть при $r \to 0$*

$$\mathbf{P}\{V_1 \le r\} \sim K_1 r^{a_1} \exp(-D_1^{d+1} r^{-d}), \qquad \mathbf{P}\{V_2 \le r\} \sim K_2 r^{a_2} \exp(-D_2^{d+1} r^{-d}).$$

Тогда справедлива следующая асимптотика малых уклонений для их суммы:

$$\mathbf{P}\{V_1 + V_2 \le r\} \sim K r^a \exp(-D^{d+1} r^{-d}),$$

где

$$D = D_1 + D_2, \qquad a = a_1 + a_2 - \tfrac{d}{2}, \qquad K = K_1 K_2 \sqrt{\frac{2\pi d}{d+1}} \cdot \frac{D_1^{a_1+\frac12} D_2^{a_2+\frac12}}{D^{a+\frac12}}.$$

[2]Аналогично можно рассмотреть случай нулевого собственного числа большей кратности, но нам это не понадобится.

1 Асимптотика собственных чисел краевых задач и асимптотики малых уклонений

Пусть $\mathcal{L}$ – самосопряженный дифференциальный оператор порядка 2ℓ, порождаемый дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}u \equiv (-1)^\ell \left(p_\ell u^{(\ell)}\right)^{(\ell)} + \left(p_{\ell-1} u^{(\ell-1)}\right)^{(\ell-1)} + \cdots + p_0 u, \tag{1.1}$$

$(p_\ell(x) > 0)$ и 2ℓ граничными условиями

$$U_\nu(u) \equiv U_{\nu 0}(u) + U_{\nu 1}(u) = 0, \qquad \nu = 1, \dots, 2\ell, \tag{1.2}$$

где

$$U_{\nu 0}(u) = \alpha_\nu u^{(k_\nu)}(0) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} u^{(j)}(0),$$

$$U_{\nu 1}(u) = \gamma_\nu u^{(k_\nu)}(1) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \gamma_{\nu j} u^{(j)}(1),$$

и для любого индекса ν по крайней мере один из коэффициентов α_ν и γ_ν отличен от нуля.

Известно (см., например, [9, §4]), что систему (1.2) можно равносильными преобразованиями привести к **нормированному виду**, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Этот вид характеризуется минимальным значением суммы порядков всех граничных условий. Поскольку это значение играет важнейшую роль в наших рассмотрениях, введем для него специальное обозначение $\varkappa = \sum\limits_{\nu=1}^{2\ell} k_\nu$. Отметим также, что для нормированных граничных условий выполнены неравенства

$$2\ell - 1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{2\ell} \geq 0, \qquad k_\nu > k_{\nu+2}.$$

Для простоты предположим, что $p_j \in W_\infty^j[0,1]$, $j = 0, \dots, \ell$. Тогда область определения $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ состоит из функций $u \in W_2^{2\ell}(0,1)$, удовлетворяющих условиям (1.2).

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\mathcal{L}u = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}). \tag{1.3}$$

Как известно (см., например, [9, §4, Теорема 2]), при $p_\ell \equiv 1$ собственные числа задачи (1.3), записанные с учетом кратности, можно разбить на две последовательности μ'_n, μ''_n, $n \in \mathbb{N}$, так что при $n \to \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$\mu'_n = \left(2\pi n + \rho' + O(n^{-1/2})\right)^{2\ell}, \qquad \mu''_n = \left(2\pi n + \rho'' + O(n^{-1/2})\right)^{2\ell}, \tag{1.4}$$

где числа $\xi' = \exp(i\rho')$, $\xi'' = \exp(i\rho'')$ – корни квадратного уравнения

$$\theta_1 \xi + \theta_0 + \theta_{-1}\xi^{-1} \equiv$$

$$\equiv \det \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \xi\gamma_1) & \alpha_1\omega_1^{k_1} & \dots & \alpha_1\omega_{\ell-1}^{k_1} & \omega_\ell^{k_1}(\alpha_1 + \xi^{-1}\gamma_1) & \gamma_1\omega_{\ell+1}^{k_1} & \dots & \gamma_1\omega_{2\ell-1}^{k_1} \\ (\alpha_2 + \xi\gamma_2) & \alpha_2\omega_1^{k_2} & \dots & \alpha_2\omega_{\ell-1}^{k_2} & \omega_\ell^{k_2}(\alpha_2 + \xi^{-1}\gamma_2) & \gamma_2\omega_{\ell+1}^{k_2} & \dots & \gamma_2\omega_{2\ell-1}^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_{2\ell} + \xi\gamma_{2\ell}) & \alpha_1\omega_1^{k_{2\ell}} & \dots & \alpha_{2\ell}\omega_{\ell-1}^{k_{2\ell}} & \omega_\ell^{k_{2\ell}}(\alpha_{2\ell} + \xi^{-1}\gamma_{2\ell}) & \gamma_{2\ell}\omega_{\ell+1}^{k_{2\ell}} & \dots & \gamma_{2\ell}\omega_{2\ell-1}^{k_{2\ell}} \end{bmatrix} = 0$$

(здесь $\omega_j = z_\ell^j = \exp(ij\pi/\ell)$).

Замечание 1. В общем случае задача сводится к случаю $p_\ell \equiv 1$ преобразованием независимой переменной x (см. [9, §4]). При этом выражения в скобках в (1.4) делятся на $\int\limits_0^1 p_\ell^{-1/(2\ell)}(x)\,dx$.

Теорема 1.1. *Справедливо соотношение*

$$\rho' + \rho'' = 2\pi\ell - 3\pi - \frac{\pi\varkappa}{\ell}. \tag{1.5}$$

Замечание 2. На самом деле условие самосопряженности оператора можно заменить на условие регулярности граничных условий (1.2). Требования на коэффициенты p_j также можно ослабить.

Доказательство. Ключевым является наблюдение, что $\xi'\xi'' = \frac{\theta_{-1}}{\theta_1}$ не меняется при изменении α_ν и γ_ν, пока $\theta_1 \neq 0$, т.е. пока набор граничных условий (1.2) регулярен. Для доказательства этого запишем

$$\theta_1 = \det \begin{bmatrix} \gamma_1 & \alpha_1\omega_1^{k_1} & \dots & \alpha_1\omega_{\ell-1}^{k_1} & \alpha_1\omega_\ell^{k_1} & \gamma_1\omega_{\ell+1}^{k_1} & \dots & \gamma_1\omega_{2\ell-1}^{k_1} \\ \gamma_2 & \alpha_2\omega_1^{k_2} & \dots & \alpha_2\omega_{\ell-1}^{k_2} & \alpha_2\omega_\ell^{k_2} & \gamma_2\omega_{\ell+1}^{k_2} & \dots & \gamma_2\omega_{2\ell-1}^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{2\ell} & \alpha_1\omega_1^{k_{2\ell}} & \dots & \alpha_{2\ell}\omega_{\ell-1}^{k_{2\ell}} & \alpha_{2\ell}\omega_\ell^{k_{2\ell}} & \gamma_{2\ell}\omega_{\ell+1}^{k_{2\ell}} & \dots & \gamma_{2\ell}\omega_{2\ell-1}^{k_{2\ell}} \end{bmatrix},$$

$$\theta_{-1} = \det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\omega_1^{k_1} & \dots & \alpha_1\omega_{\ell-1}^{k_1} & \gamma_1\omega_\ell^{k_1} & \gamma_1\omega_{\ell+1}^{k_1} & \dots & \gamma_1\omega_{2\ell-1}^{k_1} \\ \alpha_2 & \alpha_2\omega_1^{k_2} & \dots & \alpha_2\omega_{\ell-1}^{k_2} & \gamma_2\omega_\ell^{k_2} & \gamma_2\omega_{\ell+1}^{k_2} & \dots & \gamma_2\omega_{2\ell-1}^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2\ell} & \alpha_1\omega_1^{k_{2\ell}} & \dots & \alpha_{2\ell}\omega_{\ell-1}^{k_{2\ell}} & \gamma_{2\ell}\omega_\ell^{k_{2\ell}} & \gamma_{2\ell}\omega_{\ell+1}^{k_{2\ell}} & \dots & \gamma_{2\ell}\omega_{2\ell-1}^{k_{2\ell}} \end{bmatrix}.$$

Вынося общий множитель $\omega_1^{k_j}$ из j-й строки в первом определителе, получаем $\theta_1 = -\omega_1^{\varkappa}\theta_{-1}$ и, следовательно,

$$\rho' + \rho'' = -\frac{\pi\varkappa}{\ell} + (2N-1)\pi, \qquad N \in \mathbb{Z}. \tag{1.6}$$

Поскольку собственные числа задачи (1.3) зависят от α_ν и γ_ν непрерывно, параметр N в (1.6) не зависит от α_ν и γ_ν. Однако, как показано в [5, Теорема 7.1], если оператор имеет **распадающиеся** граничные условия ($U_{\nu 1} \equiv 0$ при $\nu = 1, \dots, \ell$, и $U_{\nu 0} \equiv 0$ при $\nu = \ell+1, \dots, 2\ell$), то в формуле (1.4)

$$\rho' = \pi(\ell-1) - \frac{\pi\varkappa}{2\ell}, \qquad \rho'' = \pi(\ell-2) - \frac{\pi\varkappa}{2\ell}$$

(в этом случае две последовательности μ_n' и μ_n'' естественно объединяются в одну $\mu_n = \big(\pi(n+\ell-1-\frac{\varkappa}{2\ell}) + O(n^{-1/2})\big)^{2\ell}$), т.е. в этом случае (1.5) выполнено. Теорема доказана. □

Следующая теорема обобщает Теорему 7.2 [5], в которой этот результат был получен для случая распадающихся граничных условий.

