Представлено проф. Т. А. Суслиной.

УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ПОЛОСЕ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

НИКИТА Н. СЕНИК

АННОТАЦИЯ. Данная статья связана с гомогенизацией периодического эллиптического дифференциального оператора, заданного в пространстве $L_2(\Pi)$, $\Pi = \mathbb{R} \times (0,\, a)$, дифференциальным выражением

$$\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon = \sum_{j=1}^{2} \mathrm{D}_j g_j\left({}^{x_1}\!/\!_\varepsilon,\, x_2\right) \mathrm{D}_j + \sum_{j=1}^{2} \left(h_j\left({}^{x_1}\!/\!_\varepsilon,\, x_2\right) \mathrm{D}_j + \mathrm{D}_j h_j^*\left({}^{x_1}\!/\!_\varepsilon,\, x_2\right)\right) + \\ + Q\left({}^{x_1}\!/\!_\varepsilon,\, x_2\right) + \lambda Q_*\left({}^{x_1}\!/\!_\varepsilon,\, x_2\right)$$

с периодическими граничными условиями, граничными условиями типа Дирихле или Неймана. Все коэффициенты дифференциального выражения предполагаются 1-периодическими по первой переменной; по второму аргументу накладываются условия некоторой регулярности.

Получены точные по порядку приближения обратного к $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ оператора по метрикам пространств $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi)\right)$ и $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi),\, H^1(\Pi)\right)$ с оценками погрешностей порядка $O(\varepsilon)$.

§ 0. ВВЕДЕНИЕ

0.1. **Спектральный подход к задаче усреднения.** Настоящая работа относится к теории усреднения, или гомогенизации, периодических эллиптических дифференциальных операторов и основана на теоретико-операторном подходе, впервые предложенном в статье [BSu]. Поясним его на примере типичной проблемы усреднения эллиптического оператора $\mathcal{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon \operatorname{grad}$ $(\varepsilon > 0)$, действующего в пространстве $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $d \in \mathbb{N}$; здесь обозначение $g^\varepsilon(\mathbf{x}) = g\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$ было использовано для ограниченной положительно определенной и периодической относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ матрицы-функции $g(\cdot)$. Задача состоит в изучении асимптотического поведения $\mathcal{A}^\varepsilon$ при стремлении периода ε к нулю. В [BSu] доказано было существование такой постоянной положительно определенной матрицы g^0, что при малых ε резольвента $\left(\mathcal{A}^\varepsilon + I\right)^{-1}$ исходного оператора оказывается близка к резольвенте (в той же точке) оператора эффективного $\mathcal{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \operatorname{grad}$, причем погрешность данного приближения подчиняется точной по порядку оценке

$$\left\| \left(\mathcal{A}^\varepsilon + I\right)^{-1} - \left(\mathcal{A}^0 + I\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}\left(L_2\left(\mathbb{R}^d\right)\right)} \leqslant C\varepsilon, \qquad \varepsilon \in (0,\, 1]. \tag{0.1}$$

Обсудим идею доказательства. Масштабное преобразование, в силу своей унитарности, сводит (0.1) к неравенству

$$\left\| \left(\mathcal{A} + \varepsilon^2 I\right)^{-1} - \left(\mathcal{A}^0 + \varepsilon^2 I\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}\left(L_2\left(\mathbb{R}^d\right)\right)} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \qquad \varepsilon \in (0,\, 1], \tag{0.2}$$

в котором $\mathcal{A} = -\operatorname{div} g \operatorname{grad}$. Далее, с помощью теории Флоке-Блоха периодический оператор $\mathcal{A}$ может быть разложен в прямой интеграл по семейству операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega)$ (здесь Ω — ячейка решетки Γ) и зависящих от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ — квазиимпульса. Слой $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ задан дифференциальным выражением $(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g (\mathbf{D} + \mathbf{k})$ при периодических граничных условиях на $\partial\Omega$. Поскольку сплетающее отображение унитарно, то оценка (0.2) оказывается равносильной следующей:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d} \left\| \left(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I\right)^{-1} - \left(\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}\left(L_2(\Omega)\right)} \leqslant C\varepsilon^{-1}, \qquad \varepsilon \in (0,\, 1]. \tag{0.3}$$

Ключевые слова. Усреднение, операторные оценки погрешности, периодические дифференциальные операторы, эффективный оператор, корректор.

Аналитичность операторного пучка $\mathcal{A}(\cdot)$ и компактность его резольвент позволяют применять методы аналитической теории возмущений по одномерному параметру $t = |\mathbf{k}|$. Ключевую роль в решении задачи при этом играет выделение определяемого через пороговые характеристики спектрального ростка семейства $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ при $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Именно: резольвента $\left(\mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I\right)^{-1}$ может быть приближена при помощи резольвенты спектрального ростка, а поскольку ростки операторов эффективного и исходного совпадают, то факт этот приводит к неравенству (0.3). Таким образом было выявлено, что процедура гомогенизации есть проявление порогового эффекта вблизи нижнего края спектра оператора $\mathcal{A}$.

В дальнейшем метод статьи [BSu] развивался во многих направлениях. Для данной работы большое значение имеет статья [Su2], в которой была изучена задача усреднения для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка в присутствии младших членов. В частности, результаты из статьи [Su2] применимы к действующему в пространстве $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ оператору $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ вида

$$\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon = \sum_{i,\,j=1}^{d} \mathrm{D}_i g_{ij}^\varepsilon \mathrm{D}_j + \sum_{j=1}^{d} \left(h_j^\varepsilon \mathrm{D}_j + \mathrm{D}_j \left(h_j^\varepsilon\right)^*\right) + Q^\varepsilon + \lambda Q_*^\varepsilon; \tag{0.4}$$

все коэффициенты в дифференциальном выражении предполагаются периодическими относительно некоторой решетки Γ в $\mathbb{R}^d$, а на функцию Q_* и вещественный параметр λ накладываются условия, обеспечивающие положительную определенность оператора. Для $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ был найден эффективный оператор $\mathcal{B}_\lambda^0$ с постоянными коэффициентами и установлена оценка

$$\left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon, \qquad \varepsilon \in (0,\,1]\,; \tag{0.5}$$

кроме того, получена была аппроксимация оператора, обратного к $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$, по норме пространства $\mathbf{B}\left(L_2\left(\mathbb{R}^d\right),\, H^1\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$:

$$\left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_\lambda^\varepsilon \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\mathbb{R}^d),\, H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon, \qquad \varepsilon \in (0,\,1]\,. \tag{0.6}$$

Здесь $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ — это так называемый корректор — оператор нулевого по ε порядка, но содержащий быстро осциллирующие коэффициенты.

Метод доказательства, как и прежде, опирался на масштабное преобразование и разложение в прямой интеграл. При этом возникало аналитическое операторное семейство $\mathcal{B}_\lambda(\mathbf{k};\,\varepsilon)$, зависящее уже от двух параметров, которое изучалось с помощью общей аналитической теории возмущений спектра относительно одномерной переменной $\tau = \left(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2}$. В этом состояло основное техническое отличие от подхода [BSu], которое и позволило учесть члены как первого, так и нулевого порядков.

0.2. **Задача усреднения для периодического вдоль некоторых направлений оператора.** Помимо задач с оператором, периодичным вдоль всех направлений пространства $\mathbb{R}^d$, большой интерес, в том числе и для приложений, представляют проблемы в областях типа цилиндра или слоя, в которых коэффициенты оператора зависят периодически лишь от некоторых своих аргументов.

Пример такой проблемы приводит работа [S-HT]. В полосе $\Pi = \mathbb{R} \times (0,\,a)$ на плоскости было рассмотрено гиперболическое уравнение теории упругости. Его коэффициенты были периодическими и быстро осциллирующими по первой переменной и не зависели от второй. Главный вывод [S-HT] заключался в поточечной сходимости решений исходного уравнения к решению осредненной задачи при стремлении периода к нулю, однако вопрос об ошибке этой аппроксимации исследован не был.

Приемы, использованные для доказательств в [S-HT], включали в себя традиционный метод двумасштабного разложения. Можно также пытаться применить к задачам подобного рода и описанный в п. 0.1 теоретико-операторный подход.

Решение простейшей проблемы в полосе Π, на нём основанное, было дано в работе [Su1]. Изучался оператор $\mathcal{A}^\varepsilon = \mathrm{D}_1 g_1^\varepsilon \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 g_2^\varepsilon \mathrm{D}_2$ в $L_2(\Pi)$ с периодическими граничными условиями на $\partial\Pi$ (сейчас $g_j^\varepsilon(x_1,\,x_2) = g_j\left(\frac{x_1}{\varepsilon},\,x_2\right)$, $j \in \{1,\,2\}$). Предполагались ограниченность и положительная определенность коэффициентов $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$, а также периодичность по первой переменной (с равным 1 периодом), липшицевость — по второй. Было показано, что при стремлении ε к нулю резольвента $\left(\mathcal{A}^\varepsilon + I\right)^{-1}$ исходного оператора сходится по метрике $\mathbf{B}(L_2(\Pi))$ к резольвенте $\left(\mathcal{A}^0 + I\right)^{-1}$

оператора эффективного (коэффициенты которого зависят лишь от x_2), а полученная оценка для нормы их разности

$$\left\|(\mathcal{A}^\varepsilon + I)^{-1} - \left(\mathcal{A}^0 + I\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon, \qquad \varepsilon \in (0,\, 1]\,,$$

точна по порядку.

Упомянем также статью [BuCaSu], в которой похожий результат был доказан для оператора в $L_2\left(\mathbb{R}^2\right)$, периодического только в одном направлении.

0.3. **Основные результаты.** Предметом настоящей работы является более общий оператор $\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda$ (в пространстве $L_2\left(\Pi\right)$), заданный формально дифференциальным выражением

$$\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda = \mathrm{D}_1 g^\varepsilon_1 \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 g^\varepsilon_2 \mathrm{D}_2 + \sum_{j=1}^{2} \left(h^\varepsilon_j \mathrm{D}_j + \mathrm{D}_j \left(h^\varepsilon_j\right)^*\right) + Q^\varepsilon + \lambda Q^\varepsilon_*;$$

граничные условия на $\partial\Pi$ могут быть или периодическими, или типа Дирихле, или типа Неймана. Измеримые в полосе функции $g_j\left(\cdot\right)$, $h_j\left(\cdot\right)$, $j \in \{1,\, 2\}$, $Q\left(\cdot\right)$ и $Q_*\left(\cdot\right)$ считаются периодическими по первой переменной (период равен 1), по второй же накладываются условия некоторой регулярности (см. условия 1—3). Дополнительно требуется положительная определенность и ограниченность $g_j\left(\cdot\right)$ $(j \in \{1,\, 2\})$, $Q_*\left(\cdot\right)$ и положительная определенность оператора $\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda$, добиться которой при перечисленных условиях на коэффициенты можно выбором параметра λ.

Установлено, что при малом ε оператор $\left(\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda\right)^{-1}$ может быть приближен в пространстве $\mathbf{B}\left(L_2\left(\Pi\right)\right)$ резольвентой $\left(\mathcal{B}^0_\lambda\right)^{-1}$, а в $\mathbf{B}\left(L_2\left(\Pi\right),\, H^1\left(\Pi\right)\right)$ — резольвентой $\left(\mathcal{B}^0_\lambda\right)^{-1}$ и корректором $\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda$. Найдены явные выражения для эффективных коэффициентов, последние при этом зависят лишь от аргумента x_2. Получены точные по порядку оценки погрешности

$$\left\|\left(\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}^0_\lambda\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon, \qquad \varepsilon \in (0,\, 1]\,,$$

$$\left\|\left(\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}^0_\lambda\right)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi),\, H^1(\Pi))} \leqslant \widetilde{C}\varepsilon, \qquad \varepsilon \in (0,\, 1]\,,$$

постоянные C и $\widetilde{C}$ в которых контролируются через данные задачи. Это — основной итог работы (теорема 1.6).

0.4. **Метод исследования.** Приведем схему изучения оператора с периодическими граничными условиями. Масштабное преобразование сводит исходную задачу к анализу пучка операторов

$$\mathcal{B}_\lambda\left(\varepsilon\right) = \mathrm{D}_1 g_1 \mathrm{D}_1 + \varepsilon^2 \mathrm{D}_2 g_2 \mathrm{D}_2 + \varepsilon\left(h_1 \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_1 h^*_1\right) + \varepsilon^2\left(h_2 \mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2 h^*_2\right) + \varepsilon^2 Q + \varepsilon^2 \lambda Q_*$$

в $L_2\left(\Pi\right)$, зависящих от ε — тем самым была исключена зависимость коэффициентов от малого параметра. Далее, теория Флоке-Блоха устанавливает унитарную эквивалентность $\mathcal{B}_\lambda\left(\varepsilon\right)$ оператору умножения на $\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)$ в прямом интеграле пространств $\int_{[-\pi,\,\pi)} \oplus\, L_2\left(\Omega\right) dk$, $\Omega = (0,\, 1) \times (0,\, a)$. Слой $\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)$ представляет из себя линейный оператор в пространстве $L_2\left(\Omega\right)$, заданный равенством

$$\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) = \mathcal{A}^{(1)}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) + \varepsilon^2 \mathcal{A}^{(2)},$$

в котором $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)$ и $\mathcal{A}^{(2)}$ определены выражениями

$$\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) = \left(\mathrm{D}_1 + k\right) g_1 \left(\mathrm{D}_1 + k\right) + \varepsilon\left(h_1\left(\mathrm{D}_1 + k\right) + \left(\mathrm{D}_1 + k\right) h^*_1\right) + \varepsilon^2 Q + \varepsilon^2 \lambda Q_*,$$

$$\mathcal{A}^{(2)} = \mathrm{D}_2 g_2 \mathrm{D}_2 + h_2 \mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2 h^*_2$$

с периодическими граничными условиями. Так как отображение $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)$ от переменной x_2 зависит только через коэффициенты, то его можно также разложить естественным образом в прямой интеграл:

$$\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right) = \int_{(0,\, a)} \oplus \mathcal{A}^{(1)}_\lambda\left(k;\, \varepsilon;\, x_2\right) dx_2.$$

$\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\left(k;\, \varepsilon;\, x_2\right)$ — оператор в $L_2\left(0,\, 1\right)$, к которому применимы результаты статьи [Su2], поэтому он может быть приближен соответствующим спектральным ростком. Основное внимание уделено присоединению возмущения $\varepsilon^2 \mathcal{A}^{(2)}$, которое служит главным источником проблем в плане техники. Это последний шаг, завершающий построение аппроксимации $\left(\mathcal{B}_\lambda\left(k;\, \varepsilon\right)\right)^{-1}$ в метриках двух операторных пространств.

Краевые задачи типа Дирихле и типа Неймана могут быть сведены к периодической: ортогональная сумма операторов при условиях Дирихле и Неймана оказывается унитарно эквивалентна подходящему оператору с периодическими граничными условиями в удвоенной полосе. При этом необходимые оценки следуют из соответствующих утверждений для периодической проблемы.

0.5. **Структура работы.** Работа состоит из девяти параграфов. В §1 даны основные определения, приведены постановка периодической проблемы и формулировка основного результата для периодического оператора. §2 сводит задачу к анализу обратного оператора $(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}$. Операторный пучок $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)$ исследуется в §3: к нему применяются результаты из [Su2], определяется спектральный росток. §§4–5 вводят аналог спектрального ростка для семейства $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ и содержат дополнительные оценки технического плана. Аппроксимация оператора $(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}$ по метрике пространства $\mathbf{B}(L_2(\Pi))$ дана в §6, по метрике $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi), H^1(\Pi)\right)$ — в §7. Применение полученных результатов к краевым задачам типа Дирихле и типа Неймана происходит в §8. Наконец, в §9 итог работы используется для исследования сингулярного оператора Шрёдингера в полосе.

0.6. **Обозначения.** Пусть $a > 0$; тогда Π и Ω представляют из себя полосу $\mathbb{R}\times(0,a)$ и прямоугольник $(0,1)\times(0,a)$ соответственно. Для отображения φ, заданного на Π, верхний индекс ε имеет следующий смысл: $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, x_2\right)$.

Жирный шрифт использован для выделения векторных величин. Элементы декартова произведения $A\times B$ множеств A, B обозначены символом $\langle a, b\rangle$, в котором $a\in A$ и $b\in B$. Характеристическая функция χ_A измеримого множества $A\subset\mathbb{R}^d$ определена обычным способом:

$$\chi_A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}\in A; \\ 0, & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d\setminus\overline{A}. \end{cases}$$

Стандартный базис пространства $\mathbb{R}^d$ состоит из ортов $\mathbf{e}_j$, $j\in\{1,\ldots,d\}$.

Пусть $\mathfrak{H}$, $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$ соответственно. Банахово пространство линейных непрерывных отображений из $\mathfrak{H}$ в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ будем обозначать через $\mathbf{B}(\mathfrak{H},\widetilde{\mathfrak{H}})$, а норму в нём — через $\|\cdot\|_{\mathbf{B}(\mathfrak{H},\widetilde{\mathfrak{H}})}$; если пространства $\mathfrak{H}$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ совпадают, то $\mathbf{B}(\mathfrak{H}) = \mathbf{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{H})$ — банахова алгебра с единицей $I = I_{\mathfrak{H}}$. Ортогональное дополнение к подпространству $\mathfrak{N}$ в пространстве $\mathfrak{H}$ будет обозначено как $\mathfrak{N}^\perp$. При условии, что $\mathfrak{P}$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}^\perp$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^\perp$.

$H^s(\Xi)$ при $s\in\mathbb{R}$ — пространство Соболева в области $\Xi\subset\mathbb{R}^d$ ($d\in\mathbb{N}$). Пусть $\{I_j\}_{j=1}^n$, $n\in[1,d]\cap\cap\mathbb{N}$, — множество конечных интервалов на вещественной оси и $I = \prod_{j=1}^n I_j$ — область в $\mathbb{R}^n$. $\widetilde{H}^s\left(I\times\mathbb{R}^{d-n}\right)$ ($s\in\mathbb{R}$) есть подпространство в $H^s\left(I\times\mathbb{R}^{d-n}\right)$ функций, периодическое продолжение на $\mathbb{R}^d$ относительно n-мерной решетки $\Gamma = \left\{\sum_{j=1}^n n_j|I_j|\mathbf{e}_j,\ \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^n\right\}$ которых принадлежит $H^s_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^d\right)$. $\mathring{H}^1(\Xi)$ — замыкание по стандартной метрике $H^1(\Xi)$ множества $C_0^\infty(\Xi)$ отображений, носитель которых компактен и вложен в область Ξ.

Символом $\mathrm{Lip}([0,a];\mathfrak{H})$ обозначен класс функций f на отрезке $[0,a]$, принимающих значения в пространстве $\mathfrak{H}$ и удовлетворяющих условию Липшица $\sup_{x,y\in[0,a]}\frac{\|f(x)-f(y)\|_{\mathfrak{H}}}{|x-y|} = \|f\|_{\mathrm{Lip}([0,a];\mathfrak{H})} < \infty$. Полунорма $\|f\|_{\mathrm{Lip}([0,a];\mathfrak{H})}$ функции f носит название константы Липшица для f.

Норма измеримого отображения u в пространстве $L_q((0,a);L_p(0,1))$ для краткости обозначена через $\|u\|_{p,q}$,

$$\|u\|_{p,q} = \left\|\left(x_2\mapsto\|u(\cdot,x_2)\|_{L_p(0,1)}\right)\right\|_{L_q(0,a)},$$

в пространстве $L_p(\Omega)$ — через $\|u\|_p$.

Благодарность. Автор глубоко признателен своему научному руководителю Т. А. Суслиной за начальную постановку проблемы и ценные замечания в ходе ее изучения.

§ 1. Основные определения и результаты

1.1. **Интерполяционное неравенство.** Предваряет введение исследуемого оператора одно простое интерполяционное неравенство, необходимое как для самого определения, так и для дальнейших построений.

Лемма 1.1. *Пусть* $w \in H^1(\alpha,\, \beta)$, $|(\alpha,\, \beta)| < \infty$. *Тогда при произвольном* $\mu > 0$ *имеет место неравенство*

$$\|w\|^2_{L_\infty(\alpha,\,\beta)} \leqslant \mu\, \|w'\|^2_{L_2(\alpha,\,\beta)} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\beta-\alpha}\right) \|w\|^2_{L_2(\alpha,\,\beta)}\,.$$

○ Так как функцию w можно считать абсолютно непрерывной, то при любых $t,\, t_0 \in [\alpha,\, \beta]$

$$|w(t)|^2 = |w(t_0)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\int_{(t_0,\,t)} w'(\tau)\,\overline{w(\tau)}d\tau.$$

Включение $w \in H^1(\alpha,\, \beta)$ позволяет дать абсолютной величине функции оценку сверху вида

$$|w(t)|^2 \leqslant |w(t_0)|^2 + 2\,\|w'\|_{L_2(\alpha,\,\beta)}\, \|w\|_{L_2(\alpha,\,\beta)}\,,$$

проинтегрировав которую по $t_0 \in (\alpha,\, \beta)$, приходим к утверждению леммы:

$$\begin{aligned}|w(t)|^2 &\leqslant \frac{1}{\beta-\alpha}\, \|w\|^2_{L_2(\alpha,\,\beta)} + 2\,\|w'\|_{L_2(\alpha,\,\beta)}\, \|w\|_{L_2(\alpha,\,\beta)} \leqslant \\ &\leqslant \mu\, \|w'\|^2_{L_2(\alpha,\,\beta)} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\beta-\alpha}\right) \|w\|^2_{L_2(\alpha,\,\beta)}\,, \\ &\qquad\qquad \mu > 0,\ t \in [\alpha,\, \beta]\,.\end{aligned}$$

●

Лемма 1.1 отражает компактность вложения пространства Соболева $H^1(\alpha,\, \beta)$ в $L_\infty(\alpha,\, \beta)$ в случае конечных α и β. Отметим элементарное

Следствие 1.2. *Пусть* $u \in L_2\big((0,\, a)\,;\, H^1(0,\, 1)\big)$ *и пусть выполнено включение* $f \in L_\infty((0,\, a)\,;\, L_2(0,\, 1))$. *Тогда при произвольном* $\mu > 0$ *справедливо неравенство*

$$\|fu\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mu\, \|\mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\|f\|^4_{2,\,\infty}}{\mu} + \|f\|^2_{2,\,\infty}\right) \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\,. \tag{1.1}$$

Если дополнительно $\mathrm{D}_1 u = 0$, *то*

$$\|fu\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{2,\,\infty}\, \|u\|_{L_2(\Omega)}\,. \tag{1.2}$$

Замечание. Пусть $k \in \mathbb{R}$ и $\mathcal{M}_k$ — унитарный в пространстве $L_2(\Omega)$ оператор умножения на функцию $\big(\mathbf{x} \mapsto e^{ikx_1}\big)$. Тогда ясно, что в неравенстве (1.1) дифференцирование D_1 можно заменить на $\mathrm{D}_1 + kI$, рассмотрев вместо u функцию $\mathcal{M}_k u$. Во всех ссылках ниже подразумевается именно это обобщение.

○ Первая оценка получается из неравенства

$$\|u\|^2_{L_2((0,\,a);\,L_\infty(0,\,1))} \leqslant \mu\, \|\mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{1}{\mu} + 1\right) \|u\|^2_{L_2(\Omega)}\,, \tag{1.3}$$

вытекающего из леммы 1.1. Вторая же следует из первой, если устремить μ к ∞. ●

Наконец, следующий результат получается суммированием оценок (1.1) и (1.2), записанных для сдвинутых ячеек $\Omega + n\mathbf{e}_1$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Следствие 1.3. *Пусть* $u \in H^1(\Pi)$, $f(x_1 + 1,\, x_2) = f(x_1,\, x_2)$ *для п. в.* $\mathbf{x} \in \Pi$ *и* $f \in L_\infty((0,\, a)\,;\, L_2(0,\, 1))$. *Тогда при произвольном* $\mu > 0$ *выполнено неравенство*

$$\|fu\|^2_{L_2(\Pi)} \leqslant \mu\, \|\mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Pi)} + \left(\frac{\|f\|^4_{2,\,\infty}}{\mu} + \|f\|^2_{2,\,\infty}\right) \|u\|^2_{L_2(\Pi)}\,. \tag{1.4}$$

Если дополнительно $\mathrm{D}_1 u = 0$, *то*

$$\|fu\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \|f\|_{2,\,\infty}\, \|u\|_{L_2(\Pi)}\,. \tag{1.5}$$

1.2. **Определение оператора $\mathcal{B}$.** Пусть $g(\cdot) = \operatorname{diag}\{g_1(\cdot), g_2(\cdot)\}$ — диагональная матрица-функция, заданная в полосе Π, компоненты которой подчинены следующим требованиям.

Условие 1.

1. $g_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, *измеримы и положительны;*
2. $g_j(\cdot, x_2)$, $j \in \{1, 2\}$, *при п. в.* $x_2 \in (0, a)$ *периодичны с периодом* 1*:*

$$g_j(x_1 + 1, x_2) = g_j(x_1, x_2), \qquad \mathbf{x} \in \Pi; \tag{1.6}$$

3. $g_j(\cdot)$ *и* $(g_j(\cdot))^{-1}$, $j \in \{1, 2\}$, *равномерно ограничены:*

$$\begin{aligned} c_g &= \max_{j\in\{1,2\}} \left\{\|g_j\|_\infty\right\} < \infty, \\ c_{g^{-1}} &= \max_{j\in\{1,2\}} \left\{\|g_j^{-1}\|_\infty\right\} < \infty; \end{aligned} \tag{1.7}$$

4. $g_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, *являются элементами класса* $\operatorname{Lip}([0, a]; L_\infty(0, 1))$, *а* $g_j(x_1, \cdot)$, $j \in \in \{1, 2\}$, *при п. в.* $x_1 \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют периодическим граничным условиям на концах отрезка* $[0, a]$*:*

$$g_j(x_1, 0) = g_j(x_1, a), \qquad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Введем также комплекснозначные функции $h_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, и вещественнозначное отображение $Q(\cdot)$ и предположим, что выполнено следующее

Условие 2.

