ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ МАТРИЦЫ ФУРЬЕ

В. Н. Малозёмов О. В. Просеков
malv@math.spbu.ru sc2@pisem.net

1°. Пусть $N = n_1 n_2 \cdots n_s$ и p_ν при $\nu \in 1 : s$ — фиксированные натуральные числа, взаимно простые с n_ν. Вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ называется вектором параметров.

Воспользуемся стандартными обозначениями

$$N_\nu = n_{\nu+1} n_{\nu+2} \cdots n_s \quad \text{при } \nu \in 0 : s-1, \quad N_s = 1\,;$$
$$\Delta_1 = 1\,; \quad \Delta_\nu = n_1 n_2 \cdots n_{\nu-1} \quad \text{при } \nu \in 2 : s+1.$$

Введём перестановки $\operatorname{mix}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}_{n_1,n_2,\dots,n_s}$ и $\operatorname{rev}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}_{n_1,n_2,\dots,n_s}$, сопоставляющие числу $j \in 0 : N-1$ с разложением

$$j = \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu \, \Delta_\nu\,, \qquad j_\nu \in 0 : n_\nu - 1\,,$$

числа

$$\operatorname{mix}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}_{n_1,n_2,\dots,n_s}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu \, p_\nu \Delta_\nu \right\rangle_N,$$
$$\operatorname{rev}^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}_{n_1,n_2,\dots,n_s}(j) = \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu \, p_\nu N_\nu \right\rangle_N.$$

Эти перестановки содержательны и при $s = 1$:

$$\operatorname{mix}^{(p_1)}_{n_1}(j_1) = \operatorname{rev}^{(p_1)}_{n_1}(j_1) = \langle j_1 \, p_1 \rangle_{n_1}\,, \qquad j_1 \in 0 : n_1 - 1\,.$$

При $s = 2$ имеем

$$\operatorname{mix}^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2}(j_1 + j_2 \, n_1) = \langle j_1 \, p_1 + j_2 \, p_2 n_1 \rangle_{n_1 n_2}\,, \tag{1}$$
$$\operatorname{rev}^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2}(j_1 + j_2 \, n_1) = \langle j_1 \, p_1 n_2 + j_2 \, p_2 \rangle_{n_1 n_2}\,. \tag{2}$$

Формально

$$\begin{aligned} \operatorname{mix}_{n_1,1}^{(p_1,1)}(j_1) &= \langle j_1\, p_1\rangle_{n_1} = \operatorname{mix}_{n_1}^{(p_1)}(j_1)\,, \qquad j_1 \in 0 : n_1-1\,,\\ \operatorname{rev}_{1,n_2}^{(1,p_2)}(j_2) &= \langle j_2\, p_2\rangle_{n_2} = \operatorname{rev}_{n_2}^{(p_2)}(j_2)\,, \qquad j_2 \in 0 : n_2-1\,. \end{aligned}$$

Обозначим $N_\mu^{(\nu)} = n_{\mu+1} n_{\mu+2} \cdots n_\nu$.

ЛЕММА 1. *При* $\nu = 2, \ldots, s$ *справедливы рекуррентные соотношения*

$$\operatorname{mix}_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\ldots,p_\nu)}(i_1 + i\, n_1) = \big\langle i_1\, p_1 + n_1 \operatorname{mix}_{n_2,\ldots,n_\nu}^{(p_2,\ldots,p_\nu)}(i)\big\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\,, \tag{3}$$

$$\operatorname{rev}_{n_1,\ldots,n_{\nu-1},n_\nu}^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1},p_\nu)}(j + j_\nu\, \Delta_\nu) = \big\langle n_\nu \operatorname{rev}_{n_1,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1})}(j) + j_\nu\, p_\nu\big\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\,. \tag{4}$$

Здесь $i_1 \in 0 : n_1 - 1$, $j_\nu \in 0 : n_\nu - 1$, $i \in 0 : N_1^{(\nu)} - 1$, $j \in 0 : \Delta_\nu - 1$.

