Аппроксимация операторов в сопряженных пространствах сопряженными операторами

О. И. Рейнов

История рассматриваемых в заметке вопросов началась где-то в 1983 г. с одного письменного вопроса Ю. А. Брудного (Yu. A. Brudnyĭ) и, почти одновременно, с другого (также письменного) вопроса Стена Кайзера (S. Kaijser) . Первый вопрос касался аппроксимации (в некоторой топологии) линейных непрерывных операторов, действующих в сопряженных банаховых пространствах, сопряженными операторами. Во втором речь шла, в частности, о существовании ненулевого линейного непрерывного функционала на пространстве $\mathrm{L}(X, Y^{**})$ всех ограниченных линейных отображений из банахова пространства X во второе сопряженное к банахову пространству Y, который обращается в тождественный нуль на подпространстве $\mathrm{L}(X, Y)$ всех операторов из X в Y и который порождается проективным тензорным элементом (из $Y^*\widehat{\otimes}X$). Из нестрогого описания указанных вопросов более менее ясно, что они тесно связаны между собой, и поэтому не является неожиданным, что и ответы на эти вопросы были получены одновременно автором данной заметки (см., например, [**7**]; [**2**], pp. 282–286); другие, более тонкие, либо более общие, варианты ответов можно найти в [**8**], [**6**] или arXiv:1002.3902v1 [math.FA]), или в [**9**].

Перед тем как объяснить, почему мы начали заметку ссылками на 1980-е годы, приведем несколько вопросов Ю. А. Брудного и С. Кайзера.

(i) (Yu. A. Brudnyĭ). Верно ли, что единичный шар пространства $\mathrm{L}(X, Y)$ плотен в единичном шаре пространства $\mathrm{L}(Y^*, X^*)$ в топологии поточечной $Y^*\times X$-сходимости? [Здесь, как обычно, L — банахов идеал всех (ограниченных линейных) операторов с обычной операторной нормой.]

(ii) (Yu. A. Brudnyĭ; см. также [**1**]). Обозначим через $W(Y^*, X^*)$ множество тех операторов T из Y^* в X^*, для которых существует число $\gamma = \gamma(T) > 0$ такое, что

$$|\langle Ty', x\rangle| \leqslant \gamma\ \sup\{|\langle y', Sx\rangle| :\ S\in \mathrm{L}(X, Y),\ \|S\|\leqslant 1\}\quad \forall\, x, y';\ \|x\|, \|y'\|\leqslant 1,$$

и положим $\|T\|_W = \inf\gamma$. Верно ли, что $W(Y^*, X^*) = \mathrm{L}(Y^*, X^*)$?

(iii) (S. Kaijser). Существуют ли банахово пространство Z, элемент $z\in Z^*\widehat{\otimes}Z$ проективного тензорного произведения А. Гротендика и оператор $\Psi\in \mathrm{L}(Z, Z^{**})$ такие, что $\operatorname{trace}\Psi\circ z = 1$, но $\operatorname{trace}\Phi\circ z = 0$ для любого $\Phi\in \mathrm{L}(Z, Z)$?

Как говорилось несколькими строками ранее, ответы (отрицательный на первый вопрос, положительный — на второй и положительный — на третий) были получены автором в работах [**7**], [**6**], [**9**], [**8**]; см. также arXiv:1002.3902v1

*The research was supported by the Higher Education Commission of Pakistan.

[math.FA]. Подробное обсуждение вопросов $(i) - (ii)$ можно найти и в монографии [**2**], pp. 282–286. В тех же работах [**6**] и [**9**], arXiv:1002.3902v1 [math.FA] рассмотрены более общие чем (i) и (iii) вопросы, в которых идеал L заменен на идеалы Π_p и Π_p^{dual} (p-абсолютно суммирующих и дуально p-абсолютно суммирующих операторов). Мы здесь, однако, ограничимся рассмотрением лишь случая идеала L, — по причинам продолжения истории с проблемами $(i)-(iii)$ в 2000-х годах, а именно, в апреле 2010-го года.

В апреле 2010-го года (точнее, 28-го апреля) на сайте Math Overflow математик Ady задал важный для него вопрос:

(A) "Is any continuous linear operator from a dual Banach space to a separable Hilbert space the strong-operator limit of a net of adjoint operators of less or equal norm?"(http://mathoverflow.net/questions/22799)

[Подробнее: "Пусть E — произвольнок банахово пространство и пусть $T : E^* \to l^2$ — линейный непрерывный оператор. Верно ли, что T должен быть SO-пределом (т.е. пределом в сильной операторной топологии) некоторой сети (S_d^*) $(d \in D)$ сопряженных операторов, для которых $S_d : l^2 \to E$ и $||S_d|| \le ||T||$ $(d \in D)$?"]

