Меклер А. А.

Об одно-и двухполюсных модулярах Марцинкевича

§1. Введение

В литературе, посвящённой изучению банаховых пространств измеримых функций, в частности, *пространств Лоренца, Марцинкевича и Орлича*, последние определяются с помощью вещественной *нормирующей функции*, которая иногда задана на отрезке $[0,1]$, где имеет один полюс в 0, а иногда - на $[0,\infty)$ и имеет два полюса - в 0 и в ∞, ср., например, [3] и [1] . Под действием оператора сжатия/растяжения, т.е. оператора умножения аргумента функций из пространства на положительный скаляр, в пространстве может измениться геометрия единичной сферы, но неизменным остаётся состав элементов и тем самым - топология этого пространства. Динамика этой инвариантности в зависимости от задающего сжатие/растяжение скаляра является критичной для ряда важных свойств изучаемого пространства, например, определяемых его индексами Бойда, [2], а также и других. При её изучении целесообразно факторизовать нормирующие функции, считая *мультипликативно* (коротко - $\overset{m}{\sim}$)*эквивалентными* такие две функции, подходящие сжатия/растяжения которых вдоль каждой из осей взаимно мажорируют друг друга. Классы эквивалентности мы называем *модулярами*; в частности, индексы Бойда внутри модуляры не меняются.

В [9]-[10] показано, что при таком подходе к изучению указанных выше трёх видов пространств достаточно ограничиться пространствами Марцинкевича и, стало быть, *модулярами Марцинкевича*, - M*-модулярами.* Под ними мы понимаем модуляры, содержащие в своём составе хотя бы одну M*-функцию*, т.е. заданную на $[0,\infty)$ вогнутую нормирурующую функцию; при этом функции из M-модуляр мы называем *эквивогнутыми.* Нас интересует прежде всего вопрос о том, как разнятся инварианты в одно- и двухполюсном случаях. Оказывается возможным (см. §4) первый случай "погрузить"во второй, выделив в двухполюсном случае сводящийся к однополюсному подслучай *симметрических*, т.е. полностью определённых своими значениями на отрезке $[0,1]$ эквивогнутых функций. При этом любая двухполюсная эквивогнутая функция может быть представлена как пара симметрических, которые мы называем её *симметрическими скобками*; и наоборот, всякая пара симметрических функций задаёт двухполюсную.

Второй интересующий нас вопрос связан с проблематикой *p-выпуклости*, см. [2]. Пусть ψ - однополюсная, т.е. симметрическая нормирующая функция, δ_ψ её верхний индекс сжатия/растяжения. Известно, [3], что для $1 < p \neq 1/\delta_\psi$ пространство Марцинкевича $M_\psi([0,1])$ является p-выпуклым (и, стало быть, пространство Лоренца $\Lambda_{\psi_*}([0,1])$ является q-вогнутым, $1/p+1/q=1$), тогда и

только тогда, когда $p < 1/\delta_\psi$. Это равосильно утверждению (см. лемму 5.1), что для эквивогнутой функции ψ и для $1 < p \neq 1/\delta_\psi$ степень ψ^p является эквивогнутой, тогда и только тогда, когда $p < 1/\delta_\psi$. В доказанных ниже теоремах 5.4 и 5.7 характеризуется экстремальная ситуация, когда предельная степень $1/\delta_\psi$ тоже оставляет ψ эквивогнутой. Оказывается (следствие 5.8), что этот инвариант для хотя бы одной из симметрических скобок функции ψ связан с введенным в математической физике (см., например, монографию [4]) свойством *регулярной варьируемости*, изучаемым также и в прежних работах автора [6] и [9]-[11].
В них, в частности, была использована весьма прозрачная интерпретация параллелизма, существующего между инвариантами функциональных пространств двух различных типов: Орлича и Марцинкевича (а с последним и Лоренца), в терминах так называемых *натуральных баз*. Она оказалась удобной и в настоящей работе, как в общей схеме задания эквивогнутых функций на полуоси и на отрезке, так и для формулировки прозрачных критериев регулярной варьируемости этих функций.

Работа состоит из пяти параграфов, включая введение. В §2 и §3 изложены основная терминология и простейшие свойства объектов. Для удобства чтения мы здесь приводим введённые в [6] и развитые в работах [7] -[10] основные понятия, относящиеся к теории натуральных баз. В последних двух параграфах содержатся главные результаты настоящей работы, при доказательстве которых мы во многом опираемся на монографию [1].

Отсутствие у некоторых утверждений доказательств означает, что последние просты.

§2. Натуральные базы

Определение 2.1. 1. Подмножество $\mathbb{K}$ натурального ряда $\mathbb{N}$ будем называть *биинфинитным*, если и оно само, и его дополнение $\mathbb{N}\setminus\mathbb{K}$ суть бесконечные подмножества $\mathbb{N}$.

2. Любую строго возрастающую последовательность целых неотрицательных чисел вида $b = \{b_k\}_{0\le k<\infty}$, где $b_0 = 0$, будем называть *(натуральной) базой*, если $\{b_k\}_{1\le k<\infty}$ биинфинитное подмножество в $\mathbb{N}$.

Обозначим через $\mathfrak{b}$ множество всех баз. Для базы $b = \{b_k\}_{k\ge 0}$ подмножество $\mathbb{N} \setminus \{b_k\}_{k\ge1} := \{b_{*i}\}_{i\ge1}$ натурального ряда, занумерованное в строго возрастающую последовательность и дополненное начальным нулём, мы называем *двойственной с* b базой и обозначаем b_*, $b_* = \{b_{*i}\}_{0\le i<\infty}$. Очевидно, что двойственность есть инволюция в классе $\mathfrak{b}$.

3. По заданной базе b определим два отображения $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$: *количественную последовательность*

$$q_b(n) := (b_n - b_{n-1}) > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

и *плейс-последовательность*

$$p_b(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_b(i),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

Ясно, что

$$p_b(1) = 1,\ p_b(n) \le p_b(n+1) \le p_b(n) + 1,\ n \ge 1. \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. Каждый из трёх объектов - база, её количественная и её плейс-последовательность, - очевидным образом определён любым из них, в том смысле, что, исходя из него, формулами (2.1) - (2.3) однозначно восстанавливаются остальные два.

Определение 2.2. 1. Для двух последовательностей вещественных чисел $q^{(1)} = \{q_n^{(1)}\}_{n\ge1}$ и $q^{(2)} = \{q_n^{(2)}\}_{n\ge1}$ будем писать $q^{(1)} \overset{a}{\sim} q^{(2)})$ и называть их $\overset{a}{\sim}$*эквивалентными* (т.е. аддитивно эквивалентными), если найдётся такое натуральное d, что $\sum_{i=1}^{n} q_i^{(1)} \le \sum_{i=1}^{n+d} q_i^{(2)} \le \sum_{i=1}^{n+2d} q_i^{(1)},\ n \ge 1$.

2. Базу $b^{(1)}$ будем называть $\overset{a}{\sim}$эквивалентной базе $b^{(2)}$ (пишем $b^1 \overset{a}{\sim} b^2$), если найдётся натуральное d, такое что $b_k^{(1)} \le b_{k+d}^{(2)} \le b_{k+2d}^{(1)},\ k \ge 1$.