Доказательство. Пусть $i = i_2 + i_3\, n_2 + i_4\, n_2 n_3 + \cdots + i_\nu\, (n_2 n_3 \cdots n_{\nu-1})$. Тогда

$$\operatorname{mix}_{n_2,\ldots,n_\nu}^{(p_2,\ldots,p_\nu)}(i) = \left\langle \sum_{\alpha=2}^{\nu} i_\alpha\, p_\alpha (n_2 n_3 \cdots n_{\alpha-1}) \right\rangle_{n_2 n_3 \cdots n_\nu}.$$

Воспользуемся формулой $\langle k\, n\rangle_{mn} = n\, \langle k\rangle_m$. Получим

$$\begin{aligned} \operatorname{mix}_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\ldots,p_\nu)}(i_1 + i\, n_1) &= \left\langle i_1\, p_1 + n_1 \sum_{\alpha=2}^{\nu} i_\alpha\, p_\alpha (n_2 n_3 \cdots n_{\alpha-1}) \right\rangle_{n_1 (n_2 \cdots n_\nu)} = \\ &= \left\langle i_1\, p_1 + n_1 \left\langle \sum_{\alpha=2}^{\nu} i_\alpha\, p_\alpha (n_2 n_3 \cdots n_{\alpha-1}) \right\rangle_{n_2 \cdots n_\nu} \right\rangle_{n_1 (n_2 \cdots n_\nu)} = \\ &= \big\langle i_1\, p_1 + n_1 \operatorname{mix}_{n_2,\ldots,n_\nu}^{(p_2,\ldots,p_\nu)}(i)\big\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\,. \end{aligned}$$

Соотношение (3) установлено.

Аналогично проверяется соотношение (4). Пусть $j = j_1\, \Delta_1 + j_2\, \Delta_2 + \cdots + j_{\nu-1}\, \Delta_{\nu-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{rev}_{n_1,\ldots,n_{\nu-1},n_\nu}^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1},p_\nu)}(j + j_\nu\, \Delta_\nu) &= \left\langle \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha\, p_\alpha N_\alpha^{(\nu)} + j_\nu\, p_\nu \right\rangle_{n_\nu \Delta_\nu} = \\ &= \left\langle n_\nu \left\langle \sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha\, p_\alpha N_\alpha^{(\nu-1)} \right\rangle_{\Delta_\nu} + j_\nu\, p_\nu \right\rangle_{n_\nu \Delta_\nu} = \\ &= \big\langle n_\nu \operatorname{rev}_{n_1,\ldots,n_{\nu-1}}^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1})}(j) + j_\nu\, p_\nu\big\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\,. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

2°. Введём матрицы перестановок Mix и Rev:

$$Mix_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)}[j,k] = \begin{cases} 1, & \text{если } k = \mathrm{mix}_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)}(j), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$Rev_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)}[j,k] = \begin{cases} 1, & \text{если } k = \mathrm{rev}_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)}(j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ЛЕММА 2. *При* $\nu = 2,\dots,s$ *справедливы рекуррентные соотношения*

$$Mix_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)} = \big(Mix_{n_2,\dots,n_\nu}^{(p_2,\dots,p_\nu)} \otimes I_{n_1}\big) Mix_{n_1,n_2\cdots n_\nu}^{(p_1,1)}\,, \tag{5}$$

$$Rev_{n_1,\dots,n_{\nu-1},n_\nu}^{(p_1,\dots,p_{\nu-1},p_\nu)} = \big(I_{n_\nu} \otimes Rev_{n_1,\dots,n_{\nu-1}}^{(p_1,\dots,p_{\nu-1})}\big) Rev_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,p_\nu)}\,. \tag{6}$$

Доказательство. Возьмём произвольный $\Delta_{\nu+1}$-мерный вектор x и обозначим $X = Mix_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)} x$. В силу (3)

$$\begin{aligned} X(i_1 + i\,n_1) &= x\big(\mathrm{mix}_{n_1,n_2,\dots,n_\nu}^{(p_1,p_2,\dots,p_\nu)}(i_1 + i\,n_1)\big) = \\ &= x\big(\langle i_1\,p_1 + n_1\,\mathrm{mix}_{n_2,\dots,n_\nu}^{(p_2,\dots,p_\nu)}(i)\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\big)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Далее, согласно (1) для вектора $Y = Mix_{n_1,n_2\cdots n_\nu}^{(p_1,1)}\,x$ имеем

$$Y(i_1 + i\,n_1) = x\big(\langle i_1\,p_1 + i\,n_1\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\big)\,.$$

Найдём компоненты вектора $Z = \big(Mix_{n_2,\dots,n_\nu}^{(p_2,\dots,p_\nu)} \otimes I_{n_1}\big)\,Y$. Запишем

$$\begin{aligned} Z(i_1 + i\,n_1) &= \sum_{i_1'=0}^{n_1-1} \sum_{i'=0}^{N_1^{(\nu)}-1} \big(Mix_{n_2,\dots,n_\nu}^{(p_2,\dots,p_\nu)} \otimes I_{n_1}\big)[i_1 + i\,n_1, i_1' + i'\,n_1] \times Y(i_1' + i'\,n_1) = \\ &= \sum_{i_1'=0}^{n_1-1} \sum_{i'=0}^{N_1^{(\nu)}-1} Mix_{n_2,\dots,n_\nu}^{(p_2,\dots,p_\nu)}[i, i'] \times I_{n_1}[i_1, i_1'] \times Y(i_1' + i'\,n_1) = \\ &= Y\big(i_1 + n_1\,\mathrm{mix}_{n_2,\dots,n_\nu}^{(p_2,\dots,p_\nu)}(i)\big) = x\big(\langle i_1\,p_1 + n_1\,\mathrm{mix}_{n_2,\dots,n_\nu}^{(p_2,\dots,p_\nu)}(i)\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\big)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Сравнивая (7) и (8), приходим к равенству $Z = X$. Отсюда следует (5).

