SPb. Math. Society Preprint 2011-03 22 Oct 2011

Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые?

И.Я. Новиков [1], М.А. Скопина[2]

Аннотация

Последние годы в литературе все чаще стали появляться базисы Хаара в разных структурах, причем в некоторых работах построение системы Хаара является единственным содержанием. В настоящей заметке дано простое описание построения системы Хаара в любом пространстве с мерой при наличии подходящей топологии. Эта конструкция охватывает базисы Хаара, построенные в работах [5], [7], [12], [13], [4], [8], [9], [10], [11], [14].

Система Хаара, появившаяся сто лет назад [1], является модельным примером базиса всплесков. Активно изучаться всплески начали в конце прошлого века в связи с созданием теории кратномасштабного анализа (КМА) в работах С. Малла [2] и Й. Мейера [3]. Наряду с изучением всплесков на прямой, возник интерес к базисам всплесков в других структурах.
В.С.Лэнг [5] разработал теорию КМА на группе Кантора. Им, а также В.Ю.Протасовым и Ю.А.Фарковым [6], были найдены различные КМА, порождающие ортогональные базисы всплесков, существенно отличающиеся от базиса Хаара. Группа p-адических чисел при $p = 2$ имеет много сходства с группой Кантора: элементы имеют одинаковые канонические представления, топология определяется одной и той же неархимедовой метрикой. Различаются группы только действием "+", но это приводит к принципиально разным теориям всплесков и КМА. В частности, в [15] доказано, что, в отличие от группы Кантора, не существует p-адического КМА, порожденного ортогональной масштабирующей функцией, отличного от КМА Хаара. В то же время, p-адический базис Хаара (впервые выписанный С.В.Козыревым в [12]) имеет точно такой же вид, что и базис Хаара на группе Кантора при $p = 2$ или Виленкина при $p > 2$. Почти те же формулы дают базисы Хаара на единичных шарах (аналоги периодического базиса Хаара на прямой). Б. И. Голубов [4] изучал обобщенные базисы Хаара на отрезке $[0, 1]$, взяв на каждом уровне j свой коэффициент сжатия p_j, при этом формулы практически сохранили свой вид с заменой лишь p на p_j. В работах [8]-[11] С.Ф.Лукомский приходит к тем же формулам в разных ситуациях: на кольцах целых p-адических чисел и проективных пределах конечных циклических групп в одномерном и многомерном случае, при этом он опирается на теорию нульмерных групп, в результате чего доказательство базисности очередной системы Хаара приобретает весьма значительный объем. В [10] и в пленарном докладе на ВЗМШ в 2011 г. им высказано мнение, что причина сходства базисов Хаара в разных структурах объясняется тем, что все эти структуры являются нульмерными группами. В настоящей заметке мы

[1] поддержан грантом РФФИ 11-01-00614
[2] поддержана грантом РФФИ 09-01-00162.

хотим дать гораздо более простое объяснение этого сходства. Будет описана достаточно общая схема построения базисов Хаара, при этом не требуется даже наличие группового действия "+" (его использование только создает некоторое удобство для записи функций Хаара, но можно обойтись и без этого). Нужно только наличие "не слишком плохой" топологии в пространстве с мерой, обеспечивающей некоторые естественные свойства измеримых множеств, и подходящая последовательность разбиений пространства. При этом процесс построения системы Хаара и доказательство ее базисности точно такие же, как для классического базиса Хаара.

Пусть μ – мера в Ω, Σ – σ-алгебра измеримых множеств, $\mathbf{p} = \{p_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ – последовательность целых чисел, $p_j > 1$. Предположим, что существуют наборы множеств Ω_{jn}, $n \in \mathbb{Z}_+$, попарно дизъюнктных при каждом $j \in \mathbb{Z}$, такие что $\mu\Omega_{0n} = 1$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$, $\Omega = \cup_n \Omega_{jn}$ для любого $j \in \mathbb{Z}$, каждое $\Omega_{j-1,n}$ разбивается на p_j равновеликих подмножеств Ω_{j,n_k}, $n_k = n_k(n,j) \in \mathbb{Z}$. Совокупность всех пар (j,n), нумерующих множества Ω_{jn}, обозначим через I и совокупность $\{\Omega_{jn}\}_{(jn)\in I}$ назовем $(H,\mathbf{p})$-разбиением, а ее элементы – ячейками.

