ОСНОВНАЯ ЛЕММА ТЕОРИИ ПОЛЯРНЫХ ФОРМ ПОЛИНОМОВ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ*

М. И. Григорьев m_grigoriev@list.ru
В. Н. Малозёмов malv@math.spbu.ru
А. Н. Сергеев aser57@mail.ru

В терминах полярных форм выводится критерий совпадения в заданной точке значений двух алгебраических полиномов степени n от двух переменных вместе с их смешанными производными до q-го порядка включительно.

1°. Точки из $\mathbb{R}^2$ будем обозначать $\xi = (x, y)$, $\xi_i = (x_i, y_i)$.

Рассмотрим алгебраический полином степени n от двух переменных вида

$$P(\xi) = P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, C_n^{k,s}\, x^k\, y^s. \tag{1}$$

Пусть $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = r$, $r \in 1 : n$. Обозначим

$$P_{\alpha\beta}^{(r)}(\xi) = \frac{\partial^r P(x, y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta}\,.$$

ЛЕММА 1. *Справедлива формула*

$$P_{\alpha\beta}^{(r)}(\xi) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} a_{k+\alpha, s+\beta}\, C_{n-r}^{k,s}\, x^k\, y^s. \tag{2}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\partial^\alpha P(x, y)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\Bigl(\sum_{k=\alpha}^{n} x^k \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, C_n^{k,s}\, y^s\Bigr) =$$

$$= \sum_{k=\alpha}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, C_n^{k,s}\, \tfrac{k!}{(k-\alpha)!}\, x^{k-\alpha}\, y^s =$$

---

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00676).

$$= \sum_{s=0}^{n-\alpha} y^s \sum_{k=\alpha}^{n-s} a_{ks}\, C_n^{k,s}\, \tfrac{k!}{(k-\alpha)!}\, x^{k-\alpha}.$$

Далее
$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} P(x,y)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta} = \sum_{s=\beta}^{n-\alpha} \sum_{k=\alpha}^{n-s} a_{ks}\, C_n^{k,s}\, \tfrac{k!}{(k-\alpha)!}\, \tfrac{s!}{(s-\beta)!}\, x^{k-\alpha}\, y^{s-\beta}.$$

Отметим, что
$$C_n^{k,s}\, \tfrac{k!\, s!}{(k-\alpha)!\, (s-\beta)!} = \tfrac{n!}{(n-\alpha-\beta)!}\, C_{n-\alpha-\beta}^{k-\alpha,s-\beta}.$$

Поэтому

$$P_{\alpha\beta}^{(r)}(\xi) = \tfrac{n!}{(n-r)!} \sum_{s=\beta}^{n-\alpha} \sum_{k=\alpha}^{n-s} a_{ks}\, C_{n-r}^{k-\alpha,s-\beta}\, x^{k-\alpha}\, y^{s-\beta} =$$

$$= \tfrac{n!}{(n-r)!} \sum_{k=\alpha}^{n-\beta} \sum_{s=\beta}^{n-k} a_{ks}\, C_{n-r}^{k-\alpha,s-\beta}\, x^{k-\alpha}\, y^{s-\beta} =$$

$$= \tfrac{n!}{(n-r)!} \sum_{k=\alpha}^{n-\beta} \sum_{s=0}^{n-k-\beta} a_{k,s+\beta}\, C_{n-r}^{k-\alpha,s}\, x^{k-\alpha}\, y^{s} =$$

$$= \tfrac{n!}{(n-r)!} \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} a_{k+\alpha,s+\beta}\, C_{n-r}^{k,s}\, x^{k}\, y^{s}.$$

Лемма доказана. □

2°. Введём полярные формы $p(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ полинома $P(\xi)$ и $p_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-r})$ полинома $\frac{(n-r)!}{n!}\, P_{\alpha\beta}^{(r)}(\xi)$ (см. [1]). Согласно (1) и (2)

$$p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, \sigma_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_n),$$
$$p_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}) = \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} a_{k+\alpha,s+\beta}\, \sigma_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}).$$

В частности,
$$p(\xi^n) = P(\xi), \qquad p_{\alpha\beta}(\xi^{n-r}) = \tfrac{(n-r)!}{n!}\, P_{\alpha\beta}^{(r)}(\xi). \tag{3}$$

Пусть $\eta \in \mathbb{R}^2$, $\eta = (\eta_x, \eta_y)$. Рассмотрим полюсы вида

$$p(\eta^{n-q}, \eta + \xi_1, \ldots, \eta + \xi_q), \qquad q \in 1 : n. \tag{4}$$

ЛЕММА 2. *Полюсы* (4) *допускают представление*

$$p(\eta^{n-q}, \eta+\xi_1, \ldots, \eta+\xi_q) = \sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{\beta=0}^{q-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_q), \tag{5}$$

где $r = \alpha + \beta$.