3. Пусть каждая из двух натуральных последовательностей $p^{(1)} = \{p_n^{(1)}\}_{n\ge1}$ и $p^{(2)} = \{p_n^{(2)}\}_{n\ge1}$ удовлетворяют условиям (2.3). Последовательности $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ называются $\overset{a}{\sim}$эквивалентными (обозначение: $p^{(1)} \overset{a}{\sim} p^{(2)}$), если найдётся натуральное d, такое что $p_n^{(1)} \le p_n^{(2)} + d \le p_n^{(1)} + 2d,\ n \ge 1$.

Для базы b_*, двойственной с b, обозначим через $\{q_{b_*}\}$ и $\{p_{b_*}\}$, соответственно, количественную и плейс-последовательности для b_*. Отметим очевидную формулу

$$p_{b_*}(n) = n - p_b(n) + 1,\ n \ge 1. \tag{2.4}$$

Столь же очевидной являтся и

Лемма 2.2. Для любых двух баз $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ все приведенные ниже $\overset{a}{\sim}$эквивалентности попарно равносильны:

$$b^{(1)} \overset{a}{\sim} b^{(2)};\ b_*^{(1)} \overset{a}{\sim} b_*^{(2)};\ q_{b^{(1)}} \overset{a}{\sim} q_{b^{(2)}};\ q_{b_*^{(1)}} \overset{a}{\sim} q_{b_*^{(2)}};\ p_{b^{(1)}} \overset{a}{\sim} p_{b^{(2)}};\ p_{b_*^{(1)}} \overset{a}{\sim} p_{b_*^{(2)}}.$$

□

Определение 2.3. Подмножество $\mathbf{P} \subset \mathfrak{b}$, состоящее из всех $\overset{a}{\sim}$эквивалентных между собой баз мы называем $\overset{a}{\sim}$модулярой. Построенную по базе $\mathfrak{b}$ функцию $\Omega_b,\ \Omega_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, будем называть $\overset{a}{\sim}$*-инвариантной*, если её значения на $\overset{a}{\sim}$эквивалентных базах $\overset{a}{\sim}$эквивалентны.

Определение 2. 4. Пусть $b = \{b_k\}_{0\le k<\infty}$ - база, введём для неё функцию $\mathbb{S}_b(m) := \sup_{0\le n<\infty} \sum_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j),\ m \ge 1$, которую назовём *верхней гранью* базы

b, и функцию $\mathbb{L}_b(m) := \limsup_{n\to\infty} \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j),\ m \ge 1$, -называемую *верхним пределом* этой базы. Здесь χ_b обозначает индикаторную функцию базы b как подмножества $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Ясно, что

$$\mathbb{L}_b(m) \le \mathbb{S}_b(m) \le m,\ m \ge 1.$$

Замечание 2.2. Нетрудно видеть, что верхняя грань и верхний предел суть $\overset{a}{\sim}$инвариантные функции. Между собой они $\overset{a}{\sim}$эквивалентны не всегда:

Лемма 2.3. Если $\lim_{n\to\infty} q_b(n) = \infty$, то последовательности $\mathbb{S}_b(m)$ и $\mathbb{L}_b(m)$ не являются $\overset{a}{\sim}$эквивалентными.

Доказательство. По условию для любого $m \ge 1$ существует N_m, такое что $q_b(n) > m$ при $n \ge N_m$. Иными словами, для любого натурального j существует K_j, такое что при $i \ge K_j$ разность $p_\psi(i+j) - p_\psi(i) = 0$ или $p_\psi(i+j) - p_\psi(i) = 1$. Значит для любого натурального j справедливо неравенство $\limsup_{i\to\infty} p_\psi(i+j) - p_\psi(i) \le 1$.

С другой стороны, поскольку для любого натурального i всегда $\lim_{j\to\infty} p_\psi(i+j) - p_\psi(i) = \infty$, то для любых натуральных i и k найдётся $j(i)$, такое что $p_\psi(i+j(i)) - p_\psi(i) \ge k$. Значит $\sup_{i\ge 1}\Big(p_\psi(i+j(i)) - p_\psi(i)\Big) \ge k$. Отсюда и из предыдущего следует, что $\mathbb{S}_b(j(i))$ и $\mathbb{L}_b(j(i))$, а значит и $\mathbb{S}_b(m)$ и $\mathbb{L}_b(m)$, не являются аддитивно эквивалентными.
$\square$

Замечание 2.3. Условие $\lim_{n\to\infty} q_\psi(n) = \infty$ влечёт одновременно **отсутствие** $\overset{a}{\sim}$эквивалентности между $\mathbb{S}_b$ и $\mathbb{L}_b$ и **наличие** $\overset{a}{\sim}$эквивалентности между $\mathbb{S}_{b_*}$ и $\mathbb{L}_{b_*}$ - см. лемму 4.6.

Определение 2.5. *Нижним* (соответственно, *верхним*) *индексом* базы $b = \{b_k\}_{k\ge 0}$ будем называть числа

$$\begin{cases} \gamma_b := \lim_{m\to\infty} \inf\limits_{0\le n<\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j)}{m}; \\ \delta_b := \lim_{m\to\infty} \sup\limits_{0\le n<\infty} \dfrac{\sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \chi_b(j)}{m}. \end{cases}$$

Ясно, что эти числа существуют, что $0 \le \gamma_b \le \delta_b \le 1$ и что для двух $\overset{a}{\sim}$эквивалентных баз их соответственные индексы попарно совпадают. Легко видеть также, что справедливы равенства $\delta_b = 1 - \gamma_{b_*};\ \gamma_b = 1 - \delta_{b_*}$.

§3. Нормирующие функции, $\overset{m}{\sim}$инвариантность. Функции и модуляры Марцинкевича

В дальнейшем приняты обычные обозначения $\frac{0}{0} := 0 \cdot \infty := 0;\ \frac{1}{0} := \infty$.

Определение 3.1. Две вещественные функции f_1 и f_2, определённые на неотрицательной вещественной полуоси $[0, \infty)$ называются *мультипликативно эквивалентными* (обозначение: $f_1 \overset{m}{\sim} f_2$), если для подходящей константы $C \geq 1$ одновременно выполняются соотношения

$$C^{-1} F_2(C \cdot t) \leq F_1(t) \leq C \cdot F_2(C^{-1} \cdot t),\ t \in [0, \infty), \tag{3.1}$$

Определение 3.2. 1. Вещественную функцию, заданную на $[0, \infty)$, непрерывную и равную нулю (или доопределённую нулём) в нуле, а вне нуля - положительную, неубывающую и стремящуюся к бесконечности на бесконечности, мы называем *нормирующей*.
2. Класс $\overset{m}{\sim}$эквивалентности нормирующих функций мы называем $\overset{m}{\sim}$*модулярой*; $\overset{m}{\sim}$модуляру $\mathcal{E}$ функции $E(t) = t,\ 0 \leq t < \infty$ мы выделяем как *несобственную*, прочие же назыаем *собственными*. Впредь мы лишь с ними и имеем дело.
3. Собственную модуляру, содержащую какую-либо *вогнутую* нормирующую функцию ψ, удовлетворяющую равенству $\psi(1) = 1$, мы называем *модулярой Марцинкевича* или M*-модулярой*, а саму ψ -M*-функцией*; функции из M-модуляры называются *эквивогнутыми*. Если ψ M-функция, то функция $\psi_*(t) := \frac{t}{\psi(t)},\ 0 \leq t < \infty$, является нормирующей функцией, вообще говоря, не вогнутой, но эквивогнутой. Её наименьшую вогнутую мажоранту мы, не опасаясь путаницы, обозначаем также через ψ_* и называем функцию ψ_* и её модуляру *двойственными* к ψ и её модуляре, соответственно.
Ясно, что двойственность есть инволюция в классе M-модуляр. Очевидно также, что, если φ есть эквивогнутая функция, то эквивогнутой будет и функция $\frac{1}{\varphi(\frac{1}{t})},\ t \in [0, \infty)$.

