SPb. Math. Society Preprint 2011-05 05 Dec 2011

Об асимптотике интегралов, связанных с обобщенной канторовой лестницей

А.И. Назаров, Н.В. Растегаев*

5 декабря 2011

Канторова лестница естественным образом включается в различные семейства самоподобных функций. В рамках этих семейств можно следить за асимптотикой некоторых определенных интегралов с параметром.

1 Введение

Пусть $\{I_k = [a_k, b_k]\}_{k=1}^m$ – подотрезки $[0,1]$, не пересекающиеся по внутренности. Обозначим S_k аффинные сжатия $[0,1]$ на I_k, не меняющие ориентации. Введем также набор положительных чисел $\{\rho_k\}_{k=1}^m$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^m \rho_k = 1$.

Определим оператор $\mathcal{S}$, действующий на функциях из $L_\infty(0,1)$ следующим образом:

$$\mathcal{S}(f) = \sum_{k=1}^m \left(\chi_{I_k}(f \circ S_k^{-1}) + \chi_{\{x>b_k\}}\right) \rho_k.$$

Легко проверить (см., напр., [5]), что $\mathcal{S}$ – сжимающее отображение на $L_\infty(0,1)$. Поэтому существует функция $C \in L_\infty(0,1)$, такая, что $\mathcal{S}(C) = C$.

Такую функцию $C(t)$ будем называть *обобщенной канторовой лестницей* с m ступеньками. Ее можно искать как равномерный предел последовательности $\mathcal{S}^k(f)$ для $f(t) \equiv t$, что позволяет считать $C(t)$ непрерывной и монотонной, причем $C(0) = 0$, $C(1) = 1$. Производная функции $C(t)$ в смысле обобщенных функций – мера μ, самоподобная по Хатчинсону (см. [4]), т.е. удовлетворяющая соотношению

$$\mu(E) = \sum_{k=0}^m \rho_k \mu(S_k^{-1}(E \cap I_k)).$$

Более общие способы построения самоподобных функций описаны в [5].

Для обобщенной канторовой лестницы $C(t)$ мы будем изучать асимптотику при $\lambda \to \infty$ интеграла

$$E(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda C(t)}\, dt.$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00154а.

Замечание 1. Легко видеть, что поиск асимптотики на отрицательной бесконечности сводится к аналогичной задаче на положительной бесконечности.

Более подробно, если лестница $C(t)$ задана отрезками $\{I_k\}_{k=1}^m$, где $I_k = [a_k, b_k]$, и высотами $\{\rho_k\}_{k=1}^m$, можно рассмотреть $C_1(t)$, задаваемую отрезками $\{J_k\}_{k=1}^m$, где $J_{m-k+1} = [1-b_k, 1-a_k]$, и высотами $\{\sigma_k\}_{k=1}^m$, $\sigma_k = 1 - \rho_{m-k+1}$. Заметим теперь, что для интегралов $E(\lambda)$, связанных с этими лестницами, выполняется соотношение

$$E_C(-\lambda) = e^{-\lambda} E_{C_1}(\lambda).$$

Таким образом, вопрос об асимтотике на отрицательной бесконечности для одной лестницы сводится к вопросу об асимптотике на положительной бесконечности для другой. Далее мы будем считать $\lambda > 0$.

Определение 1. Будем называть обобщенную канторову лестницу *ровной*, если

$$\forall k = 2, \dots, m \qquad \rho_k = \rho_1 = \frac{1}{m}, \quad b_k - a_k = b_1 - a_1, \quad a_k - b_{k-1} = a_2 - b_1.$$

При $a_2 = b_1$ такая лестница вырождается в $C(t) \equiv t$, и мы имеем $E(\lambda) = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}$.

Случай ровной лестницы при $m = 2$ рассматривается в работе [3], в которой среди других результатов получен первый член асимптотического ряда. Отметим еще статью [2], в которой получено представление функции $E(\lambda)$ и других интегралов (в случае классической канторовой лестницы) через ряды из элементарных функций.

2 Рекуррентное соотношение и основная лемма

Не умаляя общности, мы можем полагать, что $a_1 = 0$, $b_m = 1$ (остальные случаи сводятся к этому растяжением). Через Δ_i, $i = 1 \dots 2m-1$, мы обозначим длины отрезков, на которые разбит отрезок $[0,1]$, т.е. $\Delta_{2k-1} = b_k - a_k > 0$, $\Delta_{2k} = a_{k+1} - b_k \geqslant 0$. Заведем также обозначения $h_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \rho_i$, $g_k = 1 - h_k$.

Замечание 2. Соотношение $\mathcal{S}(C) = C$ можно иначе переписать в следующем виде:

$$C(t) = \begin{cases} h_{k-1} + \rho_k C\left(\frac{t-a_k}{\Delta_{2k-1}}\right), & t \in [a_k, b_k] \\ h_k, & t \in [b_k, a_{k+1}] \end{cases}$$

Лемма 1. *Для лестницы с m ступеньками имеет место соотношение*

$$E(\lambda) = \Delta_1 E(\rho_1 \lambda) + \Delta_2 e^{h_1 \lambda} + \Delta_3 e^{h_1 \lambda} E(\rho_2 \lambda) + \Delta_4 e^{h_2 \lambda} + \ldots + \Delta_{2m-1} e^{h_{m-1} \lambda} E(\rho_m \lambda). \quad (1)$$

Доказательство.

$$E(\lambda) = \int\limits_0^1 e^{\lambda C(t)}\,dt = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{a_k}^{b_k} e^{\lambda C(t)}\,dt + \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{b_k}^{a_{k+1}} e^{\lambda C(t)}\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} e^{h_{k-1}\lambda} \int\limits_{a_k}^{b_k} e^{\rho_k \lambda C\left(\frac{t-a_k}{\Delta_{2k-1}}\right)}\,dt + \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_{2k} e^{h_k\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \Delta_{2k-1} e^{h_{k-1}\lambda} E(\rho_k\lambda) + \sum_{k=1}^{m-1} \Delta_{2k} e^{h_k\lambda},$$

что совпадает с (1). □

Для анализа этого соотношения нам понадобится

Основная лемма. *Пусть для всех $\lambda \geqslant 0$ функция $F(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $1 \leqslant F(\lambda) \leqslant e^{\lambda}$;
2. $F(\eta\lambda) = d\, e^{(\eta-1)\lambda} F(\lambda) + f(\lambda), \quad 0 < d < 1,\ \eta > 1$;
3. $f(\lambda) = O(e^{(\eta-\varepsilon)\lambda})$ *при* $\lambda \to \infty$ *для некоторого* $\varepsilon > 0$.