Проверим соотношение (6). Обозначим $X = Rev_{n_1,\dots,n_{\nu-1},n_\nu}^{(p_1,\dots,p_{\nu-1},p_\nu)} x$. В силу (4)

$$\begin{aligned} X(j + j_\nu\,\Delta_\nu) &= x\big(\mathrm{rev}_{n_1,\dots,n_{\nu-1},n_\nu}^{(p_1,\dots,p_{\nu-1},p_\nu)}(j + j_\nu\,\Delta_\nu)\big) = \\ &= x\big(\langle n_\nu\,\mathrm{rev}_{n_1,\dots,n_{\nu-1}}^{(p_1,\dots,p_{\nu-1})}(j) + j_\nu\,p_\nu\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\big)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

В то же время согласно (2) для вектора $Y = Rev_{\Delta_\nu,n_\nu}^{(1,p_\nu)}\,x$ имеем

$$Y(j + j_\nu\,\Delta_\nu) = x\big(\langle j\,n_\nu + j_\nu\,p_\nu\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\big)\,.$$

Найдём компоненты вектора $Z = \big(I_{n_\nu} \otimes Rev^{(p_1,\dots,p_{\nu-1})}_{n_1,\dots,n_{\nu-1}}\big)\, Y$. Запишем

$$Z(j + j_\nu\,\Delta_\nu) = \sum_{j'_\nu=0}^{n_\nu-1} \sum_{j'=0}^{\Delta_\nu-1} \big(I_{n_\nu} \otimes Rev^{(p_1,\dots,p_{\nu-1})}_{n_1,\dots,n_{\nu-1}}\big)[j + j_\nu\,\Delta_\nu, j' + j'_\nu\,\Delta_\nu] \times$$
$$\times\, Y(j' + j'_\nu\,\Delta_\nu) = \sum_{j'_\nu=0}^{n_\nu-1} \sum_{j'=0}^{\Delta_\nu-1} I_{n_\nu}[j_\nu, j'_\nu] \times Rev^{(p_1,\dots,p_{\nu-1})}_{n_1,\dots,n_{\nu-1}}[j, j'] \times$$
$$\times\, Y(j' + j'_\nu\,\Delta_\nu) = Y\big(\mathrm{rev}^{(p_1,\dots,p_{\nu-1})}_{n_1,\dots,n_{\nu-1}}(j) + j_\nu\,\Delta_\nu\big) =$$
$$= x\big(\langle n_\nu\,\mathrm{rev}^{(p_1,\dots,p_{\nu-1})}_{n_1,\dots,n_{\nu-1}}(j) + j_\nu\,p_\nu\rangle_{\Delta_{\nu+1}}\big)\,. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), приходим к равенству $Z = X$. Отсюда следует (6).

Лемма доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 1. *При $s \geqslant 2$ справедливы разложения*

$$Mix^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}_{n_1,n_2,\dots,n_s} = \prod_{\nu=0}^{s-1} \big(Mix^{(p_{s-\nu},1)}_{n_{s-\nu},N_{s-\nu}} \otimes I_{\Delta_{s-\nu}}\big)\,, \tag{11}$$

$$Rev^{(p_1,p_2,\dots,p_s)}_{n_1,n_2,\dots,n_s} = \prod_{\nu=1}^{s} \Big(I_{N_\nu} \otimes Rev^{(1,p_\nu)}_{\Delta_\nu,n_\nu}\Big)\,. \tag{12}$$

Доказательство. Отметим, что согласно замечанию из п. 1°

$$Mix^{(p_s,1)}_{n_s,N_s} = Mix^{(p_s,1)}_{n_s,1} = Mix^{(p_s)}_{n_s}\,, \tag{13}$$
$$Rev^{(1,p_1)}_{\Delta_1,n_1} = Rev^{(1,p_1)}_{1,n_1} = Rev^{(p_1)}_{n_1}\,. \tag{14}$$