Предположим, что ξ_1 и ξ_2 две эквивогнутые функции, причём $\xi_1(1) = \xi_2(1) = 1$. Рассмотрим на $[0, \infty)$ их *склейку* (слева направо), т.е. такую функцию $\varphi,\ \varphi := \xi_1|_{[0,1]} \oplus \xi_2|_{[1,\infty)}$, сужения которой на $[0, 1]$ и на $[1, \infty)$ совпадают там с ξ_1 и ξ_2, соответственно. Из критерия Теоремы 1.1, стр.69, [1], вытекает

Лемма 3.1. Склейка является эквивогнутой функцией на $[0, \infty)$.
□

На полуоси для заданной нормирующей функции ξ определяется *верхняя грань сжатия/растяжения* и с её помощью - *нижний* γ и *верхний* δ *индексы* сжатия/растяжения:

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_\xi(s) := \sup_{t \in [0,\infty)} \frac{\xi(s \cdot t)}{\xi(t)},\ 0 \leq s < \infty;\ \gamma_\xi := \lim_{s \to 0} \frac{\log_2 \mathfrak{S}_\psi(s)}{\log_2 s};\ \delta_\xi := \lim_{s \to \infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}_\xi(s)}{\log_2 s}, \\ \mathfrak{S}^0_\xi(s) := \sup_{t \in [0,1]: s \cdot t \in [0,1]} \frac{\xi(s \cdot t)}{\xi(t)},\ 0 \leq s < \infty;\ \gamma^0_\xi := \lim_{s \to 0} \frac{\log_2 \mathfrak{S}^0_\xi(s)}{\log_2 s}; \delta^0_\xi := \lim_{s \to \infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}^0_\xi(s)}{\log_2 s}; \\ \mathfrak{S}^\infty_\xi(s) := \sup_{t \geq 1,\ s \cdot t \geq 1} \frac{\xi^\infty(s \cdot t)}{\xi^\infty(t)},\ \ 0 \leq s < \infty;\ \gamma^\infty_\xi := \lim_{s \to 0} \frac{\log_2 \mathfrak{S}^\infty_\xi(s)}{\log_2 s};\ \delta^\infty_\xi := \lim_{s \to \infty} \frac{\log_2 \mathfrak{S}^\infty_\xi(s)}{\log_2 s}, \end{cases} \tag{3.2}$$

Для ξ определены также две верхнепредельные функции

$$\mathfrak{L}^0_\xi(s) := \limsup_{t \to 0} \frac{\xi(s \cdot t)}{\xi(t)},\ 0 \leq s < \infty \ \text{ и } \ \mathfrak{L}^\infty_\xi(s) := \limsup_{t \to \infty} \frac{\xi(s \cdot t)}{\xi(t)},\ 0 \leq s < \infty. \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. (см. также [1]). Для M-функции ψ справедливы равенства

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{\psi_*}(s) = s\mathfrak{S}_{\psi}(\frac{1}{s}),\ 0 < s < \infty,\ \mathfrak{S}_{\psi_*}(0) = 0; \\ \mathfrak{S}^0_{\psi_*}(s) = s\mathfrak{S}^0_{\psi}(\frac{1}{s}),\ 0 < s < \infty,\ \mathfrak{S}^0_{\psi_*}(0) = 0; \\ \mathfrak{S}^\infty_{\psi_*}(s) = s\mathfrak{S}^\infty_{\psi}(\frac{1}{s}),\ 0 < s < \infty,\ \mathfrak{S}^\infty_{\psi_*}(0) = 0; \\ \mathfrak{L}^0_{\psi_*}(s) = s\mathfrak{L}^0_{\psi}(\frac{1}{s}),\ \ 0 \le s < \infty,\ \mathfrak{L}_{\psi_*}(0) = 0; \\ \mathfrak{L}^\infty_{\psi_*}(s) = s\mathfrak{L}^\infty_{\psi}(\frac{1}{s}),\ 0 \le s < \infty,\ \mathfrak{L}_{\psi_*}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

□

Следствие 3.3. 1. Для эквивогнутой функции ξ функции в левых частях равенств (3.2)-(3.4) также эквивогнуты. Действительно, из того, что они неубывают и к тому же $\lim_{s\to\infty}\mathfrak{S}_\psi(s) = \lim_{s\to\infty}\mathfrak{S}^0_\psi(s) = \lim_{s\to\infty}\mathfrak{S}^\infty_\psi(s) = \mathfrak{L}^0_\psi(s) = \lim_{s\to\infty}\mathfrak{L}^\infty_\psi(s) = \infty$, а также из того, что функции $\frac{\mathfrak{S}_\psi(s)}{s}$, $\frac{\mathfrak{S}^0_{\psi_*}(s)}{s}$ и $\frac{\mathfrak{S}^\infty_{\psi_*}(s)}{s}$ не возрастают и неограничены в нуле по теореме 1.1, стр.69 [1], вытекает, что для любой M-функции ψ все приведенные выше функции, также как и двойственные к ним, эквивогнуты на полуоси $[0,\infty)$. Более того, эти функции, как легко видеть, M-инвариантны, то есть, будучи вычисленными для каждой из $\stackrel{m}{\sim}$эквивалентных M-функций ξ_1 и ξ_2, они оказываются попарно $\stackrel{m}{\sim}$эквивалентными (а их индексы сжатия/растяжения - попарно равными).
2. Справедливы формулы (см. также [1]) $\delta_\psi = 1 - \gamma_{\psi_*},\ \gamma_\psi = 1 - \delta_{\psi_*};\ \gamma^0_\psi = 1 - \delta^0_{\psi_*},\ \delta^0_\psi = 1 - \gamma^0_{\psi_*};\ \gamma^\infty_\psi = 1 - \delta^\infty_{\psi_*},\ \delta^\infty_\psi = 1 - \gamma^\infty_{\psi_*}$.
□

Лемма 3.4. Для эквивогнутой функции ψ следующие равенства равносильны:

$$\gamma_\psi = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{S}_\psi(s) = 1,\ 0 < s \le 1;\ \delta_\psi = 1 \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{S}_\psi(s) = s,\ s \ge 1. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_\psi = 0$. По формуле (1.19), [1], имеем $\mathfrak{S}_\psi(s) \ge 1,\ s \in (0,1]$. С другой стороны для всех $s \in (0,1]$ по монотонности ψ имеем: $\mathfrak{S}_\psi(s) \le 1$, значит $\mathfrak{S}_\psi(s) = 1,\ s \in (0,1]$. Обратное следует из (3.2): $\gamma_\psi := \lim_{s\to 0}\frac{\ln\mathfrak{S}_\psi(s)}{\ln s}$.