Теорема 1.2. *Пусть ковариация $G_X(s,t)$ гауссовского процесса с нулевым средним $X(t)$, $0 \le t \le 1$, является функцией Грина самосопряженного положительно определенного оператора $\mathcal{L}_X$, порождаемого дифференциальным выражением (1.1) с граничными* *условиями (1.2). Пусть $\varkappa < 2\ell^2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\{\|X\| \le \varepsilon\} \sim \mathcal{C}(X) \cdot \varepsilon^{\gamma} \exp\left(-\frac{2\ell-1}{2} \left(\frac{\vartheta_\ell}{2\ell \sin\frac{\pi}{2\ell}} \right)^{\frac{2\ell}{2\ell-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{2\ell-1}} \right). \tag{1.7}$$

Здесь введены обозначения

$$\gamma = -\ell + \frac{\varkappa+1}{2\ell-1}, \qquad \vartheta_\ell = \int\limits_0^1 p_\ell^{-1/(2\ell)}(x)\,dx,$$

а константа $\mathcal{C}(X)$ задается формулой

$$\mathcal{C}(X) = C_{\mathrm{dist}}(X) \cdot \frac{(2\pi)^{\ell/2}\,(\pi/\vartheta_\ell)^{\ell\gamma}\left(\sin\frac{\pi}{2\ell}\right)^{\frac{1+\gamma}{2}}}{(2\ell-1)^{1/2}\left(\frac{\pi}{2\ell}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}\Gamma^{\ell}\left(\ell - \frac{\varkappa}{2\ell}\right)},$$

где $C_{\mathrm{dist}}(X)$ – так называемая **константа расхождения**

$$C_{\mathrm{dist}}(X) \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{1/2}}{\left(\pi/\vartheta_\ell \cdot \left[n + \ell - 1 - \frac{\varkappa}{2\ell}\right]\right)^{\ell}}, \tag{1.8}$$

а $\mu_n = (\lambda_n(X))^{-1}$ – собственные числа задачи (1.3).

Доказательство. Согласно принципу сравнения [11] и формулам (1.4), с учетом замечания 1, имеем

$$\mathbf{P}\{\|X\| \le \varepsilon\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \eta_n^2 \le \varepsilon^2\right\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{{\eta'}_n^2}{\mu'_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{\eta''}_n^2}{\mu''_n} \le \varepsilon^2\right\} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu'_n}{\widetilde{\mu}'_n} \cdot \frac{\mu''_n}{\widetilde{\mu}''_n} \right)^{1/2} \cdot \mathbf{P}\left\{V' + V'' \le \varepsilon^2\right\}, \tag{1.9}$$

где

$$V' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{\eta'}_n^2}{\widetilde{\mu}'_n}, \qquad V'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{\eta''}_n^2}{\widetilde{\mu}''_n}, \tag{1.10}$$

η'_n и η''_n – две независимые последовательности независимых стандартных гауссовских с.в.,

$$\widetilde{\mu}'_n = \left(\frac{2\pi n + \rho'}{\vartheta_\ell}\right)^{2\ell}, \qquad \widetilde{\mu}''_n = \left(\frac{2\pi n + \rho''}{\vartheta_\ell}\right)^{2\ell}. \tag{1.11}$$

Асимптотики вероятности малых уклонений бесконечных сумм (1.10) с коэффициентами, имеющими вид (1.11), вычислены в [5, Теорема 6.2]. Асимптотика $\mathbf{P}\left\{V' + V'' \le \varepsilon^2\right\}$ при $\varepsilon \to 0$ получается из асимптотик $\mathbf{P}\left\{V' \le \varepsilon^2\right\}$ и $\mathbf{P}\left\{V'' \le \varepsilon^2\right\}$ при помощи леммы Лифшица. Наконец, бесконечное произведение в (1.9) отличается от (1.8) множителем, сходимость которого обеспечивается соотношением (1.5). После упрощений приходим к (1.7). □

2 Процесс Слепяна и связанные с ним процессы

Рассмотрим обобщенный процесс Слепяна $S^{(c)}$ – стационарный Гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$G_{S^{(c)}}(s,t) = c - |s-t|, \qquad s,t \in [0,1].$$

Несложно проверить, что $G_{S^{(c)}}$ является ковариацией при $c \geq 1/2$. Заметим, что при $c \geq 1$ справедливо равенство по распределению

$$S^{(c)}(t) \stackrel{d}{=} W(t+c) - W(t), \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. Обычный процесс Слепяна [14] получается при $c = 1$, асимптотика малых уклонений для него была вычислена в [15].

Прямой подсчет (см. [16]) показывает, что $G_{S^{(c)}}$ есть функция Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}_{S^{(c)}} u \equiv -\tfrac{1}{2}u'' = \mu u \ \text{ на } \ [0,1], \qquad u'(0)+u'(1) = 0, \ \ (2c-1)u'(0) - (u(0)+u(1)) = 0. \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. **1**. *Пусть $c = 1/2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{\|S^{(1/2)}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{4\,\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-\tfrac{1}{4}\varepsilon^{-2}). \quad (2.2)$$

2. *Пусть $c > 1/2$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{\|S^{(c)}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{4\sqrt{2}\,\varepsilon^2}{\sqrt{\pi(2c-1)}} \cdot \exp(-\tfrac{1}{4}\varepsilon^{-2}). \quad (2.3)$$

Замечание 3. При $c > 1/2$ задача (2.1) не удовлетворяет условию Теоремы 1.2, поскольку в этом случае $\varkappa = 2 = 2\ell^2$. Способы обхода этой формальной трудности хорошо известны (см., например, [5, Предложение 6.4] и [15]), но в данном случае проще воспользоваться уже имеющимися результатами.

Доказательство. **1**. Обозначим $\zeta = \sqrt{2\mu}$. Подставляя общее решение уравнения (2.1) $u(t) = c_1\sin(\zeta t) + c_2\cos(\zeta t)$ в граничные условия, получим, что $\mu_n = \frac{1}{2}r_n^2$, где $r_1 < r_2 < \dots$ – положительные корни уравнения

$$F^{(c)}(\zeta) \equiv 2 + 2\cos(\zeta) - (2c-1)\zeta\sin(\zeta) = 0.$$

Отсюда видно, что при $c = 1/2$ спектр задачи (2.1) двукратный и состоит из собственных чисел $\mu_n' = \mu_n'' = 2(\pi n - \frac{\pi}{2})^2$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, справедливо равенство по распределению

$$\|S^{(1/2)}\|^2 \stackrel{d}{=} \frac{1}{2}(\|W_1\|^2 + \|W_2\|^2),$$

где W_1 и W_2 – независимые стандартные винеровские процессы. Асимптотика $\mathbf{P}\{\|W\| \leq \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$ хорошо известна. Применяя лемму Лифшица, получим (2.2).

2. При $c > 1/2$ очевидно, что $\frac{|F^{(c)}(0)|}{|F^{(1)}(0)|} = 1$, и $\frac{|F^{(c)}(\zeta)|}{|F^{(1)}(\zeta)|} \rightrightarrows 2c-1$, если $|\zeta| = \pi(N+\frac{1}{2})$, $N \to \infty$. Применяя теорему сравнения [11] к процессам $S^{(c)}$ и $S^{(1)}$, а затем – теорему Иенсена (см. [17, §3.6.1]) к функциям $F^{(c)}$ и $F^{(1)}$, получим при $\varepsilon \to 0$

$$\mathbf{P}\{\|S^{(c)}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{1}{\sqrt{2c-1}} \cdot \mathbf{P}\{\|S^{(1)}\| \leq \varepsilon\}.$$

Но асимптотика последнего выражения, как уже указывалось, была вычислена в [15]. Это дает (2.3). □

Рассмотрим теперь m-кратно проинтегрированный процесс $(S^{(c)})_m^{[\beta_1,\ldots,\beta_m]}(t)$. Следуя [6], введем обозначения

$$\widetilde{\varepsilon}_\ell = \left(\varepsilon\sqrt{\ell\sin\frac{\pi}{2\ell}}\right)^{\frac{1}{2\ell-1}}; \qquad \mathfrak{D}_\ell = \frac{2\ell-1}{2\ell\sin\frac{\pi}{2\ell}}; \tag{2.4}$$

при $j = 1,\ldots,m$

$$k_j = \begin{cases} m-j, & \text{если} \quad \beta_j = 0, \\ m+1+j, & \text{если} \quad \beta_j = 1, \end{cases} \qquad k_j' = 2m+1-k_j. \tag{2.5}$$

Теорема 2.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеют место соотношения:*

1. *При $c = 1/2$*

$$\mathbf{P}\{\|(S^{(1/2)})_m^{[\beta_1,\ldots,\beta_m]}\| \le \varepsilon\} \sim$$
$$\sim \frac{(2m+2)^{\frac{m}{2}+1}}{|\mathfrak{V}(z_{m+1}^{k_1}, z_{m+1}^{k_2},\ldots,z_{m+1}^{k_m})| \cdot \sqrt{\prod\limits_{j=1}^m |1+z_{m+1}^{k_j}|^2 + \prod\limits_{j=1}^m |1+z_{m+1}^{k_j'}|^2}}\cdot$$
$$\cdot \frac{2\widetilde{\varepsilon}_{m+1}}{\sqrt{\pi\mathfrak{D}_{m+1}}}\exp\left(-\frac{\mathfrak{D}_{m+1}}{2\widetilde{\varepsilon}_{m+1}^2}\right). \tag{2.6}$$

2. *При $c > 1/2$*

$$\mathbf{P}\{\|(S^{(c)})_m^{[\beta_1,\ldots,\beta_m]}\| \le \varepsilon\} \sim \frac{(2m+2)^{\frac{m+1}{2}}\sqrt{2\sin\frac{\pi}{2m+2}}}{|\mathfrak{V}(z_{m+1}^{k_1}, z_{m+1}^{k_2},\ldots,z_{m+1}^{k_m})|\sqrt{2c-1}}\cdot$$
$$\cdot \frac{2\widetilde{\varepsilon}_{m+1}^2}{\sqrt{\pi\mathfrak{D}_{m+1}}}\exp\left(-\frac{\mathfrak{D}_{m+1}}{2\widetilde{\varepsilon}_{m+1}^2}\right). \tag{2.7}$$

Доказательство. Краевая задача, функцией Грина которой служит ковариация проинтегрированного процесса, может быть получена из (2.1) с помощью Теоремы 2.1 [5]:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{S_m^{(c)}} u \equiv (-1)^{m+1}\cdot\frac{1}{2}u^{(2m+2)} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \\ u(\beta_m) = u'(\beta_{m-1}) = \cdots = u^{(m-1)}(\beta_1) = 0, \\ u^{(m+1)}(0) + u^{(m+1)}(1) = 0, \quad (2c-1)u^{(m+1)}(0) - (u^{(m)}(0) + u^{(m)}(1)) = 0, \\ u^{(m+2)}(1-\beta_1) = u^{(m+3)}(1-\beta_2) = \cdots = u^{(2m+1)}(1-\beta_m) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

С учетом (2.5) вторую и четвертую строки в (2.8) можно переписать так:

$$u^{(k_j)}(0) = u^{(k_j')}(1) = 0, \qquad j = 1,\ldots,m.$$

Поскольку задача (2.8) удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 с $\ell = m+1$, для доказательства формул (2.6)-(2.7) остается вычислить константы расхождения (1.8). Отметим, что $\vartheta_\ell = 2^{\frac{1}{2m+2}}$.