Доказательство. Напомним рекуррентное соотношение для симметрических полиномов от переменных из $\mathbb{R}^2$ (см. [1]):

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_q) &= \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) + x_q\, \sigma_{\alpha-1,\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) + \\ &+ y_q\, \sigma_{\alpha,\beta-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}), \qquad \alpha, \beta \geqslant 0, \quad \alpha+\beta \leqslant q, \quad q \in 2:n.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь приняты соглашения

$$\begin{aligned}\sigma_{-1,\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) \equiv \sigma_{\alpha,-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) \equiv 0, \qquad \alpha, \beta \in 0:q\,;\\ \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) \equiv 0, \qquad \alpha, \beta \geqslant 0, \quad \alpha+\beta = q.\end{aligned} \tag{7}$$

Зафиксируем $q \in 2:n$. С помощью (6) и (7) начнём преобразовывать правую часть формулы (5):

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{\beta=0}^{q-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r}) \big[\sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) + x_q\, \sigma_{\alpha-1,\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) + \\ &+ y_q\, \sigma_{\alpha,\beta-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1})\big] = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \sum_{\beta=0}^{q-1-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) + \\ &+ x_q \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{\beta=0}^{q-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})\, \sigma_{\alpha-1,\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) + \\ &+ y_q \sum_{\alpha=0}^{q-1} \sum_{\beta=1}^{q-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})\, \sigma_{\alpha,\beta-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) = \\ &= \sum_{\alpha=0}^{q-1} \sum_{\beta=0}^{q-1-\alpha} \big[p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r}) + x_q\, p_{\alpha+1,\beta}(\eta^{n-r-1}) + y_q\, p_{\alpha,\beta+1}(\eta^{n-r-1})\big]\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}).\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках приводится к виду

$$\sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} a_{k+\alpha,s+\beta}\, \sigma_{ks}(\eta^{n-r}) + x_q \sum_{k=0}^{n-r-1} \sum_{s=0}^{n-r-1-k} a_{k+\alpha+1,s+\beta}\, \sigma_{ks}(\eta^{n-r-1}) +$$

$$+\, y_q \sum_{k=0}^{n-r-1} \sum_{s=0}^{n-r-1-k} a_{k+\alpha,s+\beta+1}\, \sigma_{ks}(\eta^{n-r-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} a_{k+\alpha,s+\beta} \left[\sigma_{ks}(\eta^{n-r-1}) + \eta_x\, \sigma_{k-1,s}(\eta^{n-r-1}) + \eta_y\, \sigma_{k,s-1}(\eta^{n-r-1})\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} a_{k+\alpha,s+\beta} \left[x_q\, \sigma_{k-1,s}(\eta^{n-r-1}) + y_q\, \sigma_{k,s-1}(\eta^{n-r-1})\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-r} \sum_{s=0}^{n-r-k} a_{k+\alpha,s+\beta}\, \sigma_{ks}(\eta^{n-r-1}, \eta+\xi_q) = p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r-1}, \eta+\xi_q).$$

Значит,

$$\sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{\beta=0}^{q-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_q) = \sum_{\alpha=0}^{q-1} \sum_{\beta=0}^{q-1-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r-1}, \eta+\xi_q)\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}).$$

Продолжив аналогично, придём к требуемому равенству:

$$\sum_{\alpha=0}^{q-1} \sum_{\beta=0}^{q-1-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r-1}, \eta+\xi_q)\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{q-2} \sum_{\beta=0}^{q-2-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r-2}, \eta+\xi_{q-1}, \eta+\xi_q)\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_{q-2}) = \cdots =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{1} \sum_{\beta=0}^{1-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r-q+1}, \eta+\xi_2, \ldots, \eta+\xi_q)\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1) =$$

$$= p(\eta^{n-q}, \eta+\xi_1, \ldots, \eta+\xi_q).$$

Поясним последний переход:

$$p_{00}(\eta^{n-q+1}, \eta+\xi_2, \ldots, \eta+\xi_q) + y_1\, p_{01}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \ldots, \eta+\xi_q) +$$

$$+ x_1\, p_{10}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \ldots, \eta+\xi_q) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks} \left[\sigma_{ks}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \ldots, \eta+\xi_q) +\right.$$

$$\left.+ \eta_x\, \sigma_{k-1,s}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \ldots, \eta+\xi_q) + \eta_y\, \sigma_{k,s-1}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \ldots, \eta+\xi_q)\right] +$$

$$+ y_1 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1-k} a_{k,s+1}\, \sigma_{ks}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \ldots, \eta+\xi_q) +$$

$$+ x_1 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1-k} a_{k+1,s}\, \sigma_{ks}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \dots, \eta+\xi_q) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks} \big[\sigma_{ks}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \dots, \eta+\xi_q) +$$

$$+ (\eta_x + x_1)\, \sigma_{k-1,s}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \dots, \eta+\xi_q) +$$

$$+ (\eta_y + y_1)\, \sigma_{k,s-1}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_2, \dots, \eta+\xi_q)\big] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} a_{ks}\, \sigma_{ks}(\eta^{n-q}, \eta+\xi_1, \dots, \eta+\xi_q) = p(\eta^{n-q}, \eta+\xi_1, \dots, \eta+\xi_q). \qquad (8)$$