Пусть $\delta_\psi = 1$. Тогда $\gamma_{\psi_*} = 0$, что по первому утверждению равносильно $\mathfrak{S}_{\psi_*}(s) = 1,\ 0 < s \le 1$. Но, согласно первой из формул (3.4) $\mathfrak{S}_{\psi_*}(s) = s\mathfrak{S}_\psi(\frac{1}{s}),\ 0 \le s < \infty$, что влечёт: $\mathfrak{S}_{\psi_*}(s) = 1,\ 0 < s \le 1 \Leftrightarrow \mathfrak{S}_\psi(\frac{1}{s}) = \frac{1}{s},\ 0 < s \le 1 \Leftrightarrow \mathfrak{S}_\psi(s) = s,\ s \ge 1$.
□

Определение 3.3. M-модуляру мы называем *симметрической*, если хотя бы одна (тем самым и любая), содержащаяся в ней эквивогнутая функция φ, удовлетворяет требованию

$$\varphi(t) \stackrel{m}{\sim} \frac{1}{\varphi(\frac{1}{t})},\ t \in [0,\infty). \tag{3.6}$$

Функции из симметрической модуляры тоже называются *симметрическими.*

Для эквивогнутой функции ξ положим

$$\begin{cases} \xi^0(t) = \xi(t), \text{ если } t \in [0,1], \ \xi^0(t) = \frac{1}{\xi(\frac{1}{t})}, \text{ если } t \in [1,\infty); \\ \xi^\infty(t) = \frac{1}{\xi(\frac{1}{t})}, \text{ если } t \in (0,1], \ \xi^\infty(t) = \xi(t), \text{ если } t \in [1,\infty). \end{cases} \tag{3.7}$$

По лемме 3.1 обе эти функции эквивогнутые; по определению они являются симметрическими. Мы называем ξ^0 *левой*, а ξ^∞ *правой симметрическими скобками* для эквивогнутой функции ξ.

§4. Базы и эквивогнутые функции

Определение 4.1. Зафиксируем две произвольные натуральные базы $b^0 = \{n_k^0\}_{k=0,1,\dots}$ и $b^\infty = \{n_k^\infty\}_{k=0,1,\dots}$, где $n_0^0 = n_0^\infty = 0$. Возьмём любое целое неотрицательное число j и найдём два числа $k_0(j)$ и $k_\infty(j)$ такие что $n_{k_0(j)}^0 \le j < n_{k_0(j)}^0 + 1, \ n_{k_\infty(j)}^\infty \le j < n_{k_\infty(j)}^\infty + 1$.

Построим две функции - φ^0 на $[0,1)$ и φ^∞ на $[1,\infty)$, - как двоично-измеримые функции, т.е. измеримые относительно разбиения промежутка $[0,1)$ точками вида $2^{-\nu}$ и, соответственно, разбиения промежутка $[1,\infty)$ точками вида 2^ν, где $\nu = 0,1,2,\dots$.. Если $2^{-j} \le t < 2^{-j+1}, \ j \ge 1$, то полагаем $\varphi^0(t) = 2^{-n_{k_0(j)}^0}$, а если $2^j \le t < 2^{j+1}, \ j \ge 0$, то полагаем $\varphi^\infty(t) = 2^{n_{k_\infty(j)}^\infty}$.

Каждую из функций φ^0 и φ^∞, построенных по базам на промежутках $[0,1)$ и $[1,\infty)$ по базам $b^0 = \{n_k^0\}_{k=0,1,\dots}$ и $b^\infty = \{n_k^\infty\}_{k=0,1,\dots}$, будем называть *порождённой* соответствующей базой.

Легко проверить, что для склейки $\varphi := \varphi^0 \oplus \varphi^\infty$ двоично-измеримых функций φ^0 и φ^∞, построенных такой процедурой, выполняются все условия Леммы 3.1, согласно которой φ является эквивогнутой функцией; мы называем её *порождённой парой натуральных баз* (b^0, b^∞), причём b^0 (b^∞) называем *левой* (соответственно, *правой*) базой для φ.

Покажем, что верно и обратное: любая M-функция ψ (и, следователено, любая эквивогнутая функция) однозначно с точностью до $\overset{m}{\sim}$эквивалентности порождается парой натуральных баз с помощью описанной выше конструкции.

Определение 4.2. 1. Пусть M-функция ψ, задана на полуоси $[0,\infty)$. Для натуральных n обозначим через D_n^- диадический полусегмент $[2^{-n}, 2^{-n+1})$, через D_n^+ диадический полусегмент $[2^n, 2^{n+1})$, а для всех целых j точки вида $\psi(2^j)$ будем называть $\psi-$точками. Введём две функции p_ψ^0 и p_ψ^∞, называемые *плейс-последовательностями M-функции ψ в нуле и на бесконечности,* соответственно, сопоставляя каждой ψ-точке номер диадического полусегмента D, её содержащего:

$$p_\psi^0(j) = [-\log_2 \psi(2^{-j})], \ p_\psi^\infty(j) = [\log_2 \psi(2^j)], \ j \ge 1, \tag{4.1}$$

где $[r]$ обозначает целую часть вещественного числа r. Ясно, что для M-функции ψ обе функции $p^0_\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ и $p^\infty_\psi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ суть сюръективные отображения, каждое из которых удовлетворяет соотношениям (2.3); тем самым, будучи плейс-последовательностями, они определяют базы b^0_ψ и b^∞_ψ (см. Замечание 2.1), соответствующие, как легко убедиться, левой и правой базам эквивогнутой функции $\overset{m}{\sim}$эквивалентной ψ. Количественные последовательности этих баз мы обозначаем, соответственно, $q^0_\psi(n)$ и $q^\infty_\psi(n)$.

Замечание 4.1. Очевидно, что соответственные базы двух M-функций попарно $\overset{a}{\sim}$эквивалентны, тогда и только тогда, когда сами эти функции $\overset{m}{\sim}$эквивалентны. Поэтому мы можем определить левую и правую базы эквивогнутой функции с точностью до $\overset{a}{\sim}$эквивалентности, как соответственные базы любой содержащейся в её M-модуляре M-функции. Иными словами можно считать, что $\overset{m}{\sim}$модуляры эквивогнутых функций и пары $\overset{a}{\sim}$модуляр баз поставлены во взаимно-однозначное соответствие, которое (понимая под b пару баз) можно записать как $b_{\varphi_b} \overset{a}{\sim} b,\ \varphi_{b_\varphi} \overset{m}{\sim} \varphi$. Ясно, что это соответствие сохраняет двойственность в классах $\overset{m}{\sim}$-модуляр эквивогнутых функций и $\overset{a}{\sim}$модуляр баз.

Лемма 4.1. Эквивогнутая функция φ симметрическая, тогда и только тогда, когда её левая и правая базы $\overset{a}{\sim}$эквивалентны: $b^\infty_\varphi \overset{a}{\sim} b^0_\varphi$
□

Замечание 4.2. 1. Любую из этих двух $\overset{a}{\sim}$эквивалентных баз (которые в совокупности с точностью до $\overset{m}{\sim}$эквивалентности порождают φ на полуоси) мы называем *базой симметрической функции* φ и обозначаем b_φ.
2. Для симметрической эквивогнутой функции φ двойственная ей эквивогнутая функция φ_* тоже симметрическая.