Первый ответ на вопрос Ady появился на сайте Math Overflow в тот же день. Именно, Mattew Davis показал, что

(M) ответ на вопрос (A) положителен даже в случае, когда гильбертово пространство l^2 заменено (в условии "$T : E^* \to l^2$") на произвольное сопряженное банахово пространство X^*, которое обладает свойством метрической аппроксимации А. Гротендика.

Наконец, несколько позже, но также 28-го апреля, там же появился дополняющий утверждение (M) факт, установленный и приведенный W.B. Johnson'ом:

(B) Для положительного ответа на вопрос (A), в котором оператор $T : E^* \to l^2$ заменен на оператор $T : E^* \to X^*$ (как в утверждении (M)) необходимо, чтобы банахово пространство X обладало MAP [= свойством метрической аппроксимации].

Bill Johnson заключил свои пояснения пожеланием узнать, что будет в случае, когда X имеет MAP, а X^* — не имеет:

(B') "I don't know what can happen when X has the MAP but X^* fails the MAP."[Я не знаю, что может произойти, когда X имеет MAP, но X^* не обладает MAP.]

Нам представляется, что теперь, после результатов Mattew Davis'a и Bill'a Johnson'a, ситуация видится в несколько другом свете и является несколько интригующей. Тем более, что, например, один из возможных ответов автора настоящей заметки на вопрос (i) Ю.А. Брудного звучит так (см., например, [**2**], pp. 282-286):

Теорема (Reinov, [**2**], p. 283; Prop. 2). *Существуют сепарабельные банаховы пространства X и Y, первое из которых рефлексивно, в то время как второе имеет свойство метрической аппроксимации, и компактный оператор $K \in$*

$\mathrm{L}(Y^*,X^*)$ *такие, что* K *не принадлежит* τ*-замыканию никакого множества*

$$B_r := \{T^* \, : \, T \in L_r(X,Y)\}, \;\; r > 0.$$

Здесь авторы монографии **[2]** обозначают через $L_r(X,Y)$ шар (радиусом r с центром в нуле) пространства $\mathrm{L}(X,Y)$. Под топологией τ в **[2]** (стр. 279) понимается топология в $\mathrm{L}(Y^*,X^*)$, порождаемая системой полунорм

$$P_{x,y'}(T) := |\langle Ty', x\rangle|, \quad x \in X, \; y' \in Y^*.$$

В связи с результатами Mathew Davis'a, Bill'a Johnson'a и Олега Рейнова возникают, в частности, четыре проблемы: (a) возможность аппроксимации (в некоторых топологиях) всех операторов из $\mathrm{L}(Y^*,X^*)$ сопряженными (с возможно некоторыми ограничениями на нормы операторов) при фиксации пространства X и такая же возможность аппроксимации при фиксации пространства Y; (b) возможность аппроксимации (в некоторых топологиях) всех операторов из $\mathrm{L}(X,Y^{**})$ операторами из $\mathrm{L}(X,Y)$ (с возможно некоторыми ограничениями на нормы операторов) при фиксации пространства X и такая же возможность аппроксимации при фиксации пространства Y.

Предварительно обсудим связи между пространствами $\mathrm{L}(X,Y)$ $\mathrm{L}(X,Y^{**})$ и $\mathrm{L}(Y^*,X^*.)$

Для пары банаховых пространств X,Y мы будем рассматривать пространство $\mathrm{L}(X,Y)$ как подпространство пространства $\mathrm{L}(Y^*,X^*)$, имея в виду, что существует естественное каноническое изометрическое вложение первого во второе, причем второе пространство естественным образом отождествляется с банаховым пространством $\mathrm{L}(X,Y^{**})$. Именно: при помощи канонического отображения $\pi_Y : Y \to Y^{**}$ вложим пространство $\mathrm{L}(X,Y)$ изометрично в $\mathrm{L}(X,Y^{**}) : T \mapsto \pi_Y T$. Рассмотрим, для $U \in \mathrm{L}(X,Y^{**})$, оператор $U^* : Y^{***} \to X^*$ и его сужение $V := U^*|_{Y^*} : Y^* \to X^*$. Оператор U^* *-слабо непрерывен как всякий сопряженный оператор, и единичный шар пространства Y^* *-слабо плотен в единичном шаре пространства Y^{***}; поэтому $\|V\| = \|U^*\|$, и мы получаем изометрическое вложение, обозначим его на время через j, банахова пространства $\mathrm{L}(X,Y^{**})$ в банахово пространство $\mathrm{L}(Y^*,X^*)$. Обратно, пусть $V \in \mathrm{L}(Y^*,X^*)$. Рассмотрим сопряженный оператор $V^* : X^{**} \to Y^{**}$ и его сужение $U := V^*|_X : X \to Y^{**}$. Снова, единичный шар пространства X *-слабо плотен в соответствующем шаре пространства X^{**}, и оператор V^* *-слабо непрерывен; поэтому $\|V^*\| = \|U\|$. Наконец, для $y' \in Y^*$ и $x \in X$ имеем

$$\langle U^*|_{Y^*}y', x\rangle \equiv \langle U^*\pi_{Y^*}y', x\rangle = \langle \pi_{Y^*}y', Ux\rangle =$$

$$\langle \pi_{Y^*}y', V^*\pi_X x\rangle = \langle y', V^*\pi_X x\rangle = \langle Vy', \pi_X x\rangle = \langle Vy', x\rangle,$$