Обозначим через φ_{jn} характеристическую функцию множества Ω_{jn}, нормированную множителем

$$C_j = \begin{cases} (p_1 p_2 \dots p_j)^{1/2}, & \text{если} j > 0, \\ 1, & \text{если} j = 0, \\ (p_0 p_{-1} \dots p_{j+1})^{-1/2}, & \text{если} j < 0. \end{cases}$$

Положим $V_j := \overline{\operatorname{span}\{\varphi_{jn}, n \in \mathbb{Z}_0\}}$.

Лемма. *Пусть $\{\Omega_{jn}\}_{(jn)\in I}$ – $(H,\mathbf{p})$-разбиение. Если для любого множества $A \in \Sigma$ конечной меры и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное $I_1 \subset I$, такое что*

$$\mu(A \Delta \bigcup_{(j,k)\in I_1} \Omega_{jk}) < \varepsilon. \quad (1),$$

то объединение всех пространств V_j, плотно в $L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Доказательство. Нам нужно аппроксимировать произвольную функцию $f \in L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$ с произвольной точностью $\varepsilon > 0$ функцией из $\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$. Это осуществляется по следующей схеме: 1) приближаем функцию f с точностью $\varepsilon/3$ функцией f_1 с $\operatorname{supp} f_1 \subset \bigcup_{k\in I_1} \Omega_{ok}$, где I_1 – конечное подмножество I; 2) рассматриваем функции $f_1 \cdot \chi_{\Omega_{0k}}$ для произвольного целого k, где χ_e –характеристическая функция множества e; в силу 1) отличных от нуля среди них будет конечное число, которое мы обозначим через n; для каждого целого k находим стандартным образом счётно-ступенчатую функцию f_{1k} :

$$\|f_1 \cdot \chi_{\Omega_{0k}} - f_{1k}\|_{L_2(\Omega,\mu)} < \varepsilon/(3n);$$

3) наконец, пользуясь условием (1), аппроксимируем функции f_{1k} функциями f_{2k} с точностью $\varepsilon/(3n)$, где функции f_{2k} – счётно-ступенчатые с множествами постоянства, являющимися конечными объединениями ячеек из $(H,\mathbf{p})$−разбиения. $\Box$

Замечание. Отметим, что свойство (1) необходимо для полноты множества $\cup_{j\in\mathbb{Z}}V_j$ в $L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$.

Теорема. *Пусть пространство с мерой (Ω,Σ,μ) снабжено топологией τ, такой, что Σ содержит все открытые множества и мера μ регулярна, $\Omega=\{\Omega_{jn}\}_{(j,n)\in I}$ – $(H,\mathbf{p})$-разбиение. Если для любого $x\in\Omega$ и любого элемента U базы окрестностей точки x существует ячейка Ω_{jn}, содержащая x и содержащаяся в U, то пространства V_j, $j\in\mathbb{Z}$, образуют КМА в $L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$, т.е. удовлетворяют следующим условиям: (i) $V_{j-1}\subset V_j$; (ii) $\cap_{j\in\mathbb{Z}}V_j=\{0\}$; (iii) $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}}V_j}=L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$; (iv) функции φ_{jn} образуют ортонормированный базис пространства V_j.*

Доказательство. Свойство (iv), очевидно, выполнено, поскольку для любого $j\in\mathbb{Z}$ носители функций φ_{jn} попарно дизъюнктны и $\|\varphi_{jn}\|=1$. По построению каждое $\Omega_{j-1,n}$ разбивается на p_j частей Ω_{j,n_k}, $n_k=n_k(n,j)$, что влечет $\varphi_{j-1,n}=p_j^{-1/2}\sum_{k=1}^{p_j}\varphi_{j,n_k}$. Отсюда, учитывая (iv), получаем (i).