Лемма 4.2. Пусть p^0_ψ - плейс-последовательность левой базы b^0_ψ M-функции ψ. Пусть $\mathfrak{S}^0_\psi$ определена на полуоси формулами (3.2) и пусть $p^0_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ и $p^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ - плейс-функции левой $b^0_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ и $b^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ правой баз для M-функции $\mathfrak{S}^0_\psi$, соответственно. Тогда

$$\left\{\begin{array}{r} p^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \sup_{n\geq 0}\Big(p^0_\psi(n+m)-p^0_\psi(n)\Big) \overset{a}{\sim} \sup_{n\geq 0}\Big(\sum_{j=n+1}^{n+m}\chi_{b^0_\psi}(j)\Big)=\mathbb{S}_{b^0_\psi}(m);\\ p^0_{\mathfrak{S}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \inf_{n\geq 0}\Big(p^0_\psi(n+m)-p^0_\psi(n)\Big) \overset{a}{\sim} \inf_{n\geq 0}\Big(\sum_{j=n+1}^{n+m}\chi_{b^0_\psi}(j)\Big). \end{array}\right. \quad m\geq 0. \tag{4.2}$$

Доказательство.

$$\log_2 \mathfrak{S}^0_\psi(2^m) \overset{m}{\sim} \log_2 \sup_{n\geq 0,\ m-n\leq 0}\frac{\psi^0(2^{m-n})}{\psi^0(2^{-n})} = \sup_{n\geq 0,\ m-n\leq 0}\log_2\frac{\psi^0(2^{m-n})}{\psi^0(2^{-n})} =$$

$$= \sup_{n\geq 0,\ m-n\leq 0}\Big(\log_2\psi^0(2^{m-n})-\log_2\psi^0(2^{-n})\Big) = \sup_{n\geq 0,\ n-m\geq 0}\Big(-\log_2\psi^0(2^{-n})-(-\log_2\psi^0(2^{-(n-m)}))\Big) \overset{m}{\sim}$$

$$\sup_{n\geq 0,\ n\geq m}\Big(p^0_\psi(n)-p^0_\psi(n-m)\Big) = \Big(\text{замена: } n-m=k\geq 0,\ n=k+m\Big) =$$

$$= \sup_{k+m\ge 0,\ k\ge 0} \Big(p^0_\psi(k+m) - p^0_\psi(k)\Big),$$

где p^0_ψ обозначает плейс-последовательность базы b_{ψ^0} функции ψ^0. Это влечёт для вычисленной по формулам (4.1) правой плейс-последовательности $p^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}$ M-функции $\mathfrak{S}^0_\psi$ соотношения

$$p^\infty_{\mathfrak{S}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \begin{cases} 0 \text{ при } m \le 0; \\ \sup_{k\ge 0}\Big(p^0_\psi(k+m) - p^0_\psi(k)\Big) \text{ при } m > 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

а для её левой плейс-последовательности, вычисленной по формулам (4.1), влечёт

$$p^0_{\mathfrak{S}^0_\psi}(m) \overset{a}{\sim} \begin{cases} 0 \text{ при } m \ge 0; \\ \inf_{k\ge 0}\Big(p^0_\psi(k) - p^0_\psi(k+m)\Big) \text{ при } m < 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Здесь при $m < 0,\ k \ge 0,\ k+m \ge 0$, возвращаясь к обозначениям $n = k+m \ge 0$, получим $k = n - m = n + i \ge 0$, где $i := -m > 0$. Это и есть (4.2).
□

Аналогично доказывается

Лемма 4.3. Пусть ψ обозначает M-функцию, пусть $\mathfrak{L}^\infty_\psi$ определена на полуоси второй из формул (3.3), а $p^\infty_{\mathfrak{L}^\infty_\psi}$ - плейс-последовательность её правой базы $b^\infty_{\mathfrak{L}^\infty_\psi}$. Тогда (см. Определение 2.5)

$$\mathbb{L}_{b^\infty_{\mathfrak{L}^\infty_\psi}} \overset{a}{\sim} p^\infty_{\mathfrak{L}^\infty_\psi}. \tag{4.5}$$

□

Лемма 4.4. Для симметрической M-функции φ имеет место $\overset{m}{\sim}$эквивалентность

$$\mathfrak{S}_\varphi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}^0_\varphi(s),\ s > 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. Как всегда через φ^0 и φ^∞ обозначаем сужения φ на $[0,1]$ и $[1,\infty)$, соответственно. Вычислим $\mathfrak{S}_\varphi(2^{-m}),\ m \ge 0$. Для симметрической φ, согласно (1.2) и (3.2), имеем:

$$\mathfrak{S}_\varphi(2^{-m}) \overset{m}{\sim} \sup_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} = \sup_{\nu\le m} \frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} \vee \sup_{\nu>m} \frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} =$$

$$= \sup_{\nu\le 0} \frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} \vee \sup_{0<\nu\le m} \frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} \vee \sup_{\nu>m} \frac{\varphi(2^{\nu-m})}{\varphi(2^\nu)} =$$

$$= \sup_{\nu\le 0} \frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} \vee \sup_{0\le\nu\le m} \frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^\infty(2^\nu)} \vee \sup_{\nu>m} \frac{\varphi^\infty(2^{\nu-m})}{\varphi^\infty(2^\nu)}$$

$$= \sup_{\nu\le 0} \frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} \vee \sup_{0\le\nu\le m} \varphi^0(2^{\nu-m})\varphi^0(2^{-\nu}) \vee \sup_{\nu>m} \frac{\varphi^0(2^{-\nu})}{\varphi^0(2^{m-\nu})} \tag{4.7}$$

1. Пусть $\nu \le 0$ и при этом $\nu - m \in [-n_{k+1}, -n_k),\ \nu \in [-n_{i+1}, -n_i),\ k = k(\nu),\ i = i(\nu),\ k \ge i$ Тогда $\frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} = \frac{2^{-n_k}}{2^{-n_i}} = 2^{-(n_k - n_i)}$.

2. Пусть $0 < \nu \le m$ и при этом $m - \nu \in [n_k, n_{k+1}),\ \nu \in [n_i, n_{i+1}),\ k = k(\nu),\ i = i(\nu)$. Тогда $\varphi^0(2^{\nu-m})\varphi^0(2^{-\nu}) = 2^{-n_k}2^{-n_i} = 2^{-(n_k+n_i)}$.

3. Пусть $\nu > m$ и при этом $\nu - m \in [n_k, n_{k+1}),\ \nu \in [n_i, n_{i+1}),\ k = k(\nu),\ i = i(\nu),\ k \le i$. Тогда $\frac{\varphi^0(2^{-\nu})}{\varphi^0(2^{m-\nu})} = \frac{2^{-n_k}}{2^{-n_i}} = 2^{-(n_k - n_i)}$

Поскольку всюду здесь числа n_k и n_i могут быть произвольными элементами базы b_{φ^0} (подчиняющиеся указанным в пп. 1 - 3 соотношениям между ними), то из (4.5) и из соотношений $\sup_{0\le\nu\le m} \varphi^0(2^{\nu-m})\varphi^0(2^{-\nu}) \le \sup_{\nu\le 0} \frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} = \sup_{\nu>m} \frac{\varphi^0(2^{-\nu})}{\varphi^0(2^{m-\nu})}$ для симметрической M-функции φ вытекает, что

$$\mathfrak{S}_\varphi(2^{-m}) \overset{m}{\sim} \sup_{\nu<0} \frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} \vee \sup_{\nu>m} \frac{\varphi^0(2^{-\nu})}{\varphi^0(2^{m-\nu})} = \sup_{\nu<0} \frac{\varphi^0(2^{\nu-m})}{\varphi^0(2^\nu)} = \mathfrak{S}^0_\varphi(2^{-m}),\ m \ge 0. \tag{4.8}$$

Для симметрической M-функции φ из равенств (3.4) вытекает, что с точностью до $\overset{m}{\sim}$эквивалентности соотношение (4.8) равносильно

$$\mathfrak{S}_\varphi(2^m) \overset{m}{\sim} 2^m\mathfrak{S}_{\varphi_*}(2^{-m}) = 2^m\mathfrak{S}^0_{\varphi_*}(2^{-m}) = \mathfrak{S}^0_\varphi(2^m),\ m \ge 0, \tag{4.9}$$

а выполнение (4.8) и (4.9) равносильно $\overset{m}{\sim}$эквивалентности (4.6). □

Из (4.6) прямо следует

Лемма 4.5. Если φ симметрическая M-функция, то

$$\gamma_\varphi = \gamma_{b^0_\varphi} = \gamma_{b^\infty_\varphi},\ \delta_\varphi = \delta_{b^0_\varphi} = \delta_{b^\infty_\varphi}. \tag{4.10}$$

Лемма 4.6. Пусть b_ψ обозначает базу симметрической функции ψ. Следующие условия равносильны.

