О необходимых условиях справедливости неравенства Пуанкаре

А.И. Назаров*, С.В. Поборчий

29 октября 2012 г.

Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$. Определим $L_p^l(G)$ как пространство функций $u \in L_{p,loc}(G)$, имеющих обобщенные соболевские производные $D^\alpha u \in L_p(G)$, $|\alpha| = l$. Напомним, что при $p \geq 1$ и $l \in \mathbb{N}$ это пространство является банаховым с нормой

$$\|u\|_{L_p(g)} + \||\nabla_l u|\|_{L_p(G)},$$

где $g \Subset G$ – внутренняя подобласть G (т.е. замыкание g – компакт в G), а

$$|\nabla_l u| = \Big(\sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Различные внутренние подобласти $g \Subset G$ индуцируют эквивалентные нормы.

Хорошо известно (см., напр. [1], 1.1.10, [2], §9), что если пространство Соболева $L_p^l(G)$ непрерывно вложено в $L_q(G)$, то в области G выполнено обобщенное неравенство Пуанкаре

$$\inf\{\|u - P\|_{L_q(G)} : P \in \mathcal{P}_l\} \leq \text{const}\, \||\nabla_l u|\|_{L_p(G)}, \qquad u \in L_p^l(G) \tag{1}$$

(здесь и далее $\mathcal{P}_l$ означает множество полиномов в $\mathbb{R}^n$ степени меньше l).

Очевидно, что вложение $L_p^l(G) \subset L_q(G)$ влечет $\mathcal{P}_l \subset L_q(G)$ и, следовательно, $\text{mes}_n(G) < \infty$. Мы покажем, что эти условия необходимы для справедливости неравенства (1) в случае $q \neq q^*$, где $q^* = np(n - lp)^{-1}$ – предельный показатель в теореме вложения Соболева при $lp < n$. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть в области* $G \subset \mathbb{R}^n$ *имеет место неравенство* (1). *При* $lp < n$ *предположим дополнительно, что* $q < q^*$. *Тогда пространство* $L_p^l(G)$ *непрерывно вложено в* $L_q(G)$. *В частности,* $\text{mes}_n(G) < \infty$ *и* $\mathcal{P}_l \subset L_q(G)$.

Отметим, что при $lp < n$ и $q = q^*$ неравенство (1) может быть выполнено и для областей бесконечного объема. Например, для $G = \mathbb{R}^n$ имеет место

Предложение ([3]). *Пусть* $lp < n$. *Тогда для каждой функции* $u \in L_p^l(\mathbb{R}^n)$ *найдется такой полином* $P \in \mathcal{P}_l$, *что*

$$\|u - P\|_{L_{q^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \text{const}\, \||\nabla_l u|\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

*Работа первого автора частично поддержана грантом РФФИ N12–01–00439.

Доказательство теоремы. Для начала отметим, что в силу $\dim(\mathcal{P}_l) < \infty$ для любой $u \in L_p^l(G)$ инфимум в (1) достигается на некотором полиноме Q.

Предположим, что $\mathrm{mes}_n(G) = \infty$. Введем срезающую функцию

$$\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad 0 \le \eta \le 1, \qquad \eta(x) \equiv 1 \ \text{ в } \ B_1, \qquad \eta(x) \equiv 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n \setminus B_2 \tag{2}$$

и положим $u_r(x) = \eta(x/r)$.

Обозначим $G_r = G \cap B_r$. Тогда, очевидно, $u_r|_{G_r} \equiv 1$, $u_r|_{G \setminus G_{2r}} \equiv 0$. Далее, $u_r \in L_p^l(G)$, поэтому в силу (1) существует полином $P_r \in \mathcal{P}_l$, для которого

$$\|\mathbf{1} - P_r\|_{L_q(G_r)} + \|P_r\|_{L_q(G \setminus G_{2r})} \le c\, \||\nabla_l u_r|\|_{L_p(G)} \tag{3}$$

с константой, не зависящей от u. Отсюда $\|P_r\|_{L_q(G \setminus G_{2r})} < \infty$, и значит, $\|P_r\|_{L_q(G)} < \infty$.

Для оценки первого слагаемого в левой части (3) нам потребуется такая лемма.

Лемма. *Пусть в конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана последовательность норм $\|\cdot\|_r$, причем $\|x\|_r$ – неубывающая функция r для всех $x \in \mathcal{L}$. Обозначим*

$$\mathcal{L}_0 = \{x \in \mathcal{L} : \lim_r \|x\|_r < \infty\}$$

и предположим, что $x_0 \notin \mathcal{L}_0$. Тогда

$$\inf\{\|x_0 - P\|_r : P \in \mathcal{L}_0\} \ge \delta \|x_0\|_r, \tag{4}$$

где δ – константа, не зависящая от r.