Тогда при $\lambda \to \infty$ *имеем*

$$F(\lambda) = \Phi(\log_\eta(\lambda))\lambda^\alpha e^\lambda + O(e^{(1-\varepsilon)\lambda}),$$

где $\alpha = \log_\eta(d) < 0$, Φ *– 1-периодическая.*

Замечание 3. В частном случае это утверждение было доказано в [3].

Доказательство. Заведем обозначения

$$F_1(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{\lambda^\alpha e^\lambda}, \quad f_1(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{d\lambda^\alpha e^{\eta\lambda}}.$$

В этих обозначениях условие 2 переписывается так:

$$F_1(\eta\lambda) = F_1(\lambda) + f_1(\lambda),$$

откуда получаем по индукции

$$F_1(\lambda) = F_1\left(\frac{\lambda}{\eta^N}\right) + \sum_{k=1}^{N} f_1\left(\frac{\lambda}{\eta^k}\right).$$

Отметим, что $F_1(\lambda) \leqslant \lambda^{-\alpha} \to 0$ при $\lambda \to 0$. Значит, мы вправе записать

$$F_1(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} f_1\left(\frac{\lambda}{\eta^k}\right).$$

Кроме того, введем еще две функции:

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(\eta^k \lambda), \quad H(\lambda) = F_1(\lambda) + G(\lambda).$$

Из оценки $f_1(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha} e^{-\varepsilon\lambda})$ следует, что $G(\lambda)$ определена, и $G(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha} e^{-\varepsilon\lambda})$. Далее, по построению $H(\eta\lambda) = H(\lambda)$, т.е. $H(\lambda)$ – 1-периодическая функция от $\log_\eta(\lambda)$.

Вводя обозначение $\Phi(x) = H(\eta^x)$, заключаем, что $F_1(\lambda) = \Phi(\log_\eta(\lambda)) + O(\lambda^{-\alpha} e^{-\varepsilon\lambda})$. Переходя обратно к функции $F(\lambda)$, получим утверждение леммы. $\square$

3 Асимптотика $E(\lambda)$

3.1 Первое слагаемое

Нетрудно видеть, что для любой обобщенной канторовой лестницы функция $E(\lambda)$ удовлетворяет условиям основной леммы. Действительно, $0 \leqslant C(t) \leqslant 1$, значит $1 \leqslant E(\lambda) \leqslant e^\lambda$ для всех неотрицательных λ. Далее, вводя обозначение $\eta = \dfrac{1}{\rho_m} > 1$, можем переписать соотношение (1) следующим образом:

$$E(\eta\lambda) = \Delta_{2m-1} e^{(\eta-1)\lambda} E(\lambda) + f(\lambda),$$

где $f(\lambda) = \Delta_1 E\left(\rho_1 \eta \lambda\right) + \Delta_2 e^{h_1 \eta \lambda} + \ldots + \Delta_{2m-2} e^{(\eta-1)\lambda} = O(e^{(\eta-1)\lambda})$.

Применяя основную лемму, получаем

$$E(\lambda) = \Phi(\log_\eta(\lambda)) \lambda^\alpha e^\lambda + O(1), \tag{2}$$

где $\alpha = \log_\eta(\Delta_{2m-1}) < 0$, $\Phi(x)$ – 1-периодическая функция.

Функция $\Phi(\log_\eta(\lambda))$ представляет собой сумму ряда, равномерно сходящегося на любом компакте, лежащем в полуплоскости $Re(\lambda) > 0$. Поэтому аналитичность $f(\lambda)$ влечет аналитичность $\Phi(x)$ в полосе $|Im(x)| < \frac{\pi}{2\ln(\eta)}$. В общем случае трудно утверждать что-либо большее, ведь $f(\lambda)$, вообще говоря, выражается через $E(\lambda)$. Например, в вырожденном случае $\rho_k = \Delta_{2k-1}$, $\Delta_{2k} = 0$ мы получаем $C(t) \equiv t$, $E(\lambda) = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}$, и, таким образом, функция $\Phi(x)$ вырождается в константу. В общем случае вопрос о постоянстве $\Phi(x)$ остается открытым. Однако для случая ровных лестниц зависимость $f(\lambda)$ от $E(\lambda)$ может быть устранена. $\Phi(x)$ тогда принимает более явный вид, что позволяет получить о ней дополнительную информацию.

Для ровной лестницы, очевидно, $\eta = m$, а соотношение (1) может быть переписано следующим образом:

$$E(m\lambda) = \Delta_1 \frac{e^{m\lambda} - 1}{e^\lambda - 1} E(\lambda) + \Delta_2 \frac{e^{(m-1)\lambda} - 1}{e^\lambda - 1} e^\lambda.$$

Обозначая

$$\tilde{F}_1(\lambda) = \frac{E(\lambda)}{\lambda^\alpha \left(e^\lambda - 1\right)}, \qquad \tilde{f}_1(\lambda) = \frac{\Delta_2 \left(e^{(m-1)\lambda} - 1\right) e^\lambda}{\Delta_1 (e^\lambda - 1)(e^{m\lambda} - 1)\lambda^\alpha},$$

запишем
$$\tilde{F}_1(m\lambda) = \tilde{F}_1(\lambda) + \tilde{f}_1(\lambda).$$
Повторяя доказательство леммы, получим
$$E(\lambda) = \tilde{\Phi}(\log_m(\lambda))\lambda^\alpha(e^\lambda - 1) + O(1) = \tilde{\Phi}(\log_m(\lambda))\lambda^\alpha e^\lambda + O(1), \qquad (3)$$
где $\tilde{\Phi}(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{f}_1(m^{k+x})$ – 1-периодическая функция. Из соотношений (2) и (3) видно, что $\Phi(\log_m(\lambda)) - \tilde{\Phi}(\log_m(\lambda)) = O(\lambda^{-\alpha}e^{-\lambda})$, т.е. $\Phi(x) \equiv \tilde{\Phi}(x)$.

