Об обобщении неравенства Пойа-Сеге для одномерных функционалов *

С. В. Банкевич А. И. Назаров †

(Sergey.Bankevich@gmail.com) (al.il.nazarov@gmail.com)

11 ноября 2010 г.

SPb. Math. Society Preprint 2010-05 11 Nov 2010

1 Введение

Хорошо известно, что для неотрицательной измеримой функции u, заданной на $\Omega = [-1, 1]$, справедливо так называемое послойное представление (см., например, [1, гл. 1]):

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{\{x\in\Omega:\ u(x)>t\}}\, dt.$$

Для измеримого множества $E \subset \Omega$ введем множества

$$E^* = [1 - |E|\,, 1], \qquad E^\circ = (-\frac{|E|}{2}, \frac{|E|}{2}).$$

Определим монотонную и симметричную перестановки функции u следующим образом (см. [2, гл. 10]):

$$u^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{x\in\Omega:\ u(x)>t\}^*}\, dt; \qquad u^\circ = \int_0^\infty \chi_{\{x\in\Omega:\ u(x)>t\}^\circ}\, dt.$$

Легко видеть, что

$$u^*(x) = u^\circ(\frac{x+1}{2}). \tag{1}$$

Пусть $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ — непрерывная функция, четная и выпуклая по второму аргументу, $a : \Omega\times\mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ — непрерывная функция. Введем функционал

$$\int_\Omega F(u(x), |a(x, u(x))u'(x)|)dx, \tag{2}$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00729 и ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“.

†Санкт-Петербургский государственный университет

определенный на множестве $\mathcal{M}$ тех функций $u \in W_1^1(\Omega)$, для которых интеграл в (2) сходится.

Свойства монотонности функционалов при перестановках изучались многими авторами (см., например, [3] и цитированную там литературу). В частности, хорошо известно, что если $a \equiv const$, то

$$I(u^*) \leqslant I(u) \tag{3a}$$

Если же вдобавок $u(\pm 1) = 0$, то

$$I(u^\circ) \leqslant I(u). \tag{3b}$$

В работе [4] изучалось поведение функционала (2) и его многомерного аналога при симметричной перестановке. Именно, было показано, что если a — четная и выпуклая по x функция, то неравенство (3b) выполнено для любой кусочно линейной функции u. Далее, в [4] утверждалось, что для функций $u \in \mathcal{M}$ это неравенство получается простой аппроксимацией. Однако при этом не была учтена и исключена возможность возникновения эффекта Лаврентьева (см., например, [5, гл. 4]) для функционала (2). Таким образом, доказательство неравенства (3b) для общего случая в [4] содержит пробел.

В параграфе 6 данной работы мы устанавливаем отсутствие эффекта Лаврентьева для функционалов вида (2) с четным, выпуклым по x весом a и, таким образом, доказываем неравенство (3b) в полном объеме. Отметим, что для многомерного случая вопрос остается открытым.

Основная часть нашей работы посвящена более трудному неравенству (3a). Для липшицевых функций u мы доказываем его только при необходимых условиях на весовую функцию. Перенести (3a) на произвольные функции $u \in \mathcal{M}$ пока что удалось лишь при некоторых дополнительных ограничениях.

В доказательстве мы модифицируем конструкцию из работы [6], в которой отсутствие эффекта Лаврентьева было доказано для функционалов (2) с $a \equiv const$ и функцией F общего вида.

Отметим, что в работе [7] рассматривалось неравенство (3a) при дополнительном условии $u(-1) = \min\limits_{\Omega} u$. Однако, как класс функций F, так и класс допустимых весов в этой работе далек от оптимального, и наши результаты для этого случая, сформулированные в параграфе 5, сильнее, чем в [7].

2 Необходимые условия на вес

Напомним, что функция a предполагается неотрицательной.

Утверждение 1. *Для того, чтобы неравенство (3a) выполнялось для любой строго выпуклой F и любой кусочно линейной функции u, вес a должен быть четным по x и удовлетворять условию*

$$\forall s \leqslant t \in [-1, 1], \quad \forall u \in \mathbb{R} \qquad a(s, u) + a(t, u) \geqslant a(1 - t + s, u). \tag{4}$$

Замечание. Если a вогнута и четна по x, то она удовлетворяет условию (4).

