Представлено проф. В. Н. Малозёмовым

ПРЕДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Н. В. Чашников

nik239@list.ru

Зафиксируем натуральные числа r и $m \geqslant 2$ и рассмотрим m-периодическую последовательность $\mathbf{x}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, точек из $\mathbb{R}^d$. При каждом натуральном $n \geqslant 2$ положим $N = mn$ и построим дискретный N-периодический сплайн $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ порядка r со значениями в $\mathbb{R}^d$, удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Нас интересует поведение множества $\{\mathbf{S}_{r,n}(j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ точек из $\mathbb{R}^d$ при $n \to \infty$.

1°. Уточним постановку задачи. Напомним определение нормализованных дискретных N-периодических B-сплайнов [1, 2]. Так как параметр n будет изменяться, включим его в обозначение:

$$\widetilde{Q}_{1,n}(j) = \begin{cases} 1 - j/n & \text{при } j \in 0 : n-1, \\ \quad 0 & \text{при } j \in n : N-n, \\ j/n - m + 1 & \text{при } j \in N-n+1 : N-1; \end{cases}$$

$$\widetilde{Q}_{\nu,n} = \frac{1}{n}\left(\widetilde{Q}_{1,n} * \widetilde{Q}_{\nu-1,n}\right), \quad \nu = 2, 3, \ldots,$$

где знаком '$*$' обозначена циклическая свёртка. Дискретный периодический сплайн порядка r определяется формулой

$$\mathbf{S}_{r,n}(j) = \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{c}(l)\, \widetilde{Q}_{r,n}(j - ln), \qquad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где $\mathbf{c}(0), \mathbf{c}(1), \ldots, \mathbf{c}(m-1) \in \mathbb{R}^d$.

Пусть задан набор векторов $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$. Согласно [1], найдётся дискретный сплайн $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ вида (1), удовлетворяющий интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_{r,n}(ln) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1. \tag{2}$$

Для каждого натурального числа n, отличного от единицы, значения сплайна $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ образуют множество из mn точек пространства $\mathbb{R}^d$. Цель данной заметки состоит в нахождении предела этого множества при $n \to \infty$. Для того, чтобы решить эту задачу, введём непрерывный аналог для дискретных периодических сплайнов.

2°. Пусть m — натуральное число, отличное от единицы. Определим периодический B-сплайн первого порядка как m-периодическую вещественную функцию, которая на основном периоде задаётся формулой

$$P_1(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{при } t \in [0,1), \\ 0, & \text{при } t \in [1, m-1], \\ t-m+1, & \text{при } t \in (m-1, m]. \end{cases} \tag{3}$$

Периодические B-сплайны более высоких порядков определим при помощи свёртки

$$P_\nu(t) = \int_0^m P_{\nu-1}(s)\, P_1(t-s)\, ds, \qquad \nu = 2, 3, \dots . \tag{4}$$

Ясно, что $P_\nu(t) \geqslant 0$ для любого натурального ν и вещественного t.

ЛЕММА 1. *Справедливо тождество*

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(t-l) \equiv 1.$$

Доказательство. Докажем это тождество методом математической индукции. При $\nu = 1$ оно следует из определения. Предположим, что оно справедливо для P_ν. Тогда

$$\sum_{l=0}^{m-1} P_{\nu+1}(t-l) = \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^m P_\nu(s)\, P_1(t-l-s)\, ds =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^m P_\nu(s-l)\, P_1(t-s)\, ds = \int_0^m \Big(\sum_{l=0}^{m-1} P_\nu(s-l) \Big)\, P_1(t-s)\, ds =$$

$$= \int_0^m P_1(t-s)\, ds = \int_0^m P_1(s)\, ds = 1.$$

Индукционный переход доказан. □

Из леммы 1 следует, что $P_\nu(t) \in [0,1]$ для любого натурального ν и вещественного t.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Периодический сплайн P_ν обладает следующими свойствами:*