Доказательство леммы. Обозначим P_r элемент $\mathcal{L}_0$, на котором достигается инфимум в (4), и заметим, что $\|P_r\|_r \le 2\|x_0\|_r$ (иначе нуль давал бы лучшее приближение для x_0). Обозначим $Q_r = \frac{1}{\|x_0\|_r} P_r$. Ввиду определения подпространства $\mathcal{L}_0$ все нормы $\|\cdot\|_r$ равномерно эквивалентны на нем. Поэтому последовательность Q_r ограничена, и из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Обозначим $Q = \lim_r Q_r$.

Если $\lim_r \|Q\|_r \le \frac{1}{2}$, то

$$\|x_0 - P_r\|_r = \|x_0\|_r \cdot \left\| \frac{1}{\|x_0\|_r} x_0 - Q_r \right\|_r \ge \|x_0\|_r \cdot \big(1 - \|Q\|_r - o(1)\big), \qquad r \to \infty,$$

что дает (4). Если же $\|Q\|_{r_0} > \frac{1}{2}$ для некоторого r_0, то

$$\|x_0 - P_r\|_r \ge \|x_0\|_r \cdot \left\| \frac{1}{\|x_0\|_r} x_0 - Q_r \right\|_{r_0} \ge \|x_0\|_r \cdot \left(\|Q\|_{r_0} - o(1) - \frac{\|x_0\|_{r_0}}{\|x_0\|_r} \right), \qquad r \to \infty,$$

что также приводит к (4). Таким образом, из любой последовательности P_r можно извлечь подпоследовательность, для которой выполнено (4), а потому этому условию удовлетворяет и вся последовательность. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Ввиду предположения $\mathrm{mes}_n(G) = \infty$ имеем $\|\mathbf{1}\|_{L_q(G_r)} \to \infty$ при $r \to \infty$. Согласно лемме,

$$\|\mathbf{1} - P_r\|_{L_q(G_r)} \ge \delta \|\mathbf{1}\|_{L_q(G_r)} = \delta \cdot \mathrm{mes}_n(G)^{\frac{1}{q}},$$

и потому (2) влечет

$$\mathrm{mes}_n(G_r)^{\frac{1}{q}} \le C\, r^{-l} \mathrm{mes}_n(G_{2r})^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\mathrm{mes}_n(G_{2r}) \le c\, r^n$, отсюда следует, что

$$\mathrm{mes}_n(G_r)^{\frac{1}{q}} \le C\,\mathrm{mes}_n(G_{2r})^{\frac{1}{p}-\frac{l}{n}} = o\big(\mathrm{mes}_n(G_{2r})^{\frac{1}{q}}\big), \qquad r \to \infty \tag{5}$$

(при $lp < n$ здесь использовано условие $q < q^*$).

Но соотношение (5) очевидно влечет сверхстепенной рост $\mathrm{mes}_n(G_r)$, что невозможно. Таким образом, $\mathrm{mes}_n(G) < \infty$.

Предположим теперь, что $\mathcal{P}_l \not\subset L_q(G)$. Рассмотрим $u_r(x) = Q(x) \cdot \eta(|x|/r)$, где $Q \in \mathcal{P}_l \setminus L_q(G)$, а η – срезающая функция из (2). Подставляя функцию u_r в (1), получим для некоторого $P_r \in \mathcal{P}_l$ оценку

$$\|Q - P_r\|_{L_q(G_r)} + \|P_r\|_{L_q(G \setminus G_{2r})} \le c\,\||\nabla_l u_r|\|_{L_p(G)}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что $P_r \in L_q(G)$. Поэтому, согласно лемме,

$$\|Q - P_r\|_{L_q(G_r)} \ge \delta \|Q\|_{L_q(G_r)} \to \infty, \qquad r \to \infty.$$

Однако из определения u_r легко видеть, что $|\nabla_l u_r|$ имеет мажоранту $c\, r^{-1}$. Поскольку $\mathrm{mes}_n(G) < \infty$, такую же мажоранту имеет и правая часть (6), что невозможно. Таким образом, $\mathcal{P}_l \subset L_q(G)$.

Осталось заметить, что для каждой функции $u \in L_p^l(G)$ полином $Q \in \mathcal{P}_l$, дающий инфимум в (1), удовлетворяет условиям $Q \in L_q(G)$ и $u - Q \in L_q(G)$, т.е. верно по крайней мере теоретико-множественное включение $L_p^l(G) \subset L_q(G)$. Непрерывность оператора вложения $L_p^l(G) \to L_q(G)$ следует теперь из замкнутости этого оператора.

Список литературы

[1] *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Л., 1985. 415 с.

[2] *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Л., 1950. 255 с.

[3] *Соболев С. Л.* Плотность финитных функций в пространстве L_p^m // Сиб. мат. журнал. 1963. Т. 4. N 3. С. 673–682.