По следам В.А. Садовничего

П.Б.Затицкий, А.И.Назаров[*], Д.М.Столяров

11 ноября 2010 г.

Рассмотрим оператор $\mathbb{L}$, порождаемый дифференциальным выражением

$$ly \equiv (-1)^m D^{2m} y + \sum_{k=0}^{2m-2} p_k(x) D^k y$$

(здесь $p_k \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ – вещественные функции) и граничными условиями

$$P_j(D)y(0) = 0, \qquad j = 1, \dots, m$$

(здесь P_j – полином степени k_j с вещественными коэффициентами, причем граничные условия считаются *приведенными*, т.е. $0 \le k_1 < k_2 < ... < k_m \le 2m-1$).

Допустим, что этот оператор самосопряжен в пространстве $L_2([0,\infty))$, полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$, занумерованный по возрастанию с учетом кратности.

Пусть $\mathbb{Q}$ – оператор умножения на вещественную функцию $q \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$. Тогда оператор $\mathbb{L} + \mathbb{Q}$ также имеет чисто дискретный спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Вычислению спектральных функций и регуляризованных следов для дифференциальных операторов посвящена обширная литература, начиная с классической работы [1]. В частности, в работе [2] на основании результатов [3] была получена следующая теорема (приводится с некоторыми переобозначениями):

Пусть функция q имеет ограниченный носитель[1]*, и функция $\psi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x q(t)dt$ имеет ограниченную вариацию. Пусть, кроме того,*

$$\Delta(r) \equiv \det\left[P_j(iz^{\ell-1}r)\right]_{\ell,j=1}^m \ne 0, \qquad r \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \tag{1}$$

(здесь и далее $z = \exp(i\pi/m)$). Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{S}_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mu_n - \lambda_n - \frac{c_n}{\pi}\int_0^\infty q(t)dt\right] = -\frac{1}{\pi}\lim_{s\to+\infty}\int_0^{+\infty} q(x)\cdot\int_0^s Re\Big(\frac{\widehat{\Delta}(x,r)}{\Delta(r)}\Big)\,drdx, \tag{2}$$

где

$$c_1 = \lambda_1^{\frac{1}{2m}}; \qquad c_n = \lambda_n^{\frac{1}{2m}} - \lambda_{n-1}^{\frac{1}{2m}}, \quad n > 1,$$

---

[*]Работа второго автора частично поддержана грантом НШ4210.2010.1.

[1]Это условие в [2] отсутствует, по-видимому, в результате опечатки. Для того, чтобы воспользоваться формулой А.Г. Костюченко [4] без этого условия, необходима глобальная оценка разности спектральных функций оператора $\mathbb{L}$ и оператора без младших членов. В общем случае такая оценка нам неизвестна.

$$\widehat{\Delta}(x,r)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{m} z^{\alpha-1}\exp(i(z^{\alpha-1}+z^{\beta-1})\,xr)\cdot\Delta_{\alpha\beta}(r),$$

а определитель $\Delta_{\alpha\beta}(r)$ *получается из* $\Delta(r)$ *заменой в* β*-ой строке* $P_j(iz^{\beta-1}r)$ *на* $P_j(-iz^{\alpha-1}r)$.

Целью настоящей заметки является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть, в условиях предыдущей теоремы,* $P_j(D)=D^{k_j}$. *Тогда*

$$\mathcal{S}_1=-\psi(0+)\Big(\frac{m}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}\cdot\sum_{j=1}^{m}k_j\Big).\qquad(3)$$

Замечание. Формула (3) была доказана в работах [5] и [2] в трех частных случаях: 1) $k_j=2j-2$; 2) $k_j=2j-1$; 3) $k_j=j-1$. Общая формула была высказана А.И. Назаровым как гипотеза на конференции в Москве во время доклада А.С. Печенцова.

Доказательство. Как указано в [2], граничные условия $D^{k_j}y(0)=0$, $j=1,\dots,m$, удовлетворяют ограничению (1). Несложно проверить также, что в этом случае величины $B_{\alpha\beta}=\frac{\Delta_{\alpha\beta}(r)}{\Delta(r)}$ не зависят от r. Взяв внутренний интеграл в (2), получим

$$\mathcal{S}_1=-\frac{1}{\pi}\lim_{s\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}q(x)\cdot Re\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{m}z^{\alpha-1}B_{\alpha\beta}\;\frac{\exp(i(z^{\alpha-1}+z^{\beta-1})\,xs)-1}{i(z^{\alpha-1}+z^{\beta-1})\,x}\Big)\,dx,$$

Положим $w_j=z^{k_j}$ и определим матрицы V и W порядка m так:

$$W_{\ell j}=w_j^{\ell-1};\qquad V_{\ell j}=(-1)^{k_j}W_{\ell j}.$$

Тогда по формуле Крамера имеем

$$B_{\ell j}=(VW^{-1})_{\ell j}=(W\cdot\mathrm{diag}[(-1)^{k_1},\dots,(-1)^{k_m}]\cdot W^{-1})_{\ell j}.$$

Отсюда видно, что если $e^{(j)}=[1,w_j,\dots,w_j^{m-1}]^T$ – j-й столбец матрицы W, то $Be^{(j)}=(-1)^{k_j}e^{(j)}$, т.е. векторы $e^{(j)}$ образуют собственный базис матрицы B.