и, таким образом, $U^*|_{Y^*} = V$. Это показывает, что рассмотренное выше естественное отображение $j : \mathrm{L}(X,Y^{**}) \to \mathrm{L}(Y^*,X^*)$ есть изометрия первого пространства на второе. Итак, мы можем писать $\mathrm{L}(X,Y^{**}) = \mathrm{L}(Y^*,X^*)$ и рассматривать пространство $\mathrm{L}(X,Y)$ как подпространство любого из этих двух. Ниже мы обычно не будем явно указывать возникающие при описанных изометрических отображениях ни отображения отождествления j, j^{-1}, ни связанные с ними канонические операторы π, и будем свободно, рассматривая некоторый оператор, принадлежащий одному из этих операторных пространств, переходить из одного пространство в другое.

Теперь, перед тем как приступить к формулировкам наших результатов, рассмотрим подробнее вопрос Ady (A), изучая сейчас произвольные операторы, действующие в произвольных сопряженных пространствах.

Лемма 1. *Пусть $D \geq 1$, Z и W — банаховы пространства, $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ — сеть операторов в $\mathrm{L}(W^*, Z^*)$ $A \in \mathrm{L}(W^*, Z^*)$. Эквивалентны утверждения:*

1) $||B_\alpha|| \leq D||A||$ для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ и сеть $\{B_\alpha\}$ SO-сходится к A, т.е. для любой точки $w' \in W^*$ $B_\alpha w' \underset{\alpha}{\to} Aw'$ в Z^*;

2) $||B_\alpha|| \leq D||A||$ для каждого $\alpha \in \mathcal{A}$ и для любого $\varepsilon > 0$ и всякого компакта $K \subset W^*$ существует такой индекс α_ε, что

$$\forall\, \alpha > \alpha_\varepsilon, \quad \forall\, k \in K \qquad ||B_\alpha k - Ak|| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Если $\{B_\alpha\}$ SO-сходится к A, то для всякого конечного набора $\{w'_n\}_{n=1}^N$ точек из W^* имеем: $B_\alpha w'_n \underset{\alpha}{\to} Aw'_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Пусть $\varepsilon > 0$, K — компакт в W^* и $\{w'_n\}_{n=1}^N$ — $\frac{\varepsilon}{3D(||A||+1)}$-сеть для K. Пусть, далее, α_0 таково, что $||B_\alpha w'_n - Aw'_n|| < \varepsilon/3$ для всех $n \leq N$ при всех $\alpha > \alpha_0$. Возьмем произвольную точку $k \in K$ и выберем такой индекс n_0, что $||k - w'_{n_0}|| < \frac{\varepsilon}{3D(||A||+1)}$. Для $\alpha > \alpha_0$ имеем:

$$||B_\alpha k - Ak|| \leq ||B_\alpha k - B_\alpha w'_{n_0}|| + ||B_\alpha w'_{n_0} - Aw'_{n_0}|| + ||Aw'_{n_0} - Ak|| \leq$$

$$D||A||\,\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{D(||A||+1)} + \varepsilon/3 + ||A||\frac{\varepsilon}{3D(||A||+1)} \leq \varepsilon.$$

Следствие 1. *Пусть $D \geq 1$, Z и W — банаховы пространства, $A \in \mathrm{L}(W^*, Z^*)$, причем $||A|| \leq 1$. Эквивалентны утверждения:*

1) A принадлежит замыканию шара B_D (радиуса D с центром в нуле) пространства $\mathrm{L}(Z, W)$ в топологии компактной сходимости в пространстве $\mathrm{L}(W^*, Z^*)$;

2) A принадлежит замыканию шара B_D в сильной операторной топологии пространства $\mathrm{L}(W^*, Z^*)$;

3) существует сеть $\{\tilde{B}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ операторов из $\mathrm{L}(Z, W)$ с нормами, не превосходящими D, для которой сеть $\{B_\alpha := \tilde{B}^*_\alpha\}$ SO-сходится к A в пространстве $\mathrm{L}(W^*, Z^*)$.

Нам понадобятся ниже две следующие важные леммы.