Для доказательства (ii) заметим, что функция $f\in\cap_{j\in\mathbb{Z}}V_j$ должна быть константой на любой ячейке Ω_{jn}. Пусть $f=c$ на Ω_{j,n_0} для некоторого n_0. Тогда $f=c$ на любой ячейке, содержащей Ω_{j,n_0}, а значит и на их объединении, которое имеет бесконечную меру. Откуда, учитывая. что $f\in L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$,, получаем $c=0$, что влечет $f=0$ ввиду произвольности n_0.

В силу леммы для доказательства (iii) достаточно проверить выполнение свойства (1). Пусть $A\in\Sigma$, $\mu A<\infty$, $\varepsilon>0$. Из регулярности меры следует существование открытого множества G, такого что $A\subset G$, $\mu(G\setminus A)<\epsilon/2$. Покажем, что G представимо в виде не более чем счетного объединения попарно дизъюнктных ячеек. Обозначим через Δ_0 объединение всех ячеек Ω_{0n} содержащихся в G, через Δ_1 – объединение всех ячеек Ω_{1n} содержащихся в G и не содержащихся в Δ_0. Продолжая аналогично, получим последовательность попарно дизъюнктных множеств Δ_j, $j=0,1,\ldots$, содержащихся в G, причем каждое Δ_j есть объединение конечного числа попарно дизъюнктных ячеек. Положив $\Delta=\cup_{j=0}^{\infty}\Delta_j$, имеем $\Delta\subset G$. Для поверки противоположного включения возьмем произвольное $x\in G$. Поскольку G открыто, существует элемент U базы окрестностей точки x, содержащийся в G, а значит и ячейка Ω_{jn}, содержащая x и содержащаяся в G. Но тогда существует такое $j_1\le j$, что $\Omega_{jn}\subset\Delta_{j_1}$, что влечет $x\in\Delta$. Мы установили равенство $G=\Delta$. Осталось заметить, что $\mu(\Delta\setminus\cup_{j=0}^{N}\Delta_j)<\epsilon/2$ при достаточно больших N. □

Замечание 1. Теорема останется верной, если обобщить определение $(H,\mathbf{p})$-разбиения следующим образом: заменить последовательность $\mathbf{p}=\{p_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ на $\widetilde{\mathbf{p}}=\{p_{jn}\}_{j,n=-\infty}^{\infty}$ и каждое $\Omega_{j-1,n}$ разбивать на p_{jn} равновеликих подмножеств Ω_{j,n_k}, $n_k=n_k(n,j)\in\mathbb{Z}$.

Замечание 2. Отметим, что если в условиях теоремы топология τ определяется метрикой, то мера μ регулярна (см., например, [16, теорема III.2]). В этом случае дополнительное предположение о ячейках будет выполнено, если для каждого $x\in\Omega$ диаметры вложенных ячеек, содержащих x, стремятся к нулю.

Замечание 3. В случае, когда Ω – метрическое пространство и последовательность $\{p_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ограниченна, теорема доказана в [17, теорема 5.1]

Под системой Хаара, порожденной КМА Хаара, мы будем понимать следующую ортонормированную систему в $L_2(\Omega,\Sigma,\mu)$. Для произвольной пары $(j,n)\in I$ рассмотрим конечномерное подпространство W_{jn}, порожденное характеристическими функциями ячеек Ω_{j+1,n_k}, $k=1,\dots,p_{j+1}$, составляющих разбиение Ω_{jn}, причём дополнительно потребуем, чтобы функции этого подпространства имели нулевое среднее. Итак,

$$W_{jn} := \left\{ f\in L_2(\Omega,\Sigma,\mu): \quad f=\sum_{k=1}^{p_{j+1}} c_k\chi_{\Omega_{j+1,n_k}};\ \int\limits_{\Omega_{jn}} f d\mu = 0 \right\}.$$