Лемма 1. $\Pi B\Pi=\overline{B}$, *где* Π – *матрица перестановок* $\Pi_{\ell j}=\delta^{\ell}_{m+1-j}$.

Доказательство. Для любого $j=1,\dots,m$ имеем

$$\Pi\overline{e^{(j)}}=\Pi[1,w_j^{-1},w_j^{-2},...,w_j^{-(m-1)}]^T=[w_j^{-(m-1)},w_j^{-(m-2)},...,w_j^{-1},1]^T=w_j^{-(m-1)}e^{(j)}.$$

Поэтому

$$\Pi B\Pi\overline{e^{(j)}}=w_j^{-(m-1)}\Pi Be^{(j)}=(-1)^{k_j}w_j^{-(m-1)}\Pi e^{(j)}=(-1)^{k_j}\Pi^2\overline{e^{(j)}}=(-1)^{k_j}\overline{e^{(j)}},$$

что равносильно утверждению леммы. □

Определим матрицу P следующим образом:

$$P_{j\ell}=\frac{z^{\ell-1}}{z^{\ell-1}+z^{j-1}}=\frac{1}{1+z^{j-\ell}}.$$

Лемма 2. *Для любых* $\ell, j = 1, \ldots, m$ *имеем*

$$\overline{P_{j\ell}B_{\ell j}} = P_{m+1-j,m+1-\ell}B_{m+1-\ell,m+1-j}. \tag{4}$$

В частности, $Im\,(\mathbf{Sp}(PB)) = 0$.

Доказательство. Последнее равенство очевидно следует из формулы (4), которая равносильна $\Pi PB\Pi = \overline{PB}$, что, в свою очередь, следует из леммы 1 и тривиального $\Pi P\Pi = \overline{P}$. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Перепишем формулу для $\mathcal{S}_1$ так:

$$\mathcal{S}_1 = -\frac{1}{\pi}\lim_{s\to\infty}\int\limits_0^\infty q(x)g(sx)s\,dx, \tag{5}$$

где

$$g(y) = Im\Big(\sum_{\ell,j=1}^m P_{j\ell}B_{\ell j}\ \frac{\exp(i(z^{\ell-1}+z^{j-1})\,y)-1}{y}\Big) = \\ = Im\Big(\sum_{\ell,j=1}^m P_{j\ell}B_{\ell j}\ \frac{\exp(i(z^{\ell-1}+z^{j-1})\,y)}{y}\Big)$$

(последнее равенство следует из леммы 2).

Для перехода к пределу в (5) в слагаемом с $\ell = j = 1$ следует воспользоваться принципом локализации Римана (см., напр., [6, гл.I, §33]) и признаком сходимости Валле-Пуссена ([6, гл.III, §3]), в остальных слагаемых после однократного интегрирования по частям работает теорема Лебега, поскольку $Re(i(z^{\ell-1}+z^{j-1})) < 0$. В результате получаем

$$\mathcal{S}_1 = -\frac{1}{\pi}\psi(0+)\int\limits_0^\infty g(y)\,dy. \tag{6}$$

Вновь воспользовавшись леммой 2, получим

$$\int\limits_0^\infty g(y)\,dy = Im\Big(\sum_{\ell,j=1}^m P_{j\ell}B_{\ell j}\ \int\limits_0^\infty \frac{\exp(i(z^{\ell-1}+z^{j-1})\,y)-\exp(-y)}{y}\,dy\Big) = \\ = -Im\Big(\sum_{\ell,j=1}^m P_{j\ell}B_{\ell j}\ \ln(-i(z^{\ell-1}+z^{j-1}))\Big) = \\ = -Re\Big(\sum_{\ell,j=1}^m P_{j\ell}B_{\ell j}\ \arg(-i(z^{\ell-1}+z^{j-1}))\Big)$$

(последнее равенство следует из (4)).

Поскольку $\arg(-i(z^{\ell-1}+z^{j-1})) = \frac{\pi}{2}(\frac{\ell+j-2}{m}-1)$, имеем

$$\int\limits_0^\infty g(y)\,dy = -\frac{\pi}{2}\,Re\Big(\sum_{\ell,j=1}^m P_{j\ell}B_{\ell j}\ \big(\tfrac{\ell+j-2}{m}-1\big)\Big) = \frac{\pi}{2m}\mathbf{Sp}(PB) \tag{7}$$

(последнее равенство вновь следует из (4)).

По формуле суммы геометрической прогрессии матрицу P можно переписать так:

$$P = \lim_{\rho \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rho^n \, \varphi_n \overline{\varphi}_n^T, \tag{8}$$

где $\varphi = (1, z^n, \ldots, .., z^{(m-1)n})^T$.

Введем множество $\mathbb{K} = \{k_j + 2mp \mid 1 \le j \le m, \quad p \in \mathbb{Z}_+\}$.

