Представлено проф. В. Н. Малозёмовым

О ЖЁСТКИХ ФРЕЙМАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Н. А. Соловьёва

vinyo@mail.ru

Пусть U — унитарная матрица порядка n с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, по модулю равными единице, и соответствующими ортонормированными собственными векторами $p_1, \ldots, p_n$. Возьмём единичный вектор $\varphi_0 \in \mathbb{C}^n$ и построим при $m \geqslant n$ систему векторов

$$\left\{\varphi_0, U\varphi_0, U^2\varphi_0, \ldots, U^{m-1}\varphi_0\right\}. \tag{1}$$

Нас интересует, когда система (1) будет жёстким фреймом.

В статье доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы система* (1) *была жёстким фреймом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

(α) *собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы U суть попарно различные корни степени m из некоторого числа $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$;*

(β) $|\langle\varphi_0, p_k\rangle| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ *при всех $k \in 1 : n$.*

1°. Напомним [1], что система ненулевых векторов $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ из $\mathbb{C}^n$ при $m \geqslant n$ называется жёстким фреймом с константой фрейма A, если выполнено одно из трёх эквивалентных условий:

$$x = \frac{1}{A}\sum_{k=0}^{m-1}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{C}^n; \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left|\langle x, \varphi_k\rangle\right|^2 = A\left\|x\right\|^2 \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbb{C}^n;$$

$$\Phi\Phi^* = A\, I_n\,,$$

где Φ — матрица со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ и I_n — единичная матрица порядка n.

Если $\|\varphi_k\| = 1$ при всех $k \in 0 : m-1$, то константа фрейма A необходимо равна $\frac{m}{n}$.

2°. При доказательстве теоремы 1 важную роль будет играть приводимая ниже лемма.

ЛЕММА 1. *Если система* (1) *образует жёсткий фрейм, то найдётся число* $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$, *такое, что*

$$U^m = cI_n\,.$$

Этот результат установлен в [2]. Мы дадим упрощённое его доказательство.

Обозначим $\varphi_k = U^k \varphi_0$. При всех $k \in 0 : m-1$ векторы φ_k имеют единичную длину.

Разложим векторы φ_{m-1} и $U\varphi_{m-1}$ по фрейму (1). Согласно (2)

$$\varphi_{m-1} = \frac{n}{m}\left(\sum_{k=0}^{m-2} \langle \varphi_{m-1}, \varphi_k \rangle \varphi_k + \varphi_{m-1}\right), \tag{3}$$

$$U\varphi_{m-1} = \frac{n}{m}\left(\langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \langle \varphi_{m-1}, U^*\varphi_k \rangle \varphi_k\right).$$

Приняв во внимание, что $U^*\varphi_k = U^*U\varphi_{k-1} = \varphi_{k-1}$ при $k \in 1 : m-1$, перепишем последнее равенство в виде

$$U\varphi_{m-1} = \frac{n}{m}\left(\langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0 \rangle\, UU^*\varphi_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \langle \varphi_{m-1}, \varphi_{k-1} \rangle\, U\varphi_{k-1}\right) =$$

$$= \frac{n}{m}\, U \left(\langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0 \rangle\, U^*\varphi_0 + \sum_{k=1}^{m-1} \langle \varphi_{m-1}, \varphi_{k-1} \rangle \varphi_{k-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi_{m-1} = \frac{n}{m}\left(\langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0 \rangle\, U^*\varphi_0 + \sum_{k=0}^{m-2} \langle \varphi_{m-1}, \varphi_k \rangle \varphi_k\right). \tag{4}$$

Вычтем (4) из (3). После сокращения на общий множитель получим

$$\varphi_{m-1} = \langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0 \rangle\, U^*\varphi_0$$

и

$$U^m \varphi_0 = \langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0 \rangle \varphi_0\,. \tag{5}$$

Обозначим $c = \langle U\varphi_{m-1}, \varphi_0\rangle = \langle U^m\varphi_0, \varphi_0\rangle$. Тогда формула (5) примет вид

$$U^m\varphi_0 = c\,\varphi_0\,. \tag{6}$$

Равенство норм $\|c\varphi_0\| = \|U^m\varphi_0\| = \|\varphi_0\|$ гарантирует, что $|c| = 1$.