Таким образом, нам удалось получить явный вид функции $\Phi(x)$. Теперь можно заняться исследованием коэффициентов ряда Фурье
$$\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n x}.$$
Для этого нам понадобится формула Римана (см., напр., [1]):
$$\zeta(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{e^t - 1}\, dt.$$

Теорема 1. *В случае ровной лестницы коэффициенты Фурье функции $\Phi(x)$ могут быть посчитаны по формуле*
$$c_n = \frac{\Delta_2(1-\Delta_1)}{\Delta_1 \ln(m)} \Gamma(\alpha_n)\zeta(\alpha_n), \qquad (4)$$
где $\alpha_n = -\alpha - \dfrac{2\pi i n}{\ln(m)}$.

Замечание 4. Поскольку $Re\,\alpha_n > 1$, отсюда следует, что для невырожденной ровной лестницы ($\Delta_2 \neq 0$) $c_n \neq 0$, и, в частности, $\Phi(x) \neq const$. Для случая $m = 2$ формула (4) была получена в [3].

Доказательство. Имеем
$$\begin{aligned}
c_n &= \int\limits_0^1 \Phi(s)e^{-2\pi i n s}\, ds = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \tilde{f}_1(m^{s+j})e^{-2\pi i n s}\, ds = \\
&= \frac{1}{\ln(m)} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{m^j}^{m^{j+1}} \tilde{f}_1(t) e^{-2\pi i n \log_m(t)}\, \frac{dt}{t} = \frac{1}{\ln(m)} \int_0^\infty t^\alpha \tilde{f}_1(t) t^{\alpha_n - 1}\, dt = \\
&= \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \ln(m)} \int_0^\infty \frac{\left(e^{(m-1)t} - 1\right) e^t}{(e^t-1)(e^{mt}-1)}\, t^{\alpha_n-1}\, dt = \\
&= \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \ln(m)} \left(\int_0^\infty \frac{t^{\alpha_n-1}}{e^t-1}\, dt - \int_0^\infty \frac{t^{\alpha_n-1}}{e^{mt}-1}\, dt \right) = \\
&= \frac{\Delta_2}{\Delta_1 \ln(m)} \Gamma(\alpha_n)\zeta(\alpha_n) \left(1 - m^{-\alpha_n}\right) = \frac{\Delta_2(1-\Delta_1)}{\Delta_1 \ln(m)} \Gamma(\alpha_n)\zeta(\alpha_n). \qquad \square
\end{aligned}$$

3.2 Дальнейшие слагаемые в простейшем случае

Перейдем к получению дальнейших слагаемых асимптотики. Перед общим случаем рассмотрим простой пример.

Теорема 2. *Пусть $m = 2$, $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}$. Тогда функция $E(\lambda)$ представима в виде*

$$E(\lambda) = H(\lambda)\lambda^\alpha e^\lambda + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\lambda} \left(C_k + D_k H(\lambda)\lambda^\alpha\right), \tag{5}$$

где ряд сходится равномерно при достаточно больших λ.

Здесь C_k, D_k – числовые коэффициенты, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{gathered} C_0 = -\frac{\Delta_2}{\Delta_3}, \qquad D_0 = -\frac{\Delta_1}{\Delta_3}, \\ C_{k+1} = \begin{cases} -\dfrac{\Delta_1}{\Delta_3} C_k, & k \equiv 1 \pmod 2 \\ \dfrac{1}{\Delta_3} C_{k/2} - \dfrac{\Delta_1}{\Delta_3} C_k, & k \equiv 0 \pmod 2 \end{cases} \\ D_{k+1} = \begin{cases} -\dfrac{\Delta_1}{\Delta_3} D_k, & k \equiv 1 \pmod 2 \\ D_{k/2} - \dfrac{\Delta_1}{\Delta_3} D_k, & k \equiv 0 \pmod 2). \end{cases} \end{gathered} \tag{6}$$

Доказательство. Соотношение (1) в рассматриваемом случае перепишется так:

$$E(2\lambda) = E(\lambda)(\Delta_1 + \Delta_3 e^\lambda) + \Delta_2 e^\lambda. \tag{7}$$

Результат применения к нему основной леммы мы запишем следующим образом:

$$E(\lambda) = H(\lambda)\lambda^\alpha e^\lambda (1 + E_1(\lambda)), \quad E_1(\lambda) = O(\lambda^{-\alpha} e^{-\lambda}).$$

Подставляя в (7), получаем

$$E_1(2\lambda) = E_1(\lambda)\left(1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_3} e^{-\lambda}\right) + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\frac{\lambda^{-\alpha}}{H(\lambda)} e^{-\lambda} + \frac{\Delta_1}{\Delta_3} e^{-\lambda}\right), \tag{8}$$

откуда можно видеть, что

$$E_1(\lambda) + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\frac{\lambda^{-\alpha}}{H(\lambda)} e^{-\lambda} = E_1(2\lambda) - E_1(\lambda)\frac{\Delta_1}{\Delta_3} e^{-\lambda} - \frac{\Delta_1}{\Delta_3} e^{-\lambda} = O(e^{-\lambda}).$$

Обозначая через $E_2(\lambda)$ правую часть равенства, можно заключить, что

$$E_1(\lambda) = -\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\frac{\lambda^{-\alpha}}{H(\lambda)} e^{-\lambda} + E_2(\lambda), \quad E_2(\lambda) = O(e^{-\lambda}).$$

Это дает нам второе слагаемое асимптотики:

$$E(\lambda) = H(\lambda)\lambda^\alpha e^\lambda - \frac{\Delta_2}{\Delta_3} + O(\lambda^\alpha).$$

Его можно снова подставить в соотношение (7), получая для $E_2(\lambda)$ выражение, аналогичное (8):

$$E_2(2\lambda) = E_2(\lambda)\left(1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_3}e^{-\lambda}\right) + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_3}e^{-\lambda} + \frac{\Delta_2(1-\Delta_1)}{\Delta_3^2}\frac{\lambda^{-\alpha}}{H(\lambda)}e^{-2\lambda}\right).$$

Повторяя эту операцию, получаем формулы (6) и равенство (5) как асимптотическое. Далее, из (6) можно заключить, что коэффициенты C_k, D_k имеют не более чем экспоненциальный рост по номеру:

$$|C_k| \leqslant |C_0|\left(\frac{2}{\Delta_3}\right)^k, \quad |D_k| \leqslant |D_0|\left(\frac{2}{\Delta_3}\right)^k,$$

что позволяет утверждать, что ряд в правой части (5) сходится равномерно при достаточно больших λ.