1) $P_\nu \in C^{2\nu-2}$;

2) *на каждом отрезке $[k, k+1]$, где k — целое, сплайн P_ν совпадает с некоторым многочленом степени не выше $2\nu - 1$.*

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $\nu = 1$ свойства выполнены. Предположим, что они выполняются для P_ν. Имеем

$$P_{\nu+1}(t) = \int_0^m P_\nu(s)\,P_1(t-s)\,ds = \int_{t-m/2}^{t+m/2} P_\nu(s)\,P_1(t-s)\,ds =$$
$$= \int_{t-1}^{t} P_\nu(s)\,(1-t+s)\,ds + \int_t^{t+1} P_\nu(s)\,(1+t-s)\,ds.$$

Продифференцируем последнее выражение по t:

$$P'_{\nu+1}(t) = -\int_{t-1}^{t} P_\nu(s)\,ds + \int_t^{t+1} P_\nu(s)\,ds. \tag{5}$$

Дифференцируя ещё один раз, получаем

$$P''_{\nu+1}(t) = P_\nu(t-1) + P_\nu(t+1) - 2P_\nu(t).$$

По индукционному предположению $P_\nu \in C^{2\nu-2}$. Следовательно, $P_{\nu+1} \in C^{2\nu}$. Если t принадлежит отрезку $[k, k+1]$, где k — целое, то $t-1 \in [k-1, k]$, $t+1 \in [k+1, k+2]$, поэтому $P''_{\nu+1}(t)$ совпадает с некоторым многочленом степени не выше $2\nu - 1$. Значит, $P_{\nu+1}$ на этом отрезке является многочленом степени не выше $2\nu + 1$. Предложение доказано. $\square$

ЛЕММА 2. *Для любого натурального ν и вещественных x и y справедливо неравенство*

$$\bigl|P_\nu(x) - P_\nu(y)\bigr| \leqslant |x-y|.$$

Доказательство. При $\nu = 1$ неравенство, очевидно, выполняется. Пусть $\nu > 1$. Подставляя в формулу (5) величину $\nu - 1$ вместо ν, получаем, что $P'_\nu(t)$ равно разности двух интегралов по промежуткам единичной длины, причём значения подынтегральных выражений принадлежат отрезку $[0, 1]$. Поэтому $\bigl|P'_\nu(t)\bigr| \leqslant 1$, из чего следует требуемое неравенство. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого порядка ν найдётся такое A_ν, что*

$$\bigl|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j) - P_\nu(\tfrac{j}{n})\bigr| \leqslant \frac{A_\nu}{n} \qquad \text{для всех } j, n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 2. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $\nu = 1$ имеем $\widetilde{Q}_{1,n}(j) = P_1(\frac{j}{n})$, поэтому можно взять $A_1 = 0$.

Пусть (6) выполнено для некоторого ν. По определению имеем

$$\big|\widetilde{Q}_{\nu+1,n}(j) - P_{\nu+1}(\tfrac{j}{n})\big| = \Big|\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k)\,\widetilde{Q}_{1,n}(k) - \int_0^m P_\nu(\tfrac{j}{n}-t)\,P_1(t)\,dt\Big| =$$

$$= \Big|\tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k)\,P_1(\tfrac{k}{n}) - \tfrac{1}{n}\int_0^N P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\,P_1(\tfrac{s}{n})\,ds\Big| =$$

$$= \tfrac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k)\,P_1(\tfrac{k}{n}) - \int_k^{k+1} P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\,P_1(\tfrac{s}{n})\,ds\Big)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}\Big|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k)\,P_1(\tfrac{k}{n}) - P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\,P_1(\tfrac{s}{n})\Big|\,ds =$$

$$= \tfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1}\int_k^{k+1}\Big|\big(\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\big)\,P_1(\tfrac{k}{n}) + P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\big(P_1(\tfrac{k}{n}) - P_1(\tfrac{s}{n})\big)\Big|\,ds.$$