1. $h_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, $Q(\cdot)$ *измеримы в полосе* Π*;*
2. $h_j(\cdot, x_2)$, $j \in \{1, 2\}$, $Q(\cdot, x_2)$ *при п. в.* $x_2 \in (0, a)$ *периодичны с периодом* 1*:*

$$\begin{aligned} h_j(x_1 + 1, x_2) &= h_j(x_1, x_2), \qquad \mathbf{x} \in \Pi, \\ Q(x_1 + 1, x_2) &= Q(x_1, x_2), \qquad \mathbf{x} \in \Pi; \end{aligned}$$

3. *Имеют место включения*

$$h_j \in \operatorname{Lip}([0, a]; L_2(0, 1)) \qquad (j \in \{1, 2\}), \tag{1.8}$$

$$Q \in \operatorname{Lip}([0, a]; L_1(0, 1)); \tag{1.9}$$

4. *Верны следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} h_j(x_1, 0) &= h_j(x_1, a), \qquad x_1 \in \mathbb{R}\ (j \in \{1, 2\}), \\ Q(x_1, 0) &= Q(x_1, a), \qquad x_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

На подпространстве $\widetilde{H}^1(\Pi) \subset L_2(\Pi)$ определим квадратичную форму

$$\mathfrak{b}[u, u] = \int\limits_\Pi \left(\sum_{j=1}^{2} \left(g_j(\mathbf{x}) |\mathrm{D}_j u|^2 + 2\operatorname{Re}\left(h_j(\mathbf{x}) \mathrm{D}_j u \cdot \overline{u}\right) \right) + Q(\mathbf{x}) |u|^2 \right) d\mathbf{x},$$
$$u \in D\left[\mathfrak{b}\right] = \widetilde{H}^1(\Pi). \tag{1.10}$$

Лемма 1.4. *При условиях* 1, 2 *на коэффициенты форма* $\mathfrak{b}$ *замкнута и полуограничена снизу.*

○ Используя оценку сверху

$$2\operatorname{Re}\int\limits_\Pi \left(h_1(\mathbf{x}) \mathrm{D}_1 u \cdot \overline{u} + h_2(\mathbf{x}) \mathrm{D}_2 u \cdot \overline{u}\right) d\mathbf{x} \leqslant \sum_{j=1}^{2} \left(\widehat{\mu} \|\mathrm{D}_j u\|^2_{L_2(\Pi)} + \frac{1}{\widehat{\mu}} \|h_j u\|^2_{L_2(\Pi)} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\widehat{\mu} + 2\frac{\check{\mu}}{\widehat{\mu}}\right) \|\mathbf{D} u\|^2_{L_2(\Pi; \mathbb{C}^2)} + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\widehat{\mu}} \left(\frac{\|h_j\|^4_{2,\infty}}{\check{\mu}} + \|h_j\|^2_{2,\infty} \right) \|u\|^2_{L_2(\Pi)},$$
$$u \in H^1(\Pi), \ \widehat{\mu}, \check{\mu} > 0, \tag{1.11}$$

для членов первого порядка (см. (1.4) с $f = h_j$, $j \in \{1,\, 2\}$) при $\widehat{\mu} = \frac{1}{2}$ и $\check{\mu} = \frac{1}{8}$ и оценку сверху

$$\left| \int_{\Pi} Q\,(\mathbf{x})\,|u|^2\,d\mathbf{x} \right| \leqslant \mu\, \|\mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Pi)} + \left(\frac{\|Q\|^2_{1,\,\infty}}{\mu} + \|Q\|_{1,\,\infty} \right) \|u\|^2_{L_2(\Pi)}\,, \qquad u \in H^1\,(\Pi)\,,\ \mu > 0, \tag{1.12}$$

для члена нулевого порядка (см. (1.4) с $f = |Q|^{1/2}$) при $\mu = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} \mathscr{b}\,[u,\,u] \leqslant{}& (2 + c_g)\, \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)} + \\ &+ \left(2 \sum_{j=1}^{2} \left(8\, \|h_j\|^4_{2,\,\infty} + \|h_j\|^2_{2,\,\infty} \right) + \|Q\|^2_{1,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty} \right) \|u\|^2_{L_2(\Pi)}\,, \qquad u \in \widetilde{H}^1\,(\Pi)\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Оценка формы (1.10) снизу вытекает из (1.11) при $2\check{\mu} = \widehat{\mu}^2 = \frac{1}{64} c^{-2}_{g^{-1}}$ и из (1.12) с $\mu = \frac{1}{4} c^{-1}_{g^{-1}}$:

$$\begin{aligned} \mathscr{b}\,[u,\,u] \geqslant{}& \tfrac{1}{2} c^{-1}_{g^{-1}}\, \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)} - \\ &- \left(8 c_{g^{-1}} \sum_{j=1}^{2} \left(128 c^2_{g^{-1}}\, \|h_j\|^4_{2,\,\infty} + \|h_j\|^2_{2,\,\infty} \right) + 4 c_{g^{-1}}\, \|Q\|^2_{1,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty} \right) \|u\|^2_{L_2(\Pi)}\,, \qquad u \in \widetilde{H}^1\,(\Pi)\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Следовательно, форма $\mathscr{b}$ полуограничена снизу и $(\mathscr{b} + \alpha)$-норма при достаточно большом числе α эквивалентна стандартной норме в $H^1\,(\Pi)$. Последнее и означает замкнутость $\mathscr{b}$, поскольку $\widetilde{H}^1\,(\Pi)$ является подпространством $H^1\,(\Pi)$. ●

Форма $\mathscr{b}$ задает в пространстве $L_2\,(\Pi)$ полуограниченный снизу самосопряженный оператор, который будем обозначать через $\mathcal{B}$. В общем случае $\mathcal{B}$ не является положительно определенным — будем рассматривать обобщенную резольвенту $(\mathcal{B} + \lambda Q_*)^{-1}$ со скалярной функцией $Q_*\,(\cdot)$, которая удовлетворяет нижеследующему требованию.

Условие 3.

1. $Q_*\,(\cdot)$ *положительна и измерима в полосе* Π*;*
2. $Q_*\,(\cdot,\,x_2)$ *при п. в.* $x_2 \in (0,\,a)$ *периодична с периодом* 1:
$$Q_*\,(x_1 + 1,\,x_2) = Q_*\,(x_1,\,x_2)\,, \qquad \mathbf{x} \in \Pi;$$
3. $Q_*\,(\cdot)$ *и* $(Q_*\,(\cdot))^{-1}$ *равномерно ограничены:*
$$\|Q_*\|_{\infty}\,,\ \|Q_*^{-1}\|_{\infty} < \infty;$$
4. $Q_*\,(\cdot)$ *содержится в* $\mathrm{Lip}\,([0,\,a]\,;\,L_\infty\,(0,\,1))$*, и*
$$Q_*\,(x_1,\,0) = Q_*\,(x_1,\,a)\,, \qquad x_1 \in \mathbb{R}.$$

На области $D\,[\mathscr{b}]$ зададим форму $\mathscr{b}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, следующим соотношением:

$$\mathscr{b}_\lambda\,[\cdot,\,\cdot] = \mathscr{b}\,[\cdot,\,\cdot] + \lambda\,(Q_* \cdot,\,\cdot)_{L_2(\Pi)}\,, \qquad D\,[\mathscr{b}_\lambda] = D\,[\mathscr{b}]\,.$$

Ясно, что ей отвечает самосопряженный оператор $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B} + \lambda Q_*$ с областью определения $D\,(\mathcal{B}_\lambda) = D\,(\mathcal{B})$.

За счет выбора параметра λ можно добиться положительности отображения $\mathcal{B}_\lambda$. Именно: определим постоянную $c_\natural$ выражением

$$c_\natural = 2\, \|g_2^{-1}\|_{\infty} \left(\|h_2\|^4_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} \right), \tag{1.15}$$

введем число λ_0,

$$\lambda_0 = \|Q_*^{-1}\|_{\infty} \left(c_\natural + 8 c_{g^{-1}} \sum_{j=1}^{2} \left(128 c^2_{g^{-1}}\, \|h_j\|^4_{2,\,\infty} + \|h_j\|^2_{2,\,\infty} \right) + 4 c_{g^{-1}}\, \|Q\|^2_{1,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty} \right), \tag{1.16}$$

и предположим, что выполнено

Условие 4. *Справедливо соотношение*

$$\lambda > \lambda_0.$$

Тогда для $\mathscr{b}_\lambda$ имеем, в силу (1.14), оценку снизу

$$\mathscr{b}_\lambda[u,\, u] \geqslant \tfrac{1}{2} c_{g^{-1}}^{-1} \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)} + (\lambda - \lambda_0) \left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1} \|u\|^2_{L_2(\Pi)}, \qquad u \in \widetilde{H}^1(\Pi), \tag{1.17}$$

вместе с условием 4 означающую положительную определенность $\mathcal{B}_\lambda$ при указанном λ.

Отметим в заключение, что оператор $\mathcal{B}_\lambda$ формально соответствует дифференциальному выражению

$$\mathcal{B}_\lambda = \mathbf{D}^* g \mathbf{D} + \mathbf{h}\mathbf{D}^* + \mathbf{D}\mathbf{h}^* + Q + \lambda Q_*$$

с периодическими граничными условиями по переменной x_2.

Для удобства следующий набор величин назовем исходными данными задачи:

$$\begin{gathered} \left\|g_j\right\|_\infty,\ \left\|g_j^{-1}\right\|_\infty,\ \left\|\partial_2 g_j\right\|_\infty \qquad (j \in \{1,\,2\}), \\ \|h_j\|_{2,\,\infty},\ \|\partial_2 h_j\|_{2,\,\infty} \qquad (j \in \{1,\,2\}), \\ \|Q\|_{1,\,\infty},\ \|\partial_2 Q\|_{1,\,\infty}, \\ \left\|Q_*\right\|_\infty,\ \left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty,\ \left\|\partial_2 Q_*\right\|_\infty,\ \lambda. \end{gathered} \tag{1.18}$$

1.3. **Постановка задачи теории усреднения.** Основным объектом рассматриваемой задачи является оператор $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ в пространстве $L_2(\Pi)$, порожденный замкнутой положительно определенной квадратичной формой

$$\begin{aligned} \mathscr{b}_\lambda^\varepsilon[u,\, u] = \int\limits_\Pi \Bigg(\sum_{j=1}^2 \Big(g_j^\varepsilon(\mathbf{x}) \left|\mathrm{D}_j u\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(h_j^\varepsilon(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_j u \cdot \overline{u}\right)\Big) + \\ + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) |u|^2 + \lambda Q_*^\varepsilon(\mathbf{x}) |u|^2 \Bigg) d\mathbf{x}, \\ u \in D\left[\mathscr{b}_\lambda^\varepsilon\right] = \widetilde{H}^1(\Pi),\ \varepsilon \in (0,\, 1]. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Заметим, что форма $\mathscr{b}_\lambda^\varepsilon$ допускает снизу оценку такую же, как и $\mathscr{b}_\lambda$:

$$\mathscr{b}_\lambda^\varepsilon[u,\, u] \geqslant \tfrac{1}{2} c_{g^{-1}}^{-1} \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)} + (\lambda - \lambda_0) \left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1} \|u\|^2_{L_2(\Pi)}, \qquad u \in \widetilde{H}^1(\Pi),\ \varepsilon \in (0,\, 1]. \tag{1.20}$$

Ее проверка похожа на доказательство соответствующего неравенства для $\mathscr{b}_\lambda$, а в основе лежит лемма 1.1 с $\alpha = 0$ и $\beta = \varepsilon$ при учете ограничения $\varepsilon \leqslant 1$.

Первый вопрос задачи гомогенизации для $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ состоит в поиске такого оператора $\mathcal{B}_\lambda^0$ того же вида, что и исходный, с коэффициентами, зависящими только от непериодической переменной x_2, чтобы имела место сходимость

$$\left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}.$$

Найденный оператор называется эффективным. Второй вопрос задачи заключается в приближении оператора $\left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1}$ при малом положительном ε по норме пространства $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi),\, H^1(\Pi)\right)$ с помощью $\mathcal{B}_\lambda^0$ и так называемого корректора $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ — оператора нулевого по ε порядка, но с быстро осциллирующими множителями:

$$\left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_\lambda^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathbf{B}\left(L_2(\Pi),\, H^1(\Pi)\right)} \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}.$$

Будет показано, что эффективный оператор $\mathcal{B}^0_\lambda$ соответствует форме

$$\begin{aligned}\mathscr{b}^0_\lambda[u,\,u] = \int\limits_{\Pi}\Bigg(\sum_{j=1}^{2}\Big(g^0_j(x_2)\,|\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(h^0_j(x_2)\,\mathrm{D}_j u\cdot\overline{u}\right)\Big) +& \\ + Q^0(x_2)\,|u|^2 + \lambda Q^0_*(x_2)\,|u|^2\Bigg)d\mathbf{x}&, \\ u\in D\left[\mathscr{b}^0_\lambda\right] = \widetilde{H}^1(\Pi)&, \end{aligned} \tag{1.21}$$

коэффициенты которой определены равенствами

$$\begin{aligned}
g^0_1(x_2) &= \left(\int\limits_{(0,\,1)}(g_1(y_1,\,x_2))^{-1}\,dy_1\right)^{-1}, \\
g^0_2(x_2) &= \int\limits_{(0,\,1)} g_2(y_1,\,x_2)\,dy_1, \\
h^0_1(x_2) &= g^0_1(x_2)\,\mathrm{Re}\int\limits_{(0,\,1)}\frac{h_1(y_1,\,x_2)}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1, \\
h^0_2(x_2) &= \int\limits_{(0,\,1)} h_2(y_1,\,x_2)\,dy_1, \\
Q^0(x_2) &= \int\limits_{(0,\,1)} Q(y_1,\,x_2)\,dy_1 - \int\limits_{(0,\,1)}\frac{|h_1(y_1,\,x_2)|^2}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1 + g^0_1(x_2)\left|\int\limits_{(0,\,1)}\frac{h_1(y_1,\,x_2)}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1\right|^2, \\
Q^0_*(x_2) &= \int\limits_{(0,\,1)} Q_*(y_1,\,x_2)\,dy_1.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Отметим в связи с введенными функциями следующие оценки:

$$\left\|g^0_j\right\|_\infty \leqslant \left\|g_j\right\|_\infty,\ \left\|(g^0_j)^{-1}\right\|_\infty \leqslant \left\|g^{-1}_j\right\|_\infty \qquad (j\in\{1,\,2\}); \tag{1.23}$$

$$\|h^0_1\|_\infty \leqslant \left(\|g_1\|_\infty\,\|g^{-1}_1\|_\infty\right)^{1/2}\|h_1\|_{2,\,\infty}, \tag{1.24}$$

$$\|h^0_2\|_\infty \leqslant \|h_2\|_{2,\,\infty}; \tag{1.25}$$

$$\|Q^0\|_\infty \leqslant \|g^{-1}_1\|_\infty\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty}; \tag{1.26}$$

$$\left\|Q^0_*\right\|_\infty \leqslant \left\|Q_*\right\|_\infty,\ \left\|(Q^0_*)^{-1}\right\|_\infty \leqslant \left\|Q^{-1}_*\right\|_\infty. \tag{1.27}$$

Проверим (1.24) и (1.26), остальные можно считать очевидными. В силу неравенства Коши, имеем:

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{(0,\,1)}\frac{h_1(y_1,\,x_2)}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1\right| &\leqslant \left(\int\limits_{(0,\,1)} g^{-1}_1(y_1,\,x_2)\,dy_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_{(0,\,1)}\frac{|h_1(y_1,\,x_2)|^2}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1\right)^{1/2} = \\ &= \left(g^0_1(x_2)\right)^{-1/2}\left(\int\limits_{(0,\,1)}\frac{|h_1(y_1,\,x_2)|^2}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Отсюда при учете (1.23) получается (1.24). Другое соотношение влечет за собой двусторонняя оценка

$$-\int\limits_{(0,\,1)} \frac{|h_1(y_1,\,x_2)|^2}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1 \leqslant -\int\limits_{(0,\,1)} \frac{|h_1(y_1,\,x_2)|^2}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1 + g_1^0(x_2)\left|\,\int\limits_{(0,\,1)} \frac{h_1(y_1,\,x_2)}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1\right|^2 \leqslant 0,$$

которая вытекает из неравенства

$$g_1^0(x_2)\left|\,\int\limits_{(0,\,1)} \frac{h_1(y_1,\,x_2)}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1\right|^2 \leqslant \int\limits_{(0,\,1)} \frac{|h_1(y_1,\,x_2)|^2}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1. \tag{1.28}$$

Несложно видеть также, что эффективные коэффициенты — липшицевы функции по переменной x_2 и соответствующие константы Липшица (то есть L_∞-нормы производных коэффициентов) ограничены величинами, выражающимися только через исходные данные задачи. Последний факт — липшицевость эффективных коэффициентов — позволяет также явно указать область определения оператора $\mathcal{B}_\lambda^0$, а именно $D\left(\mathcal{B}_\lambda^0\right) = \widetilde{H}^2(\Pi)$.

Корректность задания $\mathcal{B}_\lambda^0$ по форме (1.21) устанавливает

Лемма 1.5. *При условиях 1, 2, 3, 4 форма $\mathscr{b}_\lambda^0$ с коэффициентами (1.22) замкнута и положительно определена.*

○ Оценки сверху для $\mathscr{b}_\lambda^0$ можно достичь способом, вполне аналогичным способу вывода (1.13), если принять во внимание (1.23)–(1.27). Для получения обратного неравенства заметим, что (с учетом определения Q^0) при $u \in \widetilde{H}^1(\Pi)$ справедлива оценка

$$\int\limits_\Pi \left(2h_1^0(x_2)\,\mathrm{D}_1 u\cdot\overline{u} + Q^0(x_2)\,|u|^2\right)d\mathbf{x} \geqslant -\tfrac{1}{2}\int\limits_\Pi g_1^0(x_2)\,|\mathrm{D}_1 u|^2\,d\mathbf{x} - 2\int\limits_\Pi \frac{\left|h_1^0(x_2)\right|^2}{g_1^0(x_2)}\,|u|^2\,d\mathbf{x} +$$
$$+\int\limits_\Pi g_1^0(x_2)\left|\,\int\limits_{(0,\,1)} \frac{h_1(y_1,\,x_2)}{g_1(y_1,\,x_2)}dy_1\right|^2 |u|^2\,d\mathbf{x} - \left(\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)\|u\|_{L_2(\Pi)}^2.$$

Используя определение $h_1^0(\cdot)$ и неравенство (1.28), убеждаемся, что

$$\int\limits_\Pi \frac{\left|h_1^0(x_2)\right|^2}{g_1^0(x_2)}\,|u|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|h_1\|_{2,\,\infty}^2\,\|u\|_{L_2(\Pi)}^2,$$

поэтому

$$\int\limits_\Pi \left(2h_1^0(x_2)\,\mathrm{D}_1 u\cdot\overline{u} + Q^0(x_2)\,|u|^2\right)d\mathbf{x} \geqslant$$
$$\geqslant -\tfrac{1}{2}\int\limits_\Pi g_1^0(x_2)\,|\mathrm{D}_1 u|^2\,d\mathbf{x} - \left(2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|h_1\|_{2,\,\infty}^2 + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)\|u\|_{L_2(\Pi)}^2.$$

Применительно к форме $\mathscr{b}_\lambda^0$ это дает следующий результат:

$$\mathscr{b}_\lambda^0[u,\,u] \geqslant \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^2 \left\|g_j^{-1}\right\|_\infty^{-1} \|\mathrm{D}_j u\|_{L_2(\Pi)}^2 +$$
$$+\left(\lambda\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1} - 2\sum_{j=1}^2 \left\|g_j^{-1}\right\|_\infty \|h_j\|_{2,\,\infty}^2 - \|Q\|_{1,\,\infty}\right)\|u\|_{L_2(\Pi)}^2 \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}c_{g^{-1}}^{-1}\,\|\mathbf{D}u\|_{L_2(\Pi;\,\mathbb{C}^2)}^2 + (\lambda-\lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|u\|_{L_2(\Pi)}^2,$$
$$u \in \widetilde{H}^1(\Pi) \tag{1.29}$$

(здесь было использовано определение (1.16) постоянной λ_0). ●

Перейдем теперь к описанию корректора. Для этого введем такие функции Λ и M, которые при п. в. фиксированных $x_2 \in (0,\, a)$ являются обобщенными 1-периодическими решениями вспомогательных задач

$$\mathrm{D}_1 g_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1\Lambda(\mathbf{x}) + 1\right) = 0, \qquad \int\limits_{(0,\,1)} \Lambda(y_1,\, x_2)\, dy_1 = 0,$$

и

$$\mathrm{D}_1 g_1(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_1 \mathrm{M}(\mathbf{x}) + \mathrm{D}_1 \overline{h_1(\mathbf{x})} = 0, \qquad \int\limits_{(0,\,1)} \mathrm{M}(y_1,\, x_2)\, dy_1 = 0$$

(см. [Su2, (6.10)] и [Su2, (6.12)] соответственно). За счет одномерности этих задач отображения Λ и M возможно найти явно:

$$\Lambda(x_1,\, x_2) = \tfrac{i}{2} - i x_1 + i g_1^0(x_2) \int\limits_{(0,\,1)} dz_1 \int\limits_{(z_1,\, x_1)} dy_1 g_1^{-1}(y_1,\, x_2), \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x_1,\, x_2) = {} & -i \int\limits_{(0,\,1)} dz_1 \int\limits_{(z_1,\, x_1)} dy_1 \frac{\overline{h_1(y_1,\, x_2)}}{g_1(y_1,\, x_2)} + \\ & + i g_1^0(x_2) \int\limits_{(0,\,1)} \frac{\overline{h_1(y_1,\, x_2)}}{g_1(y_1,\, x_2)} dy_1 \int\limits_{(0,\,1)} dz_1 \int\limits_{(z_1,\, x_1)} dy_1 g_1^{-1}(y_1,\, x_2). \end{aligned} \tag{1.31}$$

Несложно видеть, что Λ, M, $\partial_1\Lambda$, $\partial_2\Lambda$, $\partial_2\mathrm{M}$ равномерно ограничены величинами, зависящими лишь от данных задачи, а $\partial_1\mathrm{M}$ содержится в пространстве $L_\infty((0,\, a);\, L_2(0,\, 1))$ и соответствующая норма так же оценивается через исходные данные.

С помощью Λ и M может быть задан корректор. Будет выяснено, что он представляет из себя непрерывный оператор

$$\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon = \left(\Lambda^\varepsilon \mathrm{D}_1 + \mathrm{M}^\varepsilon\right)\left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}, \qquad \varepsilon \in (0,\, 1], \tag{1.32}$$

в пространстве $L_2(\Pi)$. Более того, так как функции Λ, M являются мультипликаторами в $H^1(\Pi)$, корректор $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ оказывается также ограниченным отображением между $L_2(\Pi)$ и $H^1(\Pi)$.

1.4. **Основной результат.** Центральное место работы занимает следующая теорема.

Теорема 1.6. *Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Пусть оператор $\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ в $L_2(\Pi)$ определен формой (1.19); $\mathcal{B}_\lambda^0$ — эффективный оператор, отвечающий форме (1.21) с коэффициентами (1.22), а $\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ — корректор, заданный в (1.32). Тогда при $\varepsilon \in (0,\, 1]$ имеют место оценки*

$$\left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon, \tag{1.33}$$

$$\left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_\lambda^\varepsilon \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi),\, H^1(\Pi))} \leqslant \widetilde{C}\varepsilon; \tag{1.34}$$

постоянные C и $\widetilde{C}$ зависят только от исходных данных задачи (1.18).

Замечание. Сразу отметим, что для доказательства последней части теоремы 1.6, соотношения (1.34), достаточно при $\varepsilon \in (0,\, 1]$ установить неравенство

$$\left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{1/2} \left(\left(\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_\lambda^\varepsilon \right) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant \widehat{C}\varepsilon \tag{1.35}$$

с подходящей константой $\widehat{C}$. Данный факт очевидным образом следует из (1.20), а постоянная $\widetilde{C}$ в (1.34) может быть выбрана равной

$$\left(2c_{g^{-1}} + (\lambda - \lambda_0)^{-1} \left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2} \widehat{C}.$$

По этой причине далее вместо (1.34) проверять будем именно (1.35).

§ 2. Переход к операторам на ячейке

2.1. **Масштабное преобразование.** При положительном ε в пространстве $L_2(\Pi)$ определим унитарный оператор масштабного преобразования $\mathcal{T}_\varepsilon$ формулой

$$(\mathcal{T}_\varepsilon u)(x_1, x_2) = \varepsilon^{1/2} u(\varepsilon x_1, x_2), \qquad u \in L_2(\Pi), \mathbf{x} \in \Pi, \varepsilon > 0.$$

Обозначим через $\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)$ самосопряженный положительно определенный оператор в $L_2(\Pi)$, порожденный квадратичной формой

$$\begin{aligned} \mathscr{b}_\lambda(\varepsilon)[u, u] = \int\limits_\Pi \Big(& g_1(\mathbf{x}) |\mathrm{D}_1 u|^2 + \varepsilon^2 g_2(\mathbf{x}) |\mathrm{D}_2 u|^2 + \\ & + 2\varepsilon \operatorname{Re}(h_1(\mathbf{x}) \mathrm{D}_1 u \cdot \overline{u}) + 2\varepsilon^2 \operatorname{Re}(h_2(\mathbf{x}) \mathrm{D}_2 u \cdot \overline{u}) + \\ & + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x}) |u|^2 + \varepsilon^2 \lambda Q_*(\mathbf{x}) |u|^2 \Big) d\mathbf{x}, \\ & u \in D\left[\mathscr{b}_\lambda(\varepsilon)\right] = \widetilde{H}^1(\Pi), \varepsilon \in (0, 1]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Так как при $u \in D\left[\mathscr{b}_\lambda(\varepsilon)\right] = D\left[\mathscr{b}_\lambda^\varepsilon\right]$ выполнено

$$\mathscr{b}_\lambda(\varepsilon)[\mathcal{T}_\varepsilon u, \mathcal{T}_\varepsilon u] = \varepsilon^2 \mathscr{b}_\lambda^\varepsilon[u, u],$$

то

$$\mathcal{T}_\varepsilon^* \mathcal{B}_\lambda(\varepsilon) \mathcal{T}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathcal{B}_\lambda^\varepsilon. \tag{2.2}$$

Наряду с $\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)$ введем самосопряженный положительно определенный оператор $\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)$ формой

$$\begin{aligned} \mathscr{b}_\lambda^0(\varepsilon)[u, u] = \int\limits_\Pi \Big(& g_1^0(x_2) |\mathrm{D}_1 u|^2 + \varepsilon^2 g_2^0(x_2) |\mathrm{D}_2 u|^2 + \\ & + 2\varepsilon h_1^0(x_2) \mathrm{D}_1 u \cdot \overline{u} + 2\varepsilon^2 \operatorname{Re}\left(h_2^0(x_2) \mathrm{D}_2 u \cdot \overline{u}\right) + \\ & + \varepsilon^2 Q^0(x_2) |u|^2 + \varepsilon^2 \lambda Q_*^0(x_2) |u|^2 \Big) d\mathbf{x}, \\ & u \in D\left[\mathscr{b}_\lambda^0(\varepsilon)\right] = \widetilde{H}^1(\Pi), \varepsilon \in (0, 1]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Аналогично (2.2), справедливо равенство

$$\mathcal{T}_\varepsilon^* \mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon) \mathcal{T}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathcal{B}_\lambda^0. \tag{2.4}$$

Наконец, определим линейное отображение

$$\mathcal{K}_\lambda(\varepsilon) = (\Lambda \mathrm{D}_1 + \varepsilon \mathrm{M}) \left(\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)\right)^{-1}, \qquad \varepsilon \in (0, 1], \tag{2.5}$$

в пространстве $L_2(\Pi)$. Тогда тождество

$$\mathcal{T}_\varepsilon^* \mathcal{K}_\lambda(\varepsilon) \mathcal{T}_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$$

с (2.2) и (2.4) приводят к равносильной формулировке теоремы 1.6.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1, 2, 3, 4. *Пусть $\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)$ — оператор в $L_2(\Pi)$, определенный формой* (2.1)*; $\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)$ порожден формой* (2.3) *с коэффициентами* (1.22)*, а корректор $\mathcal{K}_\lambda(\varepsilon)$ выписан в* (2.5)*. Тогда при $\varepsilon \in (0, 1]$*

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C \varepsilon^{-1}, \tag{2.6}$$

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon))^{1/2} \left((\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon))^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0(\varepsilon)\right)^{-1} - \mathcal{K}_\lambda(\varepsilon) \right) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant \widetilde{C}; \tag{2.7}$$

константы C и $\widetilde{C}$ зависят только от исходных данных задачи (1.18).