Осталось показать, что правая часть равенства (5) исчерпывает $E(\lambda)$. Для этого рассмотрим остаток

$$\mathfrak{E}(\lambda) = E(\lambda) - H(\lambda)\lambda^\alpha e^\lambda - \sum_{k=0}^\infty e^{-k\lambda}\left(C_k + D_k H(\lambda)\lambda^\alpha\right).$$

Заметим, что последовательность функций $E_k(\lambda)$ сходится к $\mathfrak{E}_1(\lambda) := \frac{e^{-\lambda}}{\lambda^\alpha H(\lambda)}\mathfrak{E}(\lambda)$ в $L_\infty(\Lambda, +\infty)$ при достаточно большом Λ. Далее,

$$\left|E_k(2\lambda) - E_k(\lambda)\left(1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_3}e^{-\lambda}\right)\right| \leqslant \sum_{j=k}^\infty\left(|C_0|\left(\frac{2}{\Delta_3}\right)^{j-1}\frac{1}{\lambda^\alpha H(\lambda)} + |D_0|\left(\frac{2}{\Delta_3}\right)^{j-1}\right)e^{-j\lambda},$$

стремится к нулю в $L_\infty(\Lambda, +\infty)$. Отсюда видно, что $\mathfrak{E}_1(\lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\mathfrak{E}_1(2\lambda) = \mathfrak{E}_1(\lambda)\left(1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_3}e^{-\lambda}\right), \quad \lambda > \Lambda. \tag{9}$$

Мы знаем, что для любого $\varsigma \geqslant 1$ имеет место оценка $\mathfrak{E}_1(\lambda) = O(e^{-\varsigma\lambda})$. Поэтому для некоторых $c > 0$, $\varsigma \geqslant 1$ имеем

$$|\mathfrak{E}_1(\lambda)| \leqslant c\, e^{-\varsigma\lambda} \quad \text{при } \lambda > \Lambda. \tag{10}$$

Из (9) с учетом (10) получаем

$$|\mathfrak{E}_1(\lambda)| = |\mathfrak{E}_1(2\lambda) - \frac{\Delta_1}{\Delta_3}e^{-\lambda}\mathfrak{E}_1(\lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant c\, e^{-2\varsigma\lambda} + \frac{\Delta_1}{\Delta_3}\, c\, e^{-(\varsigma+1)\lambda} \leqslant \frac{1}{\Delta_3}\, c\, e^{-(\varsigma+1)\lambda} \leqslant c\, e^{-(\varsigma+1+\frac{\ln(\Delta_3)}{\Lambda})\lambda}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\Lambda > -2\ln(\Delta_3)$. Тогда

$$|\mathfrak{E}_1(\lambda)| \leqslant c\, e^{-(\varsigma+\frac{1}{2})\lambda} \quad \text{при } \lambda > \Lambda.$$

Повторяя это рассуждение, получим, что соотношение (10) выполнено с той же константой c и произвольным $\varsigma \geqslant 1$. Таким образом, $\mathfrak{E}_1(\lambda) \equiv 0$ при всех $\lambda > \Lambda$, что и доказывает теорему. □

Замечание 5. При $\Delta_1 = \Delta_3$, т.е. для ровной лестницы, из (6) следует, что $D_k = 0$ при всех $k \geqslant 1$. Этот факт верен и в общем случае, см. далее теорему 4.

3.3 Дальнейшие слагаемые, случай $\rho_m = \min\{\rho_i\}$

Займемся переносом этой схемы на общий случай. Сделать это можно, к сожалению, не всегда, поэтому мы введем дополнительное предположение: $\rho_m = \min\{\rho_i\}$. Результат применения леммы мы на этот раз запишем так:

$$E(\lambda) = e^{\lambda}\left(H_1(\lambda) + E_1(\lambda)\right), \qquad H_1(\lambda) = H(\lambda)\lambda^{\alpha}, \quad E_1(\lambda) = O(e^{-\lambda}).$$

Подставим это в соотношение (1), а получившееся уравнение запишем следующим образом:

$$\frac{1}{\Delta_{2m-1}} E_1(\eta\lambda) = E_1(\lambda) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}}\, e^{-g_i\eta\lambda} E_1(\rho_i\eta\lambda) - \mathfrak{P}_1(\lambda), \tag{11}$$

$$\mathfrak{P}_1(\lambda) = \sum_{\varsigma\in\mathfrak{I}_1} c^1_{\varsigma}(\lambda) e^{-\varsigma\lambda}.$$

Здесь

$$\mathfrak{I}_1 = \{\eta g_k\}_{k=1}^{m-1}, \quad c^1_{\eta g_k}(\lambda) = -\frac{\Delta_{2k-1} H_1(\eta\rho_k\lambda) + \Delta_{2k}}{\Delta_{2m-1}}.$$

Отметим, что минимальный элемент $\mathfrak{I}_1$ – это $\eta g_{m-1} = 1$. Преобразуем (11) так:

$$\begin{aligned} E_2(\lambda) &:= E_1(\lambda) - c^1_1(\lambda)e^{-\lambda} = \\ &= \frac{1}{\Delta_{2m-1}}\, E_1(\eta\lambda) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}}\, e^{-g_i\eta\lambda} E_1(\rho_i\eta\lambda) + \mathfrak{P}_1(\eta\lambda) - c^1_1(\lambda)e^{-\lambda}. \end{aligned} \tag{12}$$

