О формуле для регуляризованных следов

П.Б. Затицкий, А.И. Назаров, Д.М. Столяров

26 марта 2011 г.

Рассмотрим оператор $\mathbb{L}$, порождаемый дифференциальным выражением порядка $2m$

$$ly \equiv (-1)^m D^{2m} y + \sum_{k=0}^{2m-2} p_k(x) D^k y \tag{1}$$

(здесь $p_k \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ – вещественные функции) и граничными условиями

$$P_j(D)y(0) = 0, \qquad j = 1, \dots, m \tag{2}$$

(здесь P_j – полином степени k_j, причем граничные условия считаются *приведенными*, т.е. $0 \le k_1 < k_2 < \dots < k_m \le 2m-1$).

Допустим, что этот оператор самосопряжен в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$, полуограничен снизу и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty}$, занумерованный по возрастанию с учетом кратности.

Пусть $\mathbb{Q}$ – оператор умножения на вещественную функцию $q \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$. Тогда оператор $\mathbb{L} + \mathbb{Q}$ также имеет чисто дискретный спектр $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Вычислению спектральных функций и регуляризованных следов для дифференциальных операторов посвящена обширная литература, начиная с классической работы [1]. Целью нашей заметки является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция q имеет ограниченный носитель*[1]*, а функция $\psi(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x q(t)dt$ имеет ограниченную вариацию в нуле. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{S}_1 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\mu_n - \lambda_n - \frac{c_n}{\pi}\int\limits_0^\infty q(t)dt\Big] = -\psi(0+) \cdot \Big(\frac{m}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\varkappa}{2m}\Big), \tag{3}$$

где

$$c_1 = \lambda_1^{\frac{1}{2m}}; \qquad c_n = \lambda_n^{\frac{1}{2m}} - \lambda_{n-1}^{\frac{1}{2m}}, \quad n > 1; \qquad \varkappa = \sum_{j=1}^m k_j.$$

Замечание. Формула (3) была высказана А.И. Назаровым как гипотеза на конференции в Москве в 2007 году во время доклада А.С. Печенцова. Для одночленных краевых условий $P_j(D) = D^{k_j}$ она была доказана в препринте [2][2].

[1]Это условие используется только при применении предложения 1 для вывода формулы (4). По-видимому, его можно ослабить, для чего необходимо получить глобальную оценку разности спектральных функций операторов $\mathbb{L}$ и $\widetilde{\mathbb{L}}$. В настоящее время такая оценка нам неизвестна.

[2]Три частных случая: 1) $k_j = 2j-2$; 2) $k_j = 2j-1$; 3) $k_j = j-1$ были ранее рассмотрены в работах [3], [4], [5].

Введем два вспомогательных оператора:

$\widetilde{\mathbb{L}}$ – самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}_+)$ оператор порядка $2m$ с граничными условиями (2), младшие коэффициенты которого финитны и совпадают с младшими коэффициентами в (1) на отрезке $[0,R]\supset \mathrm{supp}(q)$;

$\mathbb{L}_0$ – оператор $(-1)^m D^{2m}$ с граничными условиями (2)[3].

При $\lambda\in\mathbb{R}$ обозначим $\theta(x,y,\lambda)$ спектральную функцию оператора $\mathbb{L}$, т.е. ядро его спектрального проектора E_λ (см. [6]). Аналогично, $\widetilde{\theta}(x,y,\lambda)$ – спектральная функция оператора $\widetilde{\mathbb{L}}$. Далее, обозначим $H_0(x,y,\tau)$ функцию Грина оператора $\mathbb{L}_0-\tau$ (при $\tau\notin\overline{\mathbb{R}}_+$).

Пусть ζ – значение $\tau^{\frac{1}{2m}}$, аргумент которого лежит в $[0,\frac{\pi}{m}[$, а $z=\exp(\frac{i\pi}{m})$. Введем матрицу $\mathcal{B}(\zeta)=\left[P_j(iz^{\ell-1}\zeta)\right]_{\ell,j=1}^m$ и обозначим $\Delta(\zeta)=\det(\mathcal{B}(\zeta))$.