Рассмотрим компоненты последнего подынтегрального выражения. Известно, что $\big|P_1(\frac{k}{n})\big| \leqslant 1$ и $\big|P_\nu(\frac{j-s}{n})\big| \leqslant 1$. Воспользовавшись леммой 2, получим

$$\big|P_1(\tfrac{k}{n}) - P_1(\tfrac{s}{n})\big| \leqslant \big|\tfrac{k}{n} - \tfrac{s}{n}\big| \leqslant \tfrac{1}{n}\,,$$

так как $s \in [k, k+1]$. Применяя индукционное предположение и лемму 2, установим, что

$$\big|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\big| \leqslant \big|\widetilde{Q}_{\nu,n}(j-k) - P_\nu(\tfrac{j-k}{n})\big| +$$

$$+ \big|P_\nu(\tfrac{j-k}{n}) - P_\nu(\tfrac{j-s}{n})\big| \leqslant \frac{A_\nu}{n} + \Big|\frac{s-k}{n}\Big| \leqslant \frac{A_\nu + 1}{n}\,.$$

Таким образом,

$$\big|\widetilde{Q}_{\nu+1,n}(j) - P_{\nu+1}(\tfrac{j}{n})\big| \leqslant \frac{1}{n}\,N\,\frac{A_\nu + 2}{n} = \frac{m(A_\nu + 2)}{n}\,.$$

Для доказательства индукционного перехода осталось положить $A_{\nu+1} = m(A_\nu + 2)$. □

3°. Пусть фиксировано натуральное число m, отличное от единицы, и заданы точки интерполяции $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{S}_{r,n}(j)$ — дискретные сплайны вида (1), удовлетворяющие интерполяционным условиям (2).

ТЕОРЕМА 1. *Коэффициенты интерполяционных сплайнов сходятся:*

$$\mathbf{c}_n(l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{c}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Если положить

$$\mathbf{S}_r(t) = \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{c}(l)\, P_r(t-l), \qquad t \in \mathbb{R},$$

то

$$\left\| \mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r(\tfrac{j}{n}) \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{равномерно по } j. \tag{7}$$

Доказательство. Следуя схеме решения интерполяционной задачи [3, с. 21], положим $h_n(l) = \widetilde{Q}_{r,n}(ln)$. Условие (2) запишется в виде $\mathbf{c}_n * h_n = \mathbf{x}$. Переходя в спектральную область, получаем эквивалентную систему уравнений

$$\mathbf{C}_n(k)\, H_n(k) = \mathbf{X}(k), \qquad k \in 0 : m-1,$$

где $\mathbf{C}_n = \mathcal{F}_m(\mathbf{c}_n)$, $H_n = \mathcal{F}_m(h_n)$, $\mathbf{X} = \mathcal{F}_m(\mathbf{x})$. Согласно предложению 2,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(l) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{Q}_{r,n}(ln) = P_r(l).$$

Следовательно, последовательность $H_n(k)$ также сходится:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{m-1} h_n(l)\, \omega_m^{-kl} = \sum_{l=0}^{m-1} P_r(l)\, \omega_m^{-kl}.$$

Положим $H(k) = \lim_{n\to\infty} H_n(k)$.

Покажем, что $H(k) > 0$ для всех k. Из [1] известно явное выражение для $H_n(k)$:

$$H_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ \left(\sin \frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \sum_{l=0}^{n-1} \left(n \sin \frac{\pi(lm+k)}{mn}\right)^{-2r}, & \text{при } k \in 1 : m-1. \end{cases}$$

Ясно, что $H(0) = 1 > 0$. Пусть $k \in 1 : m-1$. Тогда

$$H_n(k) \geqslant \left(\sin \frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \left(n \sin \frac{\pi k}{mn}\right)^{-2r} \geqslant \left(\sin \frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \left(\frac{\pi k}{m}\right)^{-2r}.$$