Обозначим $\zeta = (2\mu)^{\frac{1}{2m+2}}$. Тогда общее решение уравнения (2.8)

$$u(t) = \sum_{j=0}^{2m+1} c_j \exp(\omega_j \zeta t), \tag{2.9}$$

где $\omega_j = z_{m+1}^j$.

1. При $c = \frac{1}{2}$ имеем $\varkappa = (2m+1)(m+1)$. Подставляя (2.9) в граничные условия, получим, что $\mu_n = \frac{1}{2} r_n^{2m+2}$, где $r_1 < r_2 < \ldots$ – положительные нули целой функции

$$\mathcal{F}(\zeta) \equiv$$
$$\det \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{k_1} & \ldots & \omega_m^{k_1} & (-1)^{k_1} & \ldots & (-\omega_m)^{k_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega_1^{k_m} & \ldots & \omega_m^{k_m} & (-1)^{k_m} & \ldots & (-\omega_m)^{k_m} \\ 1+e^{i\zeta} & \omega_1^m(1+e^{i\omega_1\zeta}) & \ldots & \ldots & (-1)^m(1+e^{-i\zeta}) & \ldots & \ldots \\ 1+e^{i\zeta} & \omega_1^{m+1}(1+e^{i\omega_1\zeta}) & \ldots & \ldots & (-1)^{m+1}(1+e^{-i\zeta}) & \ldots & \ldots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{k_1'}e^{i\omega_1\zeta} & \ldots & \omega_m^{k_1'}e^{i\omega_m\zeta} & (-1)^{k_1'}e^{-i\zeta} & \ldots & (-\omega_m)^{k_1'}e^{-i\omega_m\zeta} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{k_m'}e^{i\omega_1\zeta} & \ldots & \omega_m^{k_m'}e^{i\omega_m\zeta} & (-1)^{k_m'}e^{-i\zeta} & \ldots & (-\omega_m)^{k_m'}e^{-i\omega_m\zeta} \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$C_{\mathrm{dist}}(S_m^{(1/2)}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{\pi n - \frac{\pi}{2}} \right)^{m+1}.$$

Поскольку $|\mathcal{F}(\zeta)| \equiv |\mathcal{F}(\omega_1\zeta)|$, множество всех ненулевых корней функции $\mathcal{F}$ состоит из $2m+2$ последовательностей $\omega_1^j r_n$, $j = 0, \ldots, 2m+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Как указано в [9, §4, Теорема 2], при $|\zeta| \to \infty$ и $|\arg(\zeta)| \le \frac{\pi}{2m+2}$ справедливо соотношение

$$\mathcal{F}(\zeta) = \exp(-i\omega_1\zeta)\exp(-i\omega_2\zeta)\ldots\exp(-i\omega_m\zeta)\cdot\Big(\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})\Big), \tag{2.10}$$

где

$$\Phi(\zeta) = \det \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{k_1} & \ldots & \omega_m^{k_1} & (-1)^{k_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega_1^{k_m} & \ldots & \omega_m^{k_m} & (-1)^{k_m} & 0 & \ldots & 0 \\ 1+e^{i\zeta} & \omega_1^m & \ldots & \omega_m^m & (-1)^m(1+e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^m & \ldots & (-\omega_m)^m \\ 1+e^{i\zeta} & \omega_1^{m+1} & \ldots & \omega_m^{m+1} & (-1)^{m+1}(1+e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m+1} & \ldots & (-\omega_m)^{m+1} \\ e^{i\zeta} & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{k_1'}e^{-i\zeta} & (-\omega_1)^{k_1'} & \ldots & (-\omega_m)^{k_1'} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i\zeta} & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{k_m'}e^{-i\zeta} & (-\omega_1)^{k_m'} & \ldots & (-\omega_m)^{k_m'} \end{bmatrix}.$$

Разложение определителя по первому и $(m+2)$-му столбцу дает

$$|\Phi(\zeta)| = \mathcal{M} \cdot |\exp(i\zeta) + \exp(-i\zeta) + R|, \tag{2.11}$$

где

$$\mathcal{M} = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1}, \ldots, \omega_1^{k_m}, \omega_1^m) \cdot \mathfrak{V}(\omega_1^{m+1}, \omega_1^{k_1'}, \ldots, \omega_1^{k_m'}) +$$
$$+ \mathfrak{V}(\omega_1^{k_1}, \ldots, \omega_1^{k_m}, \omega_1^{m+1}) \cdot \mathfrak{V}(\omega_1^m, \omega_1^{k_1'}, \ldots, \omega_1^{k_m'})|,$$

а R – некоторая константа, значение которой для нас несущественно.

Следуя [6], для произвольного $\delta > -1$ введем функцию

$$\Psi_\delta(\zeta) = \psi_\delta(\zeta)\psi_\delta(\omega_1\zeta)\psi_\delta(\omega_2\zeta)\dots\psi_\delta(\omega_m\zeta), \tag{2.12}$$

где

$$\psi_\delta(\zeta) = \frac{\Gamma^2(1+\delta)}{\Gamma\left(1+\delta+\frac{\zeta}{\pi}\right)\Gamma\left(1+\delta-\frac{\zeta}{\pi}\right)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta^2}{(\pi(n+\delta))^2}\right).$$

Несложно проверить (см. в связи с этим [6, Лемма 1.3]), что

$$\psi_\delta(\zeta) \sim \Gamma^2(1+\delta)\pi^{2\delta}\zeta^{-2\delta-1}\cos(\zeta-\pi(\delta+1/2)), \tag{2.13}$$

если $\zeta \to \infty$, $|\arg(\zeta)| \le \phi_0 < \pi$, причем сходимость равномерная.

Полагая $\delta = -1/2$, из (2.10)-(2.13) получаем, что

$$\frac{|\mathcal{F}(\zeta)|}{|\Psi_\delta(\zeta)|} \to 2^{m+1}\mathcal{M}, \tag{2.14}$$

если $\zeta \to \infty$, $\arg(\zeta) \ne \frac{\pi j}{2m+2}$, $j \in \mathbb{Z}$.

По теореме Иенсена

$$C^2_{\mathrm{dist}}(S_m^{(1/2)}) = \frac{|\mathcal{F}(0)|}{|\Psi_\delta(0)|}\cdot\exp\left\{\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{|\Psi_\delta(\rho e^{i\theta})|}{|\mathcal{F}(\rho e^{i\theta})|}\,d\theta\right\}.$$

Подынтегральная функция очевидно имеет суммируемую мажоранту, и теорема Лебега с учетом (2.14) дает

$$C^2_{\mathrm{dist}}(S_m^{(1/2)}) = \frac{|\mathcal{F}(0)|}{2^{m+1}\mathcal{M}} = \frac{4|\mathfrak{V}(1,\omega_1,\omega_1^2,\dots,\omega_1^{2m+1})|}{2^{m+1}\mathcal{M}} = \frac{4(m+1)^{m+1}}{\mathcal{M}}.$$

Осталось заметить, что ввиду соотношений (2.5)

$$\mathcal{M} = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m})|^2\cdot\left(\prod_{j=1}^{m}|1+\omega_1^{k_j}|^2 + \prod_{j=1}^{m}|1+\omega_1^{k'_j}|^2\right),$$

и после упрощений мы приходим к (2.6).

2. При $c > \frac{1}{2}$ имеем $\varkappa = (2m+1)(m+1)+1$. Подставляя (2.9) в граничные условия, получим, что

$$C_{\mathrm{dist}}(S_m^{(c)}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{\pi(n-\frac{m+2}{2m+2})}\right)^{m+1},$$

где $r_1 < r_2 < \dots$ – положительные нули функции $\mathcal{F}_{(c)}(\zeta)$, получающейся из $\mathcal{F}(\zeta)$ заменой в определителе строки

$$\left[1+e^{i\zeta} \quad \omega_1^m(1+e^{i\omega_1\zeta}) \quad \dots \quad \omega_m^m(1+e^{i\omega_m\zeta}) \quad (-1)^m(1+e^{-i\zeta}) \quad \dots \quad (-\omega_m)^m(1+e^{-i\omega_m\zeta})\right]$$

на строку

$$\left[1-\tfrac{\tau}{i\zeta}(1+e^{i\zeta}) \quad \omega_1^{m+1}(1-\tfrac{\tau}{i\omega_1\zeta}(1+e^{i\omega_1\zeta})) \quad \dots \quad \dots \quad (-1)^{m+1}(1-\tfrac{\tau}{-i\zeta}(1+e^{-i\zeta})) \quad \dots \quad \dots\right]$$

(здесь $\tau = \frac{1}{2c-1}$).

Аналогично части **1**, при $|\zeta| \to \infty$ и $|\arg(\zeta)| \le \frac{\pi}{2m+2}$ справедливо соотношение

$$\mathcal{F}_{(c)}(\zeta) = \exp(-i\omega_1\zeta)\exp(-i\omega_2\zeta)\dots\exp(-i\omega_m\zeta)\cdot\Big(\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})\Big),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \det\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{k_1} & \dots & \omega_m^{k_1} & (-1)^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_1^{k_m} & \dots & \omega_m^{k_m} & (-1)^{k_m} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \omega_1^{m+1} & \dots & \omega_m^{m+1} & (-1)^{m+1} & 0 & \dots & 0 \\ 1+e^{i\zeta} & \omega_1^{m+1} & \dots & \omega_m^{m+1} & (-1)^{m+1}(1+e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m+1} & \dots & (-\omega_m)^{m+1} \\ e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 & (-1)^{k_1'}e^{-i\zeta} & (-\omega_1)^{k_1'} & \dots & (-\omega_m)^{k_1'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 & (-1)^{k_m'}e^{-i\zeta} & (-\omega_1)^{k_m'} & \dots & (-\omega_m)^{k_m'} \end{bmatrix}.$$