В работе [7] (см. также [8]) были доказаны следующие утверждения (приводятся с некоторыми переобозначениями):

Предложение 1. А *([7, гл. 1, §2]). Пусть выполнено следующее условие:*

$\mathcal{A}$. *Матрица $\mathcal{B}(\zeta)$ не вырождена, и элементы обратной матрицы удовлетворяют оценке $\left[\mathcal{B}^{-1}(\zeta)\right]_{\ell j}=O(|\zeta|^{-k_j})$ при $|\zeta|\to\infty$.*

Тогда при $\lambda\to+\infty$ имеет место соотношение

$$\widetilde{\theta}(x,y,\lambda)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\lambda}H_0(x,y,\tau)\,d\tau+O(\lambda^{-\frac{1}{2m}})$$

равномерно на $\overline{\mathbb{R}}_+^2$.

Б *([7, гл. 1, §4]). Пусть выполнено условие $\mathcal{A}$. Тогда при $\lambda\to+\infty$ имеет место соотношение*

$$\theta(x,y,\lambda)=\widetilde{\theta}(x,y,\lambda)+o(1)$$

равномерно на $[0,R]^2$.

Прежде всего мы несколько усилим утверждения предложения 1.

Лемма 1. *При больших $|\zeta|$ условие $\mathcal{A}$ выполняется всегда, и потому это условие в предложении 1 может быть опущено.*

Доказательство. Для начала отметим, что $\Delta(\zeta)$ есть полином от ζ степени $\varkappa$. Действительно, его столбцы – полиномы степени k_j, а старшая степень не сокращается, так как определитель коэффициентов при старших степенях есть определитель Вандермонда $\det(\mathbb{W}(z^{k_1},\dots,z^{k_m}))\neq 0$. Поэтому $\Delta(\zeta)\neq 0$ при достаточно больших $|\zeta|$.

Далее, алгебраическое дополнение элемента $b_{\ell j}$, очевидно, есть полином от ζ степени не более $\varkappa-k_j$. Утверждение леммы следует теперь из формулы Крамера. $\square$

Доказательство теоремы 1. Заметим, что левая часть (3) преобразуется к виду (см. [5], доказательство теоремы 1)

$$\mathcal{S}_1=\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}q(x)\cdot\Big(\theta(x,x,\lambda)-\frac{\lambda^{\frac{1}{2m}}}{\pi}\Big)\,dx.$$

[3] Этот оператор уже не обязательно самосопряженный!

Ввиду леммы 1 эту формулу можно переписать так:

$$\mathcal{S}_1 = \lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} q(x)\cdot\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\lambda} H_0(x,x,\tau)\,d\tau - \frac{\lambda^{\frac{1}{2m}}}{\pi}\Big)\,dx. \tag{4}$$

Теперь воспользуемся явным видом для функции H_0, полученным в [3, Лемма 1] (приводится с некоторыми переобозначениями):

$$H_0(x,x,\tau) = \frac{i}{2m\zeta^{2m-1}}\cdot\sum_{\alpha=1}^m z^{\alpha-1}\cdot\Big(1-\frac{1}{\Delta(\zeta)}\cdot\sum_{\beta=1}^m \exp(i(z^{\alpha-1}+z^{\beta-1})\,x\zeta)\cdot\Delta_{\alpha\beta}(\zeta)\Big),$$

где определитель $\Delta_{\alpha\beta}(\zeta)$ получается из $\Delta(\zeta)$ заменой в β-ой строке $P_j(iz^{\beta-1}\zeta)$ на $P_j(-iz^{\alpha-1}\zeta)$. Конечно, для справедливости этой формулы требуется, чтобы $\Delta(\zeta)\neq 0$, что выполнено при достаточно больших $|\tau|$.