Мы знаем, что $E_1(\lambda) = O(e^{-\lambda})$. Поэтому все слагаемые в правой части (12) есть $O(e^{-\varsigma'\lambda})$, $\varsigma' > 1$, откуда $E_2(\lambda) = O(e^{-\varsigma'\lambda})$, и потому

$$E_1(\lambda) = -\left(\frac{\Delta_{2m-2}}{\Delta_{2m-1}} + \frac{\Delta_{2m-3}}{\Delta_{2m-1}} H_1(\eta\rho_{m-1}\lambda)\right) e^{-\lambda} + O(e^{-\varsigma'\lambda}).$$

Теперь (11) можно переписать так:

$$\frac{1}{\Delta_{2m-1}} E_2(\eta\lambda) = E_2(\lambda) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}}\, e^{-g_i\eta\lambda} E_2(\rho_i\eta\lambda) - \mathfrak{P}_2(\lambda),$$

$$\mathfrak{P}_2(\lambda) = \sum_{\varsigma\in\mathfrak{I}_2} c^2_{\varsigma}(\lambda) e^{-\varsigma\lambda}, \qquad \mathfrak{I}_2 \subseteq (\mathfrak{I}_1 \setminus \{1\}) \cup \{\eta, \eta(\rho_i + g_i)\}.$$

Здесь $c^2_{\varsigma}(\lambda)$ отличаются от $c^1_{\varsigma}(\lambda)$ в $\mathfrak{P}_1(\lambda)$, часть могла измениться, часть занулиться, добавились новые слагаемые. И все же это соотношение вполне аналогично соотношению (11), а значит есть надежда на то, что представленная операция итерируема.

Запишем общий вид итерации. У нас есть функция $E_k(\lambda)$, удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$\frac{1}{\Delta_{2m-1}} E_k(\eta\lambda) = E_k(\lambda) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}}\, e^{-g_i\eta\lambda} E_k(\rho_i\eta\lambda) - \mathfrak{P}_k(\lambda), \tag{13}$$

$$\mathfrak{P}_k(\lambda) = \sum_{\varsigma \in \mathfrak{I}_k} c_\varsigma^k(\lambda) e^{-\varsigma\lambda}.$$

$$E_k(\lambda) = O(e^{-\varsigma_k \lambda}), \quad \varsigma_k \leqslant \varsigma_k' := \min_{\varsigma \in \mathfrak{I}_k} \varsigma.$$

Перепишем (13) так:

$$E_k(\lambda) - c_{\varsigma_k'}(\lambda) e^{-\varsigma_k'\lambda} = \\ = \frac{1}{\Delta_{2m-1}} E_k(\eta\lambda) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}} e^{-g_i\eta\lambda} E_k(\rho_i \eta\lambda) + \mathfrak{P}_k(\lambda) - c_{\varsigma_k'}(\lambda) e^{-\varsigma_k'\lambda}.$$

Заметим следующее:

$$E_k(\eta\lambda) = O(e^{-\eta\varsigma_k\lambda}), \quad \text{причем} \quad \eta\varsigma_k > \varsigma_k;$$

$$e^{-g_i\eta\lambda} E_k(\rho_i\eta\lambda) = O(e^{-\eta(g_i+\rho_i\varsigma_k)\lambda}), \quad \text{причем} \quad \eta(g_i + \rho_i\varsigma_k) > \eta\varsigma_k\rho_i \geqslant \varsigma_k,$$

в последнем неравенстве использовано предположение $\rho_m = \min\{\rho_i\}$;

$$\mathfrak{P}_k(\lambda) - c_{\varsigma_k'}(\lambda) e^{-\varsigma_k'\lambda} = O(e^{-\varsigma_k''\lambda}), \quad \text{причем} \quad \varsigma_k'' := \min_{\varsigma \in \mathfrak{I}_k \setminus \{\varsigma_k'\}} \varsigma > \varsigma_k' \geqslant \varsigma_k.$$

Отсюда вытекает, что

$$E_{k+1}(\lambda) := E_k(\lambda) - c_{\varsigma_k'}(\lambda) e^{-\varsigma_k'\lambda} = O(e^{-\varsigma_{k+1}\lambda}), \quad \varsigma_{k+1} > \varsigma_k.$$

При подстановке получаем для $E_{k+1}(\lambda)$ соотношение, аналогичное (13). Остается лишь убедиться, что $\varsigma_{k+1} \leqslant \varsigma_{k+1}'$:

$$\mathfrak{I}_{k+1} \subseteq (\mathfrak{I}_k \setminus \{\varsigma_k'\}) \cup \{\eta\varsigma_k', \eta(\rho_i\varsigma_k' + g_i)\};$$

$$\varsigma_{k+1} = \min\{\eta\varsigma_k, \eta(g_i + \rho_i\varsigma_k), \varsigma_k''\} \leqslant \\ \leqslant \min\left(\{\eta\varsigma_k', \eta(g_i + \rho_i\varsigma_k')\} \cup (\mathfrak{I}_k \setminus \{\varsigma_k'\})\right) \leqslant \min_{\varsigma \in \mathfrak{I}_{k+1}} \varsigma = \varsigma_{k+1}'.$$

Таким образом, процесс выделения новых слагаемых можно продолжать неограниченно.

Теорема 3. *Пусть $\rho_m = \min\{\rho_i\}$. Тогда функция $E(\lambda)$ представима в виде суммы ряда*

$$E(\lambda) = H(\lambda)\lambda^\alpha e^\lambda - \left(\frac{\Delta_{2m-2}}{\Delta_{2m-1}} + \Delta_{2m-3} H\Big(\frac{\rho_{m-1}}{\rho_m}\lambda\Big) (\rho_{m-1}\lambda)^\alpha\right) + \sum_{\varsigma \in \mathfrak{I}} c_\varsigma(\lambda) e^{(1-\varsigma)\lambda} \quad (14)$$

(все показатели экспонент в последней сумме отрицательны), сходящегося равномерно при достаточно больших λ.