Далее, согласно (6)

$$U^m\varphi_k = U^m\big(U^k\varphi_0\big) = U^k\big(U^m\varphi_0\big) = c\,\varphi_k\,.$$

Значит,

$$\big(U^m - c\,I_n\big)\varphi_k = \mathbb{O} \quad \text{при} \;\; k \in 0 : m-1.$$

В силу (2) линейная оболочка элементов жёсткого фрейма совпадает с $\mathbb{C}^n$, поэтому равенство $(U^m - c\,I_n)\,x = \mathbb{O}$ выполняется для всех $x \in \mathbb{C}^n$. Взяв в качестве x последовательно все единичные орты, придём к требуемой формуле $U^m = cI_n$. Лемма доказана. □

3°. Запишем спектральное разложение матрицы U:

$$U = P\,\Lambda\,P^*,$$

где P — унитарная матрица со столбцами $p_1, \ldots, p_n$ и Λ — диагональная матрица, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Имеем

$$\varphi_k = U^k\varphi_0 = P\,\Lambda^k P^*\varphi_0\,.$$

Обозначим $g_0 = \sqrt{n}\,P^*\varphi_0$; $g_k = \sqrt{n}\,P^*\varphi_k = \Lambda^k g_0$, $k \in 1 : m-1$. По определению

$$g_0(j) = \sqrt{n}\,\langle\varphi_0, p_j\rangle =: b_j\,, \quad j \in 1 : n\,;$$

$$g_k(j) = b_j\lambda_j^k\,, \quad j \in 1 : n\,, \;\; k \in 1 : m-1\,. \tag{7}$$

Последнее равенство справедливо и при $k = 0$.

Приходим к такому результату.

ЛЕММА 2. *Векторы $\varphi_k = U^k\varphi_0$ допускают представление*

$$\varphi_k = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,Pg_k\,, \qquad k \in 0 : m-1\,, \tag{8}$$

где g_k определяются формулой (7).

4°. Обратимся к доказательству теоремы 1.

Необходимость. Пусть система (1) образует жёсткий фрейм. Согласно (8) и (7)

$$\langle \varphi_k, p_j \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \langle P g_k, p_j \rangle = \tfrac{1}{\sqrt{n}} \langle g_k, P^* p_j \rangle =$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, g_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, b_j \lambda_j^k\,,$$

поэтому $|\langle \varphi_k, p_j \rangle| = \frac{1}{\sqrt{n}}\, |b_j|$, $j \in 1:n$. По определению жёсткого фрейма

$$1 = \big\| p_j \big\|^2 = \tfrac{n}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \big| \langle p_j, \varphi_k \rangle \big|^2 = \big| b_j \big|^2, \quad j \in 1:n\,. \tag{9}$$

Вспоминая определение b_j, заключаем, что выполняется условие (β).

Далее, из леммы 1 и спектрального разложения матрицы U следует, что $\lambda_j^m = c$ при всех $j \in 1:n$, то есть λ_j, действительно, являются корнями степени m из комплексного числа c, по модулю равного единице. Покажем, что эти корни попарно различны.

Обозначим через Φ и G матрицы со столбцами $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ и $g_0, g_1, \ldots, g_{m-1}$ соответственно. Согласно (8), $\Phi = \frac{1}{\sqrt{n}}\, PG$. По определению жёсткого фрейма, состоящего из единичных векторов, $\Phi\Phi^* = \frac{m}{n} I_n$. Значит,

$$GG^* = n\, P^* \Phi \Phi^* P = m\, I_n\,.$$

В частности, $(GG^*)[j,s] = 0$ при $j \neq s$. Вместе с тем, согласно (7)

$$\big(GG^*\big)[j,s] = \sum_{k=0}^{m-1} g_k(j)\, \overline{g_k(s)} = b_j\, \overline{b}_s \sum_{k=0}^{m-1} \big(\lambda_j \overline{\lambda}_s\big)^k. \tag{10}$$

Учитывая (9), при $j \neq s$ получаем

$$\sum_{k=0}^{m-1} \big(\lambda_j \overline{\lambda}_s\big)^k = 0\,.$$

Это равенство гарантирует, что $\lambda_j \neq \lambda_s$ при $j \neq s$.