Вычитая $(m+1)$-ю строку из $(m+2)$-й и разлагая определитель по первому столбцу, получаем

$$\begin{aligned} |\Phi(\zeta)| = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m},\omega_1^{m+1})|\cdot|\mathfrak{V}(\omega_1^{m+1},\omega_1^{k_1'},\dots,\omega_1^{k_m'})|\cdot \\ \cdot|\exp(-i\zeta)-\omega_1^{\varkappa}\exp(i\zeta)| = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m})|\cdot|\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1'},\dots,\omega_1^{k_m'})|\cdot \\ \cdot\prod_{j=1}^{m}|(\omega_1^{m+1}-\omega_1^{k_j})(\omega_1^{m+1}-\omega_1^{k_j'})|\cdot|\exp(-i\zeta)+\omega_1\exp(i\zeta)| = \\ = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m})|^2\cdot\frac{2m+2}{|1-\omega_1|}\cdot|\exp(-i\zeta)+\omega_1\exp(i\zeta)|. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $\delta = -\frac{m+2}{2m+2}$, с учетом $|\mathcal{F}_{(c)}(\zeta)| \equiv |\mathcal{F}_{(c)}(\omega_1\zeta)|$ получаем, что

$$\frac{|\zeta\mathcal{F}_{(c)}(\zeta)|}{|\Psi_\delta(\zeta)|} \to \frac{2^{m+1}|\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m})|^2}{\Gamma^{2m+2}(1+\delta)\pi^{(2m+2)\delta}}\cdot\frac{2m+2}{|1-\omega_1|},$$

если $\zeta \to \infty$, $\arg(\zeta) \ne \frac{\pi j}{2m+2}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Применяя теорему Иенсена аналогично части **1**, получаем

$$\begin{aligned} C^2_{\mathrm{dist}}(S_m^{(c)}) = \frac{\Gamma^{2m+2}(1+\delta)\pi^{(2m+2)\delta}|1-\omega_1|}{2^{m+1}|\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m})|^2(2m+2)}\cdot\big|\zeta\mathcal{F}_{(c)}(\zeta)\big|_{\zeta=0} = \\ = \frac{2\tau(m+1)^m\Gamma^{2m+2}(1+\delta)|1-\omega_1|}{\pi^{m+2}|\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m})|^2}, \end{aligned}$$

что с учетом $|1-\omega_1| = 2\sin\frac{\pi}{2m+2}$ дает после упрощений (2.7). $\square$

Замечание 4. Из формулы (2.7) и экстремальных свойств определителей Вандермонда [18] следует, что при $c > 1/2$ среди всех m-кратно проинтегрированных процессов $(S^{(c)})_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}$ наибольшую константу малых уклонений имеют процессы $(S^{(c)})_m^{[0,\dots,0]}$ и $(S^{(c)})_m^{[1,\dots,1]}$ (интегрирование ведется с одного конца), а наименьшую – процессы $(S^{(c)})_m^{[0,1,0,\dots]}$ и $(S^{(c)})_m^{[1,0,1,\dots]}$ (интегрирование ведется в шахматном порядке). Можно ожидать, что это верно и при $c = 1/2$, но этот вопрос пока остается открытым.

Отметим еще любопытное соотношение, получающееся при сравнении асимптотик малых уклонений для процесса $(S^{(c)})_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}$ (при $c > 1/2$) и для проинтегрированного процесса Орнштейна – Уленбека (см. [6, Теорема 2.2]). Поскольку в соответствующих краевых задачах параметры $\varkappa$ равны, то эти асимптотики отличаются лишь константами. Довольно неожиданно оказывается, что отношение этих констант равно $\sqrt{\frac{e}{2(2c-1)}}$ и, таким образом, не зависит ни от β_j, ни даже от m.

3 Интегрированный центрированный Броуновский мост и связанные с ним процессы

Наиболее известным процессом, порождающим краевую задачу с нераспадающимися граничными условиями, является центрированный Броуновский мост $\overline{B}(t)$, спектр которого был впервые получен в [19]. Отметим, что эта краевая задача

$$\mathcal{L}_{\overline{B}}u \equiv -u'' = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad u(0) - u(1) = 0, \quad u'(0) - u'(1) = 0 \tag{3.1}$$

имеет нулевое собственное число (ему соответствует собственная функция $\varphi_0(t) \equiv 1$), и потому ковариация $G_{\overline{B}}(t,s)$ является обобщенной функцией Грина для задачи (3.1). Как будет показано ниже, такая ситуация типична для центрированных процессов. Поскольку Теорема 2.1 [5] в этом случае не применима, для исследования проинтегрированных процессов мы докажем два вспомогательных утверждения.

Теорема 3.1. **1**. *Пусть краевая задача (1.3) имеет нулевое собственное число с собственной функцией $\varphi_0(t) \equiv 1$. Пусть ядро $G(t,s)$ является обобщенной функцией Грина задачи (1.3). Тогда проинтегрированное ядро*

$$\mathcal{G}_1(t,s) = \int_0^t \int_0^s G(x,y)\,dxdy \tag{3.2}$$

является (обычной!) функцией Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}_1 u \equiv -(\mathcal{L}u')' = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_1), \tag{3.3}$$

где область определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_1)$ состоит из функций $u \in W_2^{2\ell+2}(0,1)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u(0) = 0; \qquad u(1) = 0; \qquad u' \in \mathcal{D}(\mathcal{L}). \tag{3.4}$$

2. *Пусть ядро $G(t,s)$ является функцией Грина задачи (3.3)-(3.4). Тогда центрированное ядро*

$$\overline{G}(t,s) = G(t,s) - g(t) - g(s) + \overline{g} \tag{3.5}$$

(здесь $g(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)\,ds$, $\overline{g} = \int\limits_0^1 g(t)\,dt$) является обобщенной функцией Грина краевой задачи[3]

$$\widetilde{\mathcal{L}}_1 u \equiv -(\mathcal{L}u')' = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad u \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}_1), \tag{3.6}$$

[3]Очевидно, задача (3.6)-(3.7) имеет нулевое собственное число с собственной функцией $\varphi_0(t) \equiv 1$.

где область определения $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}_1)$ состоит из функций $u \in W_2^{2\ell+2}(0,1)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u(0) - u(1) = 0; \qquad u' \in \mathcal{D}(\mathcal{L}); \qquad (\mathcal{L}u')(0) - (\mathcal{L}u')(1) = 0. \tag{3.7}$$

Замечание 5. Пусть $X(t)$, $0 \le t \le 1$ – гауссовский процесс с нулевым средним. Хорошо известно, что ковариация проинтегрированного процесса $G_{X_1^{[0]}}$ выражается через ковариацию исходного процесса G_X по формуле (3.2). Отметим, что в условиях части **1** теоремы процессы $X_1^{[0]}$ и $X_1^{[1]}$ совпадают почти наверное. Несложно также показать, что ковариация центрированного процесса $G_{\overline{X}}$ выражается через ковариацию исходного процесса G_X по формуле (3.5).

Замечание 6. Легко видеть, что дифференциальное выражение (1.1) представимо в виде (3.3) тогда и только тогда, когда $p_0 \equiv 0$.

Доказательство. **1**. Первое граничное условие в (3.4) тривиально выполнено для функции $\mathcal{G}_1$, а второму условию она удовлетворяет в силу (0.1). Далее, дифференцируя (3.2) по t, получим

$$(\mathcal{G}_1)'_t(t,s) = \int_0^s G(t,y)\,dy,$$

откуда ввиду линейности множества $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ следуют оставшиеся граничные условия. Поскольку $\mathcal{L}G(t,s) = \delta(t-s) - 1$, последовательно получаем

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)'_t(t,s) = \chi_{\mathbb{R}_+}(s-t) - s; \qquad (\mathcal{L}(\mathcal{G}_1)'_t)'_t = -\delta(t-s),$$

и утверждение доказано.

2. Условие ортогональности (0.1) очевидно из определения:

$$\int_0^1 \overline{G}(t,s)\,dt = g(s) - \overline{g} - g(s) + \overline{g} = 0.$$

Из первых двух условий в (3.4) следует

$$\overline{G}(0,s) = -g(s) + \overline{g} = \overline{G}(1,s).$$

Дифференцируя (3.5) по t, получим

$$\overline{G}'_t(t,s) = G'_t(t,s) - \int_0^1 G'_t(t,y)\,dy,$$

откуда следует $\overline{G}'_t \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Ввиду $\mathcal{L}_1 G(t,s) = \delta(t-s)$ имеем

$$\widetilde{\mathcal{L}}_1 \overline{G}(t,s) = \delta(t-s) - \int_0^1 \delta(t-y)\,dy = \delta(t-s) - 1.$$

Наконец, последнее граничное условие следует из

$$(\mathcal{L}\overline{G}'_t)(0,s) - (\mathcal{L}\overline{G}'_t)(0,s) = \int_0^1 \widetilde{\mathcal{L}}_1 \overline{G}(t,s)\,dt = \int_0^1 (\delta(t-s) - 1)\,dt = 0,$$

и второе утверждение также доказано. $\square$

Теперь мы можем определить последовательность интегрированных-центрированных аналогов Броуновского моста. Положим

$$B_{\{0\}}(t) = B(t); \qquad B_{\{l\}}(t) = \int_0^t \overline{B_{\{l-1\}}}(s)\,ds, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.1 позволяет выписать краевые задачи, порождаемые процессами $B_{\{l\}}$ и $\overline{B_{\{l\}}}$. Мы начнем со второго из этих процессов, для которого собственные числа считаются явно, что дает возможность вычислить его асимптотику малых уклонений, не обращаясь к Теореме 1.2.

Теорема 3.2. *Пусть $l \in \mathbb{N}_0$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{\|\overline{B_{\{l\}}}\| \le \varepsilon\} \sim \sqrt{2l+2} \cdot \frac{\varepsilon_{l+1}^{-(2l+1)}}{\sqrt{\pi \mathfrak{D}_{l+1}}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{D}_{l+1}}{2\varepsilon_{l+1}^2}\right), \tag{3.8}$$

где $\varepsilon_\ell = \left(\varepsilon\sqrt{2\ell \sin\frac{\pi}{2\ell}}\right)^{\frac{1}{2\ell-1}}$, а $\mathfrak{D}_\ell$ введено в (2.4).

Замечание 7. Множитель перед экспонентой в (3.8) равен $\sqrt{\frac{2l+2}{2l+1}} \cdot \frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{\pi}}$. При $l = 0$ формула (3.8) совпадает с полученной в [12, §3].