2.2. **Разложение прямым интегралом пространств.** Пусть $\Omega = (0,\,1)\times(0,\,a)$. Введем оператор $\mathcal{U}_0$, осуществляющий непрерывное отображение из $L_2(\Pi)$ в гильбертово пространство H,

$$H = \int\limits_{[-\pi,\,\pi)} \oplus L_2(\Omega)\,dk = L_2\left([-\pi,\,\pi)\,;\,L_2(\Omega)\right),$$

согласно следующей формуле:

$$(\mathcal{U}_0 f)(k,\,\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-ik(x_1+m)} f(x_1+m,\,x_2),$$
$$f\in D(\mathcal{U}_0) = C_0^\infty(\Pi),\ \mathbf{x}\in\Omega,\ k\in[-\pi,\,\pi).$$

Вследствие изометричности, $\mathcal{U}_0$ можно распространить до ограниченного оператора $\mathcal{U}\in \in \mathbf{B}(L_2(\Pi),\,H)$, называемого преобразованием Гельфанда по переменной x_1. При этом $\mathcal{U}$ устанавливает изометрический изоморфизм пространств $L_2(\Pi)$ и H.

Зададим в $L_2(\Omega)$ оператор $\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ квадратичной формой

$$\begin{aligned} \mathscr{b}_\lambda(k;\,\varepsilon)[u,\,u] = \int\limits_\Omega \Big(& g_1(\mathbf{x})\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2 + \varepsilon^2 g_2(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_2 u|^2 + \\ & + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\,(h_1(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{u}) + 2\varepsilon^2\,\mathrm{Re}\,(h_2(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{u}) + \\ & + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})\,|u|^2 + \varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\,|u|^2\Big)\,d\mathbf{x}, \\ & u\in D\left[\mathscr{b}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right] = \widetilde{H}^1(\Omega),\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Пусть $\mathscr{b}_{\lambda,\,k}(\varepsilon)$ — такая форма, что

$$\mathscr{b}_{\lambda,\,k}(\varepsilon)[\mathcal{M}_k u,\,\mathcal{M}_k u] = \mathscr{b}_\lambda(k;\,\varepsilon)[u,\,u],\qquad u\in D[b_\lambda(k;\,\varepsilon)],\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$$

(оператор $\mathcal{M}_k$ определен в замечании к следствию 1.2). Квадратичную форму $\mathscr{b}_{\lambda,\,k}(\varepsilon)$ задает, очевидно, то же, что и $\mathscr{b}_\lambda(0;\,\varepsilon)$, выражение на пространстве k-квазипериодических функций $\mathcal{M}_k\widetilde{H}^1(\Omega)$. Тогда аналогичные проведенным в лемме 1.4 рассуждения (при учете включения $\varepsilon\in \in(0,\,1]$ и условия 4) устанавливают замкнутость и положительную определенность $\mathscr{b}_{\lambda,\,k}(\varepsilon)$, а вместе с ними — и замкнутость и положительную определенность формы $\mathscr{b}_\lambda(k;\,\varepsilon)$. В дальнейшем понадобится оценка

$$\begin{aligned} \mathscr{b}_\lambda(k;\,\varepsilon)[u,\,u] \geqslant \tfrac12\int\limits_\Omega g_1(\mathbf{x})\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2\,d\mathbf{x} + \tfrac12\varepsilon^2\int\limits_\Omega g_2(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_2 u|^2\,d\mathbf{x} + \\ + \varepsilon^2(\lambda-\lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1}\int\limits_\Omega |u|^2\,d\mathbf{x}, \\ u\in\widetilde{H}^1(\Omega),\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ по переменной x_1 частично диагонализует оператор $\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)$:

$$\mathcal{U}\mathcal{B}_\lambda(\varepsilon)\,\mathcal{U}^* = \int\limits_{[-\pi,\,\pi)} \oplus\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,dk. \tag{2.10}$$

Этот факт следует из того, что $\mathcal{U}\widetilde{H}^1(\Pi) = L_2\left([-\pi,\,\pi)\,;\,\widetilde{H}^1(\Omega)\right)$ и, по равенству Парсеваля для преобразования Гельфанда, при $u\in\widetilde{H}^1(\Pi)$ и $\widetilde{u} = \mathcal{U}u$ выполнено тождество

$$\mathscr{b}_\lambda(\varepsilon)[u,\,u] = \int\limits_{[-\pi,\,\pi)} \mathscr{b}_\lambda(k;\,\varepsilon)\left[\widetilde{u}(k,\,\cdot),\,\widetilde{u}(k,\,\cdot)\right]dk.$$

Далее, в пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим оператор $\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)$, соответствующий квадратичной форме

$$\begin{gathered}\mathscr{b}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u]=\int\limits_\Omega\Bigl(g^0_1\,(x_2)\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2+\varepsilon^2 g^0_2\,(x_2)\,|\mathrm{D}_2 u|^2+\\
+\,2\varepsilon h^0_1\,(x_2)\,(\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{u}+2\varepsilon^2\,\mathrm{Re}\,\bigl(h^0_2\,(x_2)\,\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{u}\bigr)+\\
+\,\varepsilon^2 Q^0\,(x_2)\,|u|^2+\varepsilon^2\lambda Q^0_*\,(x_2)\,|u|^2\Bigr)d\mathbf{x},\\
u\in D\,\bigl[\mathscr{b}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\bigr]=\widetilde{H}^1\,(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,.\end{gathered}\tag{2.11}$$

Отметим оценку $\mathscr{b}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ снизу, основанную на неравенствах для формы $\mathscr{b}^0_{\lambda,\,k}\,(\varepsilon)$,

$$\mathscr{b}^0_{\lambda,\,k}\,(\varepsilon)\,[\mathcal{M}_k u,\,\mathcal{M}_k u]=\mathscr{b}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u]\,,\qquad u\in D\,\bigl[b^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\bigr]\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,,$$

похожих на полученные в лемме 1.5:

$$\begin{gathered}\mathscr{b}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u]\geqslant\tfrac12\int\limits_\Omega g^0_1\,(\mathbf{x})\,|(\mathrm{D}_1+k)\,u|^2\,d\mathbf{x}+\tfrac12\varepsilon^2\int\limits_\Omega g^0_2\,(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_2 u|^2\,d\mathbf{x}+\\
+\,\varepsilon^2\,(\lambda-\lambda_0)\,\bigl\|Q^{-1}_*\bigr\|^{-1}_\infty\int\limits_\Omega|u|^2\,d\mathbf{x},\\
u\in\widetilde{H}^1\,(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,.\end{gathered}\tag{2.12}$$

Оператор $\mathcal{B}^0_\lambda\,(\varepsilon)$, подобно $\mathcal{B}_\lambda\,(\varepsilon)$, унитарно эквивалентен с тем же аффинитетом оператору умножения на $\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$:

$$\mathcal{U}\mathcal{B}^0_\lambda\,(\varepsilon)\,\mathcal{U}^*=\int\limits_{[-\pi,\,\pi)}\oplus\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,dk.\tag{2.13}$$

Определим, наконец, линейные отображения $\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ пространства $L_2\,(\Omega)$:

$$\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)=(\Lambda\,(\mathrm{D}_1+k)+\varepsilon\mathrm{M})\,\bigl(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\bigr)^{-1}\,,\qquad\langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,.\tag{2.14}$$

Как и $\mathcal{B}_\lambda\,(\varepsilon)$ и $\mathcal{B}^0_\lambda\,(\varepsilon)$, корректор $\mathcal{K}_\lambda\,(\varepsilon)$ может быть разложен в прямой интеграл, а введенные операторы $\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ будут при этом слоями данного разложения:

$$\mathcal{U}\mathcal{K}_\lambda\,(\varepsilon)\,\mathcal{U}^*=\int\limits_{[-\pi,\,\pi)}\oplus\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,dk.\tag{2.15}$$

Поскольку преобразование Гельфанда по x_1 изометрично, то соотношения (2.10), (2.13), (2.15) позволяют перевести теорему 2.1 в термины слоев соответствующих операторов при разложении в прямой интеграл.

Теорема 2.2. *Пусть в условиях теоремы 2.1 операторы $\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ и $\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ определены формами (2.8) и (2.11) соответственно, а корректор $\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ — соотношением (2.14). Тогда при $\langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ выполнены оценки*

$$\Bigl\|\bigl(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\bigr)^{-1}-\bigl(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\bigr)^{-1}\Bigr\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C\varepsilon^{-1},\tag{2.16}$$

$$\Bigl\|\bigl(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\bigr)^{1/2}\Bigl(\bigl(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\bigr)^{-1}-\bigl(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\bigr)^{-1}-\mathcal{K}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\Bigr)\Bigr\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant\widetilde{C};\tag{2.17}$$

константы C и $\widetilde{C}$ зависят только от исходных данных задачи (1.18).

§ 3. Операторный пучок $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$

Непосредственно к оператору $\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ теория, развитая в [Su2], неприменима: в нём содержится дифференцирование по непериодической переменной x_2. Однако $\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ можно представить суммой операторов, один из которых «послойно» вписывается в указанную схему — это позволяет дать для него необходимые аппроксимации через соответствующий спектральный росток. Данный параграф полностью посвящается изучению этого вопроса.

3.1. **Определение оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$.** Выделим из $\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$, задаваемый формой

$$a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)[u,\,u]=\int\limits_\Omega\Big(g_1(\mathbf{x})\left|(\mathrm{D}_1+k)\,u\right|^2+2\varepsilon\,\mathrm{Re}\,(h_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{u})+$$
$$+\varepsilon^2Q(\mathbf{x})\,|u|^2+\varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\,|u|^2\Big)d\mathbf{x},$$
$$u\in D\left[a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right]=L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1], \tag{3.1}$$

и формально обозначим их разность через $\varepsilon^2\mathcal{A}^{(2)}$:

$$\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)=\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)+\varepsilon^2\mathcal{A}^{(2)}. \tag{3.2}$$

Точное значение (3.2) заключено в равенстве

$$b_\lambda(k;\,\varepsilon)=a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)+\varepsilon^2a^{(2)},$$

и в этом смысле оператор $\mathcal{A}^{(2)}$ сопоставлен квадратичной форме

$$a^{(2)}[u,\,u]=\int\limits_\Omega\left(g_2(\mathbf{x})\left|\mathrm{D}_2u\right|^2+2\,\mathrm{Re}\,(h_2(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2u\cdot\overline{u})\right)d\mathbf{x},$$
$$u\in D\left[a^{(2)}\right]=\widetilde{H}^1(\Omega)\,. \tag{3.3}$$

Такие определения корректны благодаря замкнутости и положительности формы $a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$.

Лемма 3.1. *При $\langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ форма $a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ замкнута и положительно определена.*

○ Оценим члены младших порядков с помощью следствия 1.2. Как видно из (1.1) с $f=h_1$ и $u\in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)$,

$$2\varepsilon\int\limits_\Omega\mathrm{Re}\,(h_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{u})\,d\mathbf{x}\leqslant\left(\widehat{\mu}+\frac{\check{\mu}}{\widehat{\mu}}\right)\|(\mathrm{D}_1+k)\,u\|^2_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{\widehat{\mu}}\left(\frac{\|h_1\|^4_{2,\,\infty}}{\check{\mu}}+\|h_1\|^2_{2,\,\infty}\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\,,$$
$$\widehat{\mu},\,\check{\mu}>0.$$

Отсюда при $\widehat{\mu}=\frac{\mu}{2}$, $\check{\mu}=\frac{\mu^2}{4}$ получаем:

$$2\varepsilon\int\limits_\Omega\mathrm{Re}\,(h_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u\cdot\overline{u})\,d\mathbf{x}\leqslant\mu\,\|(\mathrm{D}_1+k)\,u\|^2_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\frac{2\varepsilon^2}{\mu}\left(\frac{4\,\|h_1\|^4_{2,\,\infty}}{\mu^2}+\|h_1\|^2_{2,\,\infty}\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\,,$$
$$\mu>0.$$

Оценка такого же типа члена нулевого порядка сразу следует из (1.1) с $f=|Q|^{1/2}$.

Для формы $a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ полученные соотношения означают, с одной стороны, подчиненность стандартной метрике $L_2\left((0,\,a)\,;\,H^1(0,\,1)\right)$, ибо

$$a_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)[u,\,u]\leqslant(2+\|g_1\|_\infty)\,\|(\mathrm{D}_1+k)\,u\|^2_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\varepsilon^2\left(8\,\|h_1\|^4_{2,\,\infty}+2\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+\|Q\|^2_{1,\,\infty}+\|Q\|_{1,\,\infty}+\lambda\,\|Q_*\|_\infty\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\,,$$
$$u\in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right);$$

а с другой — ограниченность нормы пространства $L_2\left((0,\,a)\,;\,H^1\,(0,\,1)\right)$ значением $\mathfrak{a}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon)$-нормы, так как

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon)\,[u,\,u] \geqslant{}& \tfrac{1}{2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\,u\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \\ &+\varepsilon^2\biggl(\lambda\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1} - 8\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\left(64\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^2\left\|h_1\right\|^4_{2,\,\infty}+\left\|h_1\right\|^2_{2,\,\infty}\right) - \\ &\qquad -\left(4\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\left\|Q\right\|^2_{1,\,\infty}+\left\|Q\right\|_{1,\,\infty}\right)\biggr)\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \\ \geqslant{}& \tfrac{1}{2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\,u\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon^2\left(c_\natural+(\lambda-\lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1}\right)\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)}, \\ & u\in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1\,(0,\,1)\right),\end{aligned} \tag{3.4}$$

где постоянные λ_0, $c_\natural$ определены в (1.16) и (1.15) соответственно. Остается добавить, что пространство $L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1\,(0,\,1)\right)$ является подпространством $L_2\left((0,\,a)\,;\,H^1\,(0,\,1)\right)$. ●

Главная часть операторного семейства $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon)$ имеет дивергентную форму, а переменная x_2 входит в операторы этого семейства только как параметр, что в совокупности позволяет использовать для аппроксимации $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon)$ метод, предложенный в [Su2].

При п. в. $x_2\in(0,\,a)$ рассмотрим форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,[w,\,w] = \int\limits_{(0,\,1)}\Bigl(& g_1\,(\mathbf{x})\left|(\mathrm{D}_1+k)\,w\right|^2 + 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\,(h_1\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,w\cdot\overline{w}) + \\ &+\varepsilon^2 Q\,(\mathbf{x})\,|w|^2+\varepsilon^2\lambda Q_*\,(\mathbf{x})\,|w|^2\Bigr)dx_1, \\ & w\in D\left[\mathfrak{a}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\right] = \widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,.\end{aligned}$$

Соответствующий самосопряженный оператор в $L_2\,(0,\,1)$ обозначим через $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$. Пространство $L_2\,(\Omega)$ можно трактовать как пространство Неймана со слоями $L_2\,(0,\,1)$, то есть

$$L_2\,(\Omega) = \int\limits_{(0,\,a)}\oplus L_2\,(0,\,1)\,dx_2,$$

которое раскладывает оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon)$ в прямой интеграл по $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$:

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)}\oplus\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2. \tag{3.5}$$

Именно слои $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ и допускают применение результатов статьи [Su2].

3.2. **Вложение в схему статьи** [Su2]**.** Прежде всего установим положительную определенность оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$.

Лемма 3.2. *При $\langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ и п. в. $x_2\in(0,\,a)$ оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ положительно определен. Более того, справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_\lambda^{(1)}\,(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,[w,\,w] \geqslant \left(c_*\left(k^2+\varepsilon^2\right)+c_\natural\varepsilon^2\right)\left\|w\right\|^2_{L_2(0,\,1)}, \\ w\in\widetilde{H}^1\,(0,\,1)\,,\end{aligned} \tag{3.6}$$

в котором постоянная c_* задана как

$$c_* = \min\left\{\tfrac{1}{2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1},\,(\lambda-\lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1}\right\}, \tag{3.7}$$

а $c_\natural$ определена в (1.15).

○ Выберем произвольную функцию w из $\widetilde{H}^1\,(0,\,1)$. Она может быть разложена по ортогональному базису в $L_2\,(0,\,1)$,

$$w\,(x_1) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{w}_m e^{2\pi i m x_1},$$

при этом так как $k \in [-\pi,\ \pi)$ и $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\|(\mathrm{D}_1 + k)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} (2\pi m + k)^2\, |\widehat{w}_m|^2 \geqslant k^2\, \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,. \tag{3.8}$$

Далее, повторяя оценки из доказательства леммы 3.1, несложно видеть, что при п. в. $x_2 \in (0,\ a)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^{(1)}_\lambda\,(k;\ \varepsilon;\ x_2)\,[w,\ w] \geqslant{}& \tfrac{1}{2}\, \left\|g_1^{-1}\right\|^{-1}_\infty \|(\mathrm{D}_1 + k)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)} + \\ &+ \varepsilon^2 \left(c_\natural + (\lambda - \lambda_0)\, \left\|Q_*^{-1}\right\|^{-1}_\infty\right) \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,, \\ & w \in \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Таким образом, оценка (3.6) следует из (3.8) и (3.9). ●

Проверим, что операторный пучок $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\,(k;\ \varepsilon;\ x_2)$ удовлетворяет всем предположениям [Su2]. Он допускает представление

$$\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\,(k;\ \varepsilon;\ x_2) = \mathfrak{A}\,(k;\ x_2) + \varepsilon \left(\mathfrak{Y}_2^*\,(x_2)\, \widetilde{\mathfrak{Y}}\,(k) + \widetilde{\mathfrak{Y}}^*\,(k)\, \mathfrak{Y}_2\,(x_2)\right) + \varepsilon^2 \mathfrak{Q}\,(x_2) + \varepsilon^2 \lambda \mathfrak{Q}_*\,(x_2)\,, \tag{3.10}$$

старшая часть $\mathfrak{A}\,(k;\ x_2)$ которого определена при п. в. $x_2 \in (0,\ a)$ квадратичной формой $\mathfrak{a}\,(k;\ x_2)$,

$$\mathfrak{a}\,(k;\ x_2)\,[w,\ w] = \|\mathfrak{X}\,(k;\ x_2)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,, \qquad w \in D\,[\mathfrak{a}\,(k;\ x_2)] = \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)\,, \tag{3.11}$$

оператора $\mathfrak{X}^*\,(k;\ x_2)\, \mathfrak{X}\,(k;\ x_2)$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}\,(k;\ x_2) &= \mathfrak{X}_0\,(x_2) + k\mathfrak{X}_1\,(x_2)\,, & D\,(\mathfrak{X}\,(k;\ x_2)) &= \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)\,, \\ \mathfrak{X}_0\,(x_2) &= g_1^{1/2}\,(\cdot,\ x_2)\, \mathrm{D}_1, & D\,(\mathfrak{X}_0\,(x_2)) &= \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)\,, \\ \mathfrak{X}_1\,(x_2) &= g_1^{1/2}\,(\cdot,\ x_2)\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

а младшие члены заданы выражениями

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{Y}}\,(k) &= \widetilde{\mathfrak{Y}}_0 + k\widetilde{\mathfrak{Y}}_1, & D\left(\widetilde{\mathfrak{Y}}\,(k)\right) &= \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)\,, \\ \widetilde{\mathfrak{Y}}_0 &= \mathrm{D}_1, & D\left(\widetilde{\mathfrak{Y}}_0\right) &= \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)\,, \\ \widetilde{\mathfrak{Y}}_1 &= I_{L_2(0,\,1)}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\mathfrak{Y}_2\,(x_2) = h_1^*\,(\cdot,\ x_2)\,, \qquad D\,(\mathfrak{Y}_2\,(x_2)) = \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)\,, \tag{3.14}$$

$$\mathfrak{Q}\,(x_2) = Q\,(\cdot,\ x_2)\,, \qquad D\,(\mathfrak{Q}\,(x_2)) = \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)\,, \tag{3.15}$$

$$\mathfrak{Q}_*\,(x_2) = Q_*\,(\cdot,\ x_2)\,. \tag{3.16}$$

Ясно, что $\mathfrak{X}_0\,(x_2)$, $\widetilde{\mathfrak{Y}}_0$ — замкнутые дифференциальные операторы первого порядка, а $\mathfrak{X}_1\,(x_2)$ и $\mathfrak{Q}_*\,(x_2)$ — ограниченные операторы умножения в $L_2\,(0,\ 1)$.

Укажем элементарные соотношения, связанные с введенными операторами и выполненные при $w \in \widetilde{H}^1\,(0,\ 1)$ и п. в. $x_2 \in (0,\ a)$ (ср. вывод (1.1) из леммы 1.1):

$$\left\|\widetilde{\mathfrak{Y}}\,(k)\, w\right\|_{L_2(0,\,1)} \leqslant \left\|g_1^{-1}\right\|^{1/2}_\infty \|\mathfrak{X}\,(k;\ x_2)\, w\|_{L_2(0,\,1)}\,; \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{Y}_2\,(x_2)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)} \leqslant{}& \mu\, \|\mathfrak{X}\,(k;\ x_2)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)} + \\ &+ \left(\frac{\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|h_1\|^4_{2,\,\infty}}{\mu} + \|h_1\|^2_{2,\,\infty}\right) \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,; \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \left|(\mathfrak{Q}\,(x_2)\, w,\ w)_{L_2(0,\,1)}\right| \leqslant{}& \mu\, \|\mathfrak{X}\,(k;\ x_2)\, w\|^2_{L_2(0,\,1)} + \\ &+ \left(\frac{\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|Q\|^2_{1,\,\infty}}{\mu} + \|Q\|_{1,\,\infty}\right) \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}\,. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Если $\langle k,\ \varepsilon\rangle = 0$, то оператор $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda\,(k;\ \varepsilon;\ x_2)$ оказывается равным $\mathfrak{A}\,(0;\ x_2)$. Отображение $\mathfrak{A}\,(0;\ x_2)$ положительно, точка $\lambda = 0$ является точкой его дискретного спектра, а соответствующее собственное подпространство

$$\widetilde{\mathfrak{N}} = N\,(\mathfrak{A}\,(0;\ x_2)) = \left\{w \in L_2\,(0,\ 1) : w = \mathrm{const}\right\} \tag{3.20}$$

одномерно.

Итак, все требования метода статьи [Su2] удовлетворены. Осталось только реализовать постоянные из абстрактной схемы [Su2].

Оценим снизу расстояние $d_0(x_2)$ от точной нижней границы $\mathfrak{A}(0;\, x_2)$, точки $\lambda = 0$, до остального спектра.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathfrak{A}_\perp(0;\, x_2)$ *есть часть оператора* $\mathfrak{A}(0;\, x_2)$ *в* $\widetilde{\mathfrak{N}}^\perp$. *Тогда*

$$\mathfrak{A}_\perp(0;\, x_2) \geqslant 4\pi^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} I_{\widetilde{\mathfrak{N}}^\perp}$$

при п. в. $x_2 \in (0,\, a)$.

○ Поскольку для $w \in D\left[\mathfrak{a}(0;\, x_2)\right]$ верно разложение в ряд Фурье вида

$$w(x_1) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{w}_m e^{2\pi i m x_1},$$

то при $w \in \widetilde{\mathfrak{N}}^\perp \cap D\left[\mathfrak{a}(0;\, x_2)\right]$ и п. в. $x_2 \in (0,\, a)$

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}(0;\, x_2)[w,\, w] &\geqslant \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \left\|\mathrm{D}_1 w\right\|^2_{L_2(0,\,1)} = \\ &= \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z},\\ m\neq 0}} (2\pi m)^2 \left|\widehat{w}_m\right|^2 \geqslant 4\pi^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \|w\|^2_{L_2(0,\,1)}. \end{aligned}$$

●

Полученное в лемме 3.3 неравенство позволяет дать равномерную оценку расстояния $d_0(x_2)$:

$$d_0(x_2) \geqslant d_0 = 4\pi^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1} \quad \text{при п. в. } x_2 \in (0,\, a). \tag{3.21}$$

Фиксируем, руководствуясь работой [Su2], положительное число δ,

$$\delta = \frac{d_0}{32} < \frac{d_0}{26}, \tag{3.22}$$

и положим, согласно [Su2, (1.18)], учитывая (3.17), (3.18) и (3.19),

$$\begin{aligned} \tau_0 = \delta^{1/2}\Big(2\left\|g_1\right\|_\infty \left(1 + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\right) + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|h_1\right\|^4_{2,\,\infty} + \left\|h_1\right\|^2_{2,\,\infty} + \\ + \left\|Q\right\|^2_{1,\,\infty} + \left\|Q\right\|_{1,\,\infty} + \lambda \left\|Q_*\right\|_\infty\Big)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Заметим, что при таком определении число τ_0 заведомо лежит в интервале $(0,\, 1)$; это включение будет неявно использоваться далее. Определим, наконец, следуя [Su2, (2.14), (2.15), (2.17), (2.33), (2.36)], постоянные

$$\begin{aligned} C_T^{(1)} &= \max\left\{2 + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty,\ \left(\left\|g_1\right\|_\infty + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|h_1\right\|^4_{2,\,\infty} + \left\|h_1\right\|^2_{2,\,\infty}\right)\delta^{-1}\right\}, \\ C_T^{(2)} &= \max\Big\{1 + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty,\ \Big(1 + \left\|g_1\right\|_\infty + \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|h_1\right\|^4_{2,\,\infty} + \left\|h_1\right\|^2_{2,\,\infty} + \\ &\qquad + \left\|Q\right\|^2_{1,\,\infty} + \left\|Q\right\|_{1,\,\infty} + \lambda \left\|Q_*\right\|_\infty\Big)\delta^{-1}\Big\} \end{aligned}$$

и с их помощью —

$$\begin{aligned} C_T &= C_T^{(1)} + \tau_0 C_T^{(2)}, \\ \check{C}_T &= 416 \cdot 2^{1/2} C_T^{(1)} \left(13 C_T^{(1)} C_T + C_T^{(2)}\right), \\ C_T^0 &= \check{C}_T + 416 \cdot 2^{1/2} C_T^{(2)} C_T. \end{aligned}$$

Видно, что все заданные величины зависят лишь от $\left\|g_1\right\|_\infty$, $\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty$, $\left\|h_1\right\|_{2,\,\infty}$, $\left\|Q\right\|_{1,\,\infty}$, $\left\|Q_*\right\|_\infty$ и λ, то есть от исходных данных задачи исключительно.

