УДК 517.98

Банаховы пространства без свойств аппроксимации типа p

Олег Рейнов[✠] и Кейзар Латиф

Основная цель этой заметки - показать, что вопрос, поставленный в [1] (см. самый конец той статьи) имеет отрицательный ответ, и что ответ на него был известен, по-существу, в 1985 г. после появления статей [2], [3] в 1982 и в 1985 годах соответственно. Для полноты изложения (и поскольку работа [3] сейчас труднодоступна даже на русском языке) мы воспроизведем некоторые из необходимых фактов из [3], возможно, с несущественными изменениями (перевод [3] с некоторыми замечаниями может быть найден в arXiv:1002.3902v1 [math.FA]).

Все обозначения и терминология, которые мы используем, — из [2], [4] или [5], и более менее стандартны. Основные сведения об общей теории абсолютно p-суммирующих, p-ядерных и других операторных идеалов можно найти в [6]. Мы, в частности, будем придерживаться следующих стандартных обозначений. Если A — ограниченное подмножество банахова пространства X, то $\overline{\Gamma(A)}$ — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка A; X_A — банахово пространство с "единичным шаром"$\overline{\Gamma(A)}$; $\Phi_A : X_A \to X$ — каноническое вложение. Для $B \subset X$ через $\overline{B}^{\tau}$ и $\overline{B}^{\|\cdot\|}$ обозначаются соответственно замыкания множества B в топологии τ и по норме $\|\cdot\|$. Когда необходимо, мы обозначаем норму в X через $\|\cdot\|_X$. Другие обозначения: Π_p, QN_p, N_p, I_p — соответственно идеалы абсолютно p-суммирующих, квази-p-ядерных, p-ядерных, строго p-интегральных операторов; $X^*\widehat{\otimes}_p Y$ — полное тензорное произведение, ассоциированное в $\mathrm{N}_p(X,Y)$; $X^*\widehat{\widehat{\otimes}}_p Y = \overline{X^* \otimes Y}^{\pi_p}$ (т.е. замыкание множества конечномерных операторов в $\Pi_p(X,Y)$). Наконец, если $p \in [1,+\infty]$, то p' — сопряженный показатель.

Напомним основное определение из [3] топологии τ_p π_p-компактной сходимости, которая в точности совпадает с λ_p-топологией в статье [1][1], где доказано, по-существу, что $T \in K_p^d(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $T \in QN_p(X,Y)$. Для банаховых пространств X, Y, *топология τ_p π_p-компактной сходимости* в пространстве $\Pi_p(Y,X)$ есть топология, базу окрестностей нуля в которой

[✠]The research was supported by the Higher Education Commition of Pakistan.

AMS Subject Classification 2000: 46B28. Spaces of operators; tensor products; approximation properties .

Key words: p-nuclear operators, approximation properties, compact approximation, nuclear tensor norms, tensor products.

[1]Определение 4.3 из [1]: "Given a compact subset $K \subset X$ we define a seminorm $||\cdot||$ on $\Pi_p(X,Y)$ given by $||T||_K = \inf\{\kappa_p^d(Ti_Z) : i_Z : Z \to X$ as above$\}$. The family of seminorms $\{||\cdot||_K : K \subset X$ is compact$\}$ determines a locally convex topology λ_p on $\Pi(X,Y)$."; — о деталях, определении отображений i_Z, и др. см. [1], Lemma 4.2.

определяют множества вида

$$\omega_{K,\varepsilon} = \{U \in \Pi_p(Y,X):\ \pi_p(U\Phi_K) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0,\ K = \overline{\Gamma(K)}$ — компактное подмножество в Y.