Видим, что условие (α) также выполнено.

Достаточность. Покажем, что $\Phi\Phi^* = \frac{m}{n}\, I_n$. Как отмечалось, $\Phi = \frac{1}{\sqrt{n}}\, PG$, поэтому

$$\Phi\Phi^* = \tfrac{1}{n}\, PGG^*P^*.$$

Остаётся проверить, что $GG^* = mI_n$.

Напомним, что $b_j = \sqrt{n}\langle \varphi_0, p_j\rangle$. В силу условия (β) имеем $|b_j| = 1$ при всех $j \in 1:n$. Теперь воспользуемся формулой (10). При $j = s$ получаем $(GG^*)[j,j] = m$. При $j \neq s$ согласно условию (α) числа λ_j и λ_s суть различные корни степени m из комлексного числа c, по модулю равного единице. В частности, $\lambda_j \overline{\lambda}_s = \lambda_j \lambda_s^{-1} \neq 1$ и

$$\sum_{k=0}^{m-1} \big(\lambda_j \overline{\lambda}_s\big)^k = \frac{1-(\lambda_j \overline{\lambda}_s)^m}{1-\lambda_j \overline{\lambda}_s} = 0\,.$$

Отсюда и из (10) следует, что $(GG^*)[j,s] = 0$ при $j \neq s$.

Теорема доказана. $\square$

5°. Приведём три примера. Будем использовать стандартное обозначение $\omega_m = \exp(2\pi i/m)$.

ПРИМЕР 1 (фрейм Мерседес-Бенц). Рассмотрим три единичных вектора

$$\varphi_0 = \big(0,1\big)^T, \quad \varphi_1 = \Big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\Big)^T, \quad \varphi_1 = \Big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\Big)^T.$$

Нетрудно проверить, что $\varphi_1 = U\varphi_0$, $\varphi_2 = U\varphi_1$, где

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица U — унитарная с собственными числами

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \omega_3\,, \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \omega_3^2$$

и собственными векторами

$$p_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Оба условия теоремы 1 выполнены (при $c = 1$), поэтому система $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ является жёстким фреймом.

Конечно, этот факт хорошо известен [1, с. 100] и может быть получен проще, исходя из условия $\Phi\Phi^* = \frac{3}{2}\, I_2$, где

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Однако пример 1 хорошо демонстрирует содержание теоремы 1.

Фрейм $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ называется фреймом Мерседес-Бенц.

ПРИМЕР 2 (нарушено условие (β)). Пусть $n = 2$, $m = 3$. Рассмотрим унитарную матрицу U второго порядка с собственными числами $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \omega_3$ и ортонормированнми собственными векторами

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В этом случае

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Возьмём начальный вектор $\varphi_0 = (1, 0)^T$. Для него

$$\big|\langle \varphi_0, p_1 \rangle\big| = 1\,, \quad \big|\langle \varphi_0, p_2 \rangle\big| = 0\,,$$

то есть условие (β) нарушено. Далее,

$$\varphi_1 = U\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2 = U\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ не образуют жёсткого фрейма.

ПРИМЕР 3 (нарушено условие (α)). Рассмотрим унитарную матрицу U второго порядка с собственными числами $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ и ортонорми рованными собственными векторами (11). В этом случае

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

Возьмём начальный вектор $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для него

$$\big|\langle \varphi_0, p_1 \rangle\big| = \big|\langle \varphi_0, p_2 \rangle\big| = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

то есть условие (β) выполнено. Найдём векторы φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

У матрицы

$$\varPhi = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 \end{bmatrix}$$

строки не ортогональны. Значит, система $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ не является жёстким фреймом.

Причина в том, что нарушено условие (α), поскольку $\lambda_1^3 \neq \lambda_2^3$.

Если к системе $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$ добавить вектор $\varphi_3 = U\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, то расширенная система $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, как легко проверить, будет жёстким фреймом. Это соответствует теореме 1.