Ясно, что размерность W_{jn} равна $p_{j+1}-1$ и члены любого ортонормированного базиса в W_{jn} имеют вид $\psi_{jn}^{\nu} = C_{j+1}\sum_{k=1}^{p_{j+1}} h_{\nu,k}\chi_{\Omega_{j+1,n_k}}$, где $h_{\nu k}$, $\nu,k=1,\dots,p_{j+1}$ – элементы унитарной матрицы (вообще говоря, своей для каждого $(j,n)\in I$), у которой первая строка состоит из одинаковых элементов. Чаще всего в качестве таких унитарных матриц берут матрицу корней из единицы. Пусть $\Psi_{j,n} := \{\psi_{jn}^{\nu}\}_{\nu=2}^{p_{j+1}}$ – произвольный ортонормированный базис в $W_{j,n}$. Систему Хаара, порожденную КМА Хаара, определим, как $\Psi := \cup_{(j,n)\in I}\Psi_{j,n}$.

Отметим, что если существует оператор $D:\Omega\to\Omega$, такой что $D\Omega_{jn} = \Omega_{j+1,n}$ для всех $n\in\mathbb{Z}_+$, то задав базисы $\Psi_{(0,n)}$, мы имеем систему Хаара традиционного вида $\psi_{jk}^{\nu}(x) = C_j\psi_{0k}^{\nu}(D^jx)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $j\in\mathbb{Z}$, $\nu=1,\dots,p_{j+1}-1$.

Рассмотрим несколько частных случаев описанной выше схемы построения системы Хаара.

Если $p_j=2$, $\Omega=\mathbb{R}$, μ– мера Лебега, $D:\ x\to x/2$, разбиение $\{\Omega_{0,n}\}_{n=0}^{\infty}$ состоит из интервалов $[k,k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$, занумерованных в произвольном порядке, $\Omega_{jn} = D^j\Omega_{0n}$, то мы получаем классический базис Хаара [1].

Пусть $p_j=p$, p – простое, $\Omega=\mathbb{Q}_p$ – поле p-адических чисел, μ– мера Хаара в $\mathbb{Q}_p$, $D:\ x\to px$, $\Omega_{0n} = a_n+\mathbb{Z}_p, a_n\in I$, где $\mathbb{Z}_p$ – множество p-адических целых, $I=\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – множество p-адических чисел, совпадающих со своей дробной частью, $\Omega_{jn} = D^j\Omega_{0n}$. В этом случае мы получаем базис, построенный в работе [12]. Простейший многомерный базис Хаара можно построить, взяв $\Omega=\mathbb{Q}_p^d$, $\Omega_{0n} = a_n+\mathbb{Z}_p^d, a_n\in I^d$.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждое Ω_{0n} разбивается на p равновеликих подмножеств Ω_k^n, состоящих из векторов $x\in\Omega_{0n}$, таких что $x_1-(a_n)_1\equiv k \pmod p$, $k=0,1,\dots,p-1$. Нетрудно видеть, что $D^{-1}\Omega_k^n = \Omega_{0m}$, где $m=m(n,k)\in\mathbb{Z}_+$, и D устанавливает взаимно однозначное соответствие между наборами множеств $\{\Omega_{0n}\}$ и $\{\Omega_k^n\}$. Положив $\Omega_{jn} = D^j\Omega_{0n}$, $j\in\mathbb{Z}$, получим $(H,\mathbf{p})$-разбиение $\{\Omega_{jn}\}_{n=0}^{\infty}$. Соответствующие базисы Хаара строились в [13], а сужения базисных функций на $\mathbb{Z}_p$ (которые образуют базис в $L_2(\mathbb{Z}_p)$, поскольку носитель каждого элемента построенного базиса Хаара либо содержится в $\mathbb{Z}_p$, либо не пересекается с $\mathbb{Z}_p$), строились в [11] с использованием теории нульмерных групп. Чуть менее тривиально проверить, что множества $\Omega_{jn} = D^j\Omega_{0n}$ образуют $(H, \mathbf{p})$-разбиение в случае $d = 2$, $p_j = 2$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Такие базисы Хаара построены в [14].