Таким образом,

$$H(k) \geqslant \left(\sin \frac{\pi k}{m}\right)^{2r} \left(\frac{\pi k}{m}\right)^{-2r} > 0.$$

Итак, $H(k) > 0$ для $k \in 0 : m-1$. Значит, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{C}_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{X}(k)}{H_n(k)} = \frac{\mathbf{X}(k)}{H(k)}\,.$$

Следовательно, сходятся и последовательности $\mathbf{c}_n(l)$. Осталось показать, что выполнено утверждение (7). Имеем

$$\big\|\mathbf{S}_{r,n}(j) - \mathbf{S}_r(\tfrac{j}{n})\big\| = \Big\|\sum_{l=0}^{m-1}\big(\mathbf{c}_n(l)\,\widetilde{Q}_{r,n}(j-ln) - \mathbf{c}(l)\,P_r(\tfrac{j}{n}-l)\big)\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=0}^{m-1}\Big\|\mathbf{c}_n(l)\,\big(\widetilde{Q}_{r,n}(j-ln) - P_r(\tfrac{j}{n}-l)\big)\Big\| + \Big\|\big(\mathbf{c}_n(l)-\mathbf{c}(l)\big)\,P_r(\tfrac{j}{n}-l)\Big\|.$$

В силу предложения 2

$$\widetilde{Q}_{r,n}(j-ln) - P_r(\tfrac{j}{n}-l) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{равномерно по } j.$$

Последовательность $\mathbf{c}_n(l)$ сходится, поэтому ограничена. Выражение $\mathbf{c}_n(l) - \mathbf{c}(l)$ стремится к нулю и не зависит от j, а величина $P_r(\frac{j}{n}-l)$ не превосходит единицы. Таким образом, равномерная сходимость (7) доказана. $\square$

Заметим, что из формулы (7) следует, что $\mathbf{S}_{r,n}(ln) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{S}_r(l)$. Значит, сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\mathbf{S}_r(l) = \mathbf{x}(l), \qquad l \in 0 : m-1.$$

Кроме того, вектор-функция $\mathbf{S}_r(t)$ периодична с периодом m.

4°. Перейдём к геометрической интерпретации теоремы 1. Рассмотрим дискретный интерполяционный сплайн $\mathbf{S}_{r,n}(j)$. Для наглядности соединим отрезками пары соседних точек $\mathbf{S}_{r,n}(j)$, $\mathbf{S}_{r,n}(j+1)$ для $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Получим замкнутую ломаную, проходящую через точки $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1)$. При этом между соседними точками интерполяции содержится n отрезков ломаной. При увеличении n количество отрезков ломаной будет увеличиваться, но ломаная по-прежнему будет проходить через точки $\mathbf{x}(l)$. Согласно теореме 1, при неограниченном увеличении n построенные ломаные будут стремиться к кривой, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{S}_r(t)$.

ПРИМЕР. На рисунках 1–4 штриховыми линиями изображены ломаные, соответствующие дискретным сплайнам, построенным для различных значений n по одному и тому же набору из восьми точек интерполяции. Кроме того, на каждом рисунке сплошной линией показана предельная кривая, задаваемая вектор-функцией $\mathbf{S}_r(t)$. Порядок всех сплайнов r равен двум. Точки интерполяции отмечены кружками.