Доказательство. Поочередно l раз применяя первое и второе утверждения Теоремы 3.1 к задаче (3.1), получим, что коварияция $G_{\overline{B_{\{l\}}}}(s,t)$ является обобщенной функцией Грина краевой задачи с периодическими граничными условиями

$$\mathcal{L}_{\overline{B_{\{l\}}}} u \equiv (-1)^{l+1} u^{(2l+2)} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad u^{(j)}(0) - u^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2l+1.$$

Отсюда видно, что оператор $\mathcal{L}_{\overline{B_{\{l\}}}}$ совпадает с $(\mathcal{L}_{\overline{B}})^{l+1}$, и потому его спектр (за исключением нулевого собственного числа, несущественного для нас в силу условия ортогональности (0.1)) двукратный: $\mu_n' = \mu_n'' = (2\pi n)^{2l+2}$. Таким образом, справедливо равенство по распределению

$$\|\overline{B_{\{l\}}}\|^2 \stackrel{d}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{\eta'}_n^2}{(2\pi n)^{2l+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{\eta''}_n^2}{(2\pi n)^{2l+2}},$$

где η_n' и η_n'' – две независимые последовательности независимых стандартных гауссовских с.в. Применение Теоремы 6.2 [5] и леммы Лифшица дает (3.8). □

Теорема 3.3. *Пусть $l \in \mathbb{N}_0$. Тогда в обозначениях Теоремы 3.2 при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{\|B_{\{l\}}\| \le \varepsilon\} \sim (2l+2)\sqrt{\sin\tfrac{\pi}{2l+2}} \cdot \frac{\varepsilon_{l+1}^{-2l}}{\sqrt{\pi \mathfrak{D}_{l+1}}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{D}_{l+1}}{2\varepsilon_{l+1}^2}\right). \tag{3.9}$$

Доказательство. Аналогично Теореме 3.2, коварияция $G_{B_{\{l\}}}(s,t)$ является функцией Грина краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{B_{\{l\}}} u \equiv (-1)^{l+1} u^{(2l+2)} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u^{(j)}(0) - u^{(j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, 2l. \end{cases} \tag{3.10}$$

Поскольку задача (3.10) удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 с $\ell = l+1$, для доказательства формулы (3.9) остается вычислить константу расхождения. Отметим, что $\vartheta_\ell = 1$ и $\varkappa = (2l+1)l$.

Обозначим $\zeta = \mu^{\frac{1}{2l+2}}$. Подставляя общее решение уравнения (3.10) в граничные условия, получим

$$C_{\text{dist}}(B_{\{l\}}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{\pi(n+\frac{l}{2l+2})}\right)^{l+1},$$

где $r_1 < r_2 < \ldots$ – положительные нули целой функции

$$\mathfrak{F}(\zeta) \equiv \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ e^{i\zeta} & e^{i\omega_1\zeta} & \ldots & e^{i\omega_l\zeta} & e^{-i\zeta} & \ldots & e^{-i\omega_l\zeta} \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \ldots & \ldots & (-1)(1-e^{-i\zeta}) & \ldots & \ldots \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^2(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \ldots & \ldots & (-1)^2(1-e^{-i\zeta}) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{2l}(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \ldots & \ldots & (-1)^{2l}(1-e^{-i\zeta}) & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

а $\omega_j = z_{l+1}^j$.

Вычитая первую строку из второй, аналогично Теореме 2.2 при $|\zeta| \to \infty$ и $|\arg(\zeta)| \le \frac{\pi}{2l+2}$ выводим

$$\mathfrak{F}(\zeta) = (-1)^{l+1}\exp(-i\omega_1\zeta)\exp(-i\omega_2\zeta)\ldots\exp(-i\omega_l\zeta)\cdot\Big(\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})\Big),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1-e^{i\zeta} & 1 & \ldots & 1 & 1-e^{-i\zeta} & 1 & \ldots & 1 \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1 & \ldots & \omega_l & (-1)(1-e^{-i\zeta}) & -\omega_1 & \ldots & -\omega_l \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{2l} & \ldots & \omega_l^{2l} & (-1)^{2l}(1-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{2l} & \ldots & (-\omega_l)^{2l} \end{bmatrix}.$$

Разложение определителя по первой строке дает

$$|\Phi(\zeta)| = \frac{2|\mathfrak{V}(1,\omega_1,\ldots,\omega_{2l})|}{|1-\omega_1|}\cdot|(1-\exp(i\zeta))(\exp(-i\zeta)-\omega_1)| =$$

$$= \frac{2(2l+2)^l}{|1-\omega_1|}\cdot|\exp(-i\zeta)+\omega_1\exp(i\zeta)-(1+\omega_1)|.$$

Полагая $\delta = \frac{l}{2l+2}$, с учетом $|\mathfrak{F}(\zeta)| \equiv |\mathfrak{F}(\omega_1\zeta)|$ получаем, что

$$\frac{|\mathfrak{F}(\zeta)|}{|\zeta^{2l+1}\prod\limits_{j=0}^{l}\psi_\delta(\omega_j\zeta)|} \to \frac{2^{l+2}(2l+2)^l}{\Gamma^{2l+2}(1+\delta)\pi^l\,|1-\omega_1|},$$

если $\zeta \to \infty$, $\arg(\zeta) \ne \frac{\pi j}{2l+2}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Отсюда аналогично доказательству Теоремы 2.2 вытекает

$$C^2_{\text{dist}}(B_{\{l\}}) = \frac{\Gamma^{2l+2}(1+\delta)\pi^l\,|1-\omega_1|}{2^{l+2}(2l+2)^l}\cdot\left|\frac{\mathfrak{F}(\zeta)}{\zeta^{2l+1}}\right|_{\zeta=0}.$$

Поскольку

$$\frac{-\mathfrak{F}(\zeta)}{\zeta^{2l+1}} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & \frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & \frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & \frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & \frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta} \\ \frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & \omega_1\frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & \omega_l\frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & (-1)\frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & -\omega_l\frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & \omega_1^{2l}\frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & \omega_l^{2l}\frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & (-1)^{2l}\frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & (-\omega_l)^{2l}\frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta} \end{bmatrix},$$

имеем
$$\left|\frac{\mathfrak{F}(\zeta)}{\zeta^{2l+1}}\right|_{\zeta=0} = |\mathfrak{V}(1,\omega_1,\dots,\omega_{2l+1})| = (2l+2)^{l+1},$$
что с учетом $|1-\omega_1| = 2\sin\frac{\pi}{2l+2}$ дает после упрощений (3.9). □

Замечание 8. При $l=0$ (3.9) дает классическую формулу для асимптотики малых уклонений Броуновского моста в L_2-норме. При $l=1$ формула (3.9) была получена в [12, §6], но константа в ней содержала множитель, вычисленный лишь приближенно.

Рассмотрим теперь m-кратно проинтегрированный процесс $(B_{\{l\}})_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t)$. Согласно Теореме 2.1 [5], его ковариация является функцией Грина краевой задачи
$$\begin{cases} \mathcal{L}_{(B_{\{l\}})_m}u \equiv (-1)^{l+m+1}u^{(2m+2l+2)} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \\ u(\beta_m) = u'(\beta_{m-1}) = \dots = u^{(m-1)}(\beta_1) = 0, \\ u^{(m)}(0) = u^{(m)}(1) = 0, \quad u^{(m+j)}(0) - u^{(m+j)}(1) = 0, \quad j=1,\dots,2l, \\ u^{(m+2l+2)}(1-\beta_1) = u^{(m+2l+3)}(1-\beta_2) = \dots = u^{(2m+2l+1)}(1-\beta_m) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$
Задача (3.11) удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 с $\ell = m+l+1$, что дает асимптотику малых уклонений для процессов $(B_{\{l\}})_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t)$ с точностью до константы (заметим, что здесь $\vartheta_\ell = 1$ и $\varkappa = (2m+2l+1)(m+l+1)-(2l+1))$. При вычислении же константы расхождения единственная проблема – возможность выписать в явном виде соответствующие характеристические определители. Мы ограничимся случаем $l=1$.

Теорема 3.4. *Пусть $m\in\mathbb{N}$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ имеет место соотношение*
$$\mathbf{P}\{\|(B_{\{1\}})_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}\| \le \varepsilon\} \sim$$
$$\sim \frac{(2m+4)^{\frac{m+2}{2}}\sqrt{2\sin\frac{3\pi}{2m+4}}}{|\mathfrak{V}(z_{m+2}^{k_1}, z_{m+2}^{k_2},\dots,z_{m+2}^{k_m})|\cdot\sqrt{\prod\limits_{j=1}^m |1+z_{m+2}^{k_j}|^2 + \prod\limits_{j=1}^m |1+z_{m+2}^{k'_j}|^2}}\cdot$$
$$\cdot\frac{\varepsilon_{m+2}^{-2}}{\sqrt{\pi\mathfrak{D}_{m+2}}}\exp\left(-\frac{\mathfrak{D}_{m+2}}{2\varepsilon_{m+2}^2}\right). \tag{3.12}$$
где $\mathfrak{D}_\ell$ введено в (2.4), ε_ℓ – в Теореме 3.2, и при $j=1,\dots,m$
$$k_j = \begin{cases} m-j, & \text{если} \quad \beta_j = 0, \\ m+3+j, & \text{если} \quad \beta_j = 1, \end{cases} \qquad k'_j = 2m+3-k_j. \tag{3.13}$$

Доказательство. Обозначим $\zeta = \mu^{\frac{1}{2m+4}}$. Подставляя общее решение уравнения (3.11) в граничные условия, получим
$$C_{\text{dist}}((B_{\{1\}})_m) = \prod_{n=1}^\infty \left(\frac{r_n}{\pi(n-\frac{m-1}{2m+4})}\right)^{m+2},$$

где $r_1 < r_2 < \ldots$ – положительные нули целой функции

$$\mathfrak{F}_1(\zeta) \equiv$$
$$\det \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{k_1} & \ldots & \omega_{m+1}^{k_1} & (-1)^{k_1} & \ldots & (-\omega_{m+1})^{k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \omega_1^{k_m} & \ldots & \omega_{m+1}^{k_m} & (-1)^{k_m} & \ldots & (-\omega_{m+1})^{k_m} \\ 1 & \omega_1^{m} & \ldots & \omega_{m+1}^{m} & (-1)^{m} & \ldots & (-\omega_{m+1})^{m} \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{m+1}(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \ldots & \ldots & (-1)^{m+1}(1-e^{-i\zeta}) & \ldots & \ldots \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{m+2}(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \ldots & \ldots & (-1)^{m+2}(1-e^{-i\zeta}) & \ldots & \ldots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{m}e^{i\omega_1\zeta} & \ldots & \omega_{m+1}^{m}e^{i\omega_{m+1}\zeta} & (-1)^{m}e^{-i\zeta} & \ldots & \ldots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{k_1'}e^{i\omega_1\zeta} & \ldots & \omega_{m+1}^{k_1'}e^{i\omega_{m+1}\zeta} & (-1)^{k_1'}e^{-i\zeta} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{k_m'}e^{i\omega_1\zeta} & \ldots & \omega_{m+1}^{k_m'}e^{i\omega_{m+1}\zeta} & (-1)^{k_m'}e^{-i\zeta} & \ldots & \ldots \end{bmatrix},$$

а $\omega_j = z_{m+2}^j$.