3.3. **Операторное семейство $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ и его спектральный росток.** Введем параметры $\tau = \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}$ и $\boldsymbol{\vartheta} = \langle\theta_1,\,\theta_2\rangle$, $\theta_1 = \frac{k}{\tau}$, $\theta_2 = \frac{\varepsilon}{\tau}$, и переобозначим оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$:

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \mathfrak{A}_\lambda^{(1)}(\tau;\,\boldsymbol{\vartheta};\,x_2)\,.$$

Определим, следуя схеме [Su2], при п. в. $x_2 \in (0,\,a)$ спектральный росток операторного семейства $\mathfrak{A}_\lambda^{(1)}(\tau;\,\boldsymbol{\vartheta};\,x_2)$ при $\tau = 0$ — оператор $\mathfrak{S}_\lambda(\boldsymbol{\vartheta};\,x_2)$, действующий в одномерном пространстве $\widetilde{\mathfrak{N}}$ как умножение на число

$$\mathfrak{S}_\lambda(\boldsymbol{\vartheta};\,x_2) = \vartheta_1^2 g_1^0(x_2) + 2\vartheta_1\vartheta_2 h_1^0(x_2) + \vartheta_2^2 Q^0(x_2) + \vartheta_2^2\lambda Q_*^0(x_2)\,, \tag{3.24}$$

в которое входят функции $g_1^0(\cdot)$, $h_1^0(\cdot)$, $Q^0(\cdot)$, $Q_*^0(\cdot)$, вычисленные согласно общему правилу из [Su2, п. 7.1] и приведенные в (1.22) (подробности вычисления опущены). Для ростка будет также использоваться обозначение $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \mathfrak{S}_\lambda(\boldsymbol{\vartheta};\,x_2)$. Из (3.24) тогда следует равенство

$$\left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) = k^2 g_1^0(x_2) + 2\varepsilon k h_1^0(x_2) + \varepsilon^2 Q^0(x_2) + \varepsilon^2\lambda Q_*^0(x_2)\,. \tag{3.25}$$

Еще одно свойство ростка может быть извлечено из оценки для $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ снизу.

Лемма 3.4. *При $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]$ и п. в. $x_2 \in (0,\,a)$*

$$\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) \geqslant \left(c_* + c_\natural\frac{\varepsilon^2}{k^2+\varepsilon^2}\right), \tag{3.26}$$

где постоянные c_* и $c_\natural$ определены в (3.7) и (1.15) соответственно.

○ Согласно лемме 3.2, при $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]$ и п. в. $x_2 \in (0,\,a)$

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2) \geqslant \left(c_*\left(k^2+\varepsilon^2\right) + c_\natural\varepsilon^2\right) I_{L_2(0,\,1)}.$$

Следовательно, для нижнего собственного значения $\lambda_1(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ выполнено:

$$\lambda_1(k;\,\varepsilon;\,x_2) \geqslant \left(c_* + c_\natural\vartheta_2^2\right)\tau^2. \tag{3.27}$$

В силу [Su2, (1.26)–(1.28)] и [Su2, предложение 1.6], при фиксированном $\boldsymbol{\vartheta}$ справедлива асимптотика

$$\lambda_1(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \tau^2\mathfrak{S}_\lambda(\boldsymbol{\vartheta};\,x_2) + O\left(\tau^3\right), \qquad \tau \to 0.$$

Отсюда и из (3.27) вытекает (3.26). ●

Пусть $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,\sigma) = \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,[0,\,\sigma])$ — непрерывное справа разложение единицы для спектрального проектора оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$. В соответствии с [Su2, предложение 1.5], справедлива следующая

Лемма 3.5. *При $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, и п. в. $x_2 \in (0,\,a)$*

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,\delta) = \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,3\delta)$$

и

$$\operatorname{rank}\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,\delta) = 1.$$

Лемма показывает, что если $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, то при п. в. $x_2 \in (0,\,a)$ интервал $(\delta,\,3\delta]$ включён в резольвентное множество оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)$. Вместо $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2;\,\delta)$ далее будем использовать обозначение $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{P}}$ — ортогональный проектор в пространстве $L_2(0,\,1)$ на ядро $\widetilde{\mathfrak{N}}$ отображения $\mathfrak{A}(0;\,x_2)$; отметим, что $\widetilde{\mathcal{P}}$ совпадает с $\mathcal{F}_\lambda(0;\,0;\,x_2)$. Следующая теорема является частным случаем [Su2, теорема 2.2].

Теорема 3.6. *При $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, и п. в. $x_2 \in (0,\,a)$ справедливы представления*

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \widetilde{\mathcal{P}} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,, \tag{3.28}$$

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,\widetilde{\mathcal{P}} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{3/2}\Psi_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,, \tag{3.29}$$

притом выполнены оценки

$$\|\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\|_{\mathbf{B}(L_2(0,\,1))} \leqslant C_1,$$
$$\|\Psi_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\|_{\mathbf{B}(L_2(0,\,1))} \leqslant C_2$$

с постоянными $C_1 = 32 \cdot 2^{1/2}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)C_T$, $C_2 = 2\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\delta C_T^0$, *зависящими лишь от исходных данных задачи.*

Для аппроксимации с корректором необходима дальнейшая детализация разности операторов $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) - \widetilde{\mathcal{P}}$ в случае $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. При данных условиях в спектральном проекторе $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ выделим член порядка $\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}$, выражающийся явно через функции (1.30), (1.31), и выпишем остаток, порядок которого $k^2+\varepsilon^2$ (см. [Su2, формулы (1.48), (2.49)–(2.52)]):

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2) = \widetilde{\mathcal{P}} + \left(k\Lambda(\cdot,\,x_2) + \varepsilon\mathrm{M}(\cdot,\,x_2)\right)\widetilde{\mathcal{P}} + \widetilde{\mathcal{P}}\left(k\Lambda^*(\cdot,\,x_2) + \varepsilon\mathrm{M}^*(\cdot,\,x_2)\right) + \\ + \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2). \tag{3.30}$$

Поскольку средние значения отображений $\Lambda(\cdot,\,x_2)$ и $\mathrm{M}(\cdot,\,x_2)$ по интервалу $(0,\,1)$ при п. в. $x_2 \in \in (0,\,a)$ равны нулю, то $\widetilde{\mathcal{P}}\Lambda^*(\cdot,\,x_2)\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}}\mathrm{M}^*(\cdot,\,x_2)\widetilde{\mathcal{P}} = 0$. Суммируем вышесказанное в виде теоремы.

Теорема 3.7. *Пусть* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. *Тогда при п. в.* $x_2 \in (0,\,a)$

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\widetilde{\mathcal{P}} = \widetilde{\mathcal{P}} + \left(k\Lambda(\cdot,\,x_2) + \varepsilon\mathrm{M}(\cdot,\,x_2)\right)\widetilde{\mathcal{P}} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\widetilde{\mathcal{P}},$$

оператор $\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)$ *допускает оценку нормы*

$$\|\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\|_{\mathbf{B}(L_2(0,\,1))} \leqslant C_3,$$

в которой $C_3 = 32 \cdot 2^{1/2}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\left(13C_T^{(1)}C_T + C_T^{(2)}\right)$ *— зависит лишь от данных задачи.*

Наконец, понадобится оценка композиции операторов $\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)\right)^{1/2}$ и $\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)$, вытекающая из [Su2, предложение 2.7].

Теорема 3.8. *При* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, *и п. в.* $x_2 \in (0,\,a)$ *справедливо неравенство*

$$\left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon;\,x_2)\right)^{1/2}\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(0,\,1))} \leqslant C_4;$$

константа $C_4 = 14 \cdot 26^{1/2}\delta^{1/2}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\left(7C_T^{(1)}C_T + C_T^{(2)}\right)\left(1+\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2}$ *зависит только от исходных данных.*

3.4. **Операторное семейство** $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ **и его спектральный росток.** Равномерность полученных в предыдущем пункте оценок по переменной $x_2 \in (0,\,a)$ позволяет перенести их со слоев $L_2(0,\,1)$ в прямой интеграл $L_2(\Omega)$. Переход этот, однако, требует дополнительных определений.

В соответствии с (3.5), (3.10) и (3.11)–(3.16),

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon) = \mathfrak{A}(k) + \varepsilon\left(\mathfrak{Y}_2^*\mathfrak{Y}(k) + \mathfrak{Y}^*(k)\mathfrak{Y}_2\right) + \varepsilon^2\mathfrak{Q} + \varepsilon^2\lambda\mathfrak{Q}_*.$$

Здесь $\mathfrak{A}(k)$ есть оператор, отвечающий квадратичной форме

$$\mathfrak{a}(k)[u,\,u] = \|\mathfrak{X}(k)u\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad u \in D[\mathfrak{a}(k)] = L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),$$

в которой

$$\mathfrak{X}(k) = \int\limits_{(0,\,a)}\oplus\mathfrak{X}(k;\,x_2)\,dx_2 = \mathfrak{X}_0 + k\mathfrak{X}_1, \qquad D(\mathfrak{X}(k)) = L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),$$

$$\mathfrak{X}_0 = \int\limits_{(0,\,a)}\oplus\mathfrak{X}_0(x_2)\,dx_2 = g_1^{1/2}\mathrm{D}_1, \qquad D(\mathfrak{X}_0) = L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),$$

$$\mathfrak{X}_1 = \int\limits_{(0,\,a)}\oplus\mathfrak{X}_1(x_2)\,dx_2 = g_1^{1/2},$$

а

$$\mathfrak{Y}(k) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \widetilde{\mathfrak{Y}}(k)\,dx_2 = \mathrm{D}_1 + kI_{L_2(\Omega)}, \qquad D(\mathfrak{Y}(k)) = L_2\big((0,\,a);\, \widetilde{H}^1(0,\,1)\big),$$

$$\mathfrak{Y}_2 = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathfrak{Y}_2(x_2)\,dx_2 = h_1^*, \qquad D(\mathfrak{Y}_2) = L_2\big((0,\,a);\, \widetilde{H}^1(0,\,1)\big),$$

$$\mathfrak{Q} = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathfrak{Q}(x_2)\,dx_2 = Q, \qquad D(\mathfrak{Q}) = L_2\big((0,\,a);\, \widetilde{H}^1(0,\,1)\big),$$

$$\mathfrak{Q}_* = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathfrak{Q}_*(x_2)\,dx_2 = Q_*.$$

Тем самым $\mathfrak{X}(k)$ и $\mathfrak{Y}(k)$ — замкнутые операторы дифференцирования первого порядка, $\mathfrak{Q}_*$ — ограниченный оператор умножения на $Q_*(\cdot)$.

Спектральную меру оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$, соответствующую промежутку $[0,\,\sigma]$, обозначим через $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,\sigma)$; как и прежде, примем соглашение использовать для краткости символ $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ вместо $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,\delta)$. Ясно, что из представления (3.5) вытекает разложимость спектрального проектора оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$, в частности

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2. \tag{3.31}$$

При $\langle k,\,\varepsilon\rangle = 0$ соотношение (3.31) переходит в равенство

$$\mathcal{P} = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \widetilde{\mathcal{P}} dx_2, \tag{3.32}$$

в котором $\mathcal{P}$ — ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство $\mathfrak{N}$ функций, зависящих только от переменной x_2:

$$\mathfrak{N} = N(\mathfrak{A}(0)) = \Big\{u \in L_2(\Omega) : u(\cdot,\,x_2) = \text{const при п. в. } x_2 \in (0,\,a)\Big\}. \tag{3.33}$$

Возможно и другое толкование множества $\mathfrak{N}$: (3.33) естественным образом изоморфно $L_2(0,\,a)$, поэтому

$$\mathfrak{N} \simeq \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \widetilde{\mathfrak{N}} dx_2.$$

С равномерно ограниченной измеримой оператор-функцией $(x_2 \mapsto \mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2))$, заданной п. в. на интервале $(0,\,a)$, связан единственный непрерывный разложимый оператор в пространстве $\mathfrak{N}$, который обозначим через $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ и назовем спектральным ростком семейства операторов $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)$ при $\tau = (k^2+\varepsilon^2)^{1/2} = 0$:

$$\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \int\limits_{(0,\,a)} \oplus \mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)\,dx_2. \tag{3.34}$$

Таким образом, $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ представляет из себя оператор умножения на функцию $(x_2 \mapsto \mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2))$ от переменной x_2, определенную в (3.24), и так же, как и $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon;\,x_2)$, зависит лишь от параметра $\boldsymbol{\vartheta}$, но не от τ.

На спектральный росток $\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ переносится оценка вида (3.26) из леммы 3.4.

Лемма 3.9. *При* $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]$

$$\mathcal{S}_\lambda(k;\,\varepsilon) \geqslant \left(c_* + c_\natural \frac{\varepsilon^2}{k^2+\varepsilon^2}\right) I_{\mathfrak{N}}; \tag{3.35}$$

константы c_* *и* $c_\natural$ *определены в* (3.7) *и* (1.15) *соответственно.*

Введем также $\Phi_\lambda(k;\varepsilon)$, $\Psi_\lambda(k;\varepsilon)$ и $\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)$ как операторы, соответствующие операторнозначным функциям $\Phi_\lambda(k;\varepsilon;\cdot)$, $\Psi_\lambda(k;\varepsilon;\cdot)$ и $\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon;\cdot)$ соответственно:

$$\Phi_\lambda(k;\varepsilon)=\int\limits_{(0,\,a)}\oplus\Phi_\lambda(k;\varepsilon;x_2)\,dx_2, \tag{3.36}$$

$$\Psi_\lambda(k;\varepsilon)=\int\limits_{(0,\,a)}\oplus\Psi_\lambda(k;\varepsilon;x_2)\,dx_2, \tag{3.37}$$

$$\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)=\int\limits_{(0,\,a)}\oplus\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon;x_2)\,dx_2. \tag{3.38}$$

Тогда соотношения (3.5), (3.25), (3.28)–(3.34) влекут:

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)=\mathcal{P}+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda(k;\varepsilon), \tag{3.39}$$

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)=\mathcal{P}+(k\Lambda+\varepsilon\mathrm{M})\mathcal{P}+\mathcal{P}(k\Lambda^*+\varepsilon\mathrm{M}^*)+\left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon), \tag{3.40}$$

$$\left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathcal{S}_\lambda(k;\varepsilon)=k^2g_1^0+2\varepsilon kh_1^0+\varepsilon^2Q^0+\varepsilon^2\lambda Q_*^0, \tag{3.41}$$

$$\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)=\left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathcal{S}_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P}+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{3/2}\Psi_\lambda(k;\varepsilon). \tag{3.42}$$

Следующее утверждение является прямым следствием из леммы 3.2 и формулы (3.5).

Лемма 3.10. *Оператор $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)$ при $\langle k,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\pi)\times(0,1]$ положительно определен. Более того,*

$$a_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)[u,u]\geqslant\left(c_*\left(k^2+\varepsilon^2\right)+c_\natural\varepsilon^2\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)},\qquad u\in L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right);$$

постоянные c_*, $c_\natural$ определены в (3.7) и (1.15) соответственно.

Разложение (3.5) позволяет перенести первую часть утверждения леммы 3.5 на спектральный проектор оператора $\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)$.

Лемма 3.11. *При $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon>0$,*

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon;\delta)=\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon;3\delta).$$

Равенства (3.36), (3.37), (3.39) и (3.42) и теорема 3.6 обеспечивают справедливость следующего результата.

Теорема 3.12. *Имеют место представления (3.39), (3.42), причем при $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon>0$, выполнены оценки*

$$\|\Phi_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_1,$$
$$\|\Psi_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_2;$$

постоянные C_1, C_2 выписаны в теореме 3.6.

Определение (3.38) оператора $\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)$, а также разложения (3.31) и (3.32) проекторов $\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)$, $\mathcal{P}$ вместе с теоремой 3.7 влекут следующее утверждение.

Теорема 3.13. *При $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon>0$, справедливо равенство*

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P}=\mathcal{P}+(k\Lambda+\varepsilon\mathrm{M})\mathcal{P}+\left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P}, \tag{3.43}$$

притом

$$\|\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_3;$$

постоянная C_3 определена в теореме 3.7.

Вполне аналогично из теоремы 3.8 получается равномерная оценка оператора $\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)$.

Теорема 3.14. *Пусть $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon>0$. Тогда*

$$\left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\Upsilon_\lambda(k;\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_4;$$

константа C_4 задана в теореме 3.8.

3.5. **Спектральный росток операторного семейства $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$.** Аппроксимация операторного семейства $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)$ дает возможность ввести аналог спектрального ростка для $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ и приблизить с его помощью операторный пучок $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ при малых ε.

Пусть $\langle k,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\pi)\times(0,1]$ и $\mathscr{s}_\lambda(k;\varepsilon)$ — полуторалинейная форма оператора $\mathcal{S}_\lambda(k;\varepsilon)$. В пространстве $L_2(0,a)$ введем форму

$$\begin{gathered}\mathscr{l}_\lambda(k;\varepsilon)[w,w] = \left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathscr{s}_\lambda(k;\varepsilon)[w,w] + \\ + \varepsilon^2\int\limits_{(0,a)}\left(g_2^0(x_2)\left|\mathrm{D}_2 w\right|^2 + 2\operatorname{Re}\left(h_2^0(x_2)\mathrm{D}_2 w\cdot\overline{w}\right)\right)dx_2, \\ w\in D\left[\mathscr{l}_\lambda(k;\varepsilon)\right] = \widetilde{H}^1(0,a),\ \langle k,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\pi)\times(0,1]. \qquad (3.44)\end{gathered}$$

Ясно, что $\mathscr{l}_\lambda(k;\varepsilon)$ есть сужение $\mathscr{b}^0_\lambda(k;\varepsilon)$ на подпространство $\mathcal{P}\widetilde{H}^1(\Omega)\simeq\widetilde{H}^1(0,a)$, а следовательно, и самая форма $\mathscr{l}_\lambda(k;\varepsilon)$ является замкнутой и положительно определенной вместе с $\mathscr{b}^0_\lambda(k;\varepsilon)$. Самосопряженный положительно определенный оператор, соответствующий $\mathscr{l}_\lambda(k;\varepsilon)$, обозначим через $\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)$. Легко видеть, что из-за липшицевости по переменной x_2 своих коэффициентов он определен на $D(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)) = \widetilde{H}^2(0,a)$ и имеет вид

$$\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon) = k^2 g_1^0 + 2\varepsilon k h_1^0 + \varepsilon^2 Q^0 + \varepsilon^2\lambda Q^0_* + \varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2 g_2^0\mathrm{D}_2 + h_2^0\mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2\left(h_2^0\right)^*\right). \qquad (3.45)$$

Отметим еще тождество, вытекающее из соотношений для форм входящих в него операторов:

$$\mathcal{B}^0_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P} = \mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P}, \qquad (3.46)$$

то есть отображение $\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)$ — часть $\mathcal{B}^0_\lambda(k;\varepsilon)$ в подпространстве $\mathcal{P}\widetilde{H}^1(\Omega)$.

§ 4. Предварительные оценки

В этом параграфе сосредоточен ряд подготовительных оценок для введенных операторов, который закладывает основу всего дальнейшего изложения.

4.1. **Оценки с операторами $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ и $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)$.**

Лемма 4.1. *Пусть $\langle k,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\pi)\times(0,1]$. Тогда справедливы соотношения*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1}, \qquad (4.1)$$

$$\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1}, \qquad (4.2)$$

где c_* — постоянная, определенная равенством (3.7).

○ Разложим при п. в. $x_2\in(0,a)$ функцию $u\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ по ортогональному базису пространства $L_2(0,1)$:

$$u(x_1,x_2) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_m(x_2)\,e^{2\pi i m x_1}.$$

Тогда, ввиду того что $k\in[-\pi,\pi)$, выполнена оценка

$$\|(\mathrm{D}_1+k)u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}(2\pi m+k)^2\int\limits_{(0,a)}\left|\widehat{u}_m(x_2)\right|^2dx_2 \geqslant k^2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \qquad (4.3)$$

Остается воспользоваться неравенствами (2.9) и (3.4). ●

Лемма 4.2. *При $\langle k,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\pi)\times(0,1]$ верны следующие оценки:*

$$\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}, \qquad (4.4)$$

$$\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}, \qquad (4.5)$$

$$\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}. \qquad (4.6)$$

Замечание. Так как $R\left(\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right) = \widetilde{H}^1(\Omega)$, $R\left(\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right) = L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right)$, то все композиции операторов в (4.4)–(4.6) корректно определены.

○ Неравенство (2.9) приводит к соотношению

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{1/2} u \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathscr{b}_\lambda(k;\varepsilon)[u,u] \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac12 \left\|g_1^{-1}\right\|^{-1}_\infty \|(\mathrm{D}_1+k)u\|^2_{L_2(\Omega)} + \tfrac12\varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|^{-1}_\infty \|\mathrm{D}_2 u\|^2_{L_2(\Omega)},\quad u\in \widetilde{H}^1(\Omega),$$

из которого следуют (4.4), (4.6), а оценка (3.4) влечет

$$\left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{1/2} u \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathscr{a}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)[u,u] \geqslant \tfrac12 \left\|g_1^{-1}\right\|^{-1}_\infty \|(\mathrm{D}_1+k)u\|^2_{L_2(\Omega)},\quad u\in L_2\left((0,a);\widetilde{H}^1(0,1)\right),$$

откуда вытекает (4.5). ●

4.2. **Оценки со спектральными проекторами.**

Лемма 4.3. *При $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon>0$, имеют место неравенства*

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2} \mathcal{P}^\perp \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_6, \tag{4.7}$$
$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2} (\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon))^\perp \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_5, \tag{4.8}$$
$$\left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{1/2} \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2} C_7. \tag{4.9}$$

в которых постоянные C_5, C_6, C_7 зависят только от исходных параметров задачи.

○ Пусть $u\in\widetilde{H}^1(\Omega)$. Предположим сначала, что выполнено условие $c_\natural\varepsilon^2 < 3\delta$ (напомним: постоянная $c_\natural$ определена в (1.15)). Согласно лемме 3.10, точная нижняя граница оператора $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)$ строго больше числа $c_\natural\varepsilon^2$, из чего следует положительная определенность $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon) - \frac12\varepsilon^2 c_\natural I_{L_2(\Omega)}$. Поскольку, в соответствии с определениями (2.8) и (3.1) форм $\mathscr{b}_\lambda(k;\varepsilon)$, $\mathscr{a}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)$ и следствием 1.2 (при $f=h_2$),

$$\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{1/2} u \right\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathscr{b}_\lambda(k;\varepsilon)[u,u] \geqslant \mathscr{a}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon)[u,u] -$$
$$- \varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \|(\mathrm{D}_1+k)u\|^2_{L_2(\Omega)} - \varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \left(\|h_2\|^4_{2,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\infty}\right) \|u\|^2_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon) - \tfrac12\varepsilon^2 c_\natural I_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} u \right\|^2_{L_2(\Omega)} - \varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \|(\mathrm{D}_1+k)u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

то, применяя (4.4), получаем:

$$\left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon) - \tfrac12\varepsilon^2 c_\natural I_{L_2(\Omega)}\right)^{1/2} (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2} \right\|^2_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \varepsilon^2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty \left\| (\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2} \right\|^2 \leqslant 1 + 2\varepsilon^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty.$$

А тогда, вследствие леммы 3.11,

$$\left\| (\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon))^\perp (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant \left(1+2\varepsilon^2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2} \left\| (\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon))^\perp \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\varepsilon) - \tfrac12\varepsilon^2 c_\natural I_{L_2(\Omega)}\right)^{-1/2} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1+2\varepsilon^2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2} \left(3\delta - \tfrac12 c_\natural\varepsilon^2\right)^{-1/2} <$$
$$< \left(1+2\varepsilon^2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2} \left(\tfrac32\delta\right)^{-1/2} = \widetilde{C}_5.$$

Если же, обратно, $c_\natural\varepsilon^2\geqslant 3\delta$, то нужная оценка очевидна из формулы (4.1):

$$\left\| (\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon))^\perp (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left\| (\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2} \right\| \leqslant \left(\tfrac13 c_*^{-1} c_\natural \delta^{-1}\right)^{1/2} = \widehat{C}_5.$$

Тем самым неравенство (4.8) доказано с константой $C_5 = \max\left\{\widetilde{C}_5, \widehat{C}_5\right\}$.

Далее, оценка (4.7) вытекает из (4.1) и (4.8) с учетом (3.39) и теоремы 3.12:

$$\begin{aligned}&\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}=\\&=\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\left((\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon))^\perp+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda(k;\varepsilon)\right)\right\|\leqslant\\&\leqslant c_*^{-1/2}C_1+C_5=C_6.\end{aligned}$$

Докажем теперь последнее неравенство. Согласно представлению (3.42), теореме 3.12 и определению (3.41) (если принять во внимание оценки усредненных коэффициентов (1.23), (1.24), (1.26) и (1.27)), при любом элементе $u\in L_2(\Omega)$

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u\right\|^2_{L_2(\Omega)}=\left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,u\right)_{L_2(\Omega)}\leqslant\\&\leqslant\left(\left(k^2+\varepsilon^2\right)\|\mathcal{S}_\lambda(k;\varepsilon)\mathcal{P}\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{3/2}\|\Psi_\lambda(k;\varepsilon)\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\\&\leqslant\left(k^2+\varepsilon^2\right)\left(\|g_1\|_\infty+\left(\|g_1\|_\infty\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\right)^{1/2}\|h_1\|_{2,\infty}+\right.\\&\qquad\left.+\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\|h_1\|^2_{2,\infty}+\|Q\|_{1,\infty}+\lambda\|Q_*\|_\infty+C_2\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}=\\&=\left(k^2+\varepsilon^2\right)C_7^2\|u\|^2_{L_2(\Omega)},\\&\qquad\qquad k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2,\ \varepsilon>0,\end{aligned}$$

из чего следует (4.9). ●

4.3. **Оценки с эффективным оператором.** Цель данного пункта состоит в дополнении оценок из пп. 4.1–4.2 неравенствами, включающими эффективный оператор. Базой нижеследующих рассуждений будет служить формула (2.12), которую преобразуем, применяя (1.23), к более удобному для приложения виду:

$$\begin{aligned}&b_\lambda^0(k;\varepsilon)[u,u]\geqslant\tfrac12\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|(\mathrm{D}_1+k)u\|^2_{L_2(\Omega)}+\tfrac12\varepsilon^2\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|\mathrm{D}_2u\|^2_{L_2(\Omega)}+\\&\qquad+\varepsilon^2(\lambda-\lambda_0)\left\|Q_*^{-1}\right\|_\infty^{-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega)},\\&\qquad u\in\widetilde{H}^1(\Omega),\ \langle k,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\pi)\times(0,1].\end{aligned}\tag{4.10}$$

Повторяя приемы, которые были использованы в доказательствах лемм 4.1 и 4.2, можно легко перенести фигурирующие в них оценки с исходного оператора на эффективный. Выведем еще одно неравенство с отображением $\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)$.