При $s = 2$ формула (11) принимает вид

$$Mix^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2} = \big(Mix^{(p_2,1)}_{n_2,N_2} \otimes I_{\Delta_2}\big) Mix^{(p_1,1)}_{n_1,N_1}\,.$$

Её справедливость следует из (5) и (13). Сделаем индукционный переход от s к $s+1$. На основании леммы 2 и индукционного предположения имеем

$$Mix^{(p_1,p_2\dots,p_{s+1})}_{n_1,n_2,\dots,n_{s+1}} = \big(Mix^{(p_2,\dots,p_{s+1})}_{n_2,\dots,n_{s+1}} \otimes I_{n_1}\big) Mix^{(p_1,1)}_{n_1,n_2\cdots n_{s+1}} =$$
$$= \bigg(\prod_{\nu=0}^{s-1} \big(Mix^{(p_{s+1-\nu},1)}_{n_{s+1-\nu},n_{s+2-\nu}\cdots n_{s+1}} \otimes I_{n_2\cdots n_{s-\nu}}\big) \otimes \underbrace{I_{n_1} I_{n_1} \cdots I_{n_1}}_{s\ \text{раз}}\bigg) Mix^{(p_1,1)}_{n_1,n_2\cdots n_{s+1}} =$$
$$= \bigg(\prod_{\nu=0}^{s-1} \big(Mix^{(p_{s+1-\nu},1)}_{n_{s+1-\nu},n_{s+2-\nu}\cdots n_{s+1}} \otimes I_{n_1 n_2\cdots n_{s-\nu}}\big)\bigg) \big(Mix^{(p_1,1)}_{n_1,n_2\cdots n_{s+1}} \otimes I_{\Delta_1}\big) =$$
$$= \prod_{\nu=0}^{s} \big(Mix^{(p_{s+1-\nu},1)}_{n_{s+1-\nu},n_{s+2-\nu}\cdots n_{s+1}} \otimes I_{\Delta_{s+1-\nu}}\big)\,.$$

Формула (11) установлена.

Обратимся к формуле (12). При $s=2$ она принимает вид

$$Rev^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2} = \big(I_{N_1}\otimes Rev^{(1,p_1)}_{\Delta_1,n_1}\big)Rev^{(1,p_2)}_{\Delta_2,n_2}\,.$$

Справедливость этого равенства следует из (6) и (14). Сделаем индукционный переход от s к $s+1$. На основании леммы 2 и индукционного предположения имеем

$$Rev^{(p_1,\ldots,p_s,p_{s+1})}_{n_1,\ldots,n_s,n_{s+1}} = \big(I_{n_{s+1}}\otimes Rev^{(p_1,\ldots,p_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\big)Rev^{(1,p_{s+1})}_{\Delta_{s+1},n_{s+1}} =$$
$$= \Big(\underbrace{I_{n_{s+1}}I_{n_{s+1}}\cdots I_{n_{s+1}}}_{s\ \text{раз}}\otimes\prod_{\nu=1}^{s}\big(I_{n_{\nu+1}\cdots n_s}\otimes Rev^{(1,p_\nu)}_{\Delta_\nu,n_\nu}\big)\Big)\big(I_1\otimes Rev^{(1,p_{s+1})}_{\Delta_{s+1},n_{s+1}}\big) =$$
$$= \prod_{\nu=1}^{s+1}\big(I_{n_{\nu+1}\cdots n_{s+1}}\otimes Rev^{(1,p_\nu)}_{\Delta_\nu,n_\nu}\big)\,.$$

Теорема доказана. □

3°. Рассмотрим вопрос о параметрической факторизации матрицы Фурье F_N с элементами $F_N[k,j]=\omega_N^{kj}$, $k,j\in 0:N-1$. Для этого нам потребуется диагональная матрица вращений $Twid$:

$$Twid^{(p_1,\ldots,p_\nu)}_{n_1,\ldots,n_\nu}\Big[\sum_{\alpha=1}^{\nu} j_\alpha\,\Delta_\alpha,\ \sum_{\alpha=1}^{\nu} j'_\alpha\,\Delta_\alpha\Big] = \begin{cases}\omega_{\Delta_{\nu+1}}^{j_\nu\,p_\nu\sum_{\alpha=1}^{\nu-1} j_\alpha\,p_\alpha\Delta_\alpha}, & \text{если } j'_\alpha=j_\alpha,\ \alpha\in 1:\nu;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Здесь $j_\alpha, j'_\alpha\in 0:n_\alpha-1$, $\alpha\in 1:\nu$; $\nu\in 2:s$. По определению $Twid^{(p_1)}_{n_1}=I_{n_1}$.