Пусть $p_j = 2$, $\Omega = C$ – группа Кантора, состоящая из элементов $x = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где $x_k \in \{0, 1\}$ причем $x_k \neq 0$ лишь для конечного числа отрицательных k, D – оператор, сопоставляющий каждому $x = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ элемент $x = \{x_{k+1}\}_{k=-\infty}^{\infty}$, μ – мера Хаара в C. Топология в C определяется нормой: $\|x\| = 2^m$, где m – наименьшее целое для которого $x_m \neq 0$. Каждому неотрицательному целому числу $n = 2^m y_m + \dots + 2y_1 + y_0$, $y_k \in \{0, 1\}$, сопоставим множество Ω_{0n}, состоящее из элементов x, таких что $x_0 = y_0, \dots, x_{-m} = y_m$, $x_k = 0$ при $k < -m$. Положив $\Omega_{jn} = D^j\Omega_{0n}$, имеем $(H, \mathbf{p})$-разбиение и базис Хаара, построенный в [5]. Аналогично при $p_j = p$, где p – любое целое число, большее 1, можно построить базис Хаара на группе Виленкина [7].

Пусть $\{p_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ – произвольная последовательность, $\Omega = [0, +\infty)$, μ– мера Лебега, $\Omega_{0n} = [n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $D_{p_j}: \ x \to x/p_j$. Для любого $p = p_j$ каждое Ω_{0n} представимо в виде объединения попарно дизъюнктных множеств $\Omega_k^{n,p}$, $k = 1, \dots, p$, таких что $\Omega_k^{n,p} = D_p\Omega_{0,n_k}$, $n_k = n_k(n, p) \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что отображение D_p устанавливает взаимно-однозначное соответствие между семействами множеств Ω_{0n}, $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\Omega_k^{n,p}$, $k = 1, \dots, p$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и каждое из семейств является разбиением Ω. Переобозначим множества Ω_k^{n,p_1}, положив $\Omega_{1n} = D_{p_1}\Omega_{0n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для каждого $j > 1$ определим семейства множеств Ω_{jn}, $n \in \mathbb{Z}_+$, рекурсивно. Пусть $\Omega_{j-1,n} = D_{p_1} \dots D_{p_{j-1}}\Omega_{0n}$. Поскольку каждое Ω_{0n} разбивается на равновеликие части $D_{p_j}\Omega_{0,n_k}$, $k = 1, \dots, p_j$, $n_k = n_k(n, j) \in \mathbb{Z}_+$, множества $D_{p_1} \dots D_{p_j}\Omega_{0,n_k}$ разбивают $\Omega_{j-1,n}$ на p_j частей равной меры. Положим $\Omega_{jn} = D_{p_1} \dots D_{p_j}\Omega_{0n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Для $j < 0$, положим $\Omega_{j,n} = D_{p_0}^{-1}D_{p_{-1}}^{-1} \dots D_{p_{j+1}}^{-1}\Omega_{0n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Нетрудно видеть, что каждое $\Omega_{j-1,n}$ разбивается на p_j подмножеств Ω_{j,n_k}, $n_k = n_k(n, j) \in \mathbb{Z}_+$ равной меры. Мы получили $(H, \mathbf{p})$-разбиение и соответствующий базис Хаара. Сужения базисных функций на $[0, 1)$ образуют базис в $L_2[0, 1)$, поскольку носитель каждый элемента построенного базиса Хаара либо содержится в $[0, 1)$, либо не пересекается с $[0, 1)$. Этот базис изучался в [4].