Пусть $u\in\mathcal{P}^\perp\widetilde{H}^1(\Omega)$, тогда $\mathcal{P}u=0$ и

$$\|(\mathrm{D}_1+k)u\|_{L_2(\Omega)}\geqslant\pi\|u\|_{L_2(\Omega)},\qquad k\in[-\pi,\pi)\tag{4.11}$$

(ср. с (4.3)). Комбинируя (4.10) и (4.11), приходим к соотношению

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant2\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty.$$

Тем самым установлена

Лемма 4.4. *Пусть* $\langle k,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\pi)\times(0,1]$. *Тогда*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant c_*^{-1}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1},\tag{4.12}$$

$$\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant2^{1/2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2},\tag{4.13}$$

$$\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant2^{1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2},\tag{4.14}$$

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant2\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty.\tag{4.15}$$

Благодаря тождеству (3.46), оценки вида (4.12) и (4.13) могут быть выписаны и для оператора $\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)$. Добавим к ним еще неравенство

$$\left\|(\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon))^\perp (\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} =$$
$$= \left\|\left(\mathcal{P}^\perp - \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\mathcal{P}\right\| =$$
$$= \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\left\|\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon)(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\mathcal{P}\right\| \leqslant c_*^{-1/2}C_1 = C_8,$$

которое получается из представления (3.39), теоремы 3.12 и оценки (4.16), и сформулируем итог.

Лемма 4.5. *При произвольных $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ имеют место неравенства:*

$$\left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1}, \tag{4.16}$$

$$\left\|\varepsilon \mathrm{D}_2(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}, \tag{4.17}$$

$$\left\|(\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon))^\perp(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_8; \tag{4.18}$$

постоянная C_8 определяется только по параметрам задачи.

Наконец, приведем утверждение об ограниченности композиций оператора, обратного к эффективному, и дифференцирования второго порядка.

Лемма 4.6. *При $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ выполнены оценки*

$$\left\|(\mathrm{D}_1+k)^2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty, \tag{4.19}$$

$$\left\|\varepsilon \mathrm{D}_2(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}, \tag{4.20}$$

$$\left\|\varepsilon^2\mathrm{D}_2^2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2C_9\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty; \tag{4.21}$$

константа C_9 зависит лишь от данных задачи.

Замечание. Корректность формулировки леммы 4.6 обусловливает совпадение области определения оператора $\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)$ с пространством $\widetilde{H}^2(\Omega)$.

○ Доказательство первых двух неравенств следует из перестановочности самосопряженных операторов $\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)$ и D_1 и леммы 4.4. Проверку последнего удобно отложить до следующего параграфа. ●

§ 5. Оценки коммутаторов

Настоящий параграф содержит несколько вспомогательных утверждений технического характера, касающихся оценок коммутаторов дифференцирования D_2 с оператором $(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}$ и спектральным проектором $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$. Существенную роль в доказательстве этих оценок играет ранее не использовавшееся условие гладкости коэффициентов по второй переменной.

5.1. **Исследование коммутатора операторов $(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}$ и D_2.** Начнем пункт с утверждения о частичном (по переменной x_2) повышении гладкости решения эллиптического уравнения

$$(\mathrm{D}_1+k)\,g_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u + \varepsilon^2\mathrm{D}_2 g_2(\mathbf{x})\mathrm{D}_2 u +$$
$$+\,\varepsilon h_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u + \varepsilon\,(\mathrm{D}_1+k)\,\overline{h_1(\mathbf{x})}u + \varepsilon^2 h_2(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u + \varepsilon^2\mathrm{D}_2\overline{h_2(\mathbf{x})}u +$$
$$+\,\varepsilon^2 Q(\mathbf{x})\,u + \varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\,u = f(\mathbf{x})$$

с периодическими граничными условиями при $f \in L_2(\Omega)$.

Лемма 5.1. *При условиях 1, 2, 3, 4 на коэффициенты из принадлежности функции и области $D(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))$ следуют включения*

$$u \in \widetilde{H}^1(\Omega),$$
$$\mathrm{D}_2 u \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Лемма 5.1 следует из условий гладкости коэффициентов указанного уравнения и их периодичности по второй переменной, а ее проверка аналогична доказательству [LaU, теорема 10.1, гл. III].

Лемма 5.2. *При $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, верны включение*

$$\overline{\left[\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\, \mathrm{D}_2\right]} \in \mathbf{B}\left(L_2\left(\Omega\right)\right)$$

и оценка

$$\left\|\left[\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\, \mathrm{D}_2\right]\mathcal{P}^{\perp}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{10}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1/2}; \tag{5.1}$$

постоянная C_{10} зависит только от исходных параметров задачи.

○ Сразу отметим, что поскольку операторы $\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}$ и D_2, рассматриваемый на области определения $L_2\left((0,\,1)\,;\,\widetilde{H}^1\,(0,\,a)\right)$, самосопряжены, а композиция $\mathrm{D}_2(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}$ — ограничена (леммы 4.1, 4.2), то коммутатор $\left[\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\, \mathrm{D}_2\right]$ допускает замыкание (но не замкнут).

Докажем его ограниченность. Для $u,\, v \in D\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)$, ввиду леммы 5.1, справедливы включения $\mathrm{D}_2 u,\, \mathrm{D}_2 v \in \widetilde{H}^1\,(\Omega)$, и

$$\begin{aligned}
&b_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[\mathrm{D}_2 u,\, v] - b_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[u,\, \mathrm{D}_2 v] = \\
&= \int\limits_\Omega \Big(g_1\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{(\mathrm{D}_1+k)\,v} + \varepsilon^2 g_2\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2^2 u \cdot \overline{\mathrm{D}_2 v} + \\
&\qquad + \varepsilon h_1\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{v} + \varepsilon \mathrm{D}_2 u \cdot \overline{h_1\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,v} + \\
&\qquad + \varepsilon^2 h_2\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2^2 u \cdot \overline{v} + \varepsilon^2 \mathrm{D}_2 u \cdot \overline{h_2\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 v} + \\
&\qquad\qquad + \varepsilon^2 Q\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{v} + \varepsilon^2 \lambda Q_*\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{v} \Big) d\mathbf{x} - \\
&- \int\limits_\Omega \Big(g_1\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u \cdot \overline{(\mathrm{D}_1+k)\,\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon^2 g_2\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{\mathrm{D}_2^2 v} + \\
&\qquad + \varepsilon h_1\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u \cdot \overline{\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon u \overline{h_1\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,\mathrm{D}_2 v} + \\
&\qquad + \varepsilon^2 h_2\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon^2 u \overline{h_2\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2^2 v} + \\
&\qquad\qquad + \varepsilon^2 Q\,(\mathbf{x})\,u\overline{\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon^2 \lambda Q_*\,(\mathbf{x})\,u\overline{\mathrm{D}_2 v} \Big) d\mathbf{x} = \\
&= - \int\limits_\Omega \Big((\mathrm{D}_2 g_1)\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u \cdot \overline{(\mathrm{D}_1+k)\,v} + \varepsilon^2\,(\mathrm{D}_2 g_2)\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{\mathrm{D}_2 v} + \\
&\qquad + \varepsilon\,(\mathrm{D}_2 h_1)\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,u \cdot \overline{v} - \varepsilon u \overline{(\mathrm{D}_2 h_1)\,(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1+k)\,v} + \\
&\qquad + \varepsilon^2\,(\mathrm{D}_2 h_2)\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u \cdot \overline{v} - \varepsilon^2 u \overline{(\mathrm{D}_2 h_2)\,(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 v} + \\
&\qquad\qquad + \varepsilon^2\,(\mathrm{D}_2 Q)\,(\mathbf{x})\,u\overline{v} + \varepsilon^2 \lambda\,(\mathrm{D}_2 Q_*)\,(\mathbf{x})\,u\overline{v} \Big) d\mathbf{x};
\end{aligned} \tag{5.2}$$

при интегрировании по частям были использованы периодичность коэффициентов по переменной x_2 и совпадение следов на гранях $\{x_2=0\}$ и $\{x_2=a\}$ функций u и v, $\mathrm{D}_2 u$ и $\mathrm{D}_2 v$ (последнее — в силу леммы 5.1). Доказанное равенство справедливо для функций $u = \left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi$ и $v = \left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi$ с φ и ψ из класса $C_0^\infty\,(\Omega)$. Левая его часть при этом примет вид

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi,\, \psi\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\varphi,\, \mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi\right)_{L_2(\Omega)} = \\
&\qquad = -\left(\overline{\left[\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\, \mathrm{D}_2\right]}\varphi,\, \psi\right)_{L_2(\Omega)};
\end{aligned}$$

правая же,

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_{\Omega}\Big(\left(\mathrm{D}_2 g_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1+k\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1+k\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}+\\
+\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2 g_2\right)(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}+\\
+\varepsilon\left(\mathrm{D}_2 h_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1+k\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}-\\
-\varepsilon\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_2 h_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1+k\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}+\\
+\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2 h_2\right)(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}-\\
-\varepsilon^2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_2 h_2\right)(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}+\\
+\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2 Q\right)(\mathbf{x})\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}+\\
+\varepsilon^2\lambda\left(\mathrm{D}_2 Q_*\right)(\mathbf{x})\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}\Big)d\mathbf{x},
\end{gathered}
\tag{5.3}
$$

станет полуторалинейным непрерывным функционалом от φ и ψ. Действительно, первые два и последнее слагаемые непрерывны в силу липшицевости коэффициентов (условия 1 и 3) и оценок из лемм 4.1 и 4.2. Далее, условие 2 и следствие 1.2 (при $f=\partial_2 h_j$) обеспечивают подчиненность операторов умножения на $\partial_2 h_j$, $j\in\{1,\,2\}$, оператору дифференцирования D_1+kI:

$$
\begin{gathered}
\left\|\left(\partial_2 h_j\right)u\right\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\left\|\partial_2 h_j\right\|^2_{2,\,\infty}\left(\left\|\left(\mathrm{D}_1+k\right)u\right\|^2_{L_2(\Omega)}+2\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right),\\
u\in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),\;k\in\mathbb{R}.
\end{gathered}
\tag{5.4}
$$

Вместе с неравенствами (4.1), (4.4) и (4.6) это доказывает ограниченность слагаемых, возникших из членов первого порядка. Наконец, непрерывность предпоследнего слагаемого получается из условия 2, формул (4.1), (4.4) и оценки

$$
\begin{gathered}
\left\|\left|\partial_2 Q\right|^{1/2}u\right\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\left\|\partial_2 Q\right\|_{1,\,\infty}\left(\left\|\left(\mathrm{D}_1+k\right)u\right\|^2_{L_2(\Omega)}+2\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right),\\
u\in L_2\left((0,\,a)\,;\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right),\;k\in\mathbb{R},
\end{gathered}
\tag{5.5}
$$

основанной на следствии 1.2 (с $f=\left|\partial_2 Q\right|^{1/2}$). Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\overline{\left[\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\,\mathrm{D}_2\right]}=&\left(\left(\mathrm{D}_1+k\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right)^*\left(\mathrm{D}_2 g_1\right)\left(\mathrm{D}_1+k\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}+\\
&+\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right)^*\left(\mathrm{D}_2 g_2\right)\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}+\\
&+\varepsilon\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\left(\mathrm{D}_2 h_1\right)\left(\mathrm{D}_1+k\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}-\\
&-\varepsilon\left(\left(\mathrm{D}_1+k\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right)^*\left(\mathrm{D}_2 h_1\right)^*\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}+\\
&+\varepsilon^2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\left(\mathrm{D}_2 h_2\right)\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}-\\
&-\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right)^*\left(\mathrm{D}_2 h_2\right)^*\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}+\\
&+\varepsilon^2\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\left(\mathrm{D}_2 Q\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}+\\
&+\varepsilon^2\lambda\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\left(\mathrm{D}_2 Q_*\right)\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

при $\langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$ есть ограниченный в $L_2(\Omega)$ оператор.

Полученное представление позволяет установить и неравенство (5.1): из (5.6) в композиции с $\mathcal{P}^{\perp}$ и оценок (5.4) и (5.5) вытекает, что

$$\begin{gathered}
\left\|\left[(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}, \mathrm{D}_2\right]\mathcal{P}^{\perp}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\| \left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\mathcal{P}^{\perp}\right\| \times \\
\times \Bigg(\|\partial_2 g_1\|_\infty \left\|(\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\|^2 + \|\partial_2 g_2\|_\infty \left\|\varepsilon \mathrm{D}_2(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\|^2 + \\
+ 2\varepsilon\left(\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left\|(\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\| + \|\partial_2 h_2\|_{2,\infty}\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\|\right) \times \\
\times \left(\left\|(\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\| + 2^{1/2}\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\|\right) + \\
+ \varepsilon^2\|\partial_2 Q\|_{1,\infty}\left(\left\|(\mathrm{D}_1+k)(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\|^2 + 2\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\|^2\right) + \\
+ \varepsilon^2\lambda\|\partial_2 Q_*\|_\infty \left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1/2}\right\|^2\Bigg).
\end{gathered}$$

Тогда леммы 4.1, 4.2 и 4.3 приводят к требуемой оценке:

$$\begin{gathered}
\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\left\|\left[(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon))^{-1}, \mathrm{D}_2\right]\mathcal{P}^{\perp}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \\
\leqslant 2c_*^{-1/2}C_6\left(\|g_1^{-1}\|_\infty\|\partial_2 g_1\|_\infty + \|g_2^{-1}\|_\infty\|\partial_2 g_2\|_\infty\right) + \\
+ 4c_*^{-1/2}C_6\left(c_*^{-1/2} + \|g_1^{-1}\|_\infty^{1/2}\right)\left(\|g_1^{-1}\|_\infty^{1/2}\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty} + \|g_2^{-1}\|_\infty^{1/2}\|\partial_2 h_2\|_{2,\infty}\right) + \\
+ 2c_*^{-1/2}C_6\|\partial_2 Q\|_{1,\infty}\left(c_*^{-1} + \|g_1^{-1}\|_\infty\right) + c_*^{-3/2}C_6\lambda\|\partial_2 Q_*\|_\infty = C_{10}.
\end{gathered}$$

●

Несложно видеть, что утверждение леммы 5.2 справедливо и для эффективного оператора. В частности, имеет место представление вида (5.6) с эффективным оператором и усредненными коэффициентами. Данный факт используется для завершения доказательства леммы **4.6**.

Окончание доказательства леммы 4.6. Чтобы завершить проверку леммы 4.6, необходимо установить неравенство (4.21) с оператором $\varepsilon^2\mathrm{D}_2^2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}$. Запишем для этого сужение последнего на $C_0^\infty(\Omega)$ в виде

$$\varepsilon^2\mathrm{D}_2^2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1} = -\varepsilon^2\mathrm{D}_2\left[\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}, \mathrm{D}_2\right] + \varepsilon^2\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathrm{D}_2.$$

Первое слагаемое может быть оценено благодаря представлению коммутатора $\left[\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}, \mathrm{D}_2\right]$ вида (5.6) и лемме 4.4:

$$\begin{gathered}
\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left[\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}, \varepsilon\mathrm{D}_2\right]\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \varepsilon\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\| \times \\
\times \Bigg(\|\partial_2 g_1^0\|_\infty\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 + \|\partial_2 g_2^0\|_\infty\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 + \\
+ 2\varepsilon\|\partial_2 h_1^0\|_\infty\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\| + \\
+ 2\varepsilon\|\partial_2 h_2^0\|_\infty\left\|\varepsilon\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\| + \\
+\varepsilon^2\left(\|\partial_2 Q^0\|_\infty + \lambda\|\partial_2 Q_*^0\|_\infty\right)\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\Bigg) \leqslant \\
\leqslant 2^{3/2}c_*^{-1/2}\|g_2^{-1}\|_\infty^{1/2}\left(\|g_1^{-1}\|_\infty\|\partial_2 g_1^0\|_\infty + \|g_2^{-1}\|_\infty\|\partial_2 g_2^0\|_\infty\right) + \\
+ 4c_*^{-1}\|g_2^{-1}\|_\infty^{1/2}\left(\|g_1^{-1}\|_\infty^{1/2}\|\partial_2 h_1^0\|_\infty + \|g_2^{-1}\|_\infty^{1/2}\|\partial_2 h_2^0\|_\infty\right) + \\
+ 2^{1/2}c_*^{-3/2}\|g_2^{-1}\|_\infty^{1/2}\left(\|\partial_2 Q^0\|_\infty + \lambda\|\partial_2 Q_*^0\|_\infty\right) = \widetilde{C}_9;
\end{gathered}$$

второе — на основании леммы 4.4:

$$\left\|\varepsilon \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}^0_\lambda (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} \varepsilon \mathrm{D}_2\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left\|\varepsilon \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}^0_\lambda (k;\, \varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \leqslant 2 \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty = \widehat{C}_9.$$

Тогда (4.21) выполнено с постоянной $C_9 = \frac{1}{2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{-1}\left(\widetilde{C}_9 + \widehat{C}_9\right)$. Лемма доказана полностью. ●

5.2. **Исследование коммутатора операторов $\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)$ и D_2.** Пусть Γ — контур в $\mathbb{C}$, который определен следующим образом:

$$\Gamma = \Big\{z \in \mathbb{C}\colon\ \operatorname{dist}\{z,\, [0,\, \delta]\} = \delta\Big\}. \tag{5.7}$$

При $z \in \Gamma$ введем обозначение $\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\, z} (k;\, \varepsilon) = \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda (k;\, \varepsilon) - zI\right)$.

Для вычисления второго коммутатора будем пользоваться утверждением о дифференцировании по параметру x_2 решения уравнения

$$\begin{gathered}(\mathrm{D}_1 + k)\, g_1 (x_1,\, x_2)\, (\mathrm{D}_1 + k)\, u + \\ + \varepsilon h_1 (x_1,\, x_2)\, (\mathrm{D}_1 + k)\, u + \varepsilon\, (\mathrm{D}_1 + k)\, \overline{h_1 (x_1,\, x_2)} u + \\ + \varepsilon^2 Q (x_1,\, x_2)\, u + \varepsilon^2 \lambda Q_* (x_1,\, x_2)\, u - zu = \varphi (x_1,\, x_2)\end{gathered}$$

с периодическими граничными условиями при гладкой финитной правой части и $z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}$.

Лемма 5.3. *Пусть $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $\varphi \in C_0^\infty (\Omega)$ и $z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}$ функция $u = \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\, z} (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} \varphi$ имеет обобщенную производную $\mathrm{D}_2 u$, причем $\mathrm{D}_2 u \in L_2 \left((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1 (0,\, 1)\right)$.*

Доказательство леммы приведено в приложении A.

Стоит отметить, что при $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, согласно лемме 3.11, интервал $(\delta,\, 3\delta]$ не содержит точек спектра $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda (k;\, \varepsilon)$, а следовательно,

$$\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\, z} (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \delta^{-1}, \qquad k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2,\ \varepsilon > 0,\ z \in \Gamma. \tag{5.8}$$

Кроме того, для спектрального проектора $\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)$ верно представление в виде интеграла от резольвенты оператора $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda (k;\, \varepsilon)$ в точке z по контуру Γ:

$$\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\, z} (k;\, \varepsilon)\right)^{-1} dz. \tag{5.9}$$

Лемма 5.4. *При $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, справедливо включение*

$$\overline{\left[\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)\,,\, \mathrm{D}_2\right]} \in \mathbf{B} \left(L_2 (\Omega)\right),$$

притом выполнены оценки

$$\left\|\left[\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)\,,\, \mathrm{D}_2\right]\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{11}, \tag{5.10}$$

$$\left\|\left[\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)\,,\, \mathrm{D}_2\right] \mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left(k^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2} C_{12}, \tag{5.11}$$

постоянные C_{11}, C_{12} в которых зависят только от исходных данных задачи.

○ Коммутатор $\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)$ и D_2 допускает замыкание. Благодаря представлению (5.9) для доказательства непрерывности оператора $\left[\mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon)\,,\, \mathrm{D}_2\right]$ достаточно установить равномерную ограниченность коммутатора резольвенты $\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\, z} (k;\, \varepsilon)\right)^{-1}$ с дифференцированием D_2 при $z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}$.

Пусть u, v — функции из области $L_2 \left((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1 (0,\, 1)\right)$, равные нулю в окрестности множества $\{x_2 = 0\} \cup \{x_2 = a\}$ и обладающие обобщенными производными $\mathrm{D}_2 u$, $\mathrm{D}_2 v$ класса $L_2 \left((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1 (0,\, 1)\right)$. При данном выборе u, v интегрирование по частям (по переменной x_2)

обеспечивает справедливость равенства

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_{\lambda}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\left[\mathrm{D}_2 u,\, v\right] - z\left(\mathrm{D}_2 u,\, v\right)_{L_2(\Omega)} - \mathfrak{a}_{\lambda}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\left[u,\, \mathrm{D}_2 v\right] + z\left(u,\, \mathrm{D}_2 v\right)_{L_2(\Omega)} = \\
&= \int\limits_{\Omega}\Big(g_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right)\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1 + k\right) v} + \\
&\qquad + \varepsilon h_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right)\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{v} + \varepsilon\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{h_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right) v} + \\
&\qquad\qquad + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{v} + \varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{v}\Big) d\mathbf{x} - \\
&- \int\limits_{\Omega}\Big(g_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right) u\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1 + k\right)\mathrm{D}_2 v} + \\
&\qquad + \varepsilon h_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right) u\cdot\overline{\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon u\overline{h_1(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right)\mathrm{D}_2 v} + \\
&\qquad\qquad + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x})\, u\overline{\mathrm{D}_2 v} + \varepsilon^2\lambda Q_*(\mathbf{x})\, u\overline{\mathrm{D}_2 v}\Big) d\mathbf{x} - \\
&- z\int\limits_{\Omega}\mathrm{D}_2 u\cdot\overline{v} d\mathbf{x} + z\int\limits_{\Omega} u\overline{\mathrm{D}_2 v} d\mathbf{x} = \\
&= -\int\limits_{\Omega}\Big(\left(\mathrm{D}_2 g_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right) u\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1 + k\right) v} + \varepsilon\left(\mathrm{D}_2 h_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right) u\cdot\overline{v} - \\
&\qquad - \varepsilon u\overline{\left(\mathrm{D}_2 h_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right) v} + \varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2 Q\right)(\mathbf{x})\, u\overline{v} + \varepsilon^2\lambda\left(\mathrm{D}_2 Q_*\right)(\mathbf{x})\, u\overline{v}\Big) d\mathbf{x}.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

В качестве u, v возьмем функции $u = \left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi$, $v = \left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi$ с $\varphi,\,\psi\in$ $\in C_0^{\infty}(\Omega)$: финитность по переменной x_2 очевидна, а существование по ней производных класса $L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)$ следует из леммы 5.3. Левая часть (5.12) при подстановке таких u, v окажется полуторалинейной формой замыкания коммутатора от элементов φ, ψ:

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathrm{D}_2\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi,\,\psi\right)_{L_2(\Omega)} - \left(\varphi,\,\mathrm{D}_2\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi\right)_{L_2(\Omega)} = \\
&\qquad = -\left(\overline{\left[\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\,\mathrm{D}_2\right]}\varphi,\,\psi\right)_{L_2(\Omega)};
\end{aligned}
$$

а правая, вследствие предположений о гладкости коэффициентов (условия 1, 2, 3) и оценок (5.4), (5.5) и (5.8) и леммы 4.2, станет непрерывным полуторалинейным функционалом от φ, ψ и примет вид

$$
\begin{aligned}
&-\int\limits_{\Omega}\Big(\left(\mathrm{D}_2 g_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right)\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_1 + k\right)\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi} + \\
&\qquad + \varepsilon\left(\mathrm{D}_2 h_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right)\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi} - \\
&\qquad - \varepsilon\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathrm{D}_2 h_1\right)(\mathbf{x})\left(\mathrm{D}_1 + k\right)\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi} + \\
&\qquad + \varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2 Q\right)(\mathbf{x})\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi} + \\
&\qquad\qquad + \varepsilon^2\lambda\left(\mathrm{D}_2 Q_*\right)(\mathbf{x})\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\varphi\cdot\overline{\left(\mathcal{A}_{\lambda,\,z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\psi}\Big) d\mathbf{x}.
\end{aligned}
$$

Поэтому для замыкания коммутатора верно представление

$$\begin{aligned}
&\overline{\left[\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}, \mathrm{D}_2\right]} = \\
&\quad = \left((\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right)^* (\mathrm{D}_2 g_1)(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} + \\
&\qquad + \varepsilon\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\overline{z}}(k;\varepsilon)\right)^{-1}(\mathrm{D}_2 h_1)(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} - \\
&\qquad - \varepsilon\left((\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right)^* (\mathrm{D}_2 h_1)^*\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} + \\
&\qquad + \varepsilon^2\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\overline{z}}(k;\varepsilon)\right)^{-1}(\mathrm{D}_2 Q)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1} + \\
&\qquad + \varepsilon^2\lambda\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\overline{z}}(k;\varepsilon)\right)^{-1}(\mathrm{D}_2 Q_*)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}. \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

Это представление, условия 1, 2, 3, оценки (5.4), (5.5) и (5.8), а также лемма 4.2 приводят к неравенству

$$\begin{aligned}
&\left\|\left[\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}, \mathrm{D}_2\right]\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \\
&\quad \leqslant \|\partial_2 g_1\|_\infty \left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 + \\
&\quad + 2\varepsilon\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 + \\
&\quad + 2^{3/2}\varepsilon\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\| \times \\
&\qquad \times \left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\| \left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\| + \\
&\quad + \varepsilon^2\|\partial_2 Q\|_{1,\infty}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda}(k;\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 + \\
&\quad + 2\varepsilon^2\|\partial_2 Q\|_{1,\infty}\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 + \varepsilon^2\lambda\|\partial_2 Q_*\|_\infty\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,z}(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 \leqslant \\
&\quad \leqslant 2(c_1(\delta))^2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\|\partial_2 g_1\|_\infty + 4c_1(\delta)\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\|\partial_2 h_1\|_{2,\infty}\left(c_1(\delta)\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2} + \delta^{-1}\right) + \\
&\quad + 2\|\partial_2 Q\|_{1,\infty}\left((c_1(\delta))^2\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty + \delta^{-2}\right) + \delta^{-2}\lambda\|\partial_2 Q_*\|_\infty = \widetilde{C}_{11}, \\
&\qquad\qquad z \in \Gamma\setminus\mathbb{R},
\end{aligned}$$

где было введено обозначение

$$c_1(\delta) = \max\left\{\frac{s^{1/2}}{|s-z|} : s\in[0,\delta]\cup[3\delta,\infty],\ z\in\Gamma\right\}.$$

А тогда из формулы (5.9) для спектрального проектора вытекает следующий результат:

$$\|[\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon), \mathrm{D}_2]\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \tfrac{2\delta+2\pi\delta}{2\pi}\widetilde{C}_{11} = C_{11}.$$

Перейдем к доказательству второй оценки. Из соотношения (5.13) и неравенств (5.4) и (5.5) получаем:

$$\begin{aligned}
&\left\| \left[\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\, \mathrm{D}_2 \right] \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \\
&\leqslant \|\partial_2 g_1\|_\infty \left\| (\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2} \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \right\| \times \\
&\quad \times \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \right\| \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2} \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) \right\| + \\
&+ 2\varepsilon \|\partial_2 h_1\|_{2,\,\infty} \left\| (\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2} \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \right\|^2 + \\
&+ 2^{3/2}\varepsilon \|\partial_2 h_1\|_{2,\,\infty} \left\| (\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\| \times \\
&\quad \times \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2} \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \right\| \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \right\| + \\
&+ \varepsilon^2 \|\partial_2 Q\|_{1,\,\infty} \left\| (\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2} \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \right\|^2 + \\
&+ 2\varepsilon^2 \|\partial_2 Q\|_{1,\,\infty} \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \right\|^2 + \varepsilon^2\lambda \|\partial_2 Q_*\|_\infty \left\| \left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1} \right\|^2, \\
&\hfill z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Продолжим эту оценку, используя леммы 4.2 и 4.3 и неравенство (5.8):

$$\begin{aligned}
&\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1/2} \left\| \left[\left(\mathcal{A}^{(1)}_{\lambda,\,z}(k;\,\varepsilon)\right)^{-1},\, \mathrm{D}_2 \right] \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \\
&\leqslant 2c_1(\delta)\,\delta^{-1} C_7 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \|\partial_2 g_1\|_\infty + \\
&\quad + 4c_1(\delta) \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2} \|\partial_2 h_1\|_{2,\,\infty} \left(c_1(\delta) \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2} + \delta^{-1} \right) + \\
&\quad + 2\|\partial_2 Q\|_{1,\,\infty} \left((c_1(\delta))^2 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty + \delta^{-2} \right) + \delta^{-2}\lambda \|\partial_2 Q_*\|_\infty = \widetilde{C}_{12}, \\
&\hfill z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Тем самым формула (5.11) доказана с константой $C_{12} = \frac{2\delta+2\pi\delta}{2\pi}\widetilde{C}_{12}$. ●

5.3. **$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$-инвариантность $\widetilde{H}^1(\Omega)$.** В заключение данного параграфа приведем утверждение об инвариантности пространства $\widetilde{H}^1(\Omega)$ относительно действия проектора $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$.