Лемма 2 ([**5**], E.3.1). *Пусть E, F — банаховы пространства, $\dim E < \infty$, $S \in \mathrm{L}(E, F^{**})$, $M \subset F^*$ — конечномерное подпространство. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется оператор $R \in \mathrm{L}(E, F)$ такой, что*

$$||R|| \leq (1 + \varepsilon)||S||,$$

$$\langle Rx, b\rangle = \langle Sx, b\rangle \;\forall\, x \in E, b \in M,$$

$$K_F Rx = Sx \text{ если } Sx \in K_F(F) \subset F^{**},$$

где $K_F : F \to F^{**}$ — естественное изометрическое вложение.

Лемма 3 ([**3**], Lemma 3.2). *Пусть X — банахово пространство, $E \subset X$, $\dim E = n$; $T : X \to E$ линейное непрерывное отображение "на". Пусть, далее, $k \leq n$, $F \subset X$, $\dim F = k$. Предположим, что $||T|_F - I_F|| < \varepsilon < 1$, где $\frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon} < 1$. Тогда существует n-мерный оператор $S : X \to X$ со свойствами:*

$$S|_F = I_F,$$

$$||S - T|| < \frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon} ||T||,$$

$$S^*(X^*) = T^*(X^*).$$

Более того, если T — проектор, то и S может быть выбран проектором.

Определение 1. Пусть X — банахово пространство, $k \in \mathbb{N}$, $C \geq 1$. Будем говорить, что X *обладает свойством (C, k)-метрической аппроксимации*, $X \in (C, k)$-MAP, если для всякого $\varepsilon > 0$, для любого k-мерного подпространства $F \subset X$ существует такой конечномерный непрерывный оператор $T : X \to X$, что $||T|_F - I_F|| < \varepsilon$ и $||T|| \leq C$.

По аналогии с определением класса W операторов, действующих в сопряженных пространствах (см. начало нашей заметки, вопрос (ii)), мы, следуя [**7**], введем в рассмотрение классы W_n. Если $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, то обозначим через $W_n(Y^*, X^*)$ множество всех операторов $T : Y^* \to X^*$, для которых существует число $\gamma_n(T)$ такое, что

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \langle T y_j', x_j \rangle \, \lambda_j \right| \leqslant \gamma_n(T) \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \langle y_j', S x_j \rangle \, \lambda_j \right| : \; S \in \mathrm{L}(X, Y), \; \|S\| \leqslant 1 \right\}$$

для всех $x_j \in X, y_j' \in Y^*$; $\|x_j\| \leqslant 1, \|y_j'\| \leqslant 1$, и всех $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum_1^n \lambda_j = 1$.

Положим $\|T\|_{W_n} = \inf \gamma_n(T)$. Ясно, что в определении W_n можно ограничиться элементами x_j и y_j' единичной нормы; при этом $\| \cdot \|_W = \| \cdot \|_{W_1}$ и $\| \cdot \|_{W_n} \leqslant \| \cdot \|_{W_{n+1}}$.

Теорема 1. *Пусть $k \in \mathbb{N}, C \geq 1$. Если $X \in (C, k)$-MAP, то для всякого банахова пространства Y и любого оператора $U \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$*

$$||U|| \leq ||U||_{W_k(Y^*, X^*)} \leq C \, ||U||.$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon_0, \varepsilon_0 \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, и возьмем $\varepsilon \in (0, 1)$, для которого $\varepsilon_0 > \frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon}$. Пусть $(x_j)_{j-1}^k \subset X$, $(y_j')_{j=1}^k \subset Y^*$, $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$, $||x_j|| \leq 1$, $||y_j'|| \leq 1$ и $F := [x_j]_{j=1}^k$.

Пусть, далее, $T : X \to X$ — такой конечномерный оператор, что

$$||T|_F - I_F|| < \varepsilon, \quad ||T|| \leq C.$$

Положим $E := T(X), n := \dim E$. Мы находимся в условиях леммы 3. Поэтому существует такой n-мерный оператор $S : X \to X$, что

$$S|_F = I_F,$$

$$||S-T|| < \frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon}||T||,$$
$$S^*(X^*) = T^*(X^*).$$

Положим $\tilde E := S(X)$, $\tilde F := Y$, $M := [y_j']_1^k$. Тогда $\dim \tilde E = n$, $M \subset \tilde F^* = Y^*$, $F \subset \tilde E$ (в частности, $(x_j)_1^k \subset \tilde E$).

Определим оператор $\tilde S : \tilde E \to \tilde F^{**}(= Y^{**})$ как сужение оператора U^* на подпространство $\tilde E(= S(X) \subset X \subset X^{**})$. К четверке $(\tilde E, \tilde F, \tilde S, M)$ применим принцип локальной рефлексивности, — лемму 2.

