# Неэквивалентные банаховы нормы на одном линейном пространстве

О. И. Рейнов

Эта заметка возникла благодаря одному вопросу, заданному мне в декабре 2008-го года математиком из Германии Rein Zeinstra. Несколько лет назад Rein присутствовал на некоей лекции то ли по функциональному анализу, то ли по какой-то специальной части теории операторов в банаховых пространствах. Речь там зашла о применении теоремы Банаха об открытом отображении, и ситуация у лектора сложилась следующая.

В процессе доказательства одной теоремы возникли два банаховых пространства с одним линейным носителем, то есть преподаватель (лектор) пришел в процессе своих рассуждений к ситуации, когда на одном и том же линейном пространстве $X$ появились две нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$, по каждой из которых это линейное пространство $X$ становилось банаховым: как $X_1 := (X, ||\cdot||_1)$, так и $X_2 := (X, ||\cdot||_2)$ — полные нормированные пространства. Из этого лектор сделал вывод, что пространства $X_1$ и $X_2$ изоморфны мужду собой как банаховы пространства (точнее, что нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ эквивалентны). Rein Zeinstra, естественно, поинтересовался, почему, поскольку непрерывности тождественных отображений $X_1 \to X_2$ или $X_2 \to X_1$ не предполагалось и теорема Банаха была не применима. Лектор объяснил, что это очевидно и что все следует из "процессов пополнений"(этой туманной фразой все и закончилось). Rein Zeinstra, однако, остался недоволен таким объяснением и несколько лет в разных странах задавал свой естественнный вопрос математикам, имеющим дело с функциональным анализом: может ли быть так, что одно и то же линейное пространство $X$ имеет две неэквивалентные между собой нормы, с каждой из которых оно оказывается банаховым?

Когда в декабре прошлого года, в Lahore'е он обратился с этим вопросом ко мне, мне дейтвительно стало интересно, поскольку и в голову мне ранее подобные рода вопросы не приходили, хотя я много раз в своих лекциях имел дело с теоремой Банаха об открытом отображении. Там же, в Lahore'е, я поинтересовался мнениями двух профессоров, занимающихся функциональным анализом, каждый в своей области, и ответы были примерно те же, что и у незадачливого лектора: "это, вроде, очевидно, поскольку пополнение одно ..."и т.д. Думаю, что на этот вопрос Rein'а на достаточно приличной кафедре математического анализа (например, в Петербурге, Москве или в Воронеже) ответят сразу (надеюсь). Но поскольку для Rein Zeinstra такого ответа в течение нескольких лет не было (хотя он интересовался этим, например, в Германии), то я решил опубликовать решение этой задачи, придуманное мной через полчаса после вопроса, заданного им мне. Вот оно.

**Теорема.** *На линейном пространстве $C[0,1]$ всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественно-значных функций можно задать две неэквивалентные между собой нормы, с каждой из которых это пространство будет полным нормированным линейным пространством.*

Таким образом, Стефан Банах сформулировал свою теорему об изоморфизме очень точно, как и полагается гениальному математику.

Доказательство теоремы, приводмое ниже, элементарно. Поэтому читателю, заинтересовавшемуся этим вопросом, хотел бы предложить остановиться на этом месте и самому придумать свое доказательство. Ниже следует мое.

*Доказательство теоремы.* Обозначим через $X$ *линейное пространство* всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественнных функций (то есть, пространство $C[0,1]$, рассматриваемое сейчас без какой-либо нормы).

Банахово пространство $Y_1 := C[0,1]$ с его естественной sup-нормой инъективно линейно вкладывается в гильбертово пространство $Y_2 := L_2[0,1]$, построенное на мере Лебега. Поэтому линейная размерность (мощность базиса Hamel'я) линейного пространства $Y_1$ не больше чем линейная размерность линейного пространства $Y_2$.

Пространство $C[0,1]$, как банахово пространство, универсально в классе всех сепарабельных банаховых пространств, поэтому банахово пространство $L_2[0,1]$ изометрически вкладывается в $C[0,1]$ и, следовательно, линейная размерность линейного постранства $Y_2$ не больше чем линейная размерность пространства $Y_1$.

Из всего сказанного можно сделать вывод: существуют базисы Hamel'я $\mathcal{H}_1$ в линейном пространстве $C[0,1]$ и $\mathcal{H}_2$ в линейном пространстве $L_2[0,1]$ такие, что естественное взаимнооднозначное отображение "базис в базис": $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ порождает линейный изоморфизм $\Phi$ этих двух линейных пространств $Y_1$ и $Y_2$, а отсюда уже, перенося норму ("перенося единичный шар"банахова пространства $L_2[0,1]$) из $Y_2$ в $Y_1$ при помощи этого линейного изоморфзма $\Phi$, мы получаем две нормы на $Y_1$ ("два единичных шара в $Y_1$"), которые порождают два полных нормированных линейных пространства $(Y_1, ||\cdot||_1)$ и $(Y_1, ||\cdot||_2)$. Одно из них — прежнее $(Y_1, ||\cdot||_\infty)$, то есть $C[0,1]$. Второе — это же линейное пространство $C[0,1]$, но с нормой, порожденной образом замкнутого единичного шара пространства $L_2[0,1]$ при отображении $\Phi$.

*Замечание.* Естественно, неявно мы как минимум два раза использовали аксиому выбора. Дальнейшие обобщения, обсуждения различных вариантов, рассмотрение комплексных случаев и т.п., представляются любителям обобщений. Думаю, имеется простор для полета мыслей.

Автор благодарит профессора Rein Zeinstra за поставленный им интересный вопрос.