Утверждение 2. *Если для функции a, удовлетворяющей условию (4), найдутся такие $x_0 \in [-1,1]$, $u_0 \in \mathbb{R}$, что $a(x_0,u_0) = 0$, то $a(1,u_0) = 0$ и функция $a(\cdot,u_0)$ периодична на $[x_0,1]$.*

Замечание. Если, вдобавок к условиям предложения 2, функция $a(\cdot,u_0)$ четна, то она периодична на всем отрезке $[-1,1]$ с периодом, делящим x_0+1 нацело.

3 Результат на кусочно липшицевых функциях

Определение 1. *Пусть a — непрерывная функция на $[-1,1]\times\mathbb{R}$, причем для любого u функция $a(\cdot,u)$ имеет конечное число нулей. Определим $\mathcal{W}(a)$ как множество кусочно абсолютно непрерывных на $[-1,1]$ функций u, таких, что если $\hat{x}$ — какая-нибудь точка разрыва, то $a(\hat{x},\cdot) \equiv 0$ на отрезке $[u(\hat{x}-), u(\hat{x}+)]$. Будем говорить, что последовательность $u_n \in \mathcal{W}(a)$ сходится к $u \in \mathcal{W}(a)$, если u_n абсолютно непрерывны на всех участках Ω_k абсолютной непрерывности u и для каждого k выполняется $u_n \to u$ в $W_1^1(\Omega_k)$.*

Для функций $u \in \mathcal{W}(a)$ определим интеграл в (2) как сумму интегралов, взятых по промежуткам абсолютной непрерывности функции u. Определим также множество $\widetilde{\mathcal{M}}(a)$ функций $u \in \mathcal{W}(a)$, для которых такой интеграл сходится.

Очевидно, что любая кусочно липшицева функция $u \in \mathcal{W}(a)$ лежит в $\widetilde{\mathcal{M}}(a)$.

Теорема 1. *Пусть весовая функция a четна по x и удовлетворяет условию (4). Тогда, если функция $u \in \mathcal{W}(a)$ кусочно линейна между любыми двумя разрывами, то $u^* \in \mathcal{W}(a)$, u^* кусочно линейна между разрывами, и выполнено неравенство (3a).*

Теорема 1 доказывается непосредственным вычислением с использованием предложения 2.

Утверждение 3. *Функционал $I(u)$ слабо полунепрерывен снизу в $\mathcal{W}(a)$.*

Теорема 2. *Пусть весовая функция a удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда для любой кусочно липшицевой функции $u \in \mathcal{W}(a)$ справедливо неравенство (3a).*

Доказательство. Для любой кусочно липшицевой функции u найдется последовательность кусочно линейных u_n, такая, что

$$u_n \to u \text{ в } \mathcal{W}(a) \quad \text{и} \quad I(u_n) \to I(u). \tag{5}$$

Но тогда из результата [4, Theorem 1, part 2], формулы (1) и теоремы 1 следует, что $u_n^* \rightharpoonup u^*$. Применение предложения 3 заканчивает доказательство. □

4 Переход к соболевским функциям

Теорема 3. *Пусть весовая функция a удовлетворяет условиям теоремы 1 и убывает по x на $[0,1]$. Тогда для любой функции $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(a)$ справедливо неравенство (3a).*

Для доказательства мы распространяем конструкцию из [6] на случай монотонного веса. Это дает возможность построить последовательность липшицевых функций u_n, удовлетворяющую условию (5). Результат следует из теоремы 2 и предложения 3.

Теорема 4. *Пусть $a(x,u) = \mathfrak{a}(x)\mathfrak{A}(u)$, причем $\mathfrak{a}$ четна и удовлетворяет условию (4). Тогда для любой функции $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(a)$ справедливо неравенство (3a).*

Доказательство проводится в несколько этапов.

Утверждение 4. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть, кроме того, $\mathfrak{a}$ кусочно монотонна и постоянна в окрестностях ненулевых локальных минимумов. Тогда для любой функции $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(a)$ справедливо неравенство (3a).*

Замечание. В силу предложения 2 функция $\mathfrak{a}$ не может быть постоянна в окрестности нулевого локального минимума, если только $\mathfrak{a} \not\equiv 0$.