Равенство (8) остаётся справедливым и при $q = 1$, что соответствует (5) при $q = 1$. Лемма доказана. □

При $q = n$ формула (5) принимает вид

$$p(\eta+\xi_1, \dots, \eta+\xi_n) = \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{\beta=0}^{n-\alpha} p_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Положим здесь $\xi_1 = \dots = \xi_n =: \xi$. Согласно (3) получим

$$p\big((\eta+\xi)^n\big) = P(\eta+\xi) = \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{\beta=0}^{n-\alpha} \tfrac{(n-r)!}{n!}\, P_{\alpha\beta}^{(r)}(\eta)\, C_n^{\alpha,\beta}\, x^\alpha\, y^\beta =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{\beta=0}^{n-\alpha} \frac{P_{\alpha\beta}^{(r)}(\eta)}{\alpha!\,\beta!}\, x^\alpha\, y^\beta.$$

Таким образом, (5) есть обобщение формулы Тейлора для полиномов степени n от двух переменных.

3°. Рассмотрим два полинома $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ степени n с соответствующими полярными формами $p^1(\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $p^2(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

ЛЕММА 3 (Основная)**.** *Для того чтобы в некоторой точке $\eta \in \mathbb{R}^2$ полиномы $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ совпадали вместе со всеми своими частными производными до q-го порядка включительно, необходимо и достаточно, чтобы при любых $\eta_1, \dots, \eta_q$ из $\mathbb{R}^2$ выполнялось равенство*

$$p^1(\eta^{n-q}, \eta_1, \dots, \eta_q) = p^2(\eta^{n-q}, \eta_1, \dots, \eta_q). \qquad (9)$$

Доказательство. Необходимость. Из условия леммы и (3) следует, что $p^1_{\alpha\beta}(\eta^{n-r}) = p^2_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})$ при всех $\alpha, \beta \geqslant 0$, $r := \alpha + \beta \leqslant q$. Остаётся сослаться на лемму 2.

Достаточность. Равенство $p^1(\eta^n) = p^2(\eta^n)$ гарантирует, что $P_1(\eta) = P_2(\eta)$.

Пусть $q \in 1 : n$. Возьмём три вектора ξ_1, ξ_2, ξ_3, не лежащие на одной прямой. Согласно (9) при $k \in 0 : q$, $s \in 0 : q - k$ имеем

$$p^1(\eta^{n-q}, (\eta+\xi_1)^k, (\eta+\xi_2)^s, (\eta+\xi_3)^{q-k-s}) = p^2(\eta^{n-q}, (\eta+\xi_1)^k, (\eta+\xi_2)^s, (\eta+\xi_3)^{q-k-s}).$$

На основании (5) при тех же k, s получаем

$$\sum_{\alpha=0}^{q} \sum_{\beta=0}^{q-\alpha} \big[p^1_{\alpha\beta}(\eta^{n-r}) - p^2_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})\big]\, \sigma_{\alpha\beta}(\xi_1^k,\, \xi_2^s,\, \xi_3^{q-k-s}) = 0. \tag{10}$$

Соотношение (10) имеет прямое отношение к интерполяции по полюсам (см. [1]). Из (10) и однозначной разрешимости задачи интерполяции по полюсам следует, что $p^1_{\alpha\beta}(\eta^{n-r}) = p^2_{\alpha\beta}(\eta^{n-r})$ при $\alpha \in 0 : q$, $\beta \in 0 : q - \alpha$. Это вместе с (3) гарантирует равенство всех смешанных производных полиномов $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ до q-го порядка включительно в точке $\xi = \eta$.

Лемма доказана. □

4°. По поводу дальнейших результатов, связанных с полярными формами полиномов от двух переменных, см. обзорную статью [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. И., Сергеев А. Н. *Полярная форма полиномов от двух переменных* // Семинар по дискретному гармоническому анализу и геометрическому моделированию (DHA & CAGD). Избранные доклады. 12 апреля 2008 г. (`http://dha.spb.ru/reps08.shtml#0412`)

2. Seidel H.-P. *An introduction to polar forms* // IEEE Computer Graphics and Applications. 1993. Vol. 13. No. 1. P. 38-46.