Предложение 1 [3]. *Пусть* R — *линейное подпространство в* $\Pi_p(Y,X)$, *содержащее* $Y^*\otimes X$. *Тогда* $(\mathrm{R},\tau_p)'$ *изоморфно факторпространству пространства* $X^*\widehat{\otimes}Y$. *Точнее, если* $\varphi \in (\mathrm{R},\tau_p)'$, *то существует элемент* $z = \sum_1^\infty x_n'\otimes y_n \in X^*\widehat{\otimes}Y$ *такой, что*

$$\varphi(U) = \operatorname{trace}\ U\circ z,\ \ U \in \mathrm{R}. \tag{$*$}$$

Обратно, для любого $z \in X^*\widehat{\otimes}Y$ *формула* $(*)$ *определяет линейный непрерывный функционал на* (R,τ_p).

Доказательство. Пусть φ — непрерывный линейный функционал на (R,τ_p). Тогда найдется окрестность нуля $\omega_K = \omega_{K,\varepsilon}$, на которой φ ограничен: $\forall U \in \omega_K,\ |\varphi(U)| \leqslant 1$. Будем считать, что $\varepsilon = 1$. Рассмотрим оператор $U\Phi_K : Y_K \xrightarrow{\Phi_K} Y \xrightarrow{U} X$. Так как отображение Φ_K компактно, то $U\Phi_K \in \mathrm{QN}_p(Y_K,X)$. Положим $\varphi_k(U\Phi_K) = \varphi(U)$ для $U \in \mathrm{R}$. На линейном подпространстве $\mathrm{R}_K = \{V \in \mathrm{QN}_p(Y_K,\,X):\ V = U\Phi_K\}$ в $\mathrm{QN}_p(Y_K,X)$ линейный функционал φ_K ограничен: если $V = U\Phi_K \in \mathrm{R}_K$ и $\pi_p(V) \leqslant 1$, то $|\varphi_K(V)| = \varphi(U)| \leqslant 1$. Поэтому φ_K можно продолжить до линейного непрерывного функционала $\widetilde{\varphi}$ на всем $\mathrm{QN}_p(Y_K,X)$; более того (в силу инъективности идеала QN_p) вложив X в подходящее пространство $C(K)$, можно считать, что $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{QN}_p(Y_K,C(K))^*$. Отметим особо, что

$$\widetilde{\varphi}(jU\Phi_K) = \varphi_K(U\Phi_K) = \varphi(U) \tag{1}$$

(j — изометрическое вложение X в $C(K)$). Далее, так как $\mathrm{QN}_p(Y_K,C(K))^* = \mathrm{I}_{p'}(C(K),(Y_K)^{**})$, то найдется оператор $\Psi : C(K) \to (Y_K)^{**}$, для которого $\widetilde{\varphi}(A) = \operatorname{trace}\Psi A,\ \ A \in (Y_K)^*\otimes C(K)$. Пусть $A_n \in (Y_K)^*\otimes C(K),\ \pi_p(A_n - jU\Phi_K) \to 0$. Тогда

$$\widetilde{\varphi}(jU\Phi_K) = \lim \operatorname{trace}\Psi A_n. \tag{2}$$

Рассмотрим оператор $\Phi_K^{**}\Psi : C(K) \xrightarrow{\Psi} (Y_K)^{**} \xrightarrow{\Phi_K^{**}} Y$. Так как $\Psi \in \mathrm{I}_{p'}$, а Φ_K компактен, то $\Phi_K^{**}\Psi \in \mathrm{N}_{p'}(C(K),Y) = C(K)^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$. Пусть $\sum_1^\infty \mu_n\otimes y_n \in C(K)^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$ — представление оператора $\Phi_K\Psi$. Положим $z = \sum j^*(\mu_n)\otimes y_n$. Элемент z порождает оператор $\Phi_K^{**}\Psi j$ из X в Y. Мы покажем сейчас, что $\operatorname{trace} U\circ z = \widetilde{\varphi}(jU\Phi_K)$ (отметим, что $U\circ z$ есть элемент пространства $X^*\widehat{\otimes}X$, поэтому след вполне определен). Имеем:

$$\operatorname{trace} U\circ z = \operatorname{trace}\left(\sum j^*(\mu_n)\otimes Uy_n\right) = \sum\langle j^*(\mu_n),Uy_n\rangle = \\ = \sum\langle\mu_n,jUy_n\rangle = \operatorname{trace} jU\Phi_K^{**}\Psi = \operatorname{trace}(jU\Phi_K)^{**}\Psi,$$