Как уже дважды отмечалось, сужение базисных функций Хаара на одно из множеств Ω_{0n} дает базис в $L_2(\Omega_{0n})$ – аналог периодического базиса Хаара. Такие базисы можно строить и непосредственно, немного изменив описанную выше схему. Пусть $\mu\Omega = 1$, $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность целых чисел, $p_j > 1$. Предположим, что существуют наборы попарно дизъюнктных равновеликих множеств Ω_{jn}, $j \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \dots, (p_1 ... p_j - 1)$, такие что $\Omega = \cup_{n=1}^{p_1}\Omega_{1n}$, каждое $\Omega_{j,n}$, $j \in \mathbb{N}$, разбивается на p_{j+1} равновеликих подмножеств Ω_{j+1,n_k}, $n_k = n_k(n, j)$. Добавим функцию $\varphi_{00} \equiv 1$ к набору функций φ_{jn}, $j \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots, (p_1 ... p_j)$, определенным, как и ранее, тогда заменив в формулировке нашей теоремы $j \in \mathbb{Z}$ на $j \in \mathbb{Z}_+$ и условие (ii) на $\cap_{j\in\mathbb{Z}_+} V_j = V_0$, получим аналогичное утверждение для "периодических" КМА. В таком КМА пространства V_j конечномерны, $\dim V_j = p_1...p_j$, а соответствующий система Хаара имеет следующую структуру: $\psi_{00}^0 = \varphi_{00} \equiv 1$, ψ_{jn}^ν, $j \in \mathbb{N}$, $n = 0, \ldots, p_1...p_j - 1$, $\nu, k = 1, \ldots, p_{j+1}$.

Пусть G – компактная нульмерная группа, порожденная односторонней ценочкой вложенных подгрупп $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$, определяющих топологию. Группа ассоциирована с некоторым набором простых чисел $\{p_j\}_{j=1}^\infty$, элементы группы представимы в виде $x = \sum_{k=1}^\infty x_k g_k$, где $x_k \in \{0, 1, \ldots, p_k - 1\}$, а элементы $g_k \in G_{k-1} \setminus G_k$ удовлетворяют условию $p_j g_j = g_{j+1}$. Равенства $\mu G_0 = 1$, $\mu G_j = (p_1 \ldots p_j)^{-1}$, $j \in \mathbb{N}$, определяют меру, инвариантную относительно сдвига, на полукольце всевозможных сдвигов множеств G_j. Эта мера распространяется на σ-алгебру Σ по схеме Каратеодори. Нетрудно проверить, что эта мера регулярна. Положим $\Omega = G$, разобьем Ω на равновеликие части Ω_{1k}, $k = 1, \ldots, p_1$, где Ω_{1k} состоит из элементов x, для которых $x_1 = k - 1$. Аналогично каждое Ω_{1k} разбивется на части Ω_{2k_l}, $l = 1, \ldots, p_2$, состоящие из элементов $x \in \Omega_{1k}$, для которых $x_2 = l - 1$. Перенумеровав множества Ω_{2k_l} должным образом, получим разбиение $\{\Omega_{2n}\}_{n=1}^{p_1 p_2}$. Продолжая этот процесс, построим $(H, \mathbf{p})$-разбиение $\{\Omega_{jn}\}_{n=0}^{p_1 \ldots p_j - 1}$, $j \in \mathbb{N}$. Соответствующий базис Хаара строился в [9]. Теперь покажем, как определить $(H, \mathbf{p})$-разбиение в G^d, порождающее систему Хаара, построению которой посвящена работа [10]. Ограничимся случаем $d = 2$. Положим $\Omega = G^2$, $\mathbf{p} = \{p_1, p_1, p_2, p_2, p_3, p_3, \ldots\}$. Каждое $x \in \Omega$ представимо в виде $x = (ag_1, bg_1) + y$, где $y \in G_1^2$ $a, b \in \{0, 1, \ldots, p_1 - 1\}$. Множество векторов (a, b) образует группу относительно сложения по модулю $(p_1.p_1)$, которая распадается на p_1 циклических подгрупп $\gamma_k = \{(la_k, lb_k),\ l = 0, 1, \ldots, p_1 - 1\}$. Ячейку Ω_{1k} определим, включив в нее все x, у которых $(a, b) \in \gamma_k$. Далее фиксируя l, определим соответствующие ячейки Ω_{2,k_l}, составляющие разбиение Ω_{1k}. Аналогично каждое Ω_{2n} сначала разбиваем на p_2 ячеек Ω_{3,n_k}, каждая из которых затем разбивается на p_2 ячеек Ω_{4,k_l}. Отметим, что гораздо проще построить систему Хаара в $L_2(G^2)$, взяв $\mathbf{p} = \{p_1^2, p_2^2, p_3^2, \ldots\}$ и определив $(H, \mathbf{p})$-разбиение точно так же, как в одномерном случае, т.е. для построения ячейки Ω_{jk} зафиксировать цифры в обеих координатах j-го слагаемого в групповом представления элемента $x \in \Omega_{j-1,n}$. Такие базисы Хаара называют сепарабельными.