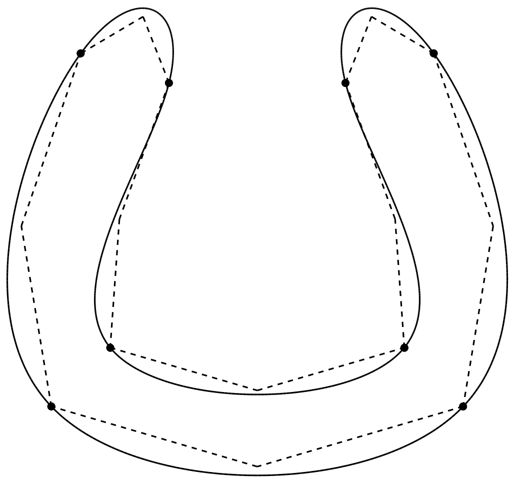

Рис. 1. $n = 2$

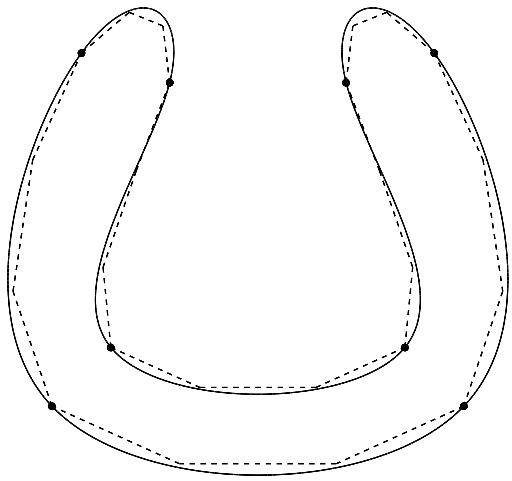

Рис. 2. $n = 3$

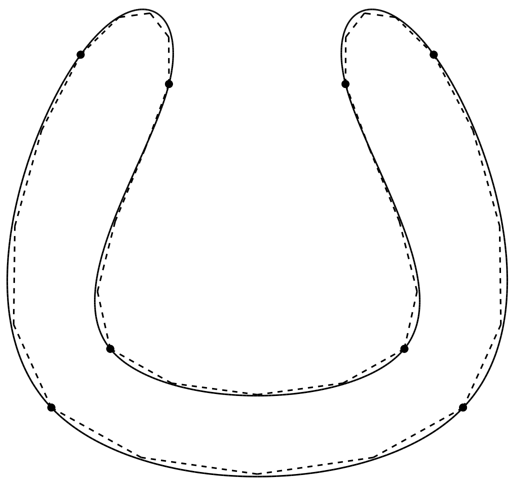

Рис. 3. $n = 4$

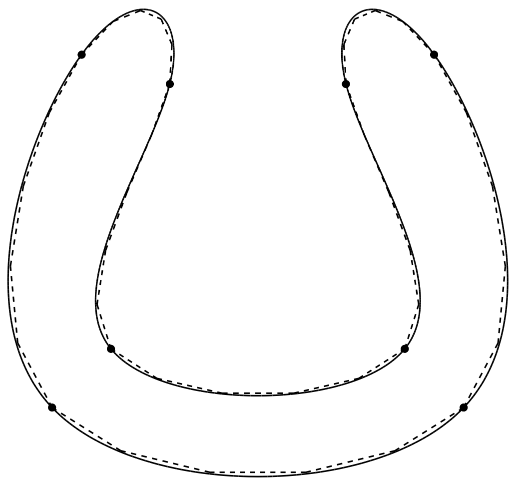

Рис. 4. $n = 5$

5°. Пусть m и r — натуральные числа, $m \geqslant 2$. Обозначим через $\widetilde{W}^r$ пространство m-периодических вектор-функций $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$.

Пусть заданы точки $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \ldots, \mathbf{x}(m-1) \in \mathbb{R}^d$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}(\mathbf{f}) := \int_0^m \left\|\mathbf{f}^{(r)}(t)\right\|^2 dt \to \min, \\
&\mathbf{f}(l) = \mathbf{x}(l), \quad l \in 0 : m-1, \\
&\mathbf{f} \in \widetilde{W}^r.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Из предложения 1 следует, что интерполяционный сплайн $\mathbf{S}_r(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}^r$.

ТЕОРЕМА 2. *Интерполяционный сплайн* $\mathbf{S}_r(t)$ *является единственным решением задачи* (8).