1). $\delta_\psi = 1$;
2). Выполняются равенства

$$\mathbb{S}_{b_\psi}(m) = \mathbb{L}_{b_\psi}(m) = m,\ m \ge 1. \tag{4.11}$$

Доказательство. Поскольку ψ симметрическая, её сужение на $[0,1]$ также обозначаем ψ. Как известно, $\delta_\psi = 1$, тогда и только тогда, когда длины блоков идущих подряд единичных значений $q_{b_\psi}(i)$ неограничены, [6]. Но это в точности равносильно тому, что для любого $m \ge 1$ выполняются равенства (4.11). □

§ 5. Экстремальность

Определение 5.1. 1. Для любого $\alpha \in (0,1]$ базу $b_\alpha := b_{t^\alpha}$ симметрической функции $t^\alpha,\ t \in [0,\infty)$, мы называем *степенной базой с показателем α.*

2. Базу $b = \{b_k\}_{0 \le k < \infty}$ будем называть *экстремальной*, если она $\overset{a}{\sim}$эквивалентна суперпозиции баз (см. []) вида $b_1 \circ b_{\delta_b}$, где $\delta_{b_1} = 1$, а через b_{δ_b} обозначается степенная база показателя δ_b.

Лемма 5.1. Предположим, что ψ эквивогнутая функция, $0 < \delta_\psi < 1$ и пусть $0 < p \neq \frac{1}{\delta_\psi}$. Функция ψ^p является эквивогнутой, тогда и только тогда, когда $p < \frac{1}{\delta_\psi}$.

Доказательство. Пусть $p < \frac{1}{\delta_\psi}$. В силу стр.79 [1], $\delta_{\psi^p} = p \cdot \delta_\psi < 1$. Значит найдётся $\varepsilon > 0$, такое что $\delta_{\psi^p} + \varepsilon < 1$. В силу (1.20), стр. 76, [1], при $s \ge s_\varepsilon > 1$ справедливо: $M_{\psi^p}(s) \le s^{\delta_{\psi^p}+\varepsilon} \le s$.
Тем самым мы оказываемся в условиях Следствия 1 стр.78 [1], согласно которому функция ψ^p, будучи $\overset{m}{\sim}$эквивалентной своей наименьшей вогнутой мажоранте является эквивогнутой.
Обратно, пусть функция $\psi^p \overset{m}{\sim} \varphi$, где φ - M-функция. Предположим. что $p > \frac{1}{\delta_\psi}$. Как отмечалось, $\delta_\varphi = \delta_{\psi^p}$, откуда по стр. 79, [1], $\delta_\varphi = p \cdot \delta_\psi > 1$. Но по формуле (1.24) [1], для M-функции φ это неравенство невозможно. $\Box$

Замечание 5.1. Пусть ψ^0 обозначает след на $[0,1]$ M-функции ψ. Известно, [3], что при $p: \ 0 < p \neq \frac{1}{\delta_\psi}$ пространство Марцинкевича $\mathsf{M}_{\psi^0}[0,1]$ является p-выпуклым, см. [2] (и, стало быть, пространство Лоренца $\Lambda_{\psi^0_*}[0,1]$ является q-вогнутым, $1/p + 1/q = 1$), тогда и только тогда, когда $p < \frac{1}{\delta_\psi}$. Это равносильно утверждению, что при таких же p симметрическая функция ψ^p является эквивогнутой, тогда и только тогда, когда $0 < p < 1/\delta_\psi$.

Определение 5.2. Будем говорить, что эквивогнутая функция ψ *экстремальна*, если найдётся эквивогнутая функция φ, $\delta_\varphi = 1$, такая что $\psi \overset{m}{\sim} (\varphi)^{\delta_\psi}$. Будем называть ψ *экстремальной слева* (*экстремальной справа*), если экстремальна левая (соответственно, правая) симметрическая скобка для ψ.

Замечание 5.2. Существуют как экстремальные M-функции, так и M-функции не являющиеся таковыми.

Пример. 1. На $[0,1]$ и на $[1,\infty)$ рассмотрим функции φ^0 и φ^∞ , соответственно: $\varphi^0(0) := 0$; $\varphi^0(t) := -t \cdot \log_2 \frac{t}{2}$, $t \in (0,1]$; $\varphi^\infty(t) := \frac{1}{(\varphi^0)(\frac{1}{t})}$, $t \in [1,\infty)$. Если их склейку $\varphi^0 \oplus \varphi^\infty$ обозначить φ, то $\delta_\varphi = 1$ и, следовательно, симметрическая функция $\varphi^{\frac{1}{2}}$ экстремальна.
2. Определим функцию $\phi^\infty(t) := t \cdot \log_2 2t$, $t \in [1,\infty)$. Ясно, что ϕ^∞ есть выпуклая функция на $[1,\infty)$, между тем как $(\phi^\infty)^{\frac{1}{2}}$ вогнута на $[1,\infty)$ также как функция $\Phi^0(t) := \frac{1}{(\varphi^\infty)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{t})}$ вогнута на $[0,1]$. Эквивогнутая склейка $\Phi = (\phi^\infty)^{\frac{1}{2}} \oplus \Phi^0$, как и правая симметрическая скобка этой склейки по определению не будет экстремальной функцией.

Лемма 5.2. Допустим, что ψ^0, ψ^1 - суть, соответственно, левая и правая симметрические скобки эквивогнутой функции ψ. Справедливо равенство

$$\delta_\psi = \delta_{\psi^0} \vee \delta_{\psi^1}; \ \gamma_\psi = \gamma_{\psi^0} \wedge \gamma_{\psi^1} \tag{5.1}$$

Доказательство. Достаточно доказать первое равенство, ибо тогда
$\gamma_\psi = 1 - \delta_{\psi_*} = 1 - \delta_{\psi^0_*} \vee \delta_{\psi^1_*} = (1 - \delta_{\psi^0_*}) \wedge (1 - \delta_{\psi^1_*}) = \gamma_{\psi^0} \wedge \gamma_{\psi^1}$.
Неравенство $\delta_\psi \geq \delta_{\psi^0} \vee \delta_{\psi^1}$ следует из формулы (3.2). Предположим, что для некоторой эквивогнутой функции ψ на полуоси справедливо строгое неравенство $\delta_\psi > \delta_{\psi^0} \vee \delta_{\psi^1}$. Выберем $\varepsilon > 0$, так чтобы выполнялись неравенства $\frac{1}{\delta_\psi} < a = \frac{1}{\delta_{\psi^0}} \wedge \frac{1}{\delta_{\psi^1}} - \varepsilon$. Имеем: $\psi^a = (\psi^0 \oplus \psi^1)^a = (\psi^0)^a \oplus (\psi^1)^a$, - по леммам 3.1 и 5.1 правая часть есть эквивогнутая на полуоси функция, что для левой части противоречит лемме 5.1. □