Для выбранного заранее числа $\varepsilon_0 > 0$ найдется такой оператор $R \in \mathrm{L}(\tilde E, \tilde F)$, что $||R|| \le (1+\varepsilon_0)||\tilde S||$ и $\langle Rx, b\rangle = \langle \tilde S x, b\rangle$ для всех $x \in \tilde E$ (и, значит, для всех $x \in F$) и $b \in M$.

Отсюда:

$$\forall\, j = 1,2,\dots,k \;\; \langle Rx_j, y_j'\rangle = \langle \tilde S x_j, y_j'\rangle,\; ||R|| \le (1+\varepsilon_0)||\tilde S||,$$

или, возращаясь к старым обозначениям, имеем:

$$\forall\, j = 1,2,\dots,k \;\; \langle Rx_j, y_j'\rangle = \langle U^*|_X x_j, y_j'\rangle,\; ||R|| \le (1+\varepsilon_0)||U^*||.$$

Теперь,

$$\Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle U y_j', x_j\rangle\Big| = \Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle y_j', U^*|_X x_j\rangle\Big| = \Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle y_j', R x_j\rangle\Big|,$$

а поскольку $x_j \in F \subset \tilde E = S(X)$, $R : \tilde E \to Y$ и $Sx_j = x_j$, то последняя величина есть

$$\Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle y_j', RSx_j\rangle\Big| = \Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle y_j', S_1 x_j\rangle\Big|,$$

где $S_1 := RS : X \to \tilde E = S(X) \to Y$.

Так как $||R|| \le (1+\varepsilon_0)||U||$, то $||S_1|| \le (1+\varepsilon_0)||U||\,||S||$. Теперь оценка для нормы S :

$$||S|| < ||T|| + \frac{\varepsilon k}{1-\varepsilon} = ||T||\,[1 + (\varepsilon k)/(1-\varepsilon)]$$

(использовали неравенство из леммы 3). Поэтому

$$||S_1|| \le (1+\varepsilon_0)\,[1 + (\varepsilon k)/(1-\varepsilon)]\,||T||\,||U|| \le C(1+\varepsilon_0)\,[1 + (\varepsilon k)/(1-\varepsilon)]\,||U||.$$

Окончательно, для оценки сверху первоначальной суммы получаем:

$$\Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle U y_j', x_j\rangle\Big| = ||S_1||\,\Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle y_j', (S_1/||S_1||) x_j\rangle\Big| \le$$

$$C(1+\varepsilon_0)\,[1+(\varepsilon k)/(1-\varepsilon)]\,||U||\,\sup\{\Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle y_j', S_0 x_j\rangle\Big| :\; S_0 \in \mathrm{L}(X,Y),\, ||S_0|| \le 1\} <$$

$$C(1+\varepsilon_0)^2\,||U||\,\sup\{\Big|\sum_{j=1}^k \lambda_j \langle y_j', S_0 x_j\rangle\Big| :\; S_0 \in \mathrm{L}(X,Y),\, ||S_0|| \le 1\}.$$

Так как всякое банахово пространство обладает свойством $(1, \sqrt{n})$ (поскольку в любом банаховом пространстве каждое n-мерное подпространство $\sqrt{n}$-дополняемо), то из доказанной теоремы моментально вытекает следующий (один из основных в **[7]**) результат:

Следствие 2 *Если $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$, то $\|T\| \leqslant \|T\|_{W_n} \leqslant \sqrt{n}\,\|T\|$ (при $n \in \mathbb{N}$). В частности, $W_n(Y^*, X^*) = \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ (при $n \in \mathbb{N}$) как множества, и $\|T\|_{W_1} = \|T\|$.*

Аналогичные следствия могут быть сформулированы и получены из теоремы, например, для банаховых пространств с нетривиальными типами и котипами, в частности для лебеговых пространств $L_p(\mu)$. Более общим образом, мы имеем:

Следствие 3 [7]. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если всякое n-мерное подпространство в X является Cn^α-дополняемым, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$, то $\|T\|_{W_n(Y^*,X^*)} \leqslant Cn^\alpha\,\|T\|$ для любых банахова пространства Y и оператора $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$. Более общо, если $C_0 > 0$ и всякое n-мерное подпространство пространства X C_0-дополняемо, то $\|T\|_{W_n(Y^*,X^*)} \leqslant C_0\,\|T\|$ для любых Y, $T \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$.*

Следствие 4. *Пусть $C \geq 1$. Если $X \in C$-MAP, то для каждого $k \in \mathbb{N}$, для всякого банахова пространства Y и для любого оператора $U \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$*

$$||U|| \leq ||U||_{W_k(Y^*,X^*)} \leq C\,||U||.$$

В частности, если банахово пространство X обладает свойством метрической аппроксимации, то

$$||U|| = ||U||_{W_k(Y^*,X^*)}$$

для всех Y, $U \in \mathrm{L}(Y^*, X^*)$ и $k \in \mathbb{N}$.