Для доказательства мы применяем схему аппроксимации из [6] на всех промежутках монотонности $[x_k, x_{k+1}]$ функции $\mathfrak{a}$. Это приводит к возникновению разрывов у приближающих функций в точках x_k, в которых $\mathfrak{a}$ имеет локальный минимум. Если $\mathfrak{a}(x_k) = 0$, то такой разрыв не выводит функции из класса $\mathcal{W}(a)$. Если же $\mathfrak{a}(x_k) > 0$, то $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}(x_k)$ в некоторой окрестности x_k. Выберем в этой окрестности такую точку $\hat{x}$, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{u(\hat{x}+\varepsilon)-u(\hat{x}-\varepsilon)}{2\varepsilon} = u'(\hat{x})$. Применим конструкцию из [6] на промежутках монотонности $[x_{k-1}, \hat{x}-\varepsilon]$ и $[\hat{x}+\varepsilon, x_{k+1}]$, а на $[\hat{x}-\varepsilon, \hat{x}+\varepsilon]$ доопределим приближающие функции линейно. Это дает (5). Применение теоремы 2 и предложения 3 заканчивает доказательство.

Утверждение 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть, кроме того, $\mathfrak{a}$ кусочно монотонна. Тогда для любой функции $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(a)$ справедливо неравенство (3a).*

Для доказательства рассмотрим функцию $(1-\varepsilon)\mathfrak{a}(x)$ и в окрестности каждой точки x_k локального минимума заменим ее на $\max\{(1-\varepsilon)\mathfrak{a}(x), \mathfrak{a}(x_k)\}$. Обозначим полученную функцию $a_\varepsilon(x)$, а соответствующий ей функционал в (2) $I_\varepsilon(u)$. Можно показать, что функции a_ε удовлетворяют условию (4). Применяя к I_ε предложение 4, а затем теорему о монотонной сходимости под знаком интеграла, получим требуемое утверждение.

Для доказательства теоремы 4 мы интерполируем функцию $(1-\varepsilon)\mathfrak{a}$ кусочно линейными сплайнами $\mathfrak{a}_{\varepsilon k}$ по равномерной сетке с шагом $2^{-k}T$, где T — расстояние между соседними нулями $\mathfrak{a}$ (если нулей нет, считаем $T = 2$). При этом $k = k(\varepsilon, \delta)$ выбирается столь большим, что $\mathfrak{a}_{\varepsilon k} \leqslant \mathfrak{a}$ вне δ-окрестностей нулей функции $\mathfrak{a}$. Можно показать, что функции $\mathfrak{a}_{\varepsilon k}$ удовлетворяют условию (4). Теперь рассмотрим последовательность $\varepsilon_j = 2^{-j}$ и введем функцию $\mathfrak{a}_n(x) = \max\limits_{j\leqslant n} \mathfrak{a}_{\varepsilon_j, k(\varepsilon_j)}(x)$. Тогда функция $\mathfrak{a}_n$ кусочно линейна, и можно показать, что она удовлетворяет условию (4). Кроме того, $a_n(x,u) \equiv \mathfrak{a}_n(x)\mathfrak{A}(u) \nearrow a(x,u)$ вне δ-окрестности нулей $\mathfrak{a}$. Пусть u — функция из $\widetilde{\mathcal{M}}(a)$, такая, что $u' = 0$ в проколотых δ-окрестностях нулей $\mathfrak{a}$ (обозначим множество таких функций $\widetilde{\mathcal{M}}_\delta(a)$). Тогда для любого n выполнено $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(a_n)$, и, согласно предложению 5, для соответствующих функционалов I_n справедливо неравенство $I_n(u^*) \leqslant I_n(u)$. По теореме 1 и теореме о монотонной сходимости получаем (3a) для указанного класса функций u. Для произвольной функции $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(a)$ аппроксимируем ее в $\mathcal{W}(a)$ функциями $u_\delta \in \widetilde{\mathcal{M}}_\delta(a)$, полагая $u_\delta \equiv u$ вне δ-окрестностей нулей $\mathfrak{a}$. Легко видеть, что $I(u_\delta) \to I(u)$, откуда по предложению 3 следует утверждение теоремы.