Лемма 5.5. *При $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi) \times (0,\,1]$ имеет место включение*

$$\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\widetilde{H}^1(\Omega) \subset \widetilde{H}^1(\Omega).$$

○ Пусть $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Тогда $u \in L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right) = D\left[a^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right]$, а следовательно, $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u \in L_2\left((0,\,a);\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\right)$, то есть при п. в. $x_2 \in (0,\,a)$ существует обобщенная производная $\mathrm{D}_1\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$ из класса $L_2(\Omega)$ и следы $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$ на гранях $\{x_1=0\}$ и $\{x_1=1\}$ совпадают. Поскольку

$$\mathrm{D}_2\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u\right) = \mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathrm{D}_2 u + \left[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right] u,$$

то существует и обобщенная производная $\mathrm{D}_2\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$, принадлежащая, на основании оценки (5.10), пространству $L_2(\Omega)$. Наконец, периодические граничные условия по переменной x_2 для $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u$ вытекают из периодичности функции u и коэффициентов оператора $\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ по второму аргументу (условия 1, 2, 3) и разложения в прямой интеграл (3.31) спектрального проектора $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$. ●

§ 6. Старший член аппроксимации оператора $\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}$

Здесь приведено доказательство первой оценки теоремы 2.2. Последовательной редукцией эта оценка преобразуется к соотношению, включающему только исходный оператор и его спектральный росток — при условии $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, после чего проверка требуемого неравенства может быть основана на абстрактном утверждении, модификации [Su1, лемма 7.1].

6.1. **Сведение к спектральному ростку.**

Теорема 6.1. *Пусть из предположений теоремы 2.2 при* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, *вытекает неравенство*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1} - \left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \widehat{C}\varepsilon^{-1}$$

с постоянной $\widehat{C}$, *зависящей от исходных данных задачи* (1.18). *Тогда при всех* $\langle k,\varepsilon\rangle \in$ $\in [-\pi,\pi)\times(0,1]$ *выполнена оценка*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C\varepsilon^{-1},$$

константа C *в которой определена по данным задачи.*

○ Для оператора $\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)$ определим по описанному выше принципу росток $\mathcal{S}_\lambda^0(k;\varepsilon)$. Из правил вычисления эффективных коэффициентов видно, что $\left(g_j^0\right)^0 = g_j^0$, $\left(h_j^0\right)^0 = h_j^0$ $(j\in\{1,2\})$, $\left(Q^0\right)^0 = Q^0$, $\left(Q_*^0\right)^0 = Q_*^0$, а потому $\mathcal{S}_\lambda^0(k;\varepsilon) = \mathcal{S}_\lambda(k;\varepsilon)$ и $\mathcal{L}_\lambda^0(k;\varepsilon) = \mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)$. При этом, ввиду оценок (1.23), параметр d_0 (см. (3.21)), а вместе с ним и δ (см. (3.22)), подходит как для исходного оператора, так и для усредненного. Кроме того, число τ_0^0, введенное для $\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)$ по аналогии с (3.23), оказывается, как и τ_0, меньше единицы. Поэтому из условия настоящей теоремы, примененной к операторам $\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)$ и $\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)$, вытекают справедливые при $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \widehat{\tau}^2 = \min\left\{\tau_0^2, \left(\tau_0^0\right)^2\right\}$, $\varepsilon > 0$, неравенства

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1} - \left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \widehat{C}\varepsilon^{-1},$$

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1} - \left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \widehat{C}^0\varepsilon^{-1},$$

в которых постоянные $\widehat{C}$, $\widehat{C}^0$ зависят только от исходных данных задачи. Таким образом,

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1} - \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left(\widehat{C}+\widehat{C}^0\right)\varepsilon^{-1},$$
$$k^2+\varepsilon^2 \leqslant \widehat{\tau}^2,\ \varepsilon > 0. \tag{6.1}$$

С другой стороны, если $k^2+\varepsilon^2 > \widehat{\tau}^2$, $\langle k,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\pi)\times(0,1]$, то леммы 4.1 и 4.4 влекут оценки

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} < c_*^{-1}\widehat{\tau}^{-1}\varepsilon^{-1}, \tag{6.2}$$

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\varepsilon)\right)^{-1}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} < c_*^{-1}\widehat{\tau}^{-1}\varepsilon^{-1}. \tag{6.3}$$

Теперь неравенство (2.16) следует из (6.1), (6.2) и (6.3) с константой $C = \max\left\{\widehat{C}+\widehat{C}^0, 2c_*^{-1}\widehat{\tau}^{-1}\right\}$, зависящей, как видно из определений входящих в нее величин, лишь от исходных параметров задачи. ●

Введем в пространстве $L_2(\Omega)$ ограниченный оператор $\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$:

$$\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon) = \left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P} - \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}. \tag{6.4}$$

Леммы 4.1, 4.3 и 4.5 тогда приводят к соотношению

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1} - \left(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1/2}\left(C_6+C_8\right)\varepsilon^{-1} + \left\|\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))},$$

которое означает, что для удовлетворения условию теоремы 6.1 необходимо соответствующим образом оценить $\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$.

Теорема 6.2. *Пусть* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, *а оператор* $\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$ *определен в* (6.4). *Тогда*

$$\left\|\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{14}\varepsilon^{-1};$$

константа C_{14} *зависит только от исходных данных задачи* (1.18).

6.2. **Доказательство теоремы 6.2.**

Абстрактное утверждение. Обсудим специальный вопрос, касающийся возможности факторизации оператора $\mathcal{J}_\lambda(k;\varepsilon)$ при условии $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. Существенную роль в его решении играет следующее утверждение абстрактного характера.

Лемма 6.3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство и $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ — ортогональные проекторы в этом пространстве. Пусть $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$ — две замкнутые положительно определенные полуторалинейные формы, заданные на плотных множествах в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ соответственно. Через $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ обозначим самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$, отвечающие формам $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1°. $D[\mathfrak{t}_2] \subset D[\mathfrak{t}_1]$;
2°. $\mathfrak{P}D[\mathfrak{t}_1] \subset D[\mathfrak{t}_2]$;
3°. $\mathfrak{Q}D[\mathfrak{t}_1] \subset D[\mathfrak{t}_1]$;
4°. *Верно представление*

$$\mathfrak{t}_2[u,\,\mathfrak{P}v] - \mathfrak{t}_1[\mathfrak{Q}u,\,v] = (\mathfrak{G}_0 u,\,\mathfrak{G}v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}, \qquad u \in D(\mathfrak{T}_2),\, v \in D(\mathfrak{T}_1), \tag{6.5}$$

в котором $\mathfrak{G}\colon \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{G}_0\colon \mathfrak{P}\mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенные линейные операторы, действующие из $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ в некоторое сепарабельное комплексное гильбертово пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$, причем $D(\mathfrak{T}_1) \subset D(\mathfrak{G})$, $D(\mathfrak{T}_2) \subset D(\mathfrak{G}_0)$ и $\mathfrak{G}\mathfrak{T}_1^{-1} \in \mathbf{B}\left(\mathfrak{H},\,\widetilde{\mathfrak{H}}\right)$, $\mathfrak{G}_0\mathfrak{T}_2^{-1} \in \mathbf{B}\left(\mathfrak{P}\mathfrak{H},\,\widetilde{\mathfrak{H}}\right)$.

Тогда справедливо тождество

$$\mathfrak{T}_1^{-1}\big|_{\mathfrak{P}\mathfrak{H}} - \mathfrak{Q}\mathfrak{T}_2^{-1} = \left(\mathfrak{G}\mathfrak{T}_1^{-1}\right)^* \left(\mathfrak{G}_0\mathfrak{T}_2^{-1}\right). \tag{6.6}$$

○ Рассмотрим элементы $u = \mathfrak{T}_2^{-1}\varphi$, $v = \mathfrak{T}_1^{-1}\psi$ с произвольными $\varphi \in \mathfrak{P}\mathfrak{H}$, $\psi \in \mathfrak{H}$. Тогда равенство 4° с такими u, v сразу приводит к (6.6). ●

Применение леммы 6.3. Пусть $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. Воспользуемся леммой 6.3 при $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{P} = \mathcal{P}$, $\mathfrak{Q} = \mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)$ и

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}_1 &= \mathscr{b}_\lambda(k;\varepsilon), & D[\mathfrak{t}_1] &= D\left[\mathscr{b}_\lambda(k;\varepsilon)\right] = \widetilde{H}^1(\Omega),\\
\mathfrak{T}_1 &= \mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon), & D(\mathfrak{T}_1) &= D(\mathcal{B}_\lambda(k;\varepsilon)) \subset \widetilde{H}^1(\Omega),\\
\mathfrak{t}_2 &= \mathscr{l}_\lambda(k;\varepsilon), & D[\mathfrak{t}_2] &= D\left[\mathscr{l}_\lambda(k;\varepsilon)\right] \simeq \widetilde{H}^1(0,\,a),\\
\mathfrak{T}_2 &= \mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon), & D(\mathfrak{T}_2) &= D(\mathcal{L}_\lambda(k;\varepsilon)) \simeq \widetilde{H}^2(0,\,a).
\end{aligned}$$

Для этого достаточно проверить условие 4°: условия 1°, 2°, очевидно, выполнены, а 3° прямо следует из леммы 5.5.

Обозначим через $\mathfrak{I}[u,\,v]$ левую часть (6.5) при $u \in \widetilde{H}^2(0,\,a)$, $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Тогда

$$\mathfrak{I}[u,\,v] = \mathscr{l}_\lambda(k;\varepsilon)[u,\,\mathcal{P}v] - \mathscr{b}_\lambda(k;\varepsilon)[\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,v] = \mathfrak{I}_1[u,\,v] + \mathfrak{I}_2'[u,\,v], \tag{6.7}$$

где формы $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{I}_2'$, в согласии с (2.8), (3.1), (3.41) и (3.44), имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1[u,\,v] &= \left(k^2+\varepsilon^2\right)(\mathcal{S}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,\mathcal{P}v)_{L_2(0,\,a)} - \left(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\varepsilon)\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,v\right)_{L_2(\Omega)},\\
\mathfrak{I}_2'[u,\,v] &= \varepsilon^2\left(g_2^0\mathrm{D}_2u,\,\mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)} - \varepsilon^2\left(g_2\mathrm{D}_2\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,\mathrm{D}_2v\right)_{L_2(\Omega)} +\\
&+ \varepsilon^2\left(h_2^0\mathrm{D}_2u,\,\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)} - \varepsilon^2\left(h_2\mathrm{D}_2\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,v\right)_{L_2(\Omega)} +\\
&+ \varepsilon^2\left(u,\,h_2^0\mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)} - \varepsilon^2\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,h_2\mathrm{D}_2v\right)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Используя равенства

$$\begin{aligned}
\left(u,\,h_2^0\mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)} &= \left(\mathrm{D}_2\left(h_2^0\right)^* u,\,\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)},\\
\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,h_2\mathrm{D}_2v\right)_{L_2(\Omega)} &= \left(\mathrm{D}_2h_2^*\mathcal{F}_\lambda(k;\varepsilon)u,\,v\right)_{L_2(\Omega)},
\end{aligned}$$

представим форму $\mathfrak{I}_2'$ в виде суммы пяти слагаемых:

$$\mathfrak{I}_2' = \sum_{j=2}^{6}\mathfrak{I}_j. \tag{6.8}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{I}_2\,[u,\,v] = -\varepsilon^2\left(g_2\mathrm{D}_2\left(\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon) - \mathcal{P}\right)u,\,\mathrm{D}_2 v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\mathfrak{I}_3\,[u,\,v] = \varepsilon^2\left(g_2^0\mathrm{D}_2 u,\,\mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)} - \varepsilon^2\left(g_2\mathrm{D}_2 u,\,\mathrm{D}_2 v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\mathfrak{I}_4\,[u,\,v] = \varepsilon^2\left(\left(h_2^0 + \left(h_2^0\right)^*\right)\mathrm{D}_2 u,\,\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)} + \varepsilon^2\left(\mathcal{P}^\perp\left(h_2 + h_2^*\right)\mathrm{D}_2 u,\,v\right)_{L_2(\Omega)} -\\
&\qquad\qquad - \varepsilon^2\left(\left(h_2 + h_2^*\right)\mathrm{D}_2\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,u,\,v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\mathfrak{I}_5\,[u,\,v] = -\varepsilon^2\left(u,\,\left(\mathrm{D}_2 h_2^0\right)\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)} - \varepsilon^2\left(u,\,\left(\mathrm{D}_2 h_2\right)\mathcal{P}^\perp v\right)_{L_2(\Omega)} +\\
&\qquad\qquad + \varepsilon^2\left(\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,u,\,\left(\mathrm{D}_2 h_2\right)v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\mathfrak{I}_6\,[u,\,v] = -\varepsilon^2\left(\left(h_2\mathrm{D}_2 + \mathrm{D}_2 h_2^*\right)u,\,\mathcal{P}^\perp v\right)_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Форма $\mathfrak{I}_1$. Согласно (3.42), верно равенство

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1\,[u,\,v] = -\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{3/2}\left(u,\,\Psi_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(G_{01}u,\,G_1 v\right)_{L_2(\Omega)},&\\
u \in \widetilde{H}^2\,(0,\,a)\,,\; v \in \widetilde{H}^1\,(\Omega)\,,&
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

в котором были введены непрерывные операторы $G_{01} = -(k^2+\varepsilon^2)^{3/4} I_{L_2(0,\,a)}$, $G_1 = (k^2+\varepsilon^2)^{3/4}\Psi_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$. Из теоремы 3.12 и лемм 4.1, 4.5 вытекают следующие оценки:

$$
\left\|G_{01}\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1/4} = \check{C}_{01}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1/4}, \tag{6.10}
$$

$$
\left\|G_1\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant c_*^{-1/2} C_2\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/4} = \check{C}_1\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/4}. \tag{6.11}
$$

Форма $\mathfrak{I}_2$. Определим операторы $G_{02} = -\varepsilon^{1/2}\mathrm{D}_2\left(\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon) - \mathcal{P}\right)$ и $G_2 = \varepsilon^{3/2} g_2\mathrm{D}_2$ на областях $D\,(G_{02}) \simeq H^1\,(0,\,a)$ и $D\,(G_2) = L_2\left((0,\,1)\,;\,H^1\,(0,\,a)\right)$ и перепишем с их помощью форму $\mathfrak{I}_2$:

$$
\mathfrak{I}_2\,[u,\,v] = \left(G_{02}u,\,G_2 v\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad u \in \widetilde{H}^2\,(0,\,a)\,,\; v \in \widetilde{H}^1\,(\Omega)\,. \tag{6.12}
$$

Принимая во внимание (3.39), представим оператор G_{02} суммой трех слагаемых:

$$
\begin{aligned}
G_{02} = &-\varepsilon^{1/2}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,\mathrm{D}_2 - \varepsilon^{1/2}\left[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right]\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon) -\\
&- \varepsilon^{1/2}\left[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right]\left(\mathcal{F}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^\perp.
\end{aligned}
$$

Тогда из теоремы 3.12 и лемм 4.5 и 5.4 следует:

$$
\begin{aligned}
&\left\|G_{02}\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant\\
&\qquad \leqslant c_*^{-1/2}\left(2^{1/2}C_1\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2} + c_*^{-1/2}C_{12} + C_8 C_{11}\right)\varepsilon^{-1/2} = \check{C}_{02}\varepsilon^{-1/2}.
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Оценка

$$
\left\|G_2\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant 2^{1/2}\left\|g_2\right\|_\infty\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\varepsilon^{1/2} = \check{C}_2\varepsilon^{1/2} \tag{6.14}
$$

получается из леммы 4.2.

Форма $\mathfrak{I}_3$. Заметим, что, по определению (1.22) коэффициента g_2^0, оператор умножения в пространстве $\mathfrak{N}$ на функцию g_2^0 имеет вид $g_2^0 = \mathcal{P}g_2|_{\mathfrak{N}}$. Это обстоятельство позволяет упростить выражение, задающее форму $\mathfrak{I}_3$:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}_3\,[u,\,v] &= \varepsilon^2\left(g_2^0\mathrm{D}_2 u,\,\mathrm{D}_2\mathcal{P}v\right)_{L_2(0,\,a)} - \varepsilon^2\left(g_2\mathrm{D}_2 u,\,\mathrm{D}_2\left(\mathcal{P}+\mathcal{P}^\perp\right)v\right)_{L_2(\Omega)} =\\
&= -\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2 g_2\mathrm{D}_2 u,\,\mathcal{P}^\perp v\right)_{L_2(\Omega)} = \left(G_{03}u,\,G_3 v\right)_{L_2(\Omega)},\\
&\qquad\qquad u \in \widetilde{H}^2\,(0,\,a)\,,\; v \in \widetilde{H}^1\,(\Omega)\,,
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

где $G_{03} = -\varepsilon^{3/2}\mathrm{D}_2 g_2\mathrm{D}_2$, $D\,(G_{03}) \simeq H^2\,(0,\,a)$, а $G_3 = \varepsilon^{1/2}\mathcal{P}^\perp$. Напомним, что область определения оператора $\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ есть $\widetilde{H}^2\,(0,\,a)$, поэтому композиция отображений D_2^2 и $\left(\mathcal{L}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}$ вполне корректна; и, кроме того, в силу тождества (3.46), она совпадает с $\mathrm{D}_2^2(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}$, что позволяет оценить ее на основании леммы 4.6. Приведем соотношения

$$\left\|G_{03}\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant$$
$$\leqslant 2^{1/2}\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\left(c_*^{-1/2}\left\|\partial_2 g_2\right\|_\infty+2^{1/2}C_9\left\|g_2\right\|_\infty\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\right)\varepsilon^{-1/2}=\check{C}_{03}\varepsilon^{-1/2}, \tag{6.16}$$

$$\left\|G_3\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_6\varepsilon^{1/2}=\check{C}_3\varepsilon^{1/2}, \tag{6.17}$$

которые можно извлечь из лемм 4.3, 4.5 и 4.6 с учетом сделанного замечания.

Форма $\mathfrak{I}_4$. Представив оператор умножения в $\mathfrak{N}$ на функцию h_2^0 как композицию

$$h_2^0=\mathcal{P}h_2|_{\mathfrak{N}}\,, \tag{6.18}$$

запишем форму $\mathfrak{I}_4$ следующим образом:

$$\mathfrak{I}_4[u,\,v]=-\varepsilon^2\left(\mathrm{D}_2\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)-\mathcal{P}\right)u,\,(h_2+h_2^*)\,v\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad u\in\widetilde{H}^2(0,\,a)\,,\,v\in\widetilde{H}^1(\Omega)\,. \tag{6.19}$$

Положим

$$\begin{aligned} G_{04}&=-\varepsilon^{1/2}\mathrm{D}_2\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)-\mathcal{P}\right), \qquad && D(G_{04})\simeq H^1(0,\,a)\,,\\ G_4&=\varepsilon^{3/2}\left(h_2+h_2^*\right), && D(G_4)=L_2\big((0,\,a)\,;\,H^1(0,\,1)\big)\end{aligned}$$

(отметим, что при таком определении $G_{04}=G_{02}$), тогда

$$\mathfrak{I}_4[u,\,v]=(G_{04}u,\,G_4v)_{L_2(\Omega)}\,, \qquad u\in\widetilde{H}^2(0,\,a)\,,\,v\in\widetilde{H}^1(\Omega)\,. \tag{6.20}$$

Используя неравенство (6.13), следствие 1.2 (для $f=h_2+h_2^*$) и леммы 4.1, 4.2, получаем:

$$\left\|G_{04}\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant\check{C}_{02}\varepsilon^{-1/2}=\check{C}_{04}\varepsilon^{-1/2}, \tag{6.21}$$

$$\left\|G_4\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant 2^{3/2}\left\|h_2\right\|_{2,\,\infty}\left(c_*^{-1/2}+\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\right)\varepsilon^{1/2}=\check{C}_4\varepsilon^{1/2}. \tag{6.22}$$

Форма $\mathfrak{I}_5$. В соответствии с (3.39) и (6.18),

$$\mathfrak{I}_5[u,\,v]=\varepsilon^2\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\left(\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon)\,u,\,(\mathrm{D}_2h_2)\,v\right)_{L_2(\Omega)}=(G_{05}u,\,G_5v)_{L_2(\Omega)}\,,$$
$$u\in\widetilde{H}^2(0,\,a)\,,\,v\in\widetilde{H}^1(\Omega)\,. \tag{6.23}$$

Здесь операторы G_{05}, G_5 имеют вид

$$\begin{aligned} G_{05}&=\varepsilon^{1/2}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon)\,,\\ G_5&=\varepsilon^{3/2}\left(\mathrm{D}_2h_2\right), \qquad D(G_5)=L_2\big((0,\,a)\,;\,H^1(0,\,1)\big)\,.\end{aligned}$$

Оценки композиций

$$\left\|G_{05}\left(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant c_*^{-1}C_1\varepsilon^{-1/2}=\check{C}_{05}\varepsilon^{-1/2}, \tag{6.24}$$

$$\left\|G_5\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant 2^{1/2}\left\|\partial_2h_2\right\|_{2,\,\infty}\left(c_*^{-1/2}+\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}\right)\varepsilon^{1/2}=\check{C}_5\varepsilon^{1/2} \tag{6.25}$$

вытекают из следствия 1.2 (при $f=\partial_2h_2$), теоремы 3.12 и лемм 4.1, 4.2, 4.5.

Форма $\mathfrak{I}_6$. Зададим операторы G_{06}, G_6 формулами

$$\begin{aligned} G_{06}&=-\varepsilon^{3/2}\left(h_2\mathrm{D}_2+\mathrm{D}_2h_2^*\right),\\ G_6&=\varepsilon^{1/2}\mathcal{P}^\perp\end{aligned}$$

на областях $D(G_{06})\simeq H^1(0,\,a)$ и $D(G_6)=L_2(\Omega)$. Ясно, что

$$\mathfrak{I}_6[u,\,v]=(G_{06}u,\,G_6v)_{L_2(\Omega)}\,, \qquad u\in\widetilde{H}^2(0,\,a)\,,\,v\in\widetilde{H}^1(\Omega)\,, \tag{6.26}$$

притом

$$\left\| G_{06} \left(\mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} \mathcal{P} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant$$
$$\leqslant c_*^{-1/2} \left(c_*^{-1/2} \left\| \partial_2 h_2 \right\|_{2,\,\infty} + 2^{3/2} \left\| g_2^{-1} \right\|_\infty^{1/2} \left\| h_2 \right\|_{2,\,\infty} \right) \varepsilon^{-1/2} = \check{C}_{06} \varepsilon^{-1/2}, \tag{6.27}$$

$$\left\| G_6 \left(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1/2} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \check{C}_3 \varepsilon^{1/2} = \check{C}_6 \varepsilon^{1/2} \tag{6.28}$$

(см. следствие 1.2 (для $f = h_2 + h_2^*$ и $f = \partial_2 h_2^*$), лемму 4.5 и неравенство (6.17)).

Итог. Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}} = L_2\left(\Omega;\, \mathbb{C}^6\right) \simeq \bigotimes_{j=1}^{6} L_2(\Omega)$. Положим

$$\mathbf{G}_0 \colon L_2(0,\, a) \to L_2\left(\Omega;\, \mathbb{C}^6\right), \qquad \mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} G_{01} \\ \vdots \\ G_{06} \end{pmatrix}, \qquad D(\mathbf{G}_0) \simeq H^2(0,\, a);$$

$$\mathbf{G} \colon L_2(\Omega) \to L_2\left(\Omega;\, \mathbb{C}^6\right), \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_6 \end{pmatrix}, \qquad D(\mathbf{G}) = H^1(\Omega).$$

Видно, что операторы $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{G}$ плотно определены в соответствующих пространствах и $D(\mathfrak{T}_1) \subset \subset D[t_1] \subset D(\mathbf{G})$, $D(\mathfrak{T}_2) \subset D(\mathbf{G}_0)$. Тождества (6.7) и (6.8) и представления (6.9), (6.12), (6.15), (6.20), (6.23), (6.26) означают, что форму $\mathfrak{I}$ можно записать в виде

$$\mathfrak{I}[u,\, v] = \sum_{j=1}^{6} \left(G_{0j} u,\, G_j v \right)_{L_2(\Omega)} = \left(\mathbf{G}_0 u,\, \mathbf{G} v \right)_{L_2(\Omega;\, \mathbb{C}^6)}, \qquad u \in \widetilde{H}^2(0,\, a),\, v \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Далее, из неравенств (6.10), (6.13), (6.16), (6.21), (6.24), (6.27) следует ограниченность оператора $\mathbf{G}_0 (\mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1}$ с оценкой нормы

$$\left\| \mathbf{G}_0 \left(\mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} \mathcal{P} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega),\, L_2(\Omega;\, \mathbb{C}^6))} \leqslant C_{15} \varepsilon^{-1/2}, \tag{6.29}$$

где $C_{15} = \sum_{j=1}^{6} \check{C}_{0j}$. Непрерывность композиции $\mathbf{G} (\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1}$ следует из формул (4.1), (6.11), (6.14), (6.17), (6.22), (6.25), (6.28), причем

$$\left\| \mathbf{G} \left(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega),\, L_2(\Omega;\, \mathbb{C}^6))} \leqslant C_{16} \varepsilon^{-1/2} \tag{6.30}$$

с постоянной $C_{16} = c_*^{-1/2} \sum_{j=1}^{6} \check{C}_j$. Таким образом, условие 4° леммы 6.3 проверено.