Известно (и понятно; см. **[7]**), что $r = \|U\|_{W_n}$ есть наименьшее число r, для которого, грубо говоря, на всяком n-мерном тензоре элемент U может быть сколь угодно хорошо приближен операторами из шара радиуса r пространства $\mathrm{L}(X, Y)$. Точнее, для $n \in \mathbb{N}$

$$\|U\|_{W_n} = \inf\{r > 0 : \forall\, t \in Y^* \otimes X, \dim t \leqslant n,$$

$$\exists\, S \in \mathrm{L}(X, Y), \|S\| \leqslant r, \mathrm{trace}\ S \circ t = \mathrm{trace}\ T^* \circ t\} \leq \sqrt{n}\,||U||.$$

В **[7]**, Следствие 3, показано что этот факт точен (а именно, точным является следствие 2 выше). Ниже будут установлена и точность нашей теоремы 1 (см. предложение 2).

Мы будем использовать следующий результат, нетрудно выводимый из **[8]** (см. там теорему 2 и следствие 4 из нее), представляющий и самостоятельный интерес:

Предложение 1. *Существует постоянная $c \in (0, 1)$ со следующим свойством. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ можно найти сепарабельное сопряженное банахово пространство E с базисом, сепарабельное банахово пространство E_n со свойством ограниченной аппроксимации (точнее, со свойством $\sqrt{n}$-MAP), n-мерный оператор $t : E \to E_n$ такие, что $E_n \notin c\sqrt{n}$-MAP и*

$(*)$ *существуют* $\varepsilon > 0$ *и оператор* $V \in \mathrm{L}\,(E_n, E^{**})$, *для которого* $\|V\| = 1$, *такие , что* trace $V \circ t \geq c\sqrt{n}$ *и если* $G_n = t(E)$, $F_n = t^*(E_n^*)$, $R \in \mathrm{L}(E_n, E)$ *и*

$$\forall\, g \in G_n,\ \forall\, f \in F_n \qquad |\,\langle Rg - Vg, f\rangle\,| \leq \varepsilon\,\|g\|\,\|f\|$$

то $\|R\| > c\,\sqrt{n}$. *При этом, для всякого* $U \in \mathrm{L}(E_n, E)$ *имеем:* $|\,\mathrm{trace}\ U \circ t| \leq ||U||$.

Замечание. Пространство E (как, впрочем, и E_n) может быть выбрвно *вполне сепарабельным*, т.е. таким, что *все его сопряженные пространства сепарабельны* (таково пространство из доказательства теоремы 2 в [**8**]). То же относится и к следующим утверждениям.

Предложение 2. *Существует постоянная* $c \in (0, 1)$ *со следующим свойством. Для каждого* $n = 1, 2, \ldots$ *можно найти сепарабельное сопряженное банахово пространство* E *с базисом, сепарабельное банахово пространство* E_n *со свойством* $\sqrt{n}$ - MAP *и* n *-мерный оператор* $t : E \to E_n$ *такие, что*

$(**)$ $E_n \notin c\,\sqrt{n}$ - MAP *и существует оператор* $T \in \mathrm{L}\,(E^*, E_n^*)$, *для которого* $\|T\| = 1$ *и* $\sqrt{n} \geq ||T||_{W_n} > c\,\sqrt{n}$. *Таким образом,* $E_n \in (\sqrt{n}, n)$*-MAP, но* $E_n \notin (c\sqrt{n}, n)$*-MAP.*

Доказательство. Константу c, пространства E, E_n и n -мерный тензор (оператор) $t : E \to E_n$ мы возьмем из предыдущего утверждения. Пусть, далее, $T := V^*|_{E^*}$. Нам надо установить лишь справедливость второго утверждения в $(**)$. Это нетрудно (когда доказана теорема 2 в [**8**]). Если оператор $R \in \mathrm{L}(E_n, E)$ таков, что trace $R^* \circ t^t =$ trace $T \circ t^t$, то (см. $(*)$)

$$c\sqrt{n} < \mathrm{trace}\ R^* \circ t^t = \mathrm{trace}\ R \circ t \leq ||R||$$

и, следовательно, $||R|| > c\sqrt{n}$. В силу сказанного перед формулировкой предложения 1, $||T||_{W_n} > c\sqrt{n}$.

Замечание. Более подробное рассмотрение примеров пространств X с $X \in (C_1, m)$-MAP и $X \notin (C_2, m)$-MAP, как и других положительных результатов, предполагается провести в следующей работе автора.