где $(jU\Phi_K)^{**}\Psi : C(K) \xrightarrow{\Psi} (Y_K)^{**} \xrightarrow{\Phi_K^{**}} Y \xrightarrow{U} X \xrightarrow{j} C(K)$. Так как $\pi_p(A_n - jU\Phi_K) \to 0$, то $\pi_p\left(A_n^{**} - (jU\Phi_K)^{**}\right) \to 0$. Кроме того, если $A := A_n = \sum_1^N w_m \otimes$

$f_m \in (Y_K)^* \otimes C(K)$, то

$$\text{trace } A_n^{**}\Psi = \sum_m \langle \Psi^* w_m, f_m\rangle = \sum_m \langle w_m, \Psi f_m\rangle = \text{trace } \Psi A.$$

Следовательно, $\text{trace}\,(jU\Phi_K)^{**}\Psi = \lim \text{trace } A_n^{**}\Psi = \lim \text{trace } \Psi A_n$. Теперь из (2) вытекает, что $\widetilde{\varphi}(jU\Phi_K) = \text{trace } U \circ z$. Наконец, из (1) получаем: $\varphi(U) = \text{trace } U \circ z$. Таким образом, функционал φ определяется некоторым элементом из $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$.

Обратно, если $z \in X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$, то положим $\varphi(U) = \text{trace}\, U \circ z$ для $U \in \mathrm{R}$ (след определен, так как $U \circ z \in X^*\widehat{\otimes}X$). Нам надо установить, что линейный функционал φ ограничен на некоторой окрестности $\omega_{K,\varepsilon}$ нуля в τ_p. Для этого нам понадобится следующий факт, доказательство которого стандартно (см. [3], лемма 1.2): *Если $z \in X^*\widehat{\otimes}_q Y$, то $z \in X^*\widehat{\otimes}_q Y_K$, где $K = \overline{\Gamma(K)}$ — некоторый компакт в Y.* Пусть K — компакт в Y, для которого $z \in X^* \otimes Y_K$. Если $U \in \omega_{K,1}$, то $\pi_p(U\Phi_K) < 1$ и $|\,\text{trace } U\Phi_K \circ z| \leqslant \|z\|_{X^*\otimes Y_K}\, \pi_p(U\Phi_K) \leqslant C$.

Следствие 1. *$(\mathrm{R}, \tau_p)' = (\mathrm{R}, \sigma)'$, где $\sigma = \sigma(\mathrm{R}, X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y)$. Таким образом, замыкания в τ_p и в σ выпуклых подмножеств в $\Pi_p(Y, X)$ совпадают.*

Предложение 2 [3]. *Если каноническое отображение $j : X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y \to \mathrm{N}_{p'}(X, Y)$ взаимно однозначно, то $\Pi_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$.*

Доказательство Если отображение j взаимно однозначно, то аннулятор $j^{-1}(0)^{\perp}$ его ядра в сопряженном к $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$ пространстве совпадает с $\Pi_p(Y, X^{**})$. С другой стороны, в любом случае $j^{-1}(0)^{\perp} = \overline{Y^* \otimes X}^*$ (замыкание в *-слабой топологии пространства $\Pi_p(Y, X^{**})$); по следствию 1.3, $\Pi_p(Y, X) \cap \overline{Y^* \otimes X}^* = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$. Поэтому $\Pi_p(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_p}$.