Доказательство. Для $c_\varsigma(\lambda)$, как и в простейшем случае, существует рекуррентное соотношение:

$$c_\varsigma(\lambda) = c^1_\varsigma(\lambda) + \frac{1}{\Delta_{2m-1}} c_{\varsigma/\eta}(\eta\lambda) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}} c_{(-g_i+\varsigma/\eta)/\rho_i}(\rho_i\eta\lambda).$$

Для доказательства сходимости ряда (14) мы должны убедиться, что показатели ς растут достаточно быстро, а коэффициенты $c_\varsigma(\lambda)$ – достаточно медленно.

Сперва покажем (по индукции), что существуют $C_1 > 0$, $C_2 > 1$, такие, что

$$|c_\varsigma(\lambda)| \leqslant C_1 C_2^\varsigma. \tag{15}$$

Заметим, что для каждого $C_2 > 1$ можно найти такое $C_1^{(0)}$, чтобы оценка (15) выполнялась для $c^1_\varsigma(\lambda)$. Далее, считая, что (15) выполнено для нескольких первых слагаемых ряда (14), покажем, что оно выполнено и для следующего слагаемого:

$$|c_\varsigma(\lambda)| \leqslant C_1^{(0)} C_2^\varsigma + \frac{C_1}{\Delta_{2m-1}} C_2^{\varsigma/\eta} + \sum_{i=1}^{m-1} C_1 \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}} C_2^{\varsigma - \frac{g_i}{\rho_i}} \leqslant C_1 C_2^\varsigma \left(\frac{C_1^{(0)}}{C_1} + \frac{2}{\Delta_{2m-1}} C_2^{-\varepsilon} \right).$$

Здесь $\varepsilon = \min\{(1-\frac{1}{\eta}) \min\limits_{\varsigma\in\mathfrak{I}} \varsigma, \min\limits_{i<m} \frac{g_i}{\rho_i}\}$. Положив $C_2 = \left(\frac{1}{4}\Delta_{2m-1}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ и $C_1 = 2C_1^{(0)}$, получим (15).

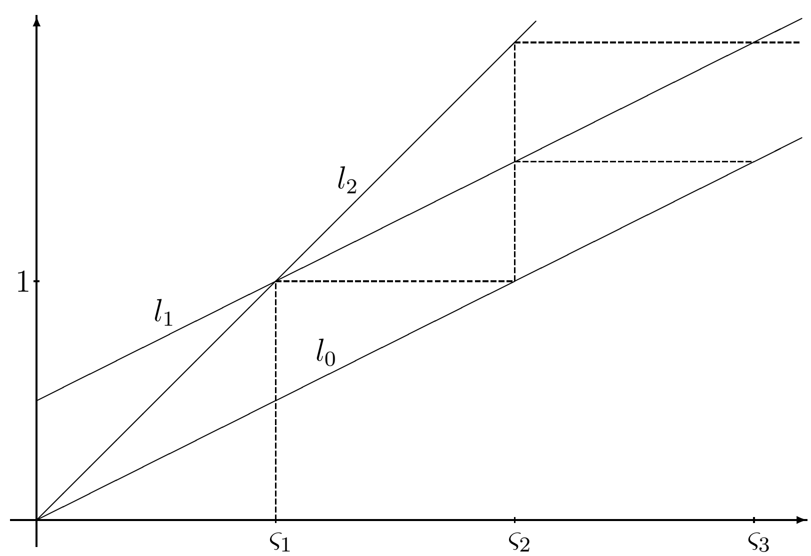

Рис. 1: Изменение показателей ς_k для ровной лестницы

Теперь посмотрим, как изменяются показатели экспонент, входящих в $\mathfrak{P}_k$. Введем линейные функции

$$l_0(\varsigma) = \rho_m\varsigma, \quad l_i(\varsigma) = g_i + \rho_i\varsigma,\ i = 1, \ldots, m-1, \quad l_m(\varsigma) = \varsigma.$$

На каждом шаге мы убираем из $\mathfrak{P}_k$ слагаемое с минимальным показателем ς, оно попадает в ряд (14), а в $\mathfrak{P}_{k+1}$ добавляются или изменяются слагаемые с показателями $l_0^{-1}(l_i(\varsigma))$, $i = 1, \ldots, m$. Условие $\rho_m = \min\{\rho_i\}$ означает, что график $l_0(\varsigma)$ не имеет пересечений с графиками других l_i при $\varsigma > 0$. Поэтому линейные преобразования $l_0^{-1}(l_i(\varsigma))$, $i = 1, \ldots, m$, не имеют положительных неподвижных точек, и, таким образом, последовательность показателей не имеет точек сгущения. Это иллюстрирует Рис. 1, на котором показаны графики $l_i(\varsigma)$ для случая ровной лестницы и $m = 2$.

Таким образом, взамен одного показателя ς на каждом шаге в $\mathfrak{P}_k$ добавляется m других, больших ς по крайней мере на некоторую фиксированную величину, которую мы обозначим через δ. Для оценки ряда в (14) заменим все новые показатели минимальным среди них (при этом все показатели, полученные впоследствии из измененных, тоже станут меньше). С учетом (15) это дает при $\lambda > \ln(C_2)$

$$\begin{aligned}\sum_{\varsigma\in\mathfrak{I}} |c_\varsigma(\lambda)| e^{(1-\varsigma)\lambda} &\leqslant \sum_{\varsigma\in\mathfrak{I}} C_1 C_2^\varsigma \, e^{(1-\varsigma)\lambda} = C_1 C_2 \sum_{\varsigma\in\mathfrak{I}} e^{(1-\varsigma)(\lambda - \ln C_2)} \leqslant \\ &\leqslant C_1 C_2 \sum_{\varsigma\in\mathfrak{I}_0} \sum_{k=0}^{\infty} m^k e^{(1-(\varsigma+k\delta))(\lambda-\ln C_2)} = \\ &= C_1 C_2 \sum_{\varsigma\in\mathfrak{I}_0} \left(e^{(1-\varsigma)(\lambda-\ln C_2)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\delta(\lambda - \ln C_2 - \frac{\ln(m)}{\delta})} \right). \end{aligned} \tag{16}$$

Последний ряд сходится равномерно при достаточно больших λ.