Из предложения 1, используя метод "суммирования"из доказательства следствия 1 в [**8**], мы получаем

Предложение 3. Существуют вполне сепарабельные банаховы пространства W и X со следующими свойствами:

(i) W сопряжено и имеет базис (так что $W \in$ MAP), $X \in$ AP и $X \notin$ BAP;

(ii) существует оператор $V : X \to W^{**}$, обладающий тем свойством, что V не лежит в замыкании в пространстве $\mathrm{L}(X, W^{**})$ в топологии поточечной $X \times W^*$ -сходимости какого–либо шара конечного радиуса пространства $\mathrm{L}(X, W)$;

(iii) этот оператор V лежит в замыкании пространства $X^* \otimes W^{**}$ в топологии τ_c компактной сходимости в $\mathrm{L}(X, W^{**})$;

(iv) никакой шар пространства $\mathrm{L}(X, W)$ не плотен в никаком шаре (в τ_c) пространства $\mathrm{L}(W^*, X^*)$.

Доказательство. Все, кроме утверждения (iv), следует из вышесказанного; утверждение (iii) очевидно (так как $X \in$ AP). (iv) вытекает из теоремы (B) Bill'a Johnson'a.

Следствие 5. Существуют (вполне) сепарабельное банахово пространство Z, $Z \in \mathrm{AP}$, $Z \notin \mathrm{BAP}$, и оператор $S \in \mathrm{L}(Z^*, Z^*)$ такие, что если $\{R_\alpha\} \subset \mathrm{L}(Z, Z)$ и $R_\alpha^* \underset{\alpha}{\to} S$ $Z \times Z^*$-поточечно, то $\|R_\alpha\| \underset{\alpha}{\to} +\infty$. С другой стороны, ясно, что множество $Z^* \otimes Z$ конечномерных операторов плотно в $\mathrm{L}(Z, Z^{**})$ (но не в $\mathrm{L}(Z^*, Z^*)$!) в топологии компактной сходимости.

Доказательство. Достаточно взять $Z = W \oplus X$, где W и X — пространства из предложения 3 и определить оператор $S : Z^* \to Z^*$ соотношением $S(w', x') = (V^*|_{X^*} x', 0)$, где V — из утверждения (ii) предложения 3. То, что множество $Z^* \otimes Z$ не плотно в τ_c в $\mathrm{L}(Z^*, Z^*)$, следует из результата Bill'a Johnson'a (B), с которого мы начали заметку.

Напомним, что существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство, не обладающее свойством AP . Более того, существуют сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, оператор $R \in \mathrm{K}(E, E)$ и тензорный элемент $t \in E^* \widehat{\otimes} E$ такие, что trace $t \circ R = 1$ и trace $t \circ A = 0$ для любого конечномерного оператора $A \in E^* \otimes E$ (см.. например, [**3**]).

Далее мы используем следующий классический факт (см. [**4**]):

Лемма 4. *Для всякого сепарабельного банахова пространства E существуют сепарабельное сопряженное банахово пространство $H = Y^*$ с базисом и операторы $Q : H \to E$ и $U : H^* \to E^*$ такие, что $Q(H) = E$, $U(H^*) = E^*$, $\|U\| \leqslant 1$, $\|Q\| \leqslant 1$, $UQ^* = \mathrm{id}_{E^*}$ и пространство $(\mathrm{id}_{E^*} - Q^*U)(H^*)$ изоморфно пространству Y.*

Теперь мы готовы к построению других примеров.

Предложение 4. *Существуют сепарабельное рефлексивное пространство E, сепарабельное сопряженное пространство H с базисом такие, что каноническое отображение $j : H^* \widehat{\otimes} E \to \mathrm{N}(H, E)$ не взаимно однозначно. С другой стороны, так как пространство H обладает свойством аппроксимации, то $\mathrm{K}(E, H) = \overline{E^* \otimes H}^{\|\cdot\|}$ и $\mathrm{L}(E, H) = \overline{E^* \otimes H}^{\tau_c}$.*

Доказательство Пусть E, $t \in E^* \widehat{\otimes} E$ и $R \in \mathrm{K}(E, E)$ — упомянутые перед леммой 4 тензорный элемент и оператор, так что trace $t \circ R = 1$ и $t = 0$ как оператор. Положим $g = t \circ Q \in H^* \widehat{\otimes} E$ и $V = U^* R \in \mathrm{L}(E, H^{**})$. Тогда trace $V \circ g = 1$ (следовательно, тензорный элемент g не равен нулю) и $g = 0$ как оператор.

Замечание. Отметим (и это хорошо известно со времен А. Гротендика), что если каноническое отображение $j : X^* \widehat{\otimes} Y \to \mathrm{N}(X, Y)$ взаимно однозначно, то $\mathrm{L}(Y, X) = \overline{Y^* \otimes X}^{\tau_c}$. Доказанное только что предложение показывает, что обращение этого утверждения неверно.