ЛЕММА 3. *При $s=2$ и $\langle q_1\,p_1\rangle_{n_1}=\langle q_2\,p_2\rangle_{n_2}=1$ справедливо разложение*

$$F_{n_1n_2} = \big(Mix^{(q_1,q_2)}_{n_1,n_2}\big)^T\big(F_{n_2}\otimes I_{n_1}\big)\,Twid^{(q_1,p_2)}_{n_1,n_2}\big(I_{n_2}\otimes F_{n_1}\big)Rev^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2}\,. \qquad (15)$$

Доказательство. Достаточно проверить равенство матриц

$$Mix^{(q_1,q_2)}_{n_1,n_2}F_{n_1n_2}\big(Rev^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2}\big)^T = \big(F_{n_2}\otimes I_{n_1}\big)\,Twid^{(q_1,p_2)}_{n_1,n_2}\big(I_{n_2}\otimes F_{n_1}\big)\,.$$

Сравним элементы с индексами $(k_1+k_2\,n_1, j_1+j_2\,n_1)$. Согласно (1), (2) имеем

$$\Big(Mix^{(q_1,q_2)}_{n_1,n_2}F_{n_1n_2}\big(Rev^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2}\big)^T\Big)[k_1+k_2\,n_1, j_1+j_2\,n_1] =$$
$$= \sum_{l=0}^{n_1n_2-1}\sum_{l'=0}^{n_1n_2-1} Mix^{(q_1,q_2)}_{n_1,n_2}[k_1+k_2\,n_1,l]\times F_{n_1n_2}[l,l']\times Rev^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2}[j_1+j_2\,n_1,l'] =$$
$$= F_{n_1n_2}\big[\mathrm{mix}^{(q_1,q_2)}_{n_1,n_2}(k_1+k_2\,n_1), \mathrm{rev}^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2}(j_1+j_2\,n_1)\big] = \omega_{n_1n_2}^{(k_1\,q_1+k_2\,q_2n_1)(j_1\,p_1n_2+j_2\,p_2)} =$$
$$= \omega_{n_1}^{k_1j_1\,q_1p_1}\,\omega_{n_1n_2}^{k_1j_2\,q_1p_2}\,\omega_{n_2}^{k_2j_2\,q_2p_2} = \omega_{n_1}^{k_1j_1}\,\omega_{n_1n_2}^{k_1j_2\,q_1p_2}\,\omega_{n_2}^{k_2j_2}\,.$$

Вместе с тем,

$$\Big(\big(F_{n_2}\otimes I_{n_1}\big)\,Twid^{(q_1,p_2)}_{n_1,n_2}\big(I_{n_2}\otimes F_{n_1}\big)\Big)[k_1+k_2\,n_1,j_1+j_2\,n_1]=$$

$$=\sum_{l_1=0}^{n_1-1}\sum_{l_2=0}^{n_2-1}\big(F_{n_2}\otimes I_{n_1}\big)[k_1+k_2\,n_1,l_1+l_2\,n_1]\times Twid^{(q_1,p_2)}_{n_1,n_2}[l_1+l_2\,n_1,l_1+l_2\,n_1]\times$$

$$\times\big(I_{n_2}\otimes F_{n_1}\big)[l_1+l_2\,n_1,j_1+j_2\,n_1]=\sum_{l_1=0}^{n_1-1}\sum_{l_2=0}^{n_2-1}F_{n_2}[k_2,l_2]\times I_{n_1}[k_1,l_1]\times\omega_{n_1n_2}^{l_2\,p_2\,l_1\,q_1}\times$$

$$\times I_{n_2}[l_2,j_2]\times F_{n_1}[l_1,j_1]=\omega_{n_2}^{k_2j_2}\,\omega_{n_1n_2}^{j_2\,p_2\,k_1\,q_1}\,\omega_{n_1}^{k_1j_1}\,.$$

Лемма доказана. □

Транспонируем матрицы, стоящие в левой и правой частях (15), и поменяем местами p_1 и q_1, p_2 и q_2. Придём к другому разложению матрицы Фурье:

$$F_{n_1n_2}=\big(Rev^{(q_1,q_2)}_{n_1,n_2}\big)^T\big(I_{n_2}\otimes F_{n_1}\big)\,Twid^{(p_1,q_2)}_{n_1,n_2}\big(F_{n_2}\otimes I_{n_1}\big)Mix^{(p_1,p_2)}_{n_1,n_2}\,. \qquad (16)$$

ТЕОРЕМА 2. *При $N=n_1n_2\cdots n_s$ и любом векторе параметров $p=(p_1,p_2,\ldots,p_s)$ матрица Фурье F_N допускает представление*

$$F_N=\big(Rev^{(q_1,\ldots,q_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\big)^T\left(\prod_{\nu=1}^{s}\big(I_{N_\nu}\otimes Twid^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1},q_\nu)}_{n_1,\ldots,n_{\nu-1},n_\nu}\big)\big(I_{N_\nu}\otimes F_{n_\nu}\otimes I_{\Delta_\nu}\big)\right)Mix^{(p_1,\ldots,p_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\,, \qquad (17)$$

где $q=(q_1,q_2,\ldots,q_s)$ — сопряжённый вектор параметров, компоненты которого удовлетворяет условию $\langle q_\nu\,p_\nu\rangle_{n_\nu}=1$, $\nu\in 1:s$.