Сделаем во внутреннем интеграле в (4) замену переменной $\tau=\zeta^{2m}$. Легко видеть, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=\lambda}\frac{i\,d\tau}{2m\zeta^{2m-1}}\sum_{\alpha=1}^m z^{\alpha-1} = -\int\limits_{\Gamma_\lambda}\frac{d\zeta}{\pi(1-z)} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2m}}}{\pi}$$

(здесь Γ_λ – дуга окружности $\{\zeta=\lambda^{\frac{1}{2m}}e^{i\phi} : \phi\in]0,\frac{\pi}{m}[\}$). Поэтому (4) перепишется так[4]:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} q(x)\cdot\int\limits_{\Gamma_\lambda}\sum_{\alpha,\beta=1}^m z^{\alpha-1}\exp(i(z^{\alpha-1}+z^{\beta-1})\,x\zeta)\cdot\frac{\Delta_{\alpha\beta}(\zeta)}{\Delta(\zeta)}\,d\zeta\,dx. \tag{5}$$

Обозначим $\mathbb{B}_{\alpha\beta}=\lim\limits_{\zeta\to\infty}\frac{\Delta_{\alpha\beta}(\zeta)}{\Delta(\zeta)}$ и покажем, что

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty} q(x)\cdot\int\limits_{\Gamma_\lambda}\sum_{\alpha,\beta=1}^m z^{\alpha-1}\exp(i(z^{\alpha-1}+z^{\beta-1})\,x\zeta)\cdot\mathbb{B}_{\alpha\beta}\,d\zeta\,dx. \tag{6}$$

Действительно, поскольку $\Delta_{\alpha\beta}$ – многочлен от ζ степени не больше $\varkappa$, при $|\zeta|\to\infty$ справедливо соотношение

$$\frac{\Delta_{\alpha\beta}(\zeta)}{\Delta(\zeta)} = \mathbb{B}_{\alpha\beta}+O(\zeta^{-1}). \tag{7}$$

Далее, при всех $1\le\alpha,\beta\le m$ выполнено неравенство $0\le\arg(z^{\alpha-1}+z^{\beta-1})\le\frac{m-1}{m}\pi$, Следовательно, интегралы

$$\mathcal{I}_{\alpha\beta}(x) = \int\limits_{\Gamma_\lambda} z^{\alpha-1}\exp(i(z^{\alpha-1}+z^{\beta-1})\,x\zeta)\cdot\Big(\frac{\Delta_{\alpha\beta}(\zeta)}{\Delta(\zeta)}-\mathbb{B}_{\alpha\beta}\Big)\,d\zeta$$

[4] В [4, Теорема 2] при дополнительном условии: $\Delta(\zeta)\neq 0$ при $\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ получена формула, аналогичная (5), но вместо интеграла по Γ_λ в ней стоит вещественная часть интеграла по отрезку $[0,\lambda^{\frac{1}{2m}}]$. На самом деле эта формула верна лишь при более сильном условии: $\Delta(\zeta)\neq 0$ при $\tau\neq 0$. В этом случае формула [4, (0.5)] сводится к (5) по теореме Коши.

ограничены (ввиду (7)) равномерно по $x \geq 0$ и стремятся к нулю (по лемме Жордана) при $x > 0$, $\lambda \to \infty$. По теореме Лебега имеем $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} q(x) \cdot \mathcal{I}_{\alpha\beta}(x)\, dx = 0$, что доказывает (6).

Взяв внутренний интеграл в (6), перепишем формулу для $\mathcal{S}_1$ так:

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{s\to\infty} \int\limits_0^{\infty} q(x) g(sx) s\, dx, \tag{8}$$

где

$$g(y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \mathbb{P}_{\beta\alpha} \mathbb{B}_{\alpha\beta}\, \frac{\exp(i(z^{\alpha} + z^{\beta})\, y) - \exp(i(z^{\alpha-1} + z^{\beta-1})\, y)}{y},$$

а

$$\mathbb{P}_{\beta\alpha} = \frac{z^{\alpha-1}}{z^{\alpha-1} + z^{\beta-1}} = \frac{1}{1 + z^{\beta-\alpha}}.$$

Для перехода к пределу в (8) в слагаемых с $\alpha = \beta = 1$ и $\alpha = \beta = m$ следует воспользоваться принципом локализации Римана (см., напр., [10, гл.I, §33]) и признаком сходимости Валле-Пуссена ([10, гл.III, §3]), в остальных слагаемых после однократного интегрирования по частям работает теорема Лебега, поскольку показатели экспонент имеют отрицательные вещественные части. В результате получаем[5]

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{2\pi i} \cdot \psi(0+) \int\limits_0^{\infty} g(y)\, dy = -\frac{\psi(0+)}{2m} \cdot \mathbf{Sp}(\mathbb{P}\mathbb{B}) \tag{9}$$

(последнее равенство следует из [11, 3.434.2]).