Для доказательства (14), как и в простейшем случае, рассмотрим остаток

$$\mathfrak{E}(\lambda) = E(\lambda) - H(\lambda)\lambda^\alpha e^\lambda + \frac{\Delta_{2m-2}}{\Delta_{2m-1}} + \Delta_{2m-3} H\Big(\frac{\rho_{m-1}}{\rho_m}\lambda\Big) (\rho_{m-1}\lambda)^\alpha - \sum_{\varsigma\in\mathfrak{I}} c_\varsigma(\lambda) e^{(1-\varsigma)\lambda}$$

и заметим, что последовательность $E_k(\lambda)$ сходится к $\mathfrak{E}_1(\lambda) := e^{-\lambda}\mathfrak{E}(\lambda)$ в $L_\infty(\Lambda, +\infty)$ при достаточно большом Λ. Далее,

$$\left| \frac{1}{\Delta_{2m-1}} E_k(\eta\lambda) - E_k(\lambda) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}} \, e^{-g_i\eta\lambda} E_k(\rho_i\eta\lambda) \right| \leqslant e^{-\lambda}\mathfrak{F}_k,$$

где $\mathfrak{F}_k$ – хвосты ряда (16). Поскольку этот ряд сходится равномерно при $\lambda > \Lambda$, мы видим, что $\mathfrak{E}_1(\lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{1}{\Delta_{2m-1}} \mathfrak{E}_1(\eta\lambda) = \mathfrak{E}_1(\lambda) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}} \, e^{-g_i\eta\lambda} \mathfrak{E}_1(\rho_i\eta\lambda), \quad \lambda > \Lambda. \tag{17}$$

Как и раньше, для некоторых $c > 0$, $\varsigma \geqslant 1$ имеем

$$|\mathfrak{E}_1(\lambda)| \leqslant c\, e^{-\varsigma\lambda} \quad \text{при } \lambda > \Lambda. \tag{18}$$

Из (17) с учетом (18) получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{E}_1(\lambda)| &= \left| \frac{1}{\Delta_{2m-1}} \mathfrak{E}_1(\eta\lambda) - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}} \, e^{-g_i\eta\lambda} \mathfrak{E}_1(\rho_i\eta\lambda) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\Delta_{2m-1}} c\, e^{-\eta\varsigma\lambda} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\Delta_{2i-1}}{\Delta_{2m-1}} \, c\, e^{-\eta(\rho_i\varsigma + g_i)\lambda} \leqslant \frac{2}{\Delta_{2m-1}} \, c\, e^{-(\varsigma+\delta)\lambda} \leqslant c\, e^{-\left(\varsigma+\delta-\frac{\ln(2/\Delta_{2m-1})}{\Lambda}\right)\lambda}. \end{aligned}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\Lambda > \frac{2}{\delta}\ln(\frac{2}{\Delta_{2m-1}})$. Тогда

$$|\mathfrak{E}_1(\lambda)| \leqslant c\, e^{-(\varsigma+\frac{\delta}{2})\lambda} \quad \text{при } \lambda > \Lambda,$$

что, как и в простейшем случае, дает $\mathfrak{E}_1(\lambda) \equiv 0$ при $\lambda > \Lambda$. Теорема доказана. □

Замечание 6. Несложно видеть, что, зная разложение (14), можно восстановить параметры функции $C(t)$.

Рассмотрим теперь частный случай ровной лестницы.

Теорема 4. *Для ровной лестницы соотношение* (14) *упрощается и принимает следующий вид:*

$$E(\lambda) = H(\lambda)\lambda^{\alpha}e^{\lambda} - (\frac{\Delta_2}{\Delta_1} + H(\lambda)\lambda^{\alpha}) + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k e^{-k\lambda}.$$

Доказательство. Мы немного изменим определение $E_1(\lambda)$:

$$E(\lambda) = H_1(\lambda)(e^{\lambda} - 1) + e^{\lambda}E_1(\lambda).$$

Соотношение (11) теперь примет вид

$$\frac{1}{\Delta_1}E_1(m\lambda) = E_1(\lambda) + \sum_{j=1}^{m-1} e^{-j\lambda}E_1(\lambda) - \mathfrak{P}_1(\lambda),$$

$$\mathfrak{P}_1(\lambda) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\sum_{j=1}^{m-1} e^{-j\lambda}.$$

Функция $H(\lambda)$ не фигурирует в этом соотношении, а потому не будет возникать и в дальнейших слагаемых асимптотики. □

3.4 Лестницы с критической точкой

Если условие $\rho_m = \min\{\rho_i\}$ не выполнено, то мы, вообще говоря, можем построить для $E(\lambda)$ лишь асимптотическое разложение.

Условие $\rho_m = \min\{\rho_i\}$ использовалось нами только при выводе соотношения $\eta(g_i + \rho_i\varsigma_k) > \varsigma_k$. В общем же случае это соотношение превращается в неравенство

$$\varsigma_k < \frac{g_i}{\rho_m - \rho_i}$$

для всех i, таких, что $\rho_i < \rho_m$. Будем называть число $\varsigma^o = \min\limits_{i:\, \rho_i<\rho_m} \dfrac{g_i}{\rho_m - \rho_i}$ *критической точкой* обобщенной канторовой лестницы. Отметим, что всегда $\varsigma^o > 1$.

Ясно, что мы можем получать новые слагаемые до тех пор, пока $\varsigma_k < \varsigma^o$, и не все $c_\varsigma(\lambda)$ при $\varsigma_k < \varsigma < \varsigma^o$ равны нулю. Заметим, что первое из этих условий устойчиво: если $\varsigma_k < \varsigma^o$, то

$$\varsigma_{k+1} = \min\{\eta\varsigma_k, \eta(g_i + \rho_i\varsigma_k), \varsigma_k''\} < \eta\min\{g_i + \rho_i\varsigma^o\} \leqslant \varsigma^o.$$

К сожалению, обнуление всех $c_\varsigma(\lambda)$ при $\varsigma_k < \varsigma < \varsigma^o$ вполне возможно, хоть и подразумевает некоторую "вырожденность". Так, например, можно рассмотреть классическую канторову лестницу с двумя ступеньками ширины $\frac{1}{3}$, но задать ее по-другому: рассмотрим лестницу с тремя ступеньками, задаваемую отрезками $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ и высотами $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{4}$, $\rho_3 = \frac{1}{2}$. Это та же самая классическая лестница, ей отвечает тот же интеграл и та же асимптотика. Но при таком задании лестница обладает критической точкой $\varsigma^o = 2$, которая тем не менее не является точкой сгущения показателей, т.е. все $c_\varsigma(\lambda)$ при $\varsigma_k < \varsigma < \varsigma^o$ в некоторый момент обнуляются.