Доказательство. При $s=2$ формула (17) совпадает с (16). Сделаем индукционный переход от s к $s+1$.

Обозначим

$$L_s=Rev^{(q_1,\ldots,q_s)}_{n_1,\ldots,n_s}F_N\big(Mix^{(p_1,\ldots,p_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\big)^T\,,$$

$$G_s=\prod_{\nu=1}^{s}\big(I_{N_\nu}\otimes Twid^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1},q_\nu)}_{n_1,\ldots,n_{\nu-1},n_\nu}\big)\big(I_{N_\nu}\otimes F_{n_\nu}\otimes I_{\Delta_\nu}\big)\,.$$

По индукционному предположению $L_s=G_s$. Нужно проверить, что $L_{s+1}==G_{s+1}$.

Выясним, что даёт равенство $L_s=G_s$. Имеем

$$L_s\Big[\sum_{\nu=1}^{s}k_\nu\,\Delta_\nu,\sum_{\nu=1}^{s}j_\nu\,\Delta_\nu\Big]=$$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{l'=0}^{N-1}Rev^{(q_1,\ldots,q_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\Big[\sum_{\nu=1}^{s}k_\nu\,\Delta_\nu,l\Big]\times F_N[l,l']\times Mix^{(p_1,\ldots,p_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\Big[\sum_{\nu=1}^{s}j_\nu\,\Delta_\nu,l'\Big]=$$

$$= F_N\Big[\mathrm{rev}^{(q_1,\ldots,q_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\Big(\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\,\Delta_\nu\Big), \mathrm{mix}^{(p_1,\ldots,p_s)}_{n_1,\ldots,n_s}\Big(\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu\Big)\Big] =$$
$$= \omega_N^{\left(\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, q_\nu N_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu\right)}.$$

Значит,

$$G_s\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu\Big] = \omega_N^{\left(\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, q_\nu N_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu\right)}.$$

Ясно, что

$$L_{s+1}\Big[\sum_{\nu=1}^{s+1} k_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s+1} j_\nu\,\Delta_\nu\Big] = \omega_{n_1\cdots n_s n_{s+1}}^{\left(\sum_{\nu=1}^{s+1} k_\nu\, q_\nu (n_{\nu+1}\cdots n_{s+1})\right)\left(\sum_{\nu=1}^{s+1} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu\right)} =$$
$$= \omega_{n_1\cdots n_s n_{s+1}}^{\left(n_{s+1}\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, q_\nu (n_{\nu+1}\cdots n_s) + k_{s+1}\, q_{s+1}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu + j_{s+1}\, p_{s+1}(n_1\cdots n_s)\right)} =$$
$$= \omega_{n_1\cdots n_s}^{\left(\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\, q_\nu N_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu\right)}\,\omega_{n_1\cdots n_s n_{s+1}}^{k_{s+1}\, q_{s+1}\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu}\,\omega_{n_{s+1}}^{k_{s+1} j_{s+1}\, q_{s+1} p_{s+1}} =$$
$$= G_s\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu\Big]\,\omega_{n_1\cdots n_s n_{s+1}}^{k_{s+1}\, q_{s+1}\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\, p_\nu \Delta_\nu} F_{n_{s+1}}[k_{s+1}, j_{s+1}]\,.$$

(Мы воспользовались равенством $\langle q_{s+1}\, p_{s+1}\rangle_{n_{s+1}} = 1$.) Требуется установить, что то же значение имеет элемент $G_{s+1}\big[\sum_{\nu=1}^{s+1} k_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s+1} j_\nu\,\Delta_\nu\big]$.