Заметим, что элементы матрицы $\mathbb{B}$ есть отношения определителей, составленных из старших коэффициентов полиномов, входящих в определители $\Delta_{\alpha\beta}(\zeta)$ и $\Delta(\zeta)$. Прямой подсчет с использованием формулы Крамера дает

$$\mathbb{B} = \mathbb{W} \cdot \mathrm{diag}[(-1)^{k_1}, \ldots, (-1)^{k_m}] \cdot \mathbb{W}^{-1} \tag{10}$$

(напомним, что $\mathbb{W} = (\mathbb{W}_{\ell j})$ – матрица Вандермонда, порождаемая числами $w_j = z^{k_j}$, $j = 1, \ldots, m$).

Из (10) видно, что если $e^{(j)} = [1, w_j, \ldots, w_j^{m-1}]^T$ – j-й столбец матрицы $\mathbb{W}$, то $\mathbb{B}e^{(j)} = (-1)^{k_j} e^{(j)}$, т.е. векторы $e^{(j)}$ образуют собственный базис матрицы $\mathbb{B}$.

Далее, по формуле суммы геометрической прогрессии матрицу $\mathbb{P}$ можно переписать так:

$$\mathbb{P} = \lim_{\rho\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rho^n\, \varphi_n \overline{\varphi}_n^T, \tag{11}$$

где $\varphi_n = (1, z^n, \ldots, .., z^{(m-1)n})^T$.

Введем множество $\mathbb{K} = \{k_j + 2mp \,|\, 1 \leq j \leq m, \ \ p \in \mathbb{Z}_+\}$.

Лемма 2. *Если* $n \in \mathbb{K}$, *то* $\mathbf{Sp}(\varphi_n \overline{\varphi}_n^T \mathbb{B}) = (-1)^n m$. *Если* $n \notin \mathbb{K}$, *то* $\mathbf{Sp}(\varphi_n \overline{\varphi}_n^T \mathbb{B}) = (-1)^{n+1} m$.

[5] Заметим, что переход от (8) к (9) следует также из [5, Лемма 2].

Для доказательства нам потребуется такое очевидное предложение.

Предложение 2. *Пусть u, v – векторы гильбертова пространства, $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда если $(au+bv, u) = 0$, то $(au+bv, -au+bv) = |au+bv|^2$.*

Доказательство леммы 2. Прежде всего,

$$\mathbf{Sp}(\varphi_n \overline{\varphi}_n^T \mathbb{B}) = \mathbf{Sp}(\overline{\varphi}_n^T \mathbb{B} \varphi_n) = (\mathbb{B}\varphi_n, \varphi_n).$$

Рассмотрим подпространства

$$U = Lin\{e^{(j)} \mid k_j \equiv 1 \pmod 2\}; \qquad V = Lin\{e^{(j)} \mid k_j \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Мы знаем, что на U матрица $\mathbb{B}$ действует умножением на -1, а на V тождественным образом. Заметим, что $U \dot{+} V = \mathbb{C}^m$, так как векторы $e^{(j)}$ образуют базис. Таким образом, существует разложение вектора $\varphi_n = u + v$, где $u \in U$, $v \in V$, причем $\mathbb{B}\varphi_n = -u + v$.

1. Если $n \in \mathbb{K}$, то φ есть собственный вектор матрицы $\mathbb{B}$ с собственным числом $(-1)^n$. Поэтому $(\mathbb{B}\varphi_n, \varphi_n) = (-1)^n(\varphi_n, \varphi_n) = (-1)^n m$.

2. Если $n \notin \mathbb{K}$ и $n \equiv 1 \pmod 2$, то прямой подсчет показывает, что $\varphi \perp U$. Согласно предложению 2, $(\mathbb{B}\varphi_n, \varphi_n) = |\varphi_n|^2 = m$.