Следствие 5.3. Предположим для определённости, что для эквивогнутой функции ψ выполненяется равенство $\gamma_{\psi^0} \wedge \gamma_{\psi^1} = \gamma_{\psi^0} = \gamma_\psi$, и пусть $\gamma_\psi = 0$. Тогда $\delta_{\psi_*} = 1 - \gamma_{\psi^0} = 1 = \delta_{b^0_{\psi_*}}$, и по лемме 4.6

$$\mathbb{S}_{b^0_{\psi_*}}(m) = \mathbb{L}_{b^0_{\psi_*}}(m) = m, \ m \geq 1.$$

□

Теорема 5.4. Пусть для эквивогнутой функции φ симметрические функции φ^0 и φ^∞ суть её левая и правая скобки. Тогда, если $\delta_{\varphi^0} > \delta_{\varphi^\infty}$ и при этом φ^0 экстремальна, то φ экстремальна. Этот же вывод можно сделать, если $\delta_{\varphi^0} = \delta_{\varphi^\infty}$ и обе функции φ^0 и φ^∞ экстремальны. Обратно, если φ экстремальна, то из двух её симметрических скобок та из них, чей верхний индекс сжатия/растяжения больше этого индекса другой, является экстремальной. При равенстве верхних индексов экстремальными являются обе скобки.

Доказательство. Так как по лемме 5.2 $\delta_\varphi = \delta_{\varphi^0} \vee \delta_{\varphi^\infty}$, то $\delta_\varphi = \delta_{\varphi^0}$. В силу неравенства $\delta_{\varphi^0} > \delta_{\varphi^\infty}$, а также леммы 5.1 и предположенной экстремальности φ^0 обе функции $(\varphi^0)^{\frac{1}{\delta_{\varphi^0}}}$ и $(\varphi^\infty)^{\frac{1}{\delta_{\varphi^0}}}$ являются эквивогнутыми. Обозначим через ϕ^0 и ϕ^∞ следы функций φ^0 и φ^∞ на $[0,1]$ и $[1,\infty)$, соответственно, и пусть $\phi := (\phi^0 \oplus \phi^\infty)$. Тогда $\phi^{\frac{1}{\delta_\varphi}} = (\phi^0 \oplus \phi^\infty)^{\frac{1}{\delta_\varphi}} = (\phi^0)^{\frac{1}{\delta_{\varphi^0}}} \oplus (\phi^\infty)^{\frac{1}{\delta_{\varphi^0}}}$, откуда по лемме 3.1 $\varphi^{\frac{1}{\delta_\varphi}}$ эквивогнута на $[0,\infty)$. Аналогично доказывается и второе утверждение. □

Следствие 5.5. Для того, чтобы эквивогнутая функция была экстремальна, необходимо и достаточно, чтобы в порождающей её паре натуральных баз база с наибольшим верхним индексом была экстремальна (или, если верхние индексы баз равны, чтобы обе базы были экстремальны). □

Теорема 5.6. Пусть φ^α, $0 < \alpha \leq 1$, обозначает степень симметрической функции φ, такой что $\delta_\varphi = 1$, и пусть b_{φ^α} обозначает базу симметрической функции φ^α. Справедливы соотношения

$$\mathbb{L}_{b_{\varphi^\alpha}}(m) \overset{a}{\sim} \mathbb{S}_{b_{\varphi^\alpha}}(m) \overset{a}{\sim} m \cdot \alpha. \tag{5.2}$$

Доказательство. Равенство $\alpha = 1$ равносильно (см. [6]) тому, что длины одноточечных блоков количественной последовательности q_{b_φ} базы b_φ неограничены,

чтопо лемме 4.6 обеспечивает выполнение соотношения (5.2). Предположим, что $0 < \alpha < 1$, и пусть α рациональное число, т.е. для натуральных чисел p, r, c, d справедливо $\alpha = \frac{p}{r}$, $p, r \in \mathbb{N}$, $1 < p < r$, $r = c \cdot p + d$, $d < p$, причём r и p взаимно простые числа. Как известно, для эквивогнутой функции t^α, $t \in [0,1]$, количественная последовательность q_{b_1} базы $b_1 := b_\alpha = (m_k)$ (с точностью до $\overset{a}{\sim}$эквивалентности) имеет вид идущей подряд последовательности блоков B_j длины p, каждый из которых составлен из $p-1$ начальных чисел c и последнего числа, равного $c+d$. Таким образом в сумме в каждом блоке B_j содержатся r точек натурального ряда. Значит сама база b_1 есть последовательность (m_k) идущих через c натуральных чисел со скачком через каждые $p-1$ шагов на число $c+d$.
Если же $p = 1$, то количественная последовательность q_{b_1} базы $b_1 := b_\alpha$ состоит из числа r, стоящего на всех местах. В этом случае база b_1 есть последовательность (m_k) идущих через r натуральных чисел.
В обоих случаях на каждом из бесконечно многих дизъюнктных отрезков натурального ряда длины r, начиная с самого первого, расположены p элементов базы b_1 и, следовательно, равенство $\sum_{j=n+1}^{n+m\cdot r} \chi_b(j) = m \cdot \frac{p}{r} = m \cdot \alpha$ выполняется для бесконечного числа целых пар (m, n), $m \geq 1$, $n \geq 0$, начиная с пары $(1,0)$.

С другой стороны, для базы $b_2 := b_\varphi = (n_k)$ длины единичных блоков её количественной последовательности неограничены, [6]. По [7]

$$b_1 \circ b_2 \overset{a}{\sim} (b_{n_{m_k}}),$$

и таким образом на неограниченных по длине отрезках натурального ряда, соответствующих единичным блокам базы b_2, композиция $b_1 \circ b_2$ воспороизводит базу b_1. Значит и в этом случае справедлив тот же вывод: на каждом из бесконечно многих дизъюнктных отрезков натурального ряда длины r, начиная с первого, расположены p элементов базы b_1 и, следовательно, равенство $\sum_{j=n+1}^{n+m\cdot r} \chi_b(j) = m \cdot \frac{p}{r} = m \cdot \alpha$ выполняется для бесконечного числа целых пар (m, n), $m \geq 1$, $n \geq 0$, начиная с пары $(1,0)$.