Преобразуем выражение для G_{s+1}. Запишем

$$G_{s+1} = \Big(\prod_{\nu=1}^{s}\Big(I_{n_{s+1}} \otimes \big(I_{n_{\nu+1}\cdots n_s} \otimes Twid^{(p_1,\ldots,p_{\nu-1},q_\nu)}_{n_1,\ldots,n_{\nu-1},n_\nu}\big)\Big) \times$$
$$\times \Big(I_{n_{s+1}} \otimes \big(I_{n_{\nu+1}\cdots n_s} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{\Delta_\nu}\big)\Big)\Big)\, Twid^{(p_1,\ldots,p_s,q_{s+1})}_{n_1,\ldots,n_s,n_{s+1}}\big(F_{n_{s+1}} \otimes I_{\Delta_{s+1}}\big) =$$
$$= \big(I_{n_{s+1}} \otimes G_s\big) Twid^{(p_1,\ldots,p_s,q_{s+1})}_{n_1,\ldots,n_s,n_{s+1}}\big(F_{n_{s+1}} \otimes I_{\Delta_{s+1}}\big)\,.$$

Вычислим

$$G_{s+1}\Big[\sum_{\nu=1}^{s+1} k_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s+1} j_\nu\,\Delta_\nu\Big] =$$
$$= \sum_{k'_1=0}^{n_1-1}\cdots\sum_{k'_s=0}^{n_s-1}\sum_{k'_{s+1}=0}^{n_{s+1}-1}\big(I_{n_{s+1}} \otimes G_s\big)\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\,\Delta_\nu + k_{s+1}\,\Delta_{s+1}, \sum_{\nu=1}^{s} k'_\nu\,\Delta_\nu + k'_{s+1}\,\Delta_{s+1}\Big] \times$$
$$\times\, Twid^{(p_1,\ldots,p_s,q_{s+1})}_{n_1,\ldots,n_s,n_{s+1}}\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k'_\nu\,\Delta_\nu + k'_{s+1}\,\Delta_{s+1}, \sum_{\nu=1}^{s} k'_\nu\,\Delta_\nu + k'_{s+1}\,\Delta_{s+1}\Big] \times$$
$$\times\,\big(F_{n_{s+1}} \otimes I_{\Delta_{s+1}}\big)\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k'_\nu\,\Delta_\nu + k'_{s+1}\,\Delta_{s+1}, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu + j_{s+1}\,\Delta_{s+1}\Big] =$$

$$= \sum_{k'_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k'_s=0}^{n_s-1} \sum_{k'_{s+1}=0}^{n_{s+1}-1} I_{n_{s+1}}[k_{s+1}, k'_{s+1}] \times G_s\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s} k'_\nu\,\Delta_\nu\Big] \times$$

$$\times\ Twid_{n_1,\ldots,n_s,n_{s+1}}^{(p_1,\ldots,p_s,q_{s+1})}\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k'_\nu\,\Delta_\nu + k'_{s+1}\,\Delta_{s+1}, \sum_{\nu=1}^{s} k'_\nu\,\Delta_\nu + k'_{s+1}\,\Delta_{s+1}\Big] \times$$

$$\times\ F_{n_{s+1}}[k'_{s+1}, j_{s+1}] \times I_{\Delta_{s+1}}\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k'_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu\Big] =$$

$$= G_s\Big[\sum_{\nu=1}^{s} k_\nu\,\Delta_\nu, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu\Big] \times$$

$$\times\ Twid_{n_1,\ldots,n_s,n_{s+1}}^{(p_1,\ldots,p_s,q_{s+1})}\Big[\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu + k_{s+1}\,\Delta_{s+1}, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu + k_{s+1}\,\Delta_{s+1}\Big] \times$$

$$\times\ F_{n_{s+1}}[k_{s+1}, j_{s+1}]\,.$$

Остаётся учесть, что

$$Twid_{n_1,\ldots,n_s,n_{s+1}}^{(p_1,\ldots,p_s,q_{s+1})}\Big[\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu + k_{s+1}\,\Delta_{s+1}, \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu + k_{s+1}\,\Delta_{s+1}\Big] =$$

$$= \omega_{n_1\cdots n_s n_{s+1}}^{k_{s+1}\,q_{s+1}\sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,p_\nu \Delta_\nu}\,.$$

Теорема доказана. $\square$

Транспонируем матрицы, стоящие в левой и правой частях (17), и поменяем местами параметры p_ν и q_ν при всех $\nu \in 1 : s$. Придём к другому представлению матрицы Фурье:

$$F_N = \big(Mix_{n_1,\ldots,n_s}^{(q_1,\ldots,q_s)}\big)^T \Bigg(\prod_{\nu=0}^{s-1} \big(I_{N_{s-\nu}} \otimes F_{n_{s-\nu}} \otimes I_{\Delta_{s-\nu}}\big) \times$$