3. Аналогично, если $n \notin \mathbb{K}$ и $n \equiv 0 \pmod 2$, то $\varphi \perp V$ и, согласно предложению 2, $-(\mathbb{B}\varphi_n, \varphi_n) = |\varphi_n|^2 = m$. $\square$

Для завершения доказательства теоремы обозначим $K = \{k_1, ..., k_m\}$. Тогда из формулы (11) и леммы 2 получим

$$\begin{aligned}\mathbf{Sp}(\mathbb{P}\mathbb{B}) &= \lim_{\rho\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \rho^n \mathbf{Sp}(\varphi_n \overline{\varphi}_n^T \mathbb{B}) = \\ &= m \lim_{\rho\to 1-} \Big(\sum_{n\in\mathbb{K}} (-1)^n \rho^n (-1)^n + \sum_{0\le n\notin\mathbb{K}} (-1)^n \rho^n (-1)^{n+1} \Big) \\ &= m \lim_{\rho\to 1-} \Big(\sum_{j\in K} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^{j+2mp} - \sum_{0\le j<2m, j\notin K} \sum_{p=0}^{\infty} \rho^{j+2mp} \Big) \\ &= m \lim_{\rho\to 1-} \Big(\sum_{j\in K} \frac{\rho^j}{1-\rho^{2m}} - \sum_{0\le j<2m, j\notin K} \frac{\rho^j}{1-\rho^{2m}} \Big).\end{aligned}$$

Поскольку множество K содержит ровно m элементов, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{Sp}(\mathbb{P}\mathbb{B}) &= m \lim_{\rho\to 1-} \Big(\sum_{j\in K} \frac{\rho^j - 1}{1-\rho^{2m}} - \sum_{0\le j<2m, j\notin K} \frac{\rho^j - 1}{1-\rho^{2m}} \Big) = \\ &= m \Big(\sum_{j\in K} \frac{-j}{2m} - \sum_{0\le j<2m, j\notin K} \frac{-j}{2m} \Big) = \frac{1}{2} \sum_{0\le j<2m} j - \sum_{j\in K} j = \\ &= \frac{m(2m-1)}{2} - \sum_{j=1}^{m} k_j. \qquad (12)\end{aligned}$$

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из (9) и (12). $\square$

Работа первого и третьего авторов поддержана грантом 11.G34.31.0026 Правительства РФ (лаборатория имени П.Л. Чебышева при СПбГУ). Работа второго автора частично поддержана грантом НШ4210.2010.1.

Мы весьма признательны И.А. Шейпаку и А.А. Шкаликову, благодаря которым мы смогли ознакомиться с текстом диссертации А.Г. Костюченко; В.А. Козлову и А.Н. Подкорытову за полезные обсуждения; А.С. Печенцову и А.И. Козко, которые предоставили нам тексты статей [5] и [9].

Список литературы

[1] Б.М. Левитан, *Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям самосапряжённого дифференциального уравнения второго порядка*, Изв. АН СССР, сер. матем. 1953. I. Т.17, 331–364; II. Т.19, 33–58.

[2] П.Б. Затицкий, А.И. Назаров, Д.М. Столяров, *По следам В.А. Садовничего*, SPbMS El. Prepr. Archive. N 2010-04. 5с.

[3] А.И. Козко, А.С. Печенцов, *Спектральная функция и регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов высших порядков*, Мат. заметки. 2008. Т.83, N1, 39–49.

[4] В.А. Садовничий, А.С. Печенцов, А.И.Козко, *Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов*, Доклады РАН, 2009. Т.427, N4, 461–465.

[5] А.И. Козко, А.С. Печенцов, *Регуляризованные следы сингулярных дифференциальных операторов порядка $2m$*, Совр. пробл. матем. мех., 2009. Т.3, вып.3, Изд. МГУ, 45–57.

[6] L. Gårding, *Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators*, C.R. 12 Congress Math. Scand., Lund, 1953. 44–55.

[7] А.Г. Костюченко, *О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов*, Дисс. на соиск. уч. ст. д.ф.-м.н. М.: МГУ, 1966.

[8] А.Г. Костюченко, *Асимптотика спектральной функции сингулярного оператора порядка $2m$*, Доклады АН СССР, 1966. Т.168, N2, 276–279.

[9] А.И.Козко, А.С.Печенцов, *Спектральная функция сингулярного оператора порядка $2m$*, Изв. РАН. Сер. матем., Т.74, N6 (2010), 107–126.

[10] Н.К. Бари, *Тригонометрические ряды*, М., Физматлит, 1961.

[11] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, изд. 5, М., Наука, 1971.