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая ограничениям задачи (8). Положим $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{S}_r$. Ясно, что $\mathbf{h}(l) = 0$ при $l \in 0 : m-1$ и $\mathbf{h} \in \widetilde{W}^r$. Пусть $\mathbf{h}(t) = \big(h_1(t), \ldots, h_d(t)\big)$, $\mathbf{S}_r(t) = \big(\sigma_1(t), \ldots, \sigma_d(t)\big)$. Имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{h} + \mathbf{S}_r) = \int_0^m \Big(\big\|\mathbf{h}^{(r)}(t)\big\|^2 + 2\,\big\langle \mathbf{h}^{(r)}(t), \mathbf{S}_r^{(r)}(t)\big\rangle + \big\|\mathbf{S}_r^{(r)}(t)\big\|^2 \Big) dt =$$

$$= \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r) + 2 \sum_{\alpha=1}^{d} \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r)}(t)\, dt.$$

Зафиксируем $\alpha \in 1 : d$. Интегрируя по частям, получаем

$$L(h_\alpha, \sigma_\alpha) := \int_0^m h_\alpha^{(r)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r)}(t)\, dt = h_\alpha^{(r-1)}(m)\, \sigma_\alpha^{(r)}(m) - h_\alpha^{(r-1)}(0)\, \sigma_\alpha^{(r)}(0) -$$

$$- \int_0^m h_\alpha^{(r-1)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r+1)}(t)\, dt = - \int_0^m h_\alpha^{(r-1)}(t)\, \sigma_\alpha^{(r+1)}(t)\, dt.$$

Проведя интегрирование по частям ещё $r-2$ раза, придём к равенству

$$L(h_\alpha, \sigma_\alpha) = (-1)^{r-1} \int_0^m h'_\alpha(t)\, \sigma_\alpha^{(2r-1)}(t)\, dt.$$

В силу предложения 1 функция $\sigma_\alpha^{(2r-1)}(t)$ постоянна на каждом интервале вида $(k, k+1)$, где k — целое. Поэтому

$$L(h_\alpha, \sigma_\alpha) = (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} h'_\alpha(t)\, \sigma_\alpha^{(2r-1)}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{r-1} \sum_{k=0}^{m-1} \big(h_\alpha(k+1) - h_\alpha(k)\big)\, \sigma_\alpha^{(2r-1)}(k+0)\, dt = 0.$$

Итак, $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$. Следовательно, $\mathbf{F}(\mathbf{f}) \geqslant \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$, поэтому $\mathbf{S}_r$ является решением задачи (8).

Проверим единственность решения. Если $\mathbf{F}(\mathbf{f}) = \mathbf{F}(\mathbf{S}_r)$, то $\mathbf{F}(\mathbf{h}) = 0$. Значит, $\mathbf{h}^{(r)}(t) = 0$ почти везде на отрезке $[0, m]$. Тогда вектор-функция $\mathbf{h}^{(r-1)}$ постоянна на $[0, m]$, а в силу m-периодичности — и на всей вещественной оси. Следовательно, $\mathbf{h}(t)$ — многочлен с векторными коэффициентами. Но единственный периодический многочлен — постоянная функция, что вместе с условием $\mathbf{h}(0) = 0$ приводит к тождеству $\mathbf{h}(t) \equiv 0$. Таким образом, имеем $\mathbf{f} = \mathbf{S}_r$, что доказывает единственность решения (8). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Малозёмов В. Н., Хорохонов Д. А., Чашников Н. В. *Дискретные периодические сплайны с векторными коэффициентами и геометрическое моделирование* // Семинар «DHA & CAGD». Избранные доклады. 4 сентября 2007 г. (`http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0904`).

2. Малоземов В. Н., Певный А. Б. *Дискретные периодические сплайны и их вычислительные применения* // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1998. Т. 38. №8. С. 1235–1246.

3. Малозёмов В. Н., Машарский С. М. *Основы дискретного гармонического анализа*. Часть третья. СПб.: НИИММ, 2003. 88 с.