Для полноты картины приведем пример лестницы, для которой полного зануления не происходит никогда. Пусть $|I_1| = |I_2| = \Delta < \frac{1}{2}$, $\rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$; например, $\rho_1 = \frac{1}{3}$, $\rho_2 = \frac{2}{3}$. Для такой лестницы соотношение (11) принимает вид

$$E_1(\lambda) = \Delta e^{-\rho_2\lambda} E_1(\rho_1\lambda) + \Delta E_1(\rho_2\lambda) + c_1(\lambda)e^{-\rho_2\lambda},$$
$$c_1(\lambda) = \Delta H_1(\rho_1\lambda) + (1 - 2\Delta).$$

С изъятием следующего слагаемого соотношение изменяется следующим образом:

$$E_2(\lambda) = \Delta e^{-\rho_2\lambda} E_2(\rho_1\lambda) + \Delta E_2(\rho_2\lambda) + c_2(\lambda)e^{-\lambda},$$
$$c_2(\rho_2\lambda) = \frac{1}{\Delta} c_1(\lambda) - c_1(\rho_1\lambda).$$

Если $c_2(\lambda) = 0$, то $c_1(\lambda)$ имеет вид

$$c_1(\lambda) = \lambda^{\alpha'} \Phi'(\log_{\rho_1}(\lambda)), \tag{19}$$

где $\alpha' = -\log_{\rho_1}(\Delta)$, Φ' – 1-периодическая функция. В то же время

$$c_1(\lambda) = \Delta(\rho_1\lambda)^\alpha \Phi(-\log_{\rho_2}(\rho_1\lambda)) + (1 - 2\Delta), \tag{20}$$

$\alpha = -\log_{\rho_2}(\Delta)$, Φ – 1-периодическая.

Ясно, что (19) и (20) асимптотически несовместимы, поскольку $1 - 2\Delta \neq 0$.

На всех последующих шагах слагаемое с показателем меньше $\rho_m \varsigma^o$ будет всегда ровно одно, и коэффициент при нем будет изменятся так:

$$c_{k+1}(\lambda) = -c_k(\rho_1\lambda).$$

Отсюда видно, что $c_\varsigma(\lambda)$ никогда не занулятся, и слагаемые в асимптотическом разложении можно получать сколь угодно долго.

Графически изменение показателей для этого случая изображено на Рис. 2, здесь хорошо видна точка сгущения на пересечении графиков $l_0(\varsigma)$ и $l_1(\varsigma)$, последовательность показателей, стремящихся к этой точке, и один из показателей, больших ς^o, который никогда не будет получен в нашем ряду.

Теорема 5. *В случае лестницы с критической точкой можно представить $E(\lambda)$ в виде асимптотической суммы*

$$E(\lambda) = H(\lambda)\lambda^\alpha e^\lambda - \left(\frac{\Delta_{2m-2}}{\Delta_{2m-1}} + \Delta_{2m-3} H\left(\frac{\rho_{m-1}}{\rho_m}\lambda\right)(\rho_{m-1}\lambda)^\alpha\right) + \\ + \sum_{\varsigma \in \mathfrak{I}'} c_\varsigma(\lambda) e^{(1-\varsigma)\lambda} + O(e^{(1-\varsigma')\lambda}),$$

для любого наперед заданного $\varsigma' < \varsigma^o$. Все элементы $\mathfrak{I}'$ здесь удовлетворяют неравенству $1 < \varsigma < \varsigma'$.

В случае, когда ни на каком шагу не происходит обнуления всех $c_\varsigma(\lambda)$ при $\varsigma < \varsigma^o$, эта сумма может иметь сколь угодно много слагаемых.

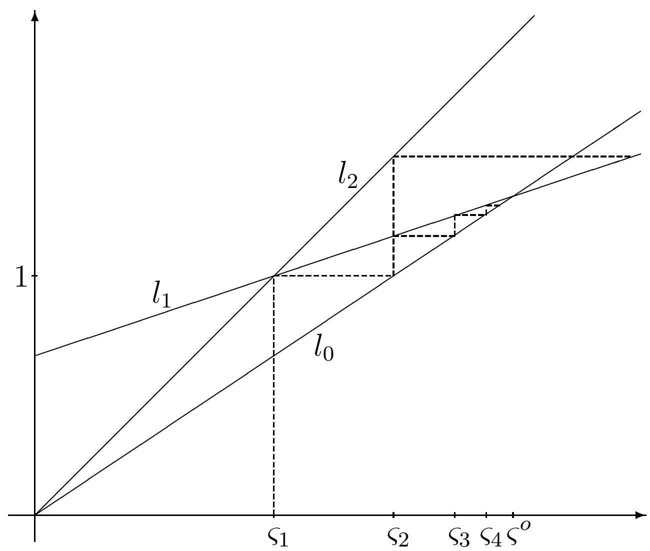

Рис. 2: Изменение показателей ς_k для лестницы с критической точкой

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, Т. I, Наука, М., 1973.

[2] Gordon R.A., *Some integrals involving the Cantor function*, Amer. Math. Monthly, **116** (2009), N3, 218–227.

[3] Горин Е.А., Кукушкин Б.Н., *Интегралы, связанные с канторовой лестницей*, Алгебра и анализ, **15** (2003), N3, 188–220.

[4] Hutchinson J.E., *Fractals and Self Similarity*, Indiana Univ. Math. Journ., **30** (1981), N5, 713–747.

[5] Шейпак И.А., *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$*, Матем. заметки, **81** (2007), N6, 924–938.