Следствие 6. *Существуют сепарабельное рефлексивное пространство E без свойства* AP, *сепарабельное сопряженное пространство H с базисом (и, следовательно, обладающее свойством MAP) и оператор $T \in \mathrm{K}(H^*, E^*)$, который не аппроксимируется в топологии $E \times H^*$-сходимости в $\mathrm{L}(H^*, E^*)$ операторами из $\mathrm{L}(E, H)$.*

Доказательство. В обозначениях предыдущего доказательства, положим $T := V^*|_{H^*}$. Тогда trace $g^t \circ T = 1$ и оператор $\tilde{g}$, ассоциированный с g, а значит и $\tilde{g}^t$, — тождественно нулевые. С другой стороны, для всякого оператора $A : E \to H$ trace $A \circ g = 0$, так как пространство H имеет свойство MAP.

Следствие 7. *Существуют банахово пространство Z без свойства* AP, *элемент $z \in Z^* \widehat{\otimes} Z$ и оператор $S \in \mathrm{K}(Z^*, Z^*)$ такие, что* trace $z^t \circ S = 1$, *но* trace $\Phi \circ z = 0$ *для всех* $\Phi \in \mathrm{L}(Z, Z)$.

Доказательство. Будем использовать обозначения, введенные при доказательстве предложения 4. Пусть $\sum y_n' \otimes y_n$ — какое–либо представление тензорного элемента $g \in H^* \widehat{\otimes} E$. Заметим, что trace $A \circ g = 0$ для всякого оператора $A \in \mathrm{L}(E, H)$ (так как пространство H обладает свойством аппроксимации). Положим $Z = H \oplus E$, $z = \sum (y_n', 0) \otimes (0, y_n)$ и определим оператор $S \in \mathrm{L}(Z^*, Z^*)$ по формуле $S(h', y') = (V^* y', 0)$. Имеем:

$$\text{trace } z^t \circ S = \sum \langle (y_n, 0), (V^* y_n', 0) \rangle = \sum \langle y_n, V^* y_n' \rangle = \text{trace } V \circ g = 1.$$

С другой стороны, обозначая через P_H и P_E естественные проекторы из Z на H и E соответственно, мы для произвольного оператора $\Phi \in \Pi_p(Z, Z)$ имеем:

$$\Phi(h, y) = \Phi|_H(h) + \Phi|_E(y) = (P_H \Phi|_H(h) + P|_E \Phi|_H(h)) + (P_H \Phi|_E(y) + P|_E \Phi|_E(y)),$$

откуда

$$\text{trace } \Phi \circ z = \sum \langle (y_n', 0), [P_H \Phi(0, y_n)] \rangle = \sum \langle (y_n', 0), P_H \Phi|_E(y_n) \rangle.$$

Обозначая через A оператор $P_H \Phi|_E$, получаем:

$$A \in \mathrm{L}(E, H); \quad \text{trace } \Phi \circ z = \text{trace } A \circ g = 0.$$

Другие (контр)примеры типа приведенных выше можно найти, например, в работе [**8**]. Ответ на вопрос B' W.B. Johnson'a (для которого все подготовлено в настоящей заметке) предполагается привести в следующей статье автора.

Список литературы

[1] Айзенштейн М.Х., Брудный Ю.А., *Вычислимые интерполяционные функторы,* Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярославль: ЯГУ (1986), 3–35.

[2] Yu.A. Brudnyi and N. Ya. Krugljak, Interpolation Functors and Interpolation Spaces, Volume I, North-Holland Publishing Company, (1991).

[3] Peter G. Casazza, *Approximation Properties,* Handbook of the Geometry of Banach Spaces, **v. 1**, Elsevier Science B.V. (2001), 271-316.

[4] Lindenstrauss J., *On James' paper "Separable Conjugate Spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279–284.

[5] A. Pietsch, Operator Ideals, North-Holland Publishing Company, (1980).

[6] Рейнов О.И., *Аппроксимация операторов в банаховых пространствах,* Применение функционального анализа в теории приближений, КГУ, Калинин, (1985), 128-142.

[7] Рейнов О.И., *Аппроксимация операторов в топологии поточечной сходимости*, Вестник СПбГУ **16**, вып.3 (1993), 33-35.

[8] Oleg Reinov, *On non–nuclear operators with nuclear adjoints*, Proc. Estonian Acad. Sci. Phis. Math **45** (1996), 226-233.

[9] Reinov Oleg, *Appoximation propeties: topological aspect (with application to a Grothendieck conjecture),* Proceedings 4th World Conference on 21st Century Math. 2009, Lahore-Pakistan, 2009), 269-284.