6°. Покажем, что систему (1) можно преобразовать в обобщённый гармонический фрейм. Возьмём комплексное число c, $|c| = 1$, и обозначим через $c_1, \ldots, c_n$ попарно различные корни степени m из c. Возьмём также n комплексных чисел $b_1, \ldots, b_n$, по модулю равных единице. Напомним, что система $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}\}$, состоящая из единичных векторов с компонентами

$$\psi_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, b_j c_j^k\,, \quad j \in 1:n\,,$$

называется обобщённым гармоническим фреймом [2]. При $c = 1$ и $b_1 = \cdots = b_n = 1$ получаем гармонический фрейм.

Нетрудно проверить, что обобщённый гармонический фрейм является жёстким фреймом. Действительно, обозначим через $\varPsi$ матрицу со столбцами $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ и покажем, что $\varPsi\varPsi^* = \frac{m}{n} I_n$. Имеем

$$\bigl(\varPsi\varPsi^*\bigr)[j,s] = \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(j)\,\overline{\psi_k(s)} = \tfrac{1}{n}\, b_j\, \overline{b}_s \sum_{k=0}^{m-1} \bigl(c_j\,\overline{c}_s\bigr)^k.$$

В частности, $(\varPsi\varPsi^*)[j,j] = \frac{m}{n}$ при всех $j \in 1:n$. При $j \neq s$ будет $c_j\,\overline{c}_s = c_j\, c_s^{-1} \neq 1$, поэтому

$$\bigl(\varPsi\varPsi^*\bigr)[j,s] = \tfrac{1}{n}\, b_j\, \overline{b}_s\, \frac{1-(c_j\,\overline{c}_s)^m}{1-c_j\,\overline{c}_s} = 0\,.$$

Вернёмся к последовательности (1). Наряду с векторами $\varphi_k = U^k\varphi_0$ рассмотрим единичные векторы

$$\eta_k = P^*\varphi_k\,, \qquad k \in 0:m-1\,, \tag{12}$$

где P — унитарная матрица, столбцами которой являются ортонормированные собственные векторы $p_1, \ldots, p_n$ матрицы U.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы система $\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}\}$ была обобщённым гармоническим фреймом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (α) и (β) из теоремы 1.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим через H матрицу со столбцами $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$. Согласно (12), $H = P^*\varPhi$. Система $\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}\}$ как обобщённый гармонический фрейм является жёстким фреймом. В этом случае $HH^* = \frac{m}{n} I_n$. Отсюда следует, что

$$\varPhi\varPhi^* = PHH^*P^* = \tfrac{m}{n}\, I_n\,,$$

то есть система (1) также является жёстким фреймом. Остаётся сослаться на теорему 1.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Согласно (12), (8) и (7)

$$\eta_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, g_k(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, b_j \lambda_j^k\,, \quad j \in 1:n\,,\;\; k \in 0:m-1\,,$$

причём условие (α) гарантирует, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные корни степени m из некоторого числа $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. Далее, $\varphi_0 = P\eta_0$, поэтому

$$\langle \varphi_0, p_j \rangle = \langle \eta_0, P^* p_j \rangle = \eta_0(j) = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\, b_j\,.$$

В силу условия (β) получаем $|b_j| = 1$ при всех $j \in 1:n$. Значит, система $\{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1}\}$ — обобщённый гармонический фрейм.

Теорема доказана. $\square$

7°. Покажем, как фрейм Мерседес-Бенц из примера 1 преобразовать в обобщённый гармонический фрейм. Имеем

$$P = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \qquad P^* = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix},$$

$$\eta_0 = P^* \varphi_0 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix},$$

$$\eta_1 = P^* \varphi_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\, \omega_3 \\ -i\, \omega_3^2 \end{pmatrix},$$

$$\eta_2 = P^* \varphi_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\, i \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\, \omega_3^2 \\ -i\, \omega_3^4 \end{pmatrix}.$$

Система $\{\eta_0, \eta_1, \eta_2\}$ образует обобщённый гармонический фрейм с $b_1 = i$, $b_2 = -i$, $\lambda_1 = \omega_3$, $\lambda_2 = \omega_3^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам.* Пер. с англ. Москва–Ижевск: РХД, 2001. 464 с.

2. Casazza P. G., Kovačević J. *Uniform Tight Frames with Erasures* // Adv. Comp. Math. 2003. V. 18. No. 2–4. P. 387–430.