Аналогично Теореме 2.2, при $|\zeta| \to \infty$ и $|\arg(\zeta)| \le \frac{\pi}{2m+4}$ выводим

$$\mathfrak{F}_1(\zeta) = \exp(-i\omega_1\zeta)\exp(-i\omega_2\zeta)\ldots\exp(-i\omega_{m+1}\zeta)\cdot\Big(\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})\Big),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \det \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{k_1} & \ldots & \omega_{m+1}^{k_1} & (-1)^{k_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \omega_1^{k_m} & \ldots & \omega_{m+1}^{k_m} & (-1)^{k_m} & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \omega_1^{m} & \ldots & \omega_{m+1}^{m} & (-1)^{m} & 0 & \ldots & 0 \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{m+1} & \ldots & \omega_{m+1}^{m+1} & (-1)^{m+1}(1-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m+1} & \ldots & (-\omega_{m+1})^{m+1} \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{m+2} & \ldots & \omega_{m+1}^{m+2} & (-1)^{m+2}(1-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m+2} & \ldots & (-\omega_{m+1})^{m+2} \\ -e^{i\zeta} & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{m}(-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m} & \ldots & (-\omega_{m+1})^{m} \\ -e^{i\zeta} & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{k_1'}(-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{k_1'} & \ldots & (-\omega_{m+1})^{k_1'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -e^{i\zeta} & 0 & \ldots & 0 & (-1)^{k_m'}(-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{k_m'} & \ldots & (-\omega_{m+1})^{k_m'} \end{bmatrix}.$$

Разлагая определитель по первому и $(m+3)$-му столбцу, получаем

$$|\Phi(\zeta)| = \mathfrak{M}\cdot|\exp(-i\zeta) + \omega_1^{-3}\exp(i\zeta) + R|,$$

где

$$\mathfrak{M} = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\ldots,\omega_1^{k_m},\omega_1^{m},\omega_1^{m+1})\cdot\mathfrak{V}(\omega_1^{m+2},\omega_1^{m},\omega_1^{k_1'},\ldots,\omega_1^{k_m'}) +$$
$$+\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\ldots,\omega_1^{k_m},\omega_1^{m},\omega_1^{m+2})\cdot\mathfrak{V}(\omega_1^{m+1},\omega_1^{m},\omega_1^{k_1'},\ldots,\omega_1^{k_m'})|,$$

а R – некоторая константа, значение которой для нас несущественно.

Полагая $\delta = -\frac{m-1}{2m+4}$, с учетом $|\mathfrak{F}_1(\zeta)| \equiv |\mathfrak{F}_1(\omega_1\zeta)|$ получаем, что

$$\frac{|\mathfrak{F}_1(\zeta)|}{\left|\zeta^3\prod\limits_{j=0}^{m+1}\psi_\delta(\omega_j\zeta)\right|} \to \frac{2^{m+2}\pi^{m-1}\mathfrak{M}}{\Gamma^{2m+4}(1+\delta)},$$

если $\zeta \to \infty$, $\arg(\zeta) \neq \frac{\pi j}{2m+4}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Отсюда аналогично доказательству Теоремы 2.2 следует

$$C^2_{\mathrm{dist}}((B_{\{1\}})_m) = \frac{\Gamma^{2m+4}(1+\delta)}{2^{m+2}\pi^{m-1}\mathfrak{M}} \cdot \left|\frac{\mathfrak{F}_1(\zeta)}{\zeta^3}\right|_{\zeta=0}.$$

Вычитая в определителе $(m+1)$-ю строку из $(m+4)$-й, с учетом (3.13) получим

$$\left|\frac{\mathfrak{F}_1(\zeta)}{\zeta^3}\right|_{\zeta=0} = |\mathfrak{V}(1, \omega_1, \omega_1^2, \dots, \omega_1^{2m+3})| = (2m+4)^{m+2}.$$

Осталось заметить, что ввиду соотношений (3.13)

$$\mathfrak{M} = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1}, \dots, \omega_1^{k_m})|^2 \cdot \frac{2m+4}{|1-\omega_3|} \cdot \Big(\prod_{j=1}^m |1+\omega_1^{k_j}|^2 + \prod_{j=1}^m |1+\omega_1^{k'_j}|^2\Big),$$

и после упрощений с учетом $|1-\omega_3| = 2\sin\frac{3\pi}{2m+4}$ получаем (3.12). □

4 Интегрированный центрированный Винеровский процесс и связанные с ним процессы

Аналогично §3, определим последовательность интегрированных-центрированных аналогов Винеровского процесса. Положим

$$W_{\{0\}}(t) = W(t); \qquad W_{\{l\}}(t) = \int_0^t \overline{W_{\{l-1\}}}(s)\,ds, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Спектр процесса $W_{\{1\}}$ и асимптотика его малых уклонений в L_2-норме были изучены в [12, §7]. В [5, Пример 5.4] указано, что ковариация $G_{W_{\{1\}}}$ является функцией Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}_{W_{\{1\}}} u \equiv u^{IV} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \qquad u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \tag{4.1}$$

Теорема 3.1 позволяет выписать краевые задачи, порождаемые процессами $W_{\{l\}}$ и $\overline{W_{\{l\}}}$. Мы начнем со второго из этих процессов, для которого справедливо неожиданное соотношение.

Теорема 4.1. *Пусть $l \in \mathbb{N}_0$. Тогда имеет место равенство по распределению*

$$\|\overline{W_{\{l\}}}\| \stackrel{d}{=} \|B_{\{l\}}\|. \tag{4.2}$$

Доказательство. При $l = 0$ равенство (4.2) хорошо известно (см., например, [20] и [12, §3]). Пусть $l \geq 1$. Поочередно применяя второе и первое утверждения Теоремы 3.1 к задаче (4.1), получим, что ковариация $G_{\overline{W_{\{l\}}}}(s,t)$ является функцией Грина краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\overline{W_{\{l\}}}} u \equiv (-1)^{l+1} u^{(2l+2)} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \\ u^{(l+1)}(0) = u^{(l+1)}(1) = 0, \quad u^{(j)}(0) - u^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, \dots, l-1,\ l+2, \dots, 2l+1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Легко проверить, что при $(l+1)$-кратном дифференцировании собственные функции краевых задач (3.10) и (4.3) переходят друг в друга (если соответствующее собственное число

$\mu \neq 0$). Отсюда следует, что ненулевые собственные числа этих задач попарно совпадают, а потому совпадают и ненулевые собственные числа ковариаций, откуда следует (4.2). $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $l \in \mathbb{N}$. Тогда в обозначениях Теоремы 3.2 при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{\|W_{\{l\}}\| \leq \varepsilon\} \sim (2l+2)^{\frac{3}{2}} \sin\tfrac{\pi}{2l+2} \,\langle \cos\tfrac{\pi}{2l+2}\rangle \cdot \frac{\varepsilon_{l+1}^{-(2l-1)}}{\sqrt{\pi \mathfrak{D}_{l+1}}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{D}_{l+1}}{2\varepsilon_{l+1}^2}\right) \tag{4.4}$$

(выражение в угловых скобках входит в формулу только при нечетных l).

Замечание 10. При $l = 1$ формула (4.4) совпадает с полученной в [12, §6], см. также [6, Предложение 1.7].

Доказательство. Аналогично Теореме 4.1, ковариация $G_{W_{\{l\}}}(s,t)$ является функцией Грина краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{W_{\{l\}}} u \equiv (-1)^{l+1} u^{(2l+2)} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \quad u^{(l+1)}(0) = u^{(l+1)}(1) = 0, \\ u^{(j)}(0) - u^{(j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, l-1, \, l+2, \dots, 2l. \end{cases} \tag{4.5}$$

Поскольку задача (4.5) удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 с $\ell = l+1$, для доказательства формулы (4.4) остается вычислить константу расхождения. Отметим, что $\vartheta_\ell = 1$ и $\varkappa = (2l+1)l + 1$.

Обозначим $\zeta = \mu^{\frac{1}{2l+2}}$. Подставляя общее решение уравнения (4.5) в граничные условия, получим

$$C_{\text{dist}}(W_{\{l\}}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{\pi(n + \frac{l-1}{2l+2})} \right)^{l+1},$$

где $r_1 < r_2 < \dots$ – положительные нули целой функции

$$\mathbb{F}(\zeta) \equiv \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{i\zeta} & e^{i\omega_1\zeta} & \dots & e^{i\omega_l\zeta} & e^{-i\zeta} & \dots & e^{-i\omega_l\zeta} \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \dots & \dots & (-1)(1-e^{-i\zeta}) & \dots & \dots \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^2(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \dots & \dots & (-1)^2(1-e^{-i\zeta}) & \dots & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{l-1}(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \dots & \dots & (-1)^{l-1}(1-e^{-i\zeta}) & \dots & \dots \\ 1 & -1 & \dots & (-1)^l & (-1)^{l+1} & \dots & -1 \\ e^{i\zeta} & -e^{-i\omega_1\zeta} & \dots & (-1)^l e^{-i\omega_l\zeta} & (-1)^{l+1}e^{-i\zeta} & \dots & -e^{-i\omega_l\zeta} \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{l+2}(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \dots & \dots & (-1)^{l+2}(1-e^{-i\zeta}) & \dots & \dots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{2l}(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \dots & \dots & (-1)^{2l}(1-e^{-i\zeta}) & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

а $\omega_j = z_{l+1}^j$.