Применим теперь утверждение леммы 6.3. Ввиду (6.6), справедливо представление

$$\mathcal{I}_\lambda (k;\, \varepsilon) = \left(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} \mathcal{P} - \mathcal{F}_\lambda (k;\, \varepsilon) \left(\mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} \mathcal{P} =$$
$$= \left(\mathbf{G} \left(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} \right)^* \left(\mathbf{G}_0 \left(\mathcal{L}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right)^{-1} \mathcal{P} \right). \tag{6.31}$$

Сопоставляя его и (6.29), (6.30), приходим к оценке

$$\left\| \mathcal{I}_\lambda (k;\, \varepsilon) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{15} C_{16} \varepsilon^{-1} = C_{14} \varepsilon^{-1}, \qquad k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2,\, \varepsilon > 0,$$

с заданными только по исходным данным задачи константами C_{15}, C_{16}, которая и завершает доказательство теоремы 6.2.

§ 7. Аппроксимация оператора $(\mathcal{B}_\lambda (k;\, \varepsilon))^{-1}$ с учетом корректора

Назначением этого параграфа является доказательство второй части утверждения теоремы 2.2. Наибольшую сложность при этом представляет ее проверка при $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, — тема пункта 7.1, а для $k^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$, $\langle k,\, \varepsilon \rangle \in [-\pi,\, \pi) \times (0,\, 1]$, оценка — предмет пункта 7.2 — получается сравнительно просто.

7.1. **Аппроксимация с корректором оператора** $(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}$ **при** $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$**.** Ближайшая цель состоит в получении оценки оператора $(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1} - (\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P} - \mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P}$ в равномерной операторной топологии пространства $\mathbf{B}\left(L_2(\Omega)\,,\,H^1(\Omega)\right)$. Будем исходить из тождества

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\left((\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1} - (\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P} - \mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P}\right) = \\ = (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\mathcal{P}^\perp + (\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\mathcal{J}_\lambda(k;\,\varepsilon) + \\ + \left(k^2+\varepsilon^2\right)(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\,(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P},\end{aligned} \tag{7.1}$$

при выводе которого были использованы формулы (2.14), (3.43), (3.46), (6.4).

Лемма 7.1. *Пусть* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. *Тогда выполнена оценка*

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\mathcal{J}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{17}; \tag{7.2}$$

постоянная C_{17} *зависит лишь от исходных данных задачи.*

○ Согласно (6.31), для оператора $(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\mathcal{J}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ справедлива факторизация

$$(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\mathcal{J}_\lambda(k;\,\varepsilon) = \left(\mathbf{G}\,(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\right)^*\left(\mathbf{G}_0\,(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}\right),$$

поэтому, применяя неравенства (6.10)–(6.11), (6.13)–(6.14), (6.16)–(6.17), (6.21)–(6.22), (6.24)–(6.25) и (6.27)–(6.28), приходим к оценке

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\mathcal{J}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \sum_{j=1}^{6}\check{C}_{0j}\check{C}_j = C_{17}.$$

●

Лемма 7.2. *При* $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$, *имеет место неравенство*

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\,(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant C_{18}\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{-1}, \tag{7.3}$$

где C_{18} *— константа, выражающаяся только через данные задачи.*

Замечание. Лемма 5.5 об инвариантности пространства $\widetilde{H}^1(\Omega)$ относительно $\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)$ и принадлежность функций Λ и M классу $\widetilde{H}^1(\Omega)$ придают, благодаря представлению (3.43), композиции операторов в (7.3) смысл.

○ При $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ справедлива оценка

$$a^{(2)}[v,\,v] \leqslant \|h_2\|_{2,\infty}^2\,\|(\mathrm{D}_1+k)\,v\|_{L_2(\Omega)}^2 + (1+\|g_2\|_\infty)\,\|\mathrm{D}_2 v\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2\,\|h_2\|_{2,\infty}^2\,\|v\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{7.4}$$

(см. следствие 1.2 для h_2). Рассмотрим в качестве v элемент $\left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\,(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}u$ с $u \in L_2(\Omega)$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Соотношения (3.39), (3.43) гарантируют выполнение тождеств

$$\begin{aligned}\left(k^2+\varepsilon^2\right)(\mathrm{D}_1+k)\,\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P} = (\mathrm{D}_1+k)\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P} - \\ - \left(k\,(\mathrm{D}_1\Lambda) + \varepsilon\,(\mathrm{D}_1\mathrm{M})\right)\mathcal{P} - k\left(\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) - \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)\mathcal{P}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\left(k^2+\varepsilon^2\right)\mathrm{D}_2\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P} = [\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)]\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon) - \left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)]\,\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon) - \\ - \left(k\,(\mathrm{D}_2\Lambda) + \varepsilon\,(\mathrm{D}_2\mathrm{M})\right)\mathcal{P} + \left(k^2+\varepsilon^2\right)\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathrm{D}_2\mathcal{P},\end{aligned}$$

которые, в свою очередь, влекут неравенства

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{D}_1+k)\,v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant{}& \left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\,\mathcal{P}\right\|\times\\
&\times\Big(\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|\,\left\|\left(\mathcal{A}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right\|+\\
&+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\Big(1+\|\partial_1\Lambda\|_\infty+\|\partial_1\mathrm{M}\|_{2,\,\infty}+\|\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\|\Big)\Big), \qquad (7.5)\\
\|\mathrm{D}_2 v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant{}& \left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\,\mathcal{P}\right\|\times\\
&\times\Big(\|[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)]\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)\|+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\|[\mathrm{D}_2,\,\mathcal{F}_\lambda(k;\,\varepsilon)]\|\,\|\Phi_\lambda(k;\,\varepsilon)\|+\\
&+\left(k^2+\varepsilon^2\right)^{1/2}\left(\|\partial_2\Lambda\|_\infty+\|\partial_2\mathrm{M}\|_\infty\right)\Big)+\\
&+\left(k^2+\varepsilon^2\right)\|\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\|\left\|\mathrm{D}_2\,(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\,\mathcal{P}\right\|\left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\,\mathcal{P}\right\|. \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

Из (7.5), теоремы 3.13 и лемм 4.2, 4.3, 4.5 тогда получаем оценку

$$\varepsilon\,\|(\mathrm{D}_1+k)\,v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_*^{-1}\left(1+C_3+2^{1/2}C_7\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{1/2}+\|\partial_1\Lambda\|_\infty+\|\partial_1\mathrm{M}\|_{2,\,\infty}\right)=\widehat{C}^{(1)}_{18}, \qquad (7.7)$$

а из (7.6), теорем 3.12, 3.13 и лемм 4.5, 5.4 —

$$\varepsilon\,\|\mathrm{D}_2 v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_*^{-1}\left(2^{1/2}c_*^{1/2}C_3\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty^{1/2}+C_1C_{11}+C_{12}+\|\partial_2\Lambda\|_\infty+\|\partial_2\mathrm{M}\|_\infty\right)=\widehat{C}^{(2)}_{18}. \qquad (7.8)$$

Дополнив (7.4), (7.7) и (7.8) очевидным (с учетом теоремы 3.13 и леммы 4.5) соотношением

$$\varepsilon\,\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon\left(k^2+\varepsilon^2\right)\|\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\|\left\|(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\,\mathcal{P}\right\| \leqslant c_*^{-1}C_3\varepsilon,$$

имеем:

$$\varepsilon^2\mathfrak{a}^{(2)}[v,\,v] \leqslant \left(2c_*^{-2}C_3^2+\left(\widehat{C}^{(1)}_{18}\right)^2\right)\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+\left(\widehat{C}^{(2)}_{18}\right)^2\left(1+\|g_2\|_\infty\right)=\widehat{C}^2_{18}.$$

Поскольку

$$\mathfrak{a}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v] \leqslant c_*^{-2}C_4^2=\widetilde{C}^2_{18}$$

ввиду теоремы 3.14 и леммы 4.5, то неравенство

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,v\right\|^2_{L_2(\Omega)}=\mathfrak{a}^{(1)}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v]+\varepsilon^2\mathfrak{a}^{(2)}[v,\,v] \leqslant \widetilde{C}^2_{18}+\widehat{C}^2_{18}=C^2_{18}$$

является искомым. ●

Подведем промежуточный итог. Тождество (7.1) приводит к оценке

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\left((\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}-\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}-\mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P}\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant\\
&\leqslant \left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\,\mathcal{P}^\perp\right\|+\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,\mathcal{I}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right\|+\\
&+\left(k^2+\varepsilon^2\right)\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,\Upsilon_\lambda(k;\,\varepsilon)\,(\mathcal{L}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}\,\mathcal{P}\right\|.
\end{aligned}$$

В соответствии с двумя последними леммами, а также неравенством (4.7), она допускает следующее продолжение:

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\left((\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}-\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}-\mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,\mathcal{P}\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant\\
&\qquad \leqslant C_6+C_{17}+C_{18}=C_{19},\\
&\qquad k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2,\ \varepsilon>0. \qquad (7.9)
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства неравенства (2.17) теоремы 2.2 при $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, необходимо устранить в (7.9) проекторы $\mathcal{P}$. Изучим сначала этот вопрос для старшего члена, но прежде выпишем легко проверяемую с помощью следствия 1.2 оценку квадратичной формы $\mathscr{b}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)$ сверху, которая потребуется далее:

$$\begin{aligned}\mathscr{b}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v] \leqslant \Big(1+\|g_1\|_\infty+\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+\|Q\|_{1,\,\infty}\Big)\,\|(\mathrm{D}_1+k)\,v\|^2_{L_2(\Omega)}+\\ +\varepsilon^2\,(1+\|g_2\|_\infty)\,\|\mathrm{D}_2 v\|^2_{L_2(\Omega)}+\\ +\varepsilon^2\Big(2\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+2\,\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+2\,\|Q\|_{1,\,\infty}+\lambda\,\|Q_*\|_\infty\Big)\,\|v\|^2_{L_2(\Omega)}\,,\\ v\in\widetilde{H}^1\,(\Omega)\,,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]\,.\end{aligned}\tag{7.10}$$

Лемма 7.3. *Пусть $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon>0$. Тогда*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_{20};$$

постоянная C_{20} зависит лишь от исходных данных задачи.

○ Положим в (7.10) $v=\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp u$ с функцией $u\in L_2\,(\Omega)$, $\|u\|_{L_2(\Omega)}=1$. Тогда $v\in\widetilde{H}^1\,(\Omega)$ и, согласно лемме 4.4,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp u\right\|^2_{L_2(\Omega)}=\mathscr{b}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v]\leqslant\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|\times\\ \times\Bigg(\Big(1+\|g_1\|_\infty+\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+\|Q\|_{1,\,\infty}\Big)\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2+\\ +\varepsilon^2\,(1+\|g_2\|_\infty)\left\|\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2+\\ +\varepsilon^2\Big(2\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+2\,\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+2\,\|Q\|_{1,\,\infty}+\lambda\,\|Q_*\|_\infty\Big)\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|\Bigg)\leqslant\\ \leqslant 4\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\Bigg(\left(1+2\pi^{-2}\right)\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\Big(\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+\|Q\|_{1,\,\infty}+\lambda\,\|Q_*\|_\infty\Big)+\\ +\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty(1+\|g_1\|_\infty)+\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty(1+\|g_2\|_\infty)\Bigg)=C^2_{20}.\end{aligned}$$

●

Осталось показать, что проектор $\mathcal{P}$, находящийся в композиции с корректором, может быть заменен на тождественный оператор. Этот факт устанавливает

Лемма 7.4. *При всех $k^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2$, $\varepsilon>0$, справедливы неравенства*

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\Lambda\,(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_{21},$$
$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\varepsilon\mathrm{M}\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant C_{22};$$

постоянные C_{21} и C_{22} определены через исходные данные задачи.

○ Воспользуемся формулой (7.10) при $v = \Lambda\,(\mathrm{D}_1 + k)\,(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}^\perp u$, где $u \in L_2\,(\Omega)$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$, и оценками лемм 4.4, 4.6:

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,\Lambda\,(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp u\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathscr{b}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v] \leqslant \\
&\quad\leqslant 2\left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty}\right) \times \\
&\qquad\times\left(\|\Lambda\|^2_\infty \left\|(\mathrm{D}_1 + k)^2\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \|\partial_1\Lambda\|^2_\infty \left\|(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2 \left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|\right) + \\
&\qquad + 2\varepsilon^2\,(1 + \|g_2\|_\infty)\left(\|\Lambda\|^2_\infty\left\|\mathrm{D}_2\,(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|^2 + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \|\partial_2\Lambda\|^2_\infty\left\|(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|\right) + \\
&\qquad + \varepsilon^2\left(2\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|h_2\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\right)\|\Lambda\|^2_\infty \times \\
&\qquad\times\left\|(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\| \leqslant \\
&\quad\leqslant 8\left\|g_1^{-1}\right\|^2_\infty\left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)\left(\|\Lambda\|^2_\infty + \pi^{-2}\,\|\partial_1\Lambda\|^2_\infty\right) + \\
&\qquad + 8\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty(1 + \|g_2\|_\infty)\left(\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\|\partial_2\Lambda\|^2_\infty + \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\|\Lambda\|^2_\infty\right) + \\
&\qquad + 4\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|^2_\infty\left(2\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|h_2\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\right)\|\Lambda\|^2_\infty = C^2_{21}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь $v = \varepsilon\mathrm{M}(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{-1}\mathcal{P}^\perp u$ (u по-прежнему принадлежит единичной сфере пространства $L_2\,(\Omega)$). Тогда аналогично $v \in \widetilde{H}^1\,(\Omega)$ и следствие 1.2 и лемма 4.4, примененные к (7.10) с указанной функцией v, приводят к соотношению

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2\left\|(\mathcal{B}_\lambda\,(k;\,\varepsilon))^{1/2}\,\mathrm{M}\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp u\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathscr{b}_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v] \leqslant \\
&\quad\leqslant 2\varepsilon^2\left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)\times \\
&\qquad\times\left(\left(\|\mathrm{M}\|^2_\infty + \|\partial_1\mathrm{M}\|^2_{2,\,\infty}\right)\left\|(\mathrm{D}_1 + k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\| + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + 2\,\|\partial_1\mathrm{M}\|^2_{2,\,\infty}\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|^2\right) + \\
&\qquad + 2\varepsilon^4\,(1 + \|g_2\|_\infty)\left(\|\mathrm{M}\|^2_\infty\left\|\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\| + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \|\partial_2\mathrm{M}\|^2_\infty\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|^2\right) + \\
&\qquad + \varepsilon^4\left(2\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|h_2\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\right)\|\mathrm{M}\|^2_\infty\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda\,(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\mathcal{P}^\perp\right\|^2 \leqslant \\
&\quad\leqslant 8\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|^2_\infty\left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\,\infty} + \|Q\|_{1,\,\infty}\right)\times \\
&\qquad\times\left(\|\mathrm{M}\|^2_\infty + (1 + 2\pi^{-2})\,\|\partial_1\mathrm{M}\|^2_{2,\,\infty}\right) + \\
&\qquad + 8\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty(1 + \|g_2\|_\infty)\left(\pi^{-2}\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\|\partial_2\mathrm{M}\|^2_\infty + \left\|g_2^{-1}\right\|_\infty\|\mathrm{M}\|^2_\infty\right) + \\
&\qquad + 4\pi^{-4}\left\|g_1^{-1}\right\|^2_\infty\left(2\,\|h_1\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|h_2\|^2_{2,\,\infty} + 2\,\|Q\|_{1,\,\infty} + \lambda\,\|Q_*\|_\infty\right)\|\mathrm{M}\|^2_\infty\,,
\end{aligned}$$

правую часть которого примем за определение константы C^2_{22}. ●

Итак, в соответствии с (7.9) и леммами 7.3, 7.4, при всех $k^2+\varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon>0$, получена необходимая оценка

$$\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\left((\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}-\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}-\mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \sum_{j=19}^{22} C_j = \widetilde{C}_1, \tag{7.11}$$

постоянная $\widetilde{C}_1$ в которой определяется только через исходные данные задачи.

7.2. **Аппроксимация с корректором оператора** $(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}$ **при** $k^2+\varepsilon^2 > \tau_0^2$**.** При условии $k^2+\varepsilon^2>\tau_0^2$, $\langle k,\,\varepsilon\rangle \in [-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]$, каждое слагаемое неравенства

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\left((\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}-\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}-\mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant\\
&\quad\leqslant \left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1/2}\right\| + \left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\| +\\
&\qquad+\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\Lambda\,(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\| + \left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\varepsilon\mathrm{M}\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|
\end{aligned}\tag{7.12}$$

может быть оценено отдельно. Положим в формуле (7.10) $v = (\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon))^{-1}u$, $u\in L_2(\Omega)$, $\|u\|_{L_2(\Omega)}=1$, и применим лемму 4.4:

$$\begin{aligned}
&\left\|(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon))^{1/2}\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}u\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \mathscr{b}_\lambda(k;\,\varepsilon)\,[v,\,v] \leqslant \left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|\times\\
&\quad\times\left(\left(1+\|g_1\|_\infty+\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+\|Q\|_{1,\,\infty}\right)\left\|(\mathrm{D}_1+k)\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2+\right.\\
&\qquad+\varepsilon^2\left(1+\|g_2\|_\infty\right)\left\|\mathrm{D}_2\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1/2}\right\|^2+\\
&\qquad\quad\left.+\varepsilon^2\left(2\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+2\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+2\|Q\|_{1,\,\infty}+\lambda\|Q_*\|_\infty\right)\left\|\left(\mathcal{B}^0_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}\right\|\right)\leqslant\\
&\quad\leqslant 2c_*^{-1}\Bigl(\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty(1+\|g_1\|_\infty)+\left\|g_2^{-1}\right\|_\infty(1+\|g_2\|_\infty)+\\
&\qquad+\left(c_*^{-1}+\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty\right)\left(\|h_1\|^2_{2,\,\infty}+\|h_2\|^2_{2,\,\infty}+\|Q\|_{1,\,\infty}+\lambda\|Q_*\|_\infty\right)\Bigr)\tau_0^{-2} = C^2_{23}.
\end{aligned}$$

Далее, сказанное в лемме 7.4 может быть с незначительными изменениями перенесено на случай $k^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$, $\langle k, \varepsilon \rangle \in [-\pi, \pi) \times (0, 1]$, именно

$$
\begin{aligned}
&\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k; \varepsilon))^{1/2} \Lambda (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\|^2_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \\
&\quad \leqslant 2 \left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\infty} + \|Q\|_{1,\infty}\right) \times \\
&\qquad \times \left(\|\Lambda\|^2_\infty \left\| (\mathrm{D}_1 + k)^2 \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\|^2 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \|\partial_1 \Lambda\|^2_\infty \left\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\| \right) + \\
&\quad + 2\varepsilon^2 (1 + \|g_2\|_\infty) \times \\
&\qquad \times \left(\|\Lambda\|^2_\infty \left\| \mathrm{D}_2 (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\|^2 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \|\partial_2 \Lambda\|^2_\infty \left\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\| \right) + \\
&\quad + \varepsilon^2 \left(2 \|h_1\|^2_{2,\infty} + 2 \|h_2\|^2_{2,\infty} + 2 \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty\right) \times \\
&\qquad \times \|\Lambda\|^2_\infty \left\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\| \leqslant \\
&\quad \leqslant 4 c_*^{-1} \left\| g_1^{-1} \right\|_\infty \left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\infty} + \|Q\|_{1,\infty}\right) \left(\|\Lambda\|^2_\infty + \|\partial_1 \Lambda\|^2_\infty \tau_0^{-2} \right) + \\
&\quad + 4 \left\| g_1^{-1} \right\|_\infty (1 + \|g_2\|_\infty) \left(2 \left\| g_2^{-1} \right\|_\infty \|\Lambda\|^2_\infty + c_*^{-1} \|\partial_2 \Lambda\|^2_\infty \right) + \\
&\quad + 2 c_*^{-1} \left\| g_1^{-1} \right\|_\infty \left(2 \|h_1\|^2_{2,\infty} + 2 \|h_2\|^2_{2,\infty} + 2 \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty\right) \|\Lambda\|^2_\infty = C_{24}^2.
\end{aligned}
$$

Такой же путь приводит к оценке последнего члена, возникшего из корректора:

$$
\begin{aligned}
&\left\| (\mathcal{B}_\lambda(k; \varepsilon))^{1/2} \varepsilon \mathrm{M} \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\|^2_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\| \times \\
&\quad \times \left(2\varepsilon^2 \left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\infty} + \|Q\|_{1,\infty}\right) \times \right. \\
&\qquad \times \left(\left(\|\mathrm{M}\|^2_\infty + \|\partial_1 \mathrm{M}\|^2_{2,\infty} \right) \left\| (\mathrm{D}_1 + k) \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 2 \|\partial_1 \mathrm{M}\|^2_{2,\infty} \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\| \right) + \\
&\qquad + 2\varepsilon^4 (1 + \|g_2\|_\infty) \left(\|\mathrm{M}\|^2_\infty \left\| \mathrm{D}_2 \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1/2} \right\|^2 + \|\partial_2 \mathrm{M}\|^2_\infty \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\| \right) + \\
&\qquad \left. + \varepsilon^4 \left(2 \|h_1\|^2_{2,\infty} + 2 \|h_2\|^2_{2,\infty} + 2 \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty\right) \|\mathrm{M}\|^2_\infty \left\| \left(\mathcal{B}_\lambda^0(k; \varepsilon)\right)^{-1} \right\| \right) \leqslant \\
&\quad \leqslant 4 \left(1 + \|g_1\|_\infty + \|h_1\|^2_{2,\infty} + \|h_2\|^2_{2,\infty} + \|Q\|_{1,\infty}\right) \times \\
&\qquad \times \left(c_*^{-1} \left\| g_1^{-1} \right\|_\infty \left(\|\mathrm{M}\|^2_\infty + \|\partial_1 \mathrm{M}\|^2_{2,\infty} \right) + c_*^{-2} \|\partial_1 \mathrm{M}\|^2_{2,\infty} \tau_0^{-2} \right) + \\
&\quad + 2 (1 + \|g_2\|_\infty) \left(2 c_*^{-1} \left\| g_2^{-1} \right\|_\infty \|\mathrm{M}\|^2_\infty + c_*^{-2} \|\partial_2 \mathrm{M}\|^2_\infty \right) + \\
&\quad + c_*^{-2} \left(2 \|h_1\|^2_{2,\infty} + 2 \|h_2\|^2_{2,\infty} + 2 \|Q\|_{1,\infty} + \lambda \|Q_*\|_\infty\right) \|\mathrm{M}\|^2_\infty = C_{25}^2.
\end{aligned}
$$

Добавляя к трем этим неравенствам (4.1) и продолжая (7.12) с их помощью, получаем окончательный результат:

$$\left\|\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{1/2}\left(\left(\mathcal{B}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}-\left(\mathcal{B}_\lambda^0(k;\,\varepsilon)\right)^{-1}-\mathcal{K}_\lambda(k;\,\varepsilon)\right)\right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Omega))}\leqslant$$
$$\leqslant c_*^{-1/2}\tau_0^{-1}+C_{23}+C_{24}+C_{25}=\widetilde{C}_2,$$
$$k^2+\varepsilon^2>\tau_0^2,\ \langle k,\,\varepsilon\rangle\in[-\pi,\,\pi)\times(0,\,1]. \tag{7.13}$$

Оценки (7.11), (7.13) полностью завершают проверку теоремы 2.2, при этом константа $\widetilde{C}$ во втором ее неравенстве оказывается равной $\max\limits_{j\in\{1,\,2\}}\widetilde{C}_j$ и зависит лишь от данных задачи.

§ 8. Краевые задачи типа Дирихле и типа Неймана

8.1. **Определение операторов ${}^N\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ и ${}^D\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$. Постановка задачи.** Определим в Π матрицу-функцию $\breve{g}(\cdot)=\operatorname{diag}\{\breve{g}_1(\cdot),\,\breve{g}_2(\cdot)\}$, для элементов которой выполнено следующее условие.

Условие 5.

1. $\breve{g}_j(\cdot)$, $j\in\{1,\,2\}$, *измеримы и положительны;*
2. $\breve{g}_j(\cdot,\,x_2)$, $j\in\{1,\,2\}$, *при п. в.* $x_2\in(0,\,a)$ *периодичны с периодом* 1*:*
$$\breve{g}_j(x_1+1,\,x_2)=\breve{g}_j(x_1,\,x_2),\qquad \mathbf{x}\in\Pi;$$
3. $\breve{g}_j(\cdot)$ *и* $(\breve{g}_j(\cdot))^{-1}$, $j\in\{1,\,2\}$, *равномерно ограничены:*
$$\|\breve{g}_j\|_\infty,\ \|\breve{g}_j^{-1}\|_\infty<\infty;$$
4. *Верны включения*
$$\breve{g}_j\in\operatorname{Lip}([0,\,a];\,L_\infty(0,\,1))\qquad(j\in\{1,\,2\}).$$

Определим комплекснозначные отображения $\breve{h}_j(\cdot)$, $j\in\{1,\,2\}$, и вещественнозначную функцию $\breve{Q}(\cdot)$, для которых справедливо

Условие 6.

1. $\breve{Q}(\cdot)$, $\breve{h}_j(\cdot)$, $j\in\{1,\,2\}$, *измеримы в полосе* Π*;*
2. $\breve{Q}(\cdot,\,x_2)$, $\breve{h}_j(\cdot,\,x_2)$, $j\in\{1,\,2\}$, *при п. в.* $x_2\in(0,\,a)$ *периодичны с периодом* 1*:*
$$\breve{Q}(x_1+1,\,x_2)=\breve{Q}(x_1,\,x_2),\qquad \mathbf{x}\in\Pi,$$
$$\breve{h}_j(x_1+1,\,x_2)=\breve{h}_j(x_1,\,x_2),\qquad \mathbf{x}\in\Pi;$$
3. *Имеют место включения*
$$\breve{Q}\in\operatorname{Lip}([0,\,a];\,L_1(0,\,1)),$$
$$\breve{h}_j\in\operatorname{Lip}([0,\,a];\,L_2(0,\,1))\qquad(j\in\{1,\,2\});$$
4. *Следы функции* $\breve{h}_2(\cdot)$ *на противоположных гранях* Π *равны нулю:*
$$\breve{h}_2(x_1,\,0)=\breve{h}_2(x_1,\,a)=0,\qquad x_1\in\mathbb{R}.$$

Наконец, введем функцию $\breve{Q}_*(\cdot)$, соответствующую следующим требованиям.