Список литературы

[1] Haar A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann., 1910, 69, 331-341

[2] Mallat, S. (1988). Multiresolution representation and wavelets, Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA.

[3] Meyer, Y. (Décembre 1986). Ondelettes et fonctions splines, Séminaire EDP. Paris.

[4] Б.И.Голубов. Об одном классе полных ортонормированных систем, Сиб. матем. журн., IX:2 (1968), 297-314

[5] Lang, W. C., Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group, SIAM J. Math. Ana. 27 (1996), 305-312.

[6] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой Матем. сб., 197:10 (2006), 129–160

[7] Yury A. Farkov, Multiresolution Analysis and Wavelets on Vilenkin Groups, FACTA UNIVERSITATIS (NI?S) SER.: ELEC. ENERG. vol. 21, no. 3, December 2008, 309-325

[8] С. Ф. Лукомский, Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы Матем. сб. 201 (2010), no. 5, 41–64.

[9] С. Ф. Лукомский, О рядах Хаара на компактных нуль-мерных группах, Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2009, 9:1, 14-19.

[10] Lukomskii, Sergey F., Haar system on product of zero-dimensional compact groups. Cent. Eur. J. Math., 9(3), 2011, 627-639.

[11] С. Ф. Лукомский, О системе Хаара на произведении групп целых p-адических чисел. Матем. заметки, в печати.

[12] Kozyrev, S.V. Wavelet analysis as a p-adic spectral analysis// Izvestia Akademii Nauk, Seria Math. 2002. V. 66, no. 2. P. 149–158.

[13] Albeverio, Sergio; Kozyrev, Sergei V. Multidimensional pp-adic wavelets for the deformed metric. P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2 (2010), no. 4, 265–277

[14] E.J. King and M.A. Skopina, Quincunx multiresolution analysis for $L^2(Q_2^2)$, P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., 2 (2010), no. 3, 222–231.

[15] S.Albeverio, S.Evdokimov and M.Skopina, p-Adic multiresolution analysis and wavelet frames, J. Fourier Anal. Appl. 16, No. 5, 693-714 (2010).

[16] Б.М.Макаров, А.Н.Подкорытов, Лекции по вещественному анализу. СПб: БХВ-Петербургб 2011, 688 с.

[17] H.Aimar, A.Bernardis, B.Iaffei, Multiresolution approximations and unconditional bases on weighted Lebesgue spaces on spaces of homogeneous type. J. Approx. Theory 148 (2007), no. 1, 12–34.