Вычитая первую строку из второй и $(l+2)$-ю из $(l+3)$-й, аналогично Теореме 2.2 при $|\zeta| \to \infty$ и $|\arg(\zeta)| \leq \frac{\pi}{2l+2}$ выводим

$$\mathbb{F}(\zeta) = \exp(-i\omega_1\zeta)\exp(-i\omega_2\zeta)\dots\exp(-i\omega_l\zeta) \cdot \Big(\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})\Big),$$

где

$$\Phi(\zeta)=\det$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
1-e^{i\zeta} & 1 & \dots & 1 & 1-e^{-i\zeta} & -1 & \dots & -1\\
1-e^{i\zeta} & \omega_1 & \dots & \omega_l & (-1)(1-e^{-i\zeta}) & \omega_1 & \dots & \omega_l\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
1-e^{i\zeta} & \omega_1^{l-1} & \dots & \omega_l^{l-1} & (-1)^{l-1}(1-e^{-i\zeta}) & -(-\omega_1)^{l-1} & \dots & -(-\omega_l)^{l-1}\\
1 & -1 & \dots & (-1)^l & (-1)^{l+1} & 0 & \dots & 0\\
1-e^{i\zeta} & -1 & \dots & (-1)^l & (-1)^{l+1}(1-e^{-i\zeta}) & -(-1)^{l+2} & \dots & 1\\
1-e^{i\zeta} & -\omega_1 & \dots & (-1)^l\omega_l & (-1)^{l+2}(1-e^{-i\zeta}) & (-1)^{l+2}\omega_1 & \dots & -\omega_l\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
1-e^{i\zeta} & -\omega_1^{l-1} & \dots & (-1)^l\omega_l^{l-1} & (-1)^{2l}(1-e^{-i\zeta}) & (-1)^{l+3}(-\omega_1)^{l-1} & \dots & (-\omega_l)^{l-1}
\end{bmatrix}.$$

Прибавляя верхнюю половину матрицы к нижней, получим $|\Phi(\zeta)|=2^{l+1}|\Delta_1(\zeta)|\cdot|\Delta_2(\zeta)|$, где

при четном l

$$\Delta_1(\zeta)=\det\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
1-e^{i\zeta} & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1\\
1-e^{i\zeta} & \omega_2 & \dots & \omega_l & \omega_{l+2} & \dots & \omega_{2l}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
1-e^{i\zeta} & \omega_2^{l-1} & \dots & \omega_l^{l-1} & \omega_{l+2}^{l-1} & \dots & \omega_{2l}^{l-1}
\end{bmatrix},$$

$$\Delta_2(\zeta)=\det\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1\\
1-e^{-i\zeta} & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1\\
1-e^{-i\zeta} & \omega_2 & \dots & \omega_l & \omega_{l+2} & \dots & \omega_{2l}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
1-e^{-i\zeta} & \omega_2^{l-1} & \dots & \omega_l^{l-1} & \omega_{l+2}^{l-1} & \dots & \omega_{2l}^{l-1}
\end{bmatrix};$$

при нечетном l

$$\Delta_1(\zeta)=\det\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0\\
1-e^{i\zeta} & 1 & \dots & 1 & 1-e^{-i\zeta} & 1 & \dots & 1\\
1-e^{i\zeta} & \omega_2 & \dots & \omega_{l-1} & (-1)(1-e^{-i\zeta}) & -\omega_2 & \dots & -\omega_{l-1}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
1-e^{i\zeta} & \omega_2^{l-1} & \dots & \omega_{l-1}^{l-1} & (-1)^{l-1}(1-e^{-i\zeta}) & (-\omega_2)^{l-1} & \dots & (-\omega_{l-1})^{l-1}
\end{bmatrix},$$

$$\Delta_2(\zeta)=\det\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1\\
\omega_1 & \omega_3 & \dots & \omega_l & -\omega_1 & \dots & -\omega_l\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\omega_1^{l-1} & \omega_3^{l-1} & \dots & \omega_l^{l-1} & (-\omega_1)^{l-1} & \dots & (-\omega_l)^{l-1}
\end{bmatrix}$$

(отметим, что в этом случае Δ_1 совпадает с определителем из Теоремы 3.3).

Разлагая определители по первой строке, получаем:

при четном l

$$|\Phi(\zeta)|=\frac{2^{l+1}|\mathfrak{V}(1,\omega_2,\dots,\omega_{2l-2})|^2}{|1-\omega_1|^2}\cdot|1-\omega_1\exp(i\zeta)|^2=$$

$$=\frac{4(2l+2)^{l-1}}{|1-\omega_1|^2}\cdot|\exp(-i\zeta)+\omega_1^2\exp(i\zeta)-2\omega_1|;$$

при нечетном l

$$|\Phi(\zeta)| = \frac{2^{l+3}|\mathfrak{V}(1,\omega_2,\ldots,\omega_{2l-2})|^2}{|1-\omega_2|^2}\cdot|(1-\exp(i\zeta))(\exp(-i\zeta)-\omega_1^2)| =$$
$$= \frac{16(2l+2)^{l-1}}{|1-\omega_2|^2}\cdot|\exp(-i\zeta)+\omega_1^2\exp(i\zeta)-(1+\omega_1^2)|.$$

Полагая $\delta = \frac{l-1}{2l+2}$, с учетом $|\mathbb{F}(\zeta)| \equiv |\mathbb{F}(\omega_1\zeta)|$ получаем, что

$$\frac{|\mathbb{F}(\zeta)|}{|\zeta^{2l}\prod\limits_{j=0}^{l}\psi_\delta(\omega_j\zeta)|} \to \frac{2^{l+3}(2l+2)^{l-1}}{\Gamma^{2l+2}(1+\delta)\pi^{l-1}\,\mathbb{M}}$$

(здесь $\mathbb{M} = |1-\omega_1|^2$ при четном l и $\mathbb{M} = |1-\omega_2|^2/4$ при нечетном l), если $\zeta\to\infty$, $\arg(\zeta)\neq\frac{\pi j}{2l+2}$, $j\in\mathbb{Z}$.

Отсюда аналогично доказательству Теоремы 2.2 вытекает

$$C^2_{\mathrm{dist}}(W_{\{l\}}) = \frac{\Gamma^{2l+2}(1+\delta)\pi^{l-1}\,\mathbb{M}}{2^{l+3}(2l+2)^{l-1}}\cdot\left|\frac{\mathbb{F}(\zeta)}{\zeta^{2l}}\right|_{\zeta=0}.$$

Поскольку

$$\frac{\mathbb{F}(\zeta)}{\zeta^{2l}} = \det\begin{bmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1\\
\frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & \frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & \frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & \frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & \frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta}\\
\frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & \omega_1\frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & \omega_l\frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & (-1)\frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & -\omega_l\frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & \omega_1^{l-1}\frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & \omega_l^{l-1}\frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & (-1)^{l-1}\frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & (-\omega_l)^{l-1}\frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta}\\
1 & -1 & \ldots & (-1)^l & (-1)^{l+1} & \ldots & -1\\
\frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & -\frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & (-1)^l\frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & (-1)^{l+1}\frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & -\frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta}\\
\frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & \omega_1^{l+2}\frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & \omega_l^{l+2}\frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & (-1)^{l+2}\frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & (-\omega_l)^{l+2}\frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\frac{1-e^{i\zeta}}{\zeta} & \omega_1^{2l}\frac{1-e^{i\omega_1\zeta}}{\zeta} & \ldots & \omega_l^{2l}\frac{1-e^{i\omega_l\zeta}}{\zeta} & (-1)^{2l}\frac{1-e^{-i\zeta}}{\zeta} & \ldots & (-\omega_l)^{2l}\frac{1-e^{-i\omega_l\zeta}}{\zeta}
\end{bmatrix},$$

имеем

$$\left|\frac{\mathbb{F}(\zeta)}{\zeta^{2l}}\right|_{\zeta=0} = |\mathfrak{V}(1,\omega_1,\ldots,\omega_{2l+1})| = (2l+2)^{l+1},$$

что с учетом $|1-\omega_j| = 2\sin\frac{j\pi}{2l+2}$ дает после упрощений (4.4). □

Замечание 9. При доказательстве мы по существу воспользовались тем, что оператор краевой задачи (4.5) является квадратом оператора краевой задачи порядка $l+1$

$$\begin{cases}\mathfrak{L}u \equiv i^{l+1}u^{(l+1)} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1],\\ u(0)=u(1)=0, \quad u^{(j)}(0)-u^{(j)}(1)=0, \quad j=1,\ldots,l-1.\end{cases}$$

При нечетном l оператор $\mathfrak{L}$ совпадает с оператором $\mathcal{L}_{B_{\{\frac{l-1}{2}\}}}$ (см. (3.10)).

Рассмотрим теперь m-кратно проинтегрированный процесс $(W_{\{l\}})_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t)$. Согласно Теореме 2.1 [5], его ковариация является функцией Грина краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{(W_{\{l\}})_m} u \equiv (-1)^{l+m+1} u^{(2m+2l+2)} = \mu u \quad \text{на} \quad [0,1], \\ u(\beta_m) = u'(\beta_{m-1}) = \dots = u^{(m-1)}(\beta_1) = 0, \\ u^{(m)}(0) = u^{(m)}(1) = 0, \qquad u^{(m+j)}(0) - u^{(m+j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, l-1, \\ u^{(m+l+1)}(0) = u^{(m+l+1)}(1) = 0, \quad u^{(m+j)}(0) - u^{(m+j)}(1) = 0, \quad j = l+2, \dots, 2l, \\ u^{(m+2l+2)}(1-\beta_1) = u^{(m+2l+3)}(1-\beta_2) = \dots = u^{(2m+2l+1)}(1-\beta_m) = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Задача (4.6) удовлетворяет условиям Теоремы 1.2 с $\ell = m + l + 1$, что дает асимптотику малых уклонений для процессов $(W_{\{l\}})_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}(t)$ с точностью до константы (заметим, что здесь $\vartheta_\ell = 1$ и $\varkappa = (2m + 2l + 1)(m + l + 1) - 2l$). При $l = 1$ задача (4.6) имеет распадающиеся граничные условия, константы расхождения для этого случая были вычислены в [6, Предложение 1.7]. Мы ограничимся случаем $l = 2$.