Условие 7.

1. $\breve{Q}_*(\cdot)$ *положительна и измерима в полосе* Π*;*
2. $\breve{Q}_*(\cdot,\,x_2)$ *при п. в.* $x_2\in(0,\,a)$ *периодична с периодом* 1*:*
$$\breve{Q}_*(x_1+1,\,x_2)=\breve{Q}_*(x_1,\,x_2),\qquad \mathbf{x}\in\Pi;$$
3. $\breve{Q}_*(\cdot)$ *и* $\left(\breve{Q}_*(\cdot)\right)^{-1}$ *равномерно ограничены в* Π*:*
$$\left\|\breve{Q}_*\right\|_\infty,\ \left\|\breve{Q}_*^{-1}\right\|_\infty<\infty;$$
4. *Справедливо включение*
$$\breve{Q}_*\in\operatorname{Lip}([0,\,a];\,L_\infty(0,\,1)).$$

Пусть λ_0, $c_\natural$ определены по коэффициентам $\breve{g}_j(\cdot)$, $\breve{h}_j(\cdot)$, $j \in \{1, 2\}$, $\breve{Q}(\cdot)$ и $\breve{Q}_*(\cdot)$ в (1.16), (1.15) и λ удовлетворяет условию 4. Пусть операторы ${}^N\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ и ${}^D\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ заданы положительно определенными замкнутыми (доказательство полностью повторяет проверку этих свойств для $\mathcal{b}_\lambda^\varepsilon$) формами

$$
{}^N\mathcal{b}_\lambda^\varepsilon[u, u] = \int\limits_\Pi \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\breve{g}_j^\varepsilon(\mathbf{x}) \left|\mathrm{D}_j u\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\breve{h}_j^\varepsilon(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_j u \cdot \overline{u} \right) \right) + \breve{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) \left|u\right|^2 + \lambda \breve{Q}_*^\varepsilon(\mathbf{x}) \left|u\right|^2 \right) d\mathbf{x},
$$
$$
u \in D\left[{}^N\mathcal{b}_\lambda^\varepsilon\right] = H^1(\Pi),\ \varepsilon \in (0, 1], \tag{8.1}
$$

и

$$
{}^D\mathcal{b}_\lambda^\varepsilon[u, u] = \int\limits_\Pi \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\breve{g}_j^\varepsilon(\mathbf{x}) \left|\mathrm{D}_j u\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\breve{h}_j^\varepsilon(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_j u \cdot \overline{u} \right) \right) + \breve{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) \left|u\right|^2 + \lambda \breve{Q}_*^\varepsilon(\mathbf{x}) \left|u\right|^2 \right) d\mathbf{x},
$$
$$
u \in D\left[{}^D\mathcal{b}_\lambda^\varepsilon\right] = \mathring{H}^1(\Pi),\ \varepsilon \in (0, 1], \tag{8.2}
$$

соответственно. Ниже в качестве префикса для обозначения краевых условий типа Неймана или Дирихле будет использован знак $\# \in \{N, D\}$.

Как и ранее, первая часть задачи усреднения для ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ заключается в нахождении такого оператора ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^0$ с не зависящими от периодической переменной x_1 коэффициентами, чтобы обратное к нему отображение явилось бы пределом обратного к исходному при стремлении ε к нулю в равномерной операторной топологии; предельный оператор называется эффективным. Форма, задающая ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^0$, сохраняет прежний вид:

$$
{}^\#\mathcal{b}_\lambda^0[u, u] = \int\limits_\Pi \left(\sum_{j=1}^{2} \left(\breve{g}_j^0(\mathbf{x}) \left|\mathrm{D}_j u\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\breve{h}_j^0(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_j u \cdot \overline{u} \right) \right) + \breve{Q}^0(\mathbf{x}) \left|u\right|^2 + \lambda \breve{Q}_*^0(\mathbf{x}) \left|u\right|^2 \right) d\mathbf{x},
$$
$$
u \in D\left[{}^\#\mathcal{b}_\lambda^0\right] = D\left[{}^\#\mathcal{b}_\lambda^\varepsilon\right]. \tag{8.3}
$$

Коэффициенты формы (8.3) построены при помощи правил, описанных в (1.22), по коэффициентам отображения ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$. Вторая же часть связана с поиском такого оператора ${}^\#\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ (корректора), чтобы сумма $\left({}^\#\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}$ с $\varepsilon\left({}^\#\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon\right)$ приближала бы оператор $\left({}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1}$ по метрике пространства $\mathbf{B}\left(L_2(\Pi),\ H^1(\Pi)\right)$ при малом ε. Как и в случае эффективного оператора, выражение, задающее корректор, остается неизменным:

$$
{}^\#\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon = \left(\breve{\Lambda}^\varepsilon \mathrm{D}_1 + \breve{\mathrm{M}}^\varepsilon \right) \left({}^\#\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1}, \qquad \varepsilon \in (0, 1]; \tag{8.4}
$$

функции $\breve{\Lambda}$, $\breve{\mathrm{M}}$ введены согласно (1.30) и (1.31) по коэффициентам оператора ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$.

8.2. **Основной результат.** Разрешением задачи усреднения для оператора ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$ является

Теорема 8.1. *При выполнении условий 4, 5, 6, 7 для отображения ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon$, $\# \in \{N, D\}$, в $L_2(\Pi)$, определенного одной из форм (8.1), (8.2), при $\varepsilon \in (0, 1]$ справедливы оценки*

$$
\left\| \left({}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left({}^\#\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1} \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi))} \leqslant C\varepsilon, \tag{8.5}
$$

$$
\left\| \left({}^\#\mathcal{B}_\lambda^\varepsilon\right)^{-1} - \left({}^\#\mathcal{B}_\lambda^0\right)^{-1} - \varepsilon\left({}^\#\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon\right) \right\|_{\mathbf{B}(L_2(\Pi),\ H^1(\Pi))} \leqslant \widetilde{C}\varepsilon, \tag{8.6}
$$

в которых ${}^\#\mathcal{B}_\lambda^0$ — эффективный оператор, заданный формой (8.3) с коэффициентами, построенными по принципам (1.22), а ${}^\#\mathcal{K}_\lambda^\varepsilon$ — корректор, введенный соотношением (8.4); постоянные C и $\widetilde{C}$ зависят только от исходных данных задачи.

8.3. **Операторы четного и нечетного продолжений.** Основным инструментом приведения задач типа Дирихле и типа Неймана к периодической является их продолжение в удвоенную полосу с помощью операторов четного или нечетного продолжения. Описанием этих операторов и связанных с ними объектов и займемся.

Обозначим через Π_c область, являющуюся дополнением $\overline{\Pi}$ до 2Π:

$$\Pi_c = \mathbb{R} \times (a,\, 2a)\,.$$

Пусть $L_2^{\pm}(2\Pi)$ — подпространства в $L_2(2\Pi)$ четных и нечетных относительно прямой $\{x_2 = a\}$ функций:

$$L_2^{\pm}(2\Pi) = \Big\{ u \in L_2(2\Pi) : u(x_1,\, x_2) = \pm u(x_1,\, 2a - x_2) \quad \text{при п. в. } \mathbf{x} \in 2\Pi \Big\}.$$

Ясно, что ортогональная сумма этих подпространств совпадает со всем пространством $L_2(2\Pi)$, то есть

$$L_2(2\Pi) = L_2^{+}(2\Pi) \oplus L_2^{-}(2\Pi)\,.$$

Ортогональные проекторы $\mathcal{P}^{\pm}$ на $L_2^{\pm}(2\Pi)$ действуют по правилу

$$\left(\mathcal{P}^{\pm} u\right)(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\left(u(x_1,\, x_2) \pm u(x_1,\, 2a - x_2)\right), \qquad u \in L_2(2\Pi)\,,\ \mathbf{x} \in 2\Pi.$$

Введем операторы четного и нечетного продолжений $\mathcal{W}^{\pm} \in \mathbf{B}\left(L_2(\Pi)\,,\, L_2^{\pm}(2\Pi)\right)$ следующим образом:

$$\left(\mathcal{W}^{\pm} u\right)(\mathbf{x}) = 2^{-1/2}\left(u(x_1,\, x_2)\, \chi_{\Pi}(x_1,\, x_2) \pm u(x_1,\, 2a - x_2)\, \chi_{\Pi_c}(x_1,\, x_2)\right), \qquad u \in L_2(\Pi)\,. \tag{8.7}$$

Несложно видеть, что $\mathcal{W}^{\pm}$ унитарны, а обратный к ним оператор представляет из себя композицию операторов умножения на $2^{1/2}$ и сужения на Π.

Лемма 8.2. *Пусть* $\widetilde{H}^1_{\pm}(2\Pi) = \mathcal{P}^{\pm} \widetilde{H}^1(2\Pi)$. *Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{W}^{+} H^1(\Pi) = \widetilde{H}^1_{+}(2\Pi)\,, \tag{8.8}$$

$$\mathcal{W}^{-} \mathring{H}^1(\Pi) = \widetilde{H}^1_{-}(2\Pi)\,, \tag{8.9}$$

при этом для $u_+ \in H^1(\Pi)$ *и* $u_- \in \mathring{H}^1(\Pi)$ *выполнены соотношения*

$$\partial_1 \mathcal{W}^{\pm} u_{\pm} = \mathcal{W}^{\pm} \partial_1 u_{\pm}, \tag{8.10}$$

$$\partial_2 \mathcal{W}^{\pm} u_{\pm} = \mathcal{W}^{\mp} \partial_2 u_{\pm}. \tag{8.11}$$

○ Существование обобщенных производных функций $\mathcal{W}^{\pm} u_{\pm}$ по переменной x_1 следует из параллельности прямой $\{x_2 = a\}$ и направления дифференцирования, а по переменной x_2 — из непрерывности $u_{\pm}$ на указанной прямой. Совпадение следов $\mathcal{W}^{\pm} u_{\pm}$ на противоположных гранях полосы 2Π прямо следует из определений операторов $\mathcal{W}^{\pm}$ и класса $\mathring{H}^1(\Pi)$. Обратные включения очевидны, заметим лишь, что для всех функций u из класса $\widetilde{H}^1_{-}(2\Pi) = \widetilde{H}^1(2\Pi) \cap L_2^{-}(2\Pi)$ при п. в. $x_1 \in \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$u(x_1,\, 0) = u(x_1,\, a) = u(x_1,\, 2a) = 0.$$

Этим доказаны (8.8) и (8.9). Формулы (8.10), (8.11) получаются из (8.7) непосредственно. ●

8.4. **Построение оператора с периодическими граничными условиями.** В данном пункте приведена конструкция оператора с периодическими граничными условиями, который в некотором смысле отвечает ортогональной сумме операторов с граничными условиями типов Дирихле и Неймана. Возможность построения такого оператора позволяет использовать для доказательства теоремы 8.1 уже полученную теорему 1.6.

По коэффициентам формы ${}^{\#}\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}$ определим функции

$$\begin{aligned} g_1 &= 2^{1/2} \mathcal{W}^{+} \breve{g}_1, & g_2 &= 2^{1/2} \mathcal{W}^{+} \breve{g}_2, \\ h_1 &= 2^{1/2} \mathcal{W}^{+} \breve{h}_1, & h_2 &= 2^{1/2} \mathcal{W}^{-} \breve{h}_2, \\ Q &= 2^{1/2} \mathcal{W}^{+} \breve{Q}, & Q_* &= 2^{1/2} \mathcal{W}^{+} \breve{Q}_*. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Используя аргументы леммы 8.2, легко видеть, что введенные отображения удовлетворяют условиям 1, 2, 3. Фиксируем число λ согласно условию 4 и зададим оператор $\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$ — положительно определенный дифференциальный оператор с периодическими граничными условиями — квадратичной формой

$$\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}[u,\,u]=\int\limits_{2\Pi}\left(\sum_{j=1}^{2}\left(g^{\varepsilon}_{j}(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_j u|^2+2\operatorname{Re}\left(h^{\varepsilon}_{j}(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_j u\cdot\overline{u}\right)\right)+Q^{\varepsilon}(\mathbf{x})\,|u|^2+\lambda Q^{\varepsilon}_{*}(\mathbf{x})\,|u|^2\right)d\mathbf{x},$$
$$u\in D\left[\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}\right]=\widetilde{H}^1(2\Pi)\,,\ \varepsilon\in(0,\,1]\,.$$

Следует заметить, что исходные данные рассматриваемых задач совпадают с исходными данными (1.18).

Лемма 8.3. *Подпространства* $L_2^{\pm}(2\Pi)$ *приводят* $\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$.

○ Соотношение

$$\mathcal{P}^{-}D\,[b^{\varepsilon}_{\lambda}]=\widetilde{H}^1_{-}(2\Pi)=L_2^{-}(2\Pi)\cap D\left[\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}\right]$$

очевидно, а равенство

$$\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}[u,\,u]=\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}\left[\mathcal{P}^{+}u,\,\mathcal{P}^{+}u\right]+\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}\left[\mathcal{P}^{-}u,\,\mathcal{P}^{-}u\right],\qquad u\in D\left[\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}\right],$$

выполнено из-за инвариантности пространств $L_2^{\pm}(2\Pi)$ относительно операторов умножения на $g_j(\cdot)$, $j\in\{1,\,2\}$, (с областью определения $L_2(2\Pi)$), $h_1(\cdot)$, $Q(\cdot)$ и $Q_*(\cdot)$ и дифференцирования D_1 и антиинвариантности[1] относительно операторов умножения на $h_2(\cdot)$ и дифференцирования D_2 (все — с областью определения $\widetilde{H}^1(2\Pi)$). ●

Части $\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}|_{L_2^{\pm}(2\Pi)}$ оператора $\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$ в подпространствах $L_2^{\pm}(2\Pi)$ будем обозначать через ${}^{\pm}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$ (соответствующие формы — через ${}^{\pm}\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}$). Положение леммы 8.3 тогда означает, что $\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$ представляет из себя ортогональную сумму операторов ${}^{\pm}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$. Далее, поскольку имеют место соотношения $\mathcal{W}^{+}H^1(\Pi)=\widetilde{H}^1_{+}(2\Pi)$ и $\mathcal{W}^{-}\mathring{H}^1(\Pi)=\widetilde{H}^1_{-}(2\Pi)$ (лемма 8.2) и при произвольных $u_+\in H^1(\Pi)$ и $u_-\in\mathring{H}^1(\Pi)$ выполнены равенства

$$\begin{aligned}{}^{+}\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}\left[\mathcal{W}^{+}u_+,\,\mathcal{W}^{+}u_+\right]&={}^{N}\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}[u_+,\,u_+]\,,\\ {}^{-}\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}\left[\mathcal{W}^{-}u_-,\,\mathcal{W}^{-}u_-\right]&={}^{D}\mathscr{b}^{\varepsilon}_{\lambda}[u_-,\,u_-]\,,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{W}^{+}\right)^{*}\,{}^{+}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}\,\mathcal{W}^{+}&={}^{N}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda},\\ \left(\mathcal{W}^{-}\right)^{*}\,{}^{-}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}\,\mathcal{W}^{-}&={}^{D}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}\,.\end{aligned}$$

Всё вместе это означает, что справедливо разложение

$$\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}=\left(\mathcal{W}^{+}\right)\,{}^{N}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}\left(\mathcal{W}^{+}\right)^{*}\oplus\left(\mathcal{W}^{-}\right)\,{}^{D}\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}\left(\mathcal{W}^{-}\right)^{*}.\tag{8.13}$$

8.5. **Построение предельных операторов с периодическими граничными условиями.** Определим эффективный оператор $\mathcal{B}^{0}_{\lambda}$ для задачи усреднения в полосе 2Π через форму

$$\mathscr{b}^{0}_{\lambda}[u,\,u]=\int\limits_{2\Pi}\left(\sum_{j=1}^{2}\left(g^{0}_{j}(\mathbf{x})\,|\mathrm{D}_j u|^2+2\operatorname{Re}\left(h^{0}_{j}(\mathbf{x})\,\mathrm{D}_j u\cdot\overline{u}\right)\right)+Q^{0}(\mathbf{x})\,|u|^2+\lambda Q^{0}_{*}(\mathbf{x})\,|u|^2\right)d\mathbf{x},$$
$$u\in D\left[\mathscr{b}^{0}_{\lambda}\right]=\widetilde{H}^1(2\Pi)\,,$$

где

$$\begin{aligned}g^0_1&=2^{1/2}\mathcal{W}^{+}\breve{g}^0_1, & g^0_2&=2^{1/2}\mathcal{W}^{+}\breve{g}^0_2,\\ h^0_1&=2^{1/2}\mathcal{W}^{+}\breve{h}^0_1, & h^0_2&=2^{1/2}\mathcal{W}^{-}\breve{h}^0_2,\\ Q^0&=2^{1/2}\mathcal{W}^{+}\breve{Q}^0, & Q^0_*&=2^{1/2}\mathcal{W}^{+}\breve{Q}^0_*.\end{aligned}\tag{8.14}$$

Далее, зададим корректор для оператора $\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\lambda}$ соотношением

$$\mathcal{K}^{\varepsilon}_{\lambda}=\left(\Lambda^{\varepsilon}\mathrm{D}_1+\mathrm{M}^{\varepsilon}\right)\left(\mathcal{B}^{0}_{\lambda}\right)^{-1},\qquad\varepsilon\in(0,\,1]\,,$$

[1] Подпространство V линейного пространства называется антиинвариантным относительно линейного преобразования T, если $V\perp TV$.

где функции Λ и M имеют вид

$$\Lambda = 2^{1/2}\mathcal{W}^{+}\check{\Lambda},$$
$$\mathrm{M} = 2^{1/2}\mathcal{W}^{+}\check{\mathrm{M}}.$$

Ясно, что так определенные отображения $\mathcal{B}^0_\lambda$ и $\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda$ действительно являются эффективным оператором и корректором для $\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda$. Повторяя рассуждения пункта 8.4 в применении к $\mathcal{B}^0_\lambda$ и $\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda$, получаем для них следующие представления:

$$\mathcal{B}^0_\lambda = \left(\mathcal{W}^{+}\right)\, {}^{N}\mathcal{B}^0_\lambda \left(\mathcal{W}^{+}\right)^{*} \oplus \left(\mathcal{W}^{-}\right)\, {}^{D}\mathcal{B}^0_\lambda \left(\mathcal{W}^{-}\right)^{*}, \tag{8.15}$$

$$\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda = \left(\mathcal{W}^{+}\right)\, {}^{N}\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda \left(\mathcal{W}^{+}\right)^{*} \oplus \left(\mathcal{W}^{-}\right)\, {}^{D}\mathcal{K}^\varepsilon_\lambda \left(\mathcal{W}^{-}\right)^{*}. \tag{8.16}$$

Тогда формулы (8.13), (8.15), (8.16), унитарность преобразований $\mathcal{W}^{\pm}$ вместе с теоремой 1.6 для оператора $\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda$ в удвоенной полосе 2Π доказывают утверждение теоремы 8.1.

§ 9. Задача усреднения для оператора с сингулярным потенциалом

Для иллюстрации полученных результатов приведем пример усреднения эллиптического оператора второго порядка с сингулярным (то есть содержащим растущий множитель) потенциалом.

Предположим, что отображения $g_j(\cdot)$, $h_j(\cdot)$ $(j \in \{1, 2\})$, $Q(\cdot)$, $Q_*(\cdot)$ удовлетворяют условиям 1, 2, 3 в случае периодической задачи и условиям 5, 6, 7 — в случае задачи типа Дирихле или Неймана. Пусть вещественнозначная функция $R(\cdot)$ подчинена тем же ограничениям, что и $Q(\cdot)$; будем считать также, что $\int_{(0,1)} R(y_1, x_2)\, dy_1 = 0$ при п. в. $x_2 \in (0, a)$. Определим с помощью формы

$$\begin{aligned} {}^{\#}\mathfrak{b}^\varepsilon_\lambda[u, u] = \int_\Pi \Bigg(\sum_{j=1}^{2} \Big(g^\varepsilon_j(\mathbf{x}) \left|\mathrm{D}_j u\right|^2 + 2\operatorname{Re}\left(h^\varepsilon_j(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_j u \cdot \overline{u}\right)\Big) + \\ + \varepsilon^{-1} R^\varepsilon(\mathbf{x}) |u|^2 + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) |u|^2 + \lambda Q^\varepsilon_*(\mathbf{x}) |u|^2 \Bigg) d\mathbf{x}, \\ u \in D\left[{}^{\#}\mathfrak{b}^\varepsilon_\lambda\right],\ \lambda \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in (0, 1], \end{aligned}$$

самосопряженный полуограниченный снизу оператор ${}^{\#}\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda$ в пространстве $L_2(\Pi)$ (сейчас символ # служит для обозначения периодических граничных условий, условий типа Дирихле или Неймана).

Сингулярный потенциал $\varepsilon^{-1}R^\varepsilon(\cdot)$ оператора ${}^{\#}\mathcal{B}^\varepsilon_\lambda$ допускает представление, позволяющее применить к оператору теорему 1.6 или 8.1. Введем функцию $r(\cdot)$ — периодическое по x_1 (период равен 1) решение задачи

$$R(\mathbf{x}) = -\mathrm{D}_1 r(\mathbf{x}), \qquad r(0, x_2) = 0.$$

Отображение $r(\cdot)$, очевидно, задано соотношением

$$r(\mathbf{x}) = -i \int_{(0, x_1)} R(y_1, x_2)\, dy_1$$

и удовлетворяет требованиям, наложенным на h_1, притом его постоянная Липшица $\|r\|_{\mathrm{Lip}([0,a];\, L_2(0,1))}$ оценивается сверху через $\|R\|_{\mathrm{Lip}([0,a];\, L_1(0,1))}$. Так как $\overline{r(\mathbf{x})} = -r(\mathbf{x})$, то при $u \in D\left[{}^{\#}\mathfrak{b}^\varepsilon_\lambda\right]$ верно равенство

$$\varepsilon^{-1} R^\varepsilon(\mathbf{x})\, u = r^\varepsilon(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_1 u + \mathrm{D}_1 \left(\overline{r^\varepsilon(\mathbf{x})} u\right),$$

которое приводит форму ${}^{\#}\mathfrak{b}_\lambda^\varepsilon$ к виду

$$
{}^{\#}\mathfrak{b}_\lambda^\varepsilon [u,\, u] = \int\limits_{\Pi} \Bigg(\sum_{j=1}^{2} \Big(g_j^\varepsilon(\mathbf{x}) \, |\mathrm{D}_j u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\big(h_j^\varepsilon(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_j u \cdot \overline{u} \big) \Big) + \\ + 2\,\mathrm{Re}\,\big(r^\varepsilon(\mathbf{x})\, \mathrm{D}_1 u \cdot \overline{u} \big) + Q^\varepsilon(\mathbf{x})\, |u|^2 + \lambda Q_*^\varepsilon(\mathbf{x})\, |u|^2 \Bigg) d\mathbf{x}, \\ u \in D\left[{}^{\#}\mathfrak{b}_\lambda^\varepsilon \right].
$$

Таким образом, задача усреднения для соответствующего ей оператора укладывается в уже изученную схему.

Приложение А. Лемма о дифференцировании по параметру

Данное приложение посвящено проверке леммы 5.3. Повторим ее формулировку.

Лемма А.1. *Пусть* $k^2 + \varepsilon^2 \leqslant \tau_0^2$, $\varepsilon > 0$. *Тогда при* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *и* $z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}$ *функция* $u = \big(\mathcal{A}_{\lambda,\, z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\big)^{-1}\varphi$ *имеет обобщенную производную* $\mathrm{D}_2 u$, *причем* $\mathrm{D}_2 u \in L_2\big((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\big)$.

○ Отметим сразу оценку

$$
\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta^{-1} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}
$$

функции u, которая следует из формулы (5.8). Далее, по условию леммы, $u \in D\big(\mathcal{A}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\big) \subset L_2\big((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\big)$ является решением уравнения

$$
\big(\mathcal{A}_{\lambda,\, z}^{(1)}(k;\,\varepsilon)\big)\, u = \varphi,
$$

понимаемого в слабом смысле, то есть u удовлетворяет тождеству

$$
\mathfrak{a}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\,[u,\, \eta] - z\,(u,\, \eta)_{L_2(\Omega)} = (\varphi,\, \eta)_{L_2(\Omega)}, \qquad \eta \in L_2\big((0,\, a)\,;\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\big). \tag{A.1}
$$

Выберем в качестве η функцию u, тогда

$$
\mathfrak{a}_\lambda^{(1)}(k;\,\varepsilon)\,[u,\, u] \leqslant \delta^{-2}\,(|z| + \delta)\, \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant 3\delta^{-1} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 .
$$

Вместе с неравенством (3.4) это приводит к оценке

$$
\|(\mathrm{D}_1 + k)\, u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant \delta^{-2} \left(1 + 6 \left\|g_1^{-1}\right\|_\infty \delta\right) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 = c_0(\delta)\, \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 . \tag{A.2}
$$

Будем интерпретировать, склеив ребра $\{x_2 = 0\}$ и $\{x_2 = a\}$, область Ω как боковую поверхность цилиндра. Поскольку коэффициенты в выражении (A.1) периодичны по переменной x_2, то их свойства гладкости (условия 1, 2 и 3) перенесутся на полученное пространство $\Sigma = (0,\, 1) \times \mathbb{T}$.

Введем оператор разностного отношения Δ_h, $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, формулой

$$
(\Delta_h v)(\mathbf{x}) = \frac{v(x_1,\, x_2 + h) - v(x_1,\, x_2)}{h}, \qquad v \in L_2(\Sigma)\,,\ \mathbf{x} \in \Sigma.
$$

Возьмем в тождестве (A.1) вместо η функцию $\Delta_{-h}\eta$ с $\eta \in L_2\big(\mathbb{T};\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\big)$, тогда

$$
\int\limits_\Sigma g_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1 + k)\, u \cdot \overline{(\mathrm{D}_1 + k)\, \Delta_{-h}\eta}\, d\mathbf{x} + \\ + \varepsilon \int\limits_\Sigma \Big(h_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1 + k)\, u \cdot \overline{\Delta_{-h}\eta} + \overline{u h_1(\mathbf{x})\,(\mathrm{D}_1 + k)\, \Delta_{-h}\eta} \Big)\, d\mathbf{x} + \\ + \varepsilon^2 \int\limits_\Sigma Q(\mathbf{x})\, u \overline{\Delta_{-h}\eta}\, d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \lambda \int\limits_\Sigma Q_*(\mathbf{x})\, u \overline{\Delta_{-h}\eta}\, d\mathbf{x} = \int\limits_\Sigma (zu + \varphi)\, \overline{\Delta_{-h}\eta}\, d\mathbf{x}, \\ \eta \in L_2\big(\mathbb{T};\, \widetilde{H