5 Неравенство для функций, закрепленных на левом конце

Рассмотрим теперь поведение функционала I при монотонной перестановке, если функция u подчинена дополнительному условию

$$u(-1) = \min_{[-1,1]} u \geqslant 0. \tag{6}$$

Утверждение 6. *Для того, чтобы неравенство (3a) выполнялось для любой кусочно линейной функции u, подчиненной условию (6), и любой строго выпуклой F, вес a должен удовлетворять условию (4).*

Замечание. Если $a(\cdot, u)$ — невозрастающая функция, то она удовлетворяет (4).

Теорема 5. *Пусть выполнено одно из двух условий:*

1. *$a(\cdot, u)$ — невозрастающая функция при всех u.*
2. *$a(x, u) = \mathfrak{a}(x)\mathfrak{A}(u)$, где $\mathfrak{a}$ удовлетворяет условию (4).*

Тогда для любой функции $u \in \widetilde{\mathcal{M}}(a)$, подчиненной условию (6), выполняется неравенство (3a).

Теорема 5 доказывается аналогично теореме 4.

В работе [7] рассматривалось неравенство (3a) при условии (6) для функционалов с интегрантом вида $F(|u'|)a(x)$. При этом предполагалось, что a — неубывающая функция. Отметим, что для $F(t) = t^p$ интегрант в [7] приводится к виду (2), причем условия на вес в теореме 5 заметно слабее, чем в [7]. Кроме того, в [7] накладывались дополнительные ограничения на рост функции F.

6 Неравенство для симметричной перестановки

Напомним, что в работе [4] было доказано неравенство (3b) для липшицевых функций u, удовлетворяющих условию $u(\pm 1) = 0$, если вес a четный и выпуклый по x.

Утверждение 7. *Четность и выпуклость по x весовой функции $a(\cdot, u)$ — необходимые условия для того, чтобы неравенство (3b) выполнялось для любой кусочно линейной функции u с $u(\pm 1) = 0$.*

Теорема 6. *Пусть функция* $a(\cdot, u)$ — *четная и выпуклая при всех* $u \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой* $u \in \overset{o}{W}{}_1^1(-1,1)$ *справедливо неравенство (3b).*

Аналогично теореме 4, доказательство проводится в два этапа.

Утверждение 8. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Пусть, кроме того,* $a(\cdot, u)$ *постоянна в некоторой окрестности* $x = 0$. *Тогда для любой функции* $u \in \overset{o}{W}{}_1^1$ $(-1,1)$ *справедливо неравенство (3b).*

Доказательство аналогично доказательству предложения 4. А именно, выбрав $\hat{x}$ как в предложении 4, мы приближаем функцию u липшицевыми на промежутках $[-1, \hat{x} - \varepsilon]$ и $[\hat{x} + \varepsilon, 1]$, а на $[\hat{x} - \varepsilon, \hat{x} + \varepsilon]$ заменяем на линейную.

Для доказательства теоремы 6 приблизим снизу функцию a функциями $a_t(x, u) \equiv (a(x, u) - a(t, u))_+ + a(0, u)$, удовлетворяющими условиям предложения 8. По теореме о монотонной сходимости получим требуемое утверждение.

Список литературы

[1] Э. Либ, М. Лосс. Анализ. Новосибирск; Научная книга, 1998. 276 с.

[2] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. М.; ИЛ, 1948. 456 с.

[3] B. Kawohl. Rearrangements and convexity of level sets in PDE, Lecture notes in mathematics 1150. Berlin; Springer Verlag, 1985. 134 p.

[4] F. Brock. // Calc. Var. 1999. V. 8. P. 15–25.

[5] Дж. Буттацо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт. Одномерные вариационные задачи. Введение. Новосибирск; Научная книга, 2002. 248 с.

[6] G. Alberti, F. Serra Cassano // Ser. Adv. Math. Appl. Sci. 1994. V. 18. P. 1–17.

[7] R. Landes // Math. Nachr., V. 280, Iss. 5–6. P. 560–570.