$$\times\ \big(I_{N_{s-\nu}} \otimes Twid_{n_1,\ldots,n_{s-\nu-1},n_{s-\nu}}^{(q_1,\ldots,q_{s-\nu-1},p_{s-\nu})}\big)\Bigg) Rev_{n_1,\ldots,n_s}^{(p_1,\ldots,p_s)}\,.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$F_N = \big(Mix_{n_s,\ldots,n_2,n_1}^{(q_s,\ldots,q_2,q_1)}\big)^T \Bigg(\prod_{\nu=1}^{s} \big(I_{\Delta_\nu} \otimes F_{n_\nu} \otimes I_{N_\nu}\big) \times$$

$$\times\ \big(I_{\Delta_\nu} \otimes Twid_{n_s,\ldots,n_{\nu+1},n_\nu}^{(q_s,\ldots,q_{\nu+1},p_\nu)}\big)\Bigg) Rev_{n_s,\ldots,n_2,n_1}^{(p_s,\ldots,p_2,p_1)}\,.$$

Теорема 2 вместе с теоремой 1 дают наиболее глубокое параметрическое разложение матрицы Фурье F_N при $N = n_1 n_2 \cdots n_s$ (ср. с результаты из обзорной статьи [1]). Идея включения в разложение матрицы Фурье вектора параметров p принадлежит М. Б. Свердлику [2, 3].

4°. В заключение установим связь между матрицами параметрических перестановок Rev и Mix.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливо равенство*

$$Rev^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s} = Rev^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s} Mix^{(p_s,p_{s-1},\ldots,p_1)}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}.$$

Доказательство. Возьмём произвольный N-мерный вектор x. Для векторов $X = Rev^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s} x$, $Y = Mix^{(p_s,p_{s-1},\ldots,p_1)}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1} x$, $Z = Rev^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s} Y$ имеем соответственно

$$\begin{aligned}
X(j) &= x\big(\mathrm{rev}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j)\big)\,,\\
Y(j) &= x\big(\mathrm{mix}^{(p_s,p_{s-1},\ldots,p_1)}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}(j)\big)\,,\\
Z(j) &= Y\big(\mathrm{rev}^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j)\big) =\\
&\qquad = x\Big(\mathrm{mix}^{(p_s,p_{s-1},\ldots,p_1)}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}\big(\mathrm{rev}^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j)\big)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\mathrm{rev}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j) = \mathrm{mix}^{(p_s,p_{s-1},\ldots,p_1)}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}\big(\mathrm{rev}^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j)\big)\,. \tag{18}$$

Отсюда будет следовать равенство $X = Z$, эквивалентное требуемому.

Пусть $j = \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,\Delta_\nu$. Тогда

$$\mathrm{rev}^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j) = \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,N_\nu = \sum_{\nu=1}^{s} j_{s-\nu+1}\,N_{s-\nu+1}\,.$$

Переобозначим $n'_\nu = n_{s-\nu+1}$, $p'_\nu = p_{s-\nu+1}$. В этом случае

$$\Delta'_\nu := n'_1 n'_2 \cdots n'_{\nu-1} = n_s n_{s-1} \cdots n_{s-\nu+2} = N_{s-\nu+1}\,,$$

$$\mathrm{rev}^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j) = \sum_{\nu=1}^{s} j_{s-\nu+1}\,\Delta'_\nu\,,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{mix}^{(p_s,p_{s-1},\ldots,p_1)}_{n_s,n_{s-1},\ldots,n_1}\big(\mathrm{rev}^{(1,1,\ldots,1)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j)\big) &= \mathrm{mix}^{(p'_1,p'_2,\ldots,p'_s)}_{n'_1,n'_2,\ldots,n'_s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} j_{s-\nu+1}\,\Delta'_\nu\right) =\\
= \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_{s-\nu+1}\,p'_\nu \Delta'_\nu \right\rangle_N &= \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_{s-\nu+1}\,p_{s-\nu+1} N_{s-\nu+1} \right\rangle_N =\\
= \left\langle \sum_{\nu=1}^{s} j_\nu\,p_\nu N_\nu \right\rangle_N &= \mathrm{rev}^{(p_1,p_2,\ldots,p_s)}_{n_1,n_2,\ldots,n_s}(j)\,.
\end{aligned}$$

Формула (18), а с ней и теорема, доказаны. □

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson J., Johnson R. W., Rodriguez D., Tolimieri R. *A methodology for designing, modifying and implementing Fourier transform algorithms on various architectures* // Circuits, Systems and Signal Processing. 1990. V. 9. No. 4. P. 449–500.

2. Свердлик М. Б. *Матричная интерпретация и вычислительная эффективность алгоритмов БПФ* // Радиотехника и электроника. 1984. № 2. С. 265–274.

3. Свердлик М. Б., Троянский А. В. *Обобщённое матричное описание алгоритма БПФ* // Радиоэлектроника. 1995. № 7. С. 27–33.