Теорема 4.3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда в обозначениях Теоремы 3.4 при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathbf{P}\{\|(W_{\{2\}})_m^{[\beta_1,\dots,\beta_m]}\| \le \varepsilon\} \sim$$
$$\sim \frac{4(2m+6)^{\frac{m+2}{2}} \sin\frac{\pi}{m+3} \sqrt{\sin\frac{\pi}{2m+6} \sin\frac{5\pi}{2m+6}}}{|\mathfrak{V}(z_{m+3}^{k_1}, z_{m+3}^{k_2}, \dots, z_{m+3}^{k_m})| \cdot \sqrt{\prod\limits_{j=1}^m |z_{m+3} + z_{m+3}^{k_j}|^2 + \prod\limits_{j=1}^m |z_{m+3} + z_{m+3}^{k'_j}|^2}} \cdot$$
$$\cdot \frac{\varepsilon_{m+3}^{-3}}{\sqrt{\pi \mathfrak{D}_{m+3}}} \exp\left(-\frac{\mathfrak{D}_{m+3}}{2\varepsilon_{m+3}^2}\right). \tag{4.7}$$

Доказательство. Обозначим $\zeta = \mu^{\frac{1}{2m+6}}$. Подставляя общее решение уравнения (4.6) в граничные условия, получим

$$C_{\text{dist}}((W_{\{2\}})_m) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_n}{\pi(n - \frac{m-1}{2m+6})} \right)^{m+3},$$

где $r_1 < r_2 < \dots$ – положительные нули целой функции

$$\mathbb{F}_1(\zeta) \equiv$$
$$\det \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{k_1} & \dots & \omega_{m+2}^{k_1} & (-1)^{k_1} & \dots & (-\omega_{m+2})^{k_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_1^{k_m} & \dots & \omega_{m+2}^{k_m} & (-1)^{k_m} & \dots & (-\omega_{m+2})^{k_m} \\ 1 & \omega_1^{m} & \dots & \omega_{m+2}^{m} & (-1)^{m} & \dots & (-\omega_{m+2})^{m} \\ 1 & \omega_1^{m+3} & \dots & \omega_{m+2}^{m+3} & (-1)^{m+3} & \dots & (-\omega_{m+2})^{m+3} \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{m+1}(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \dots & \dots & (-1)^{m+1}(1-e^{-i\zeta}) & \dots & \dots \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{m+4}(1-e^{i\omega_1\zeta}) & \dots & \dots & (-1)^{m+4}(1-e^{-i\zeta}) & \dots & \dots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{m} e^{i\omega_1\zeta} & \dots & \omega_{m+2}^{m} e^{i\omega_{m+2}\zeta} & (-1)^{m} e^{-i\zeta} & \dots & \dots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{m+3} e^{i\omega_1\zeta} & \dots & \omega_{m+2}^{m+3} e^{i\omega_{m+2}\zeta} & (-1)^{m+3} e^{-i\zeta} & \dots & \dots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{k'_1} e^{i\omega_1\zeta} & \dots & \omega_{m+2}^{k'_1} e^{i\omega_{m+1}\zeta} & (-1)^{k'_1} e^{-i\zeta} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i\zeta} & \omega_1^{k'_m} e^{i\omega_1\zeta} & \dots & \omega_{m+2}^{k'_m} e^{i\omega_{m+1}\zeta} & (-1)^{k'_m} e^{-i\zeta} & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

а $\omega_j = z_{m+3}^j$.

Аналогично Теореме 2.2, при $|\zeta| \to \infty$ и $|\arg(\zeta)| \le \frac{\pi}{2m+6}$ получаем

$$\mathbb{F}_1(\zeta) = \exp(-i\omega_1\zeta)\exp(-i\omega_2\zeta)\dots\exp(-i\omega_{m+2}\zeta)\cdot\Big(\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})\Big),$$

где

$$\Phi(\zeta) = \det\begin{bmatrix} 1 & \omega_1^{k_1} & \dots & \omega_{m+1}^{k_1} & (-1)^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_1^{k_m} & \dots & \omega_{m+2}^{k_m} & (-1)^{k_m} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \omega_1^{m} & \dots & \omega_{m+2}^{m} & (-1)^{m} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \omega_1^{m+3} & \dots & \omega_{m+2}^{m+3} & (-1)^{m+3} & 0 & \dots & 0 \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{m+1} & \dots & \omega_{m+2}^{m+1} & (-1)^{m+1}(1-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m+1} & \dots & (-\omega_{m+2})^{m+1} \\ 1-e^{i\zeta} & \omega_1^{m+4} & \dots & \omega_{m+2}^{m+4} & (-1)^{m+4}(1-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m+4} & \dots & (-\omega_{m+2})^{m+4} \\ -e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 & (-1)^{m}(-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m} & \dots & (-\omega_{m+2})^{m} \\ -e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 & (-1)^{m+3}(-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{m+3} & \dots & (-\omega_{m+2})^{m+3} \\ -e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 & (-1)^{k'_1}(-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{k'_1} & \dots & (-\omega_{m+2})^{k'_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 & (-1)^{k'_m}(-e^{-i\zeta}) & (-\omega_1)^{k'_m} & \dots & (-\omega_{m+2})^{k'_m} \end{bmatrix}.$$

Разложение определителя по первому и $(m+4)$-му столбцу дает

$$|\Phi(\zeta)| = \mathbb{M}_1 \cdot |\exp(-i\zeta) + \omega_1^{-4}\exp(i\zeta) + R|,$$

где

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_1 = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m},\omega_1^{m},\omega_1^{m+3},\omega_1^{m+1})\cdot\mathfrak{V}(\omega_1^{m+4},\omega_1^{m},\omega_1^{m+3},\omega_1^{k'_1},\dots,\omega_1^{k'_m})+ \\ +\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1},\dots,\omega_1^{k_m},\omega_1^{m},\omega_1^{m+3},\omega_1^{m+4})\cdot\mathfrak{V}(\omega_1^{m+1},\omega_1^{m},\omega_1^{m+3},\omega_1^{k'_1},\dots,\omega_1^{k'_m})|,\end{aligned}$$

а R – некоторая константа, значение которой для нас несущественно.

Полагая $\delta = -\frac{m-1}{2m+6}$, с учетом $|\mathbb{F}_1(\zeta)| \equiv |\mathbb{F}_1(\omega_1\zeta)|$ получаем, что

$$\frac{|\mathbb{F}_1(\zeta)|}{\left|\zeta^4\prod\limits_{j=0}^{m+2}\psi_\delta(\omega_j\zeta)\right|} \to \frac{2^{m+3}\pi^{m-1}\mathbb{M}_1}{\Gamma^{2m+6}(1+\delta)},$$

если $\zeta\to\infty$, $\arg(\zeta) \ne \frac{\pi j}{2m+6}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Отсюда аналогично доказательству Теоремы 2.2 следует

$$C^2_{\mathrm{dist}}((W_{\{2\}})_m) = \frac{\Gamma^{2m+6}(1+\delta)}{2^{m+3}\pi^{m-1}\mathbb{M}_1}\cdot\left|\frac{\mathbb{F}_1(\zeta)}{\zeta^4}\right|_{\zeta=0}.$$

Вычитая в определителе $(m+1)$-ю строку из $(m+5)$-й и $(m+2)$-ю строку из $(m+6)$-й, с учетом (3.13) получим

$$\left|\frac{\mathbb{F}_1(\zeta)}{\zeta^4}\right|_{\zeta=0} = |\mathfrak{V}(1,\omega_1,\omega_1^2,\dots,\omega_1^{2m+5})| = (2m+6)^{m+3}.$$

Осталось заметить, что ввиду соотношений (3.13)

$$\mathbb{M}_1 = |\mathfrak{V}(\omega_1^{k_1}, \dots, \omega_1^{k_m})|^2 \cdot \frac{(2m+6)^2}{|1-\omega_1||1-\omega_2|^2|1-\omega_5|} \cdot \Big(\prod_{j=1}^{m} |\omega_1 + \omega_1^{k_j}|^2 + \prod_{j=1}^{m} |\omega_1 + \omega_1^{k'_j}|^2 \Big),$$

и после упрощений с учетом $|1-\omega_j| = 2\sin\frac{j\pi}{2m+6}$ получаем (4.7). $\square$

Я признателен Я.Ю. Никитину за ряд замечаний, библиографические указания, поддержку и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] M.A. Lifshits, *Asymptotic behavior of small ball probabilities*, Prob. Theor. Math. Stat. (1999), Proc. VII Int. Vilnius Conference, 453-468.

[2] W.V. Li, Q.M. Shao, *Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications*, Handbook Statist. **19** (2001), 533-597.

[3] Г.Н. Сытая, *О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве,* Теория случайных процессов. **2** (1974), 93-104.

[4] T. Dunker, M.A. Lifshits, W. Linde, *Small deviations of sums of independent variables*, Progr. Probab. **43** (1998), 59-74.

[5] A.I. Nazarov, Ya.Yu. Nikitin, *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems*, Prob. Theor. Rel. Fields. **129(4)** (2004), 469-494.

[6] А.И. Назаров, *О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов,* Проблемы матем. анализа, **26** (2003), 179-214.

[7] F. Gao, J. Hannig, T.-Y. Lee, F. Torcaso, *Laplace transforms via Hadamard factorization with applications to small ball probabilities,* Electron. J. Probab. **8(13)** (2003), 1-20.

[8] F. Gao, J. Hannig, T.-Y. Lee, F. Torcaso, *Exact L^2 small balls of Gaussian processes,* J. Theor. Prob. **17(2)** (2004), 503-520.

[9] М.А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, изд.2, М.: Наука, 1969.

[10] Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц, *Линейные операторы*, Т.3, М.: Мир, 1974.

[11] W.V. Li, *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms*, J. Theor. Probab. **5(1)** (1992), 1-31.

[12] L. Beghin, Ya. Nikitin, E. Orsingher, *Exact small ball constants for some Gaussian processes under the L_2-norm*, ЗНС ПОМИ, **298** (2003), 5-21.

[13] В.И. Смирнов, *Курс высшей математики,* Т.4, ч.2, изд.6, М.: Наука, 1981.

[14] D. Slepian, *First passage time for a particular Gaussian process,* Ann. Math. Stat. **32** (1961), 610-612.

[15] Ya. Nikitin, E. Orsingher, *Sharp small ball asymptotics for Slepian and Watson processes in Hilbert norm*, ZNS POMI, **320** (2004), 120-128; J. Math. Sci., **137(1)** (2006), 4555-4560.

[16] F. Gao, W.V. Li, *Small ball probabilities for the Slepian Gaussian fields,* Trans. AMS **359** (2007), 1339-1350.

[17] Е. Титчмарш, *Теория функций*, 2-е изд. М.: Наука, 1980.

[18] А.И. Назаров, Ф.Л. Назаров, *Об одном свойстве выпуклых функций и о неравенстве для определителей Вандермонда,* Проблемы матем. анализа, **27** (2004), 105-108.

[19] G.S. Watson, *Goodness-of-fit tests on a circle*, Biometrika, **48** (1961), 109-114.

[20] C. Donati-Martin, M. Yor, *Fubini's theorem for double Wiener integrals and the variance of the Brownian path*, Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Stat. **27(2)** (1991), 181-200.