Для рефлексивного пространства X сопряженное к $X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y$ пространство совпадает с $\Pi_p(Y, X)$. Поэтому из последних двух утверждений вытекает

Следствие 2. *Для рефлексивного пространства X каноническое отображение $j : X^*\widehat{\otimes}_{p'}Y \to \mathrm{N}_{p'}(X, Y)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда множество конечномерных операторов плотно в пространстве $\Pi_p(Y, X)$ в топологии τ_p π_p-компактной сходимости.*

Напомним определение *свойства аппроксимации AP_p порядка $p, p \in (0, \infty]$* (см., например, [2] и [7]): банахово пространство X имеет свойство AP_p если для каждого банахова пространства Y (эквивалентно, для всякого рефлексивного банахова пространства Y, см. [2] или [5]) имеет место равенство $Y^*\widehat{\otimes}_p X = \mathrm{N}_p(Y, X)$. Теперь из предложения 1 и следствия 2 вытекает:

Следствие 3. *Для $p \in [1, \infty]$ и для каждого банахова пространства X следующие утверждения эквивалентны: 1) X имеет свойство AP_p; 2) для каждого банахова пространства Y $\overline{X^* \otimes_{p'} Y}^{\tau_{p'}} = \Pi_{p'}(X, Y)$; 3) для каждого рефлексивного банахова пространства Y $\overline{X^* \otimes_{p'} Y}^{\tau_{p'}} = \Pi_{p'}(X, Y)$; 3′) для каждого рефлексивного банахова пространства Y $\overline{X^* \otimes_{p'} Y}^{\lambda_{p'}} = \Pi_{p'}(X, Y)$.*

Как показано в [2], [4] и [5] , для всякого $p, p \in [1, \infty], p \neq 2$, существует рефлексивное банахово пространство без свойства AP_p. Таким образом, из последнего следствия мы получаем:

Следствие 4. *Для* $1 \leqslant p \leqslant \infty, p \neq 2$, *существуют рефлексивные банаховы пространства* X, Y *такие, что естественное отображение* $Y^* \widehat{\otimes}_p X \to \mathrm{N}_p(Y, X)$ *не взаимно однозначно и* $\overline{X^* \otimes_{p'} Y}^{\tau_{p'}} \neq \Pi_{p'}(X, Y)$.

Так как (мы уже говорили об этом) топология τ_q совпадает с топологией λ_q из [1], то, во-первых, мы получаем теорему 4.11 [1] (случай $q > 2$ ниже) и, во-вторых, отвечаем отрицательно на вопрос в конце статьи [1]: существует ли пространство без свойства аппроксимации "типа"q при $1 \leqslant q < 2$? Более общо, имеем:

Теорема. *Пусть* $1 \leqslant q \neq 2 \leqslant \infty$. *Тогда существует* (*рефлексивное*) *банахово пространство, не обладающее аппроксимационным свойством типа* q *в смысле определения из работы* [1].

Список литературы

[1] Sinha D.P., Karn A.K.: *Compact operators which factor through subspaces of* l_p, Math. Nachr. 281 (2008), 412-423.

[2] O.I. Reinov: *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*, Math. Nachr. 109 (1982), 125-134.

[3] O.I. Reinov: *Аппроксимация операторов в банаховых пространствах*, Применения функционального анализа в теории приближений (Калинин, КГУ), (1985), 128-142.

[4] O.I. Reinov: *Исчезновение тензорных элементов в шкале p-ядерных операторов*, Теория операторов и теория функций (Л.:ЛГУ), 1 (1983), 145-165.

[5] O. Reinov: *Свойства аппроксимации порядка p и существование не p-ядерных операторов с p-ядерными вторыми сопряженными*, ДАН СССР, 256 (1981), 43–47.

[6] A. Pietsch: Operator ideals, North-Holland, Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1978.

[7] P. Saphar: *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications lineaires*, Studia Math. 38 (1970), 71–100.

Олег Рейнов:
Математико-механический факультет, СПб государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
Abdus Salam School of Mathematical Sciences, 68-B, New Muslim Town, Lahore 54600, PAKISTAN.

E-mail address: orein51@mail.ru

Qaisar Latif:
Abdus Salam School of Mathematical Sciences, 68-B, New Muslim Town, Lahore 54600, PAKISTAN.