Тем самым для рационального показателя α Теорема 5.6 доказана. Как обычно, рутинное доказательство для иррационального α основано на аппроксимации рациональными показателями. $\square$

Теорема 5.7. Для любой симметрической функции ξ с базой b_ξ следующие условия равносильны:

1). ξ экстремальна;

2). $\mathfrak{S}_\xi(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_{b_\xi}}$, $1 \leq s < \infty$;

3). $\mathfrak{S}_{\xi_*}(s) \overset{m}{\sim} s^{\gamma_{b_{\xi_*}}}$, $0 \leq s \leq 1$;

$$4)\ \mathbb{S}_{\mathfrak{S}_\xi}(k) \overset{a}{\sim} \mathbb{L}_{\mathfrak{L}_\xi^\infty}(k) \overset{a}{\sim} k \cdot \delta_\xi,\ k \geq 1; \tag{5.3}$$

$$5)\ \mathfrak{S}_\xi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{L}_\xi^\infty(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ 1 \leq s < \infty; \tag{5.4}$$

6). Для b_ξ во-первых выполняется $\overset{a}{\sim}$эквивалентность $\mathbb{S}_{\mathfrak{S}_\xi} \overset{a}{\sim} \mathbb{L}_{\mathfrak{L}^\infty_\xi}$ и во-вторых существует повторный предел, удовлетворяющий равенству (5.5):

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{b_\xi(m+n)-b_\xi(n)}=\delta_\xi. \tag{5.5}$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Поскольку $\xi(t)$ экстремальная функция, то $\Big(\xi(t)\Big)^{\frac{1}{\delta_\xi}} \overset{m}{\sim}$эквивалентна M-функции $\varphi(t)$, причём $\delta_\varphi = 1$. Опять используя $\overset{m}{\sim}$эквивалентность, леммы 3.5 и 4.5 и формулы стр. 79, [1], получаем: $\mathfrak{S}_\xi(s) \overset{m}{\sim} \mathfrak{S}_{(\varphi)^{\delta_\xi}}(s) = \Big(\mathfrak{S}_\varphi(s)\Big)^{\delta_\xi} \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ s\ge 1$. Покажем импликацию 2)$\Rightarrow$1). Предположим, что $\mathfrak{S}_\xi(s) \overset{m}{\sim} s^{\delta_\xi},\ s\ge 1$, и покажем, что ξ - экстремальная функция. Положим $\varphi(t) = \Big(\overline{\xi}(t)\Big)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\xi}}}}$, где M-функция $\overline{\xi}$ эквивалентна ξ, и покажем, что φ эквивогнута. Ясно, что φ не убывает. Кроме того $\mathfrak{S}_\varphi(s) = \Big(\mathfrak{S}_{\overline{\xi}}(s)\Big)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\xi}}}} \overset{m}{\sim} s,\ s\ge 1$. Значит для подходящей константы $C>0$ справедливо: $\sup_{t>0}\frac{\varphi(s\cdot t)}{\varphi(t)} \le C\cdot s,\ s\ge 1$, откуда $\frac{\varphi(s\cdot t)}{s\cdot t} \le C\cdot\frac{\varphi(t)}{t},\ s\ge 1,\ t>0$. С учётом неубывания φ мы оказываемся в условиях теоремы 1.1 стр. 69 [1], согласно которой $\varphi \overset{m}{\sim}$эквивалентна положительной вогнутой функции, т.е. эквивогнута. Но, поскольку $\xi \overset{m}{\sim} \overline{\xi}$, то $\varphi = \Big(\overline{\xi}\Big)^{\frac{1}{\delta_{\overline{\xi}}}} \overset{m}{\sim} \Big(\xi\Big)^{\frac{1}{\delta_\xi}}$, значит ξ экстремальная функция.
Эквивалентность 2) и 3) следует из второй из формул (3.4). Покажем, например, 2)$\Rightarrow$3). При $0<s\le 1$ имеем: $\mathfrak{S}^0_{\xi_*}(s) = s\cdot\mathfrak{S}^0_\xi(\frac{1}{s}) = s\cdot s^{-\delta_\xi} = s^{1-\delta_\xi} = s^{\gamma_{\xi_*}}$, и в точности также показывается обратная импликация.
Далее, 1) $\Rightarrow$ 5) по теореме 5.6, импликация 5)$\Rightarrow$2) тривиальна, равносильность 4) и 5) вытекает из определений 4.1 и 4.2 и замечаний к ним, а равносильность между второй эквивалентностью в 5) и (5.5) доказана в [8]. $\square$

Замечание. Вместе со следствием 5.4 теорема 5.7 даёт условия, равносильные экстремальности любой эквивогнутой функции.

Следствие 5.8 (см. [5]). Пусть ξ симметрическая функция, δ_ξ её верхний индекс сжатия/растяжения, $p=\frac{1}{\delta_\xi}$. Если пространство Марцинкевича $M_\xi([0,1])$ является p-выпуклым, то найдётся функция $\varphi \overset{m}{\sim} \xi$, такая что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(s\cdot t)}{\varphi(t)} = s^{\delta_\varphi},\ 0\le s\le 1.$$

$\square$

Замечание. Теоремы 3.1 и 3.5.4) работ [10] и [11], соответственно, неверны; их следует заменить на теорему 5.7. настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М., Наука, 1978. (in Russian)

[2] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces II, Springer, Berlin, 1979.

[3] S.Y.Novikov, Cotyp and Typ of Functional Lorentz Spaces, Mat. Zamet., 32(1982)2, p.213-221. (in Russian)

[4] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, Regular Variations. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[5] E. V. Abakumov, A.A. Mekler, Concave Regularly Varying Leader for Equiconcave Functions, J. Math. Anal. Appl., 187(1994)3, pp. 943-951.

[6] A.A. Mekler, On Regularity and Weak Regularity of Functions Generating Marcinkiewicz Spaces, Proc. Intern. Conf. "FUNCTION SPACES, V."- Poznan, Poland, August 1998, ed. by H. Hudzik and L. Skrzypczak. Marcel Dekker, Lect. Not. Pur. Appl. Math. Ser., 213, pp. 379-387.

[7] A.A. Mekler, Представление суперпозиции вогнутых модуляр на двоичной логарифмической шкале. Герценовские Чтения-2007, 16-21 апреля 2007, LX с. 121 - 128, СГПУ им. Герцена, СПб, 2007. (in Russian)

[8] A.A. Mekler, On Characterization by Positive Integers of Regular Varying Modulars, Vestn. Univ. Syktyvkar, 1, 8(2008), pp.27-38. (in Russian)

[9] А.А. Меклер, Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича. I Вестник Сыктывкарского университета, 1, 14(2011) с. 32-46, Сыктывкар: Изд-во СГУ. (in Russian)

[10] А.А. Меклер, Замечания о некоторых инвариантных свойствах пространств Марцинкевича и Орлича. II Вестник Сыктывкарского университета, 1, 14(2011) с. 47-61, Сыктывкар: Изд-во СГУ. (in Russian)

[11] A.A. Mekler, A scale of invariants for Orlich and Marcinkiewicz spaces. Dynamical Systems, Differential Equations and Applications. Proceedings of 8th AIMS Conference at Dresden, Germany, Mai, 2010.

УДК 513.88

Меклер А.А. **Об одно-и двухполюсных модулярах Марцинкевича**,

В работе показано, как можно случай пространств Марцинкевича (Лоренца, Орлича) состоящих из функций, заданных на положительной полуоси, и случай этих же пространств, состоящих из функций, заданных на единичном промежутке, свести один к другому. В этой связи рассмотрена предельная постановка задачи о p-выпуклости указанных пространств.
Библиогр. 11 назв.

Меклер Александр Александрович

MSC-1991: 46E30

It is presented a reduction to one-another of two cases: the case of Marcinkiewicz (Lorenz, Orlicz) functional spaces on the unit interval and the case of those of spaces on the positive semiaxis. In this connection p-convexity of these spaces is considered.

A.A. Mekler, Bremen University.

Address:

Wilsdruffer Str.7, 01067 Dresden, FRG.
ph ++49+351 2542547
e-mail: alexandre.mekler@o2online.de