Лемма 3. *Если $n \in \mathbb{K}$, то $\mathbf{Sp}(\varphi_n \overline{\varphi}_n^T B) = (-1)^n m$. Если $n \notin \mathbb{K}$, то $\mathbf{Sp}(\varphi_n \overline{\varphi}_n^T B) = (-1)^{n+1} m$.*

Для доказательства нам потребуется такое очевидное предложение.

Предложение 1. *Пусть u, v – векторы гильбертова пространства, $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда если $(au + bv, u) = 0$, то $(au + bv, -au + bv) = |au + bv|^2$.*

Доказательство леммы 3. Прежде всего,

$$\mathbf{Sp}(\varphi_n \overline{\varphi}_n^T B) = \mathbf{Sp}(\overline{\varphi}_n^T B \varphi_n) = (B\varphi_n, \varphi_n).$$

Рассмотрим подпространства

$$U = Lin\{e^{(j)} \mid k_j \equiv 1 \pmod 2\}; \qquad V = Lin\{e^{(j)} \mid k_j \equiv 0 \pmod 2\}$$

(векторы $e^{(j)}$ определены перед леммой 1).

Мы знаем, что на U матрица B действует умножением на -1, а на V тождественным образом. Заметим, что $U \dotplus V = \mathbb{C}^m$, так как векторы $e^{(j)}$ образуют базис. Таким образом, существует разложение вектора $\varphi_n = u + v$, где $u \in U$, $v \in V$. Тогда $B\varphi_n = -u + v$.

1. Если $n \in \mathbb{K}$, то φ есть собственный вектор матрицы B с собственным числом $(-1)^n$. Поэтому $(B\varphi_n, \varphi_n) = (-1)^n (\varphi_n, \varphi_n) = (-1)^n m$.

2. Если $n \notin \mathbb{K}$ и $n \equiv 1 \pmod 2$, то прямой подсчет показывает, что $\varphi \perp U$. Согласно предложению 1, $(B\varphi_n, \varphi_n) = |\varphi_n|^2 = m$.

3. Аналогично, если $n \notin \mathbb{K}$ и $n \equiv 0 \pmod 2$, то $\varphi \perp V$ и, согласно предложению 1, $-(B\varphi_n, \varphi_n) = |\varphi_n|^2 = m$. □

Для завершения доказательства теоремы обозначим $K = \{k_1, ..., k_m\}$. Тогда из формулы (8) и леммы 3 получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{Sp}(PB) &= \lim_{\rho \to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rho^n \mathbf{Sp}(\varphi_n \overline{\varphi}_n^T B) = \\
&= m \lim_{\rho \to 1-} \Big(\sum_{n \in \mathbb{K}} (-1)^n \rho^n (-1)^n + \sum_{0 \le n \notin \mathbb{K}} (-1)^n \rho^n (-1)^{n+1} \Big) \\
&= m \lim_{\rho \to 1-} \Big(\sum_{j \in K} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^{j+2mp} - \sum_{0 \le j < 2m, j \notin K} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^{j+2mp} \Big) \\
&= m \lim_{\rho \to 1-} \Big(\sum_{j \in K} \frac{\rho^j}{1 - \rho^{2m}} - \sum_{0 \le j < 2m, j \notin K} \frac{\rho^j}{1 - \rho^{2m}} \Big).
\end{aligned}$$

Поскольку множество K содержит ровно m элементов, имеем

$$\mathbf{Sp}(BP) = m \lim_{\rho\to 1-} \Big(\sum_{j\in K} \frac{\rho^j - 1}{1-\rho^{2m}} - \sum_{0\le j<2m, j\notin K} \frac{\rho^j - 1}{1-\rho^{2m}} \Big) =$$

$$= m\Big(\sum_{j\in K} \frac{-j}{2m} - \sum_{0\le j<2m, j\notin K} \frac{-j}{2m} \Big) = \frac{1}{2} \sum_{0\le j<2m} j - \sum_{j\in K} j =$$

$$= \frac{m(2m-1)}{2} - \sum_{j=1}^{m} k_j. \quad (9)$$

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (6), (7) и (9). □

Мы признательны А.С. Печенцову и А.И. Козко, которые предоставили нам тексты статей [2] и [3].

Список литературы

[1] Б.М. Левитан, *Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям самосапряжённого дифференциального уравнения второго порядка*, Изв. АН СССР, сер. матем. 1953. I. Т.17, 331–364; II. Т.19, 33–58.

[2] В.А. Садовничий, А.С. Печенцов, А.И.Козко, *Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов*, Доклады РАН, 2009. Т.427, N4, 461–465.

[3] А.И.Козко, А.С.Печенцов, *Спектральная функция сингулярного оператора порядка $2m$*, Изв. РАН, в печати.

[4] А.Г. Костюченко, *Асимптотика спектральной функции сингулярного оператора порядка $2m$*, Докл. АН СССР, Т.168, N2, 276–279.

[5] А.И. Козко, А.С. Печенцов, *Спектральная функция и регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков*, Мат. заметки. 2008. Т.83, N1, 39–49.

[6] Н.К. Бари, *Тригонометрические ряды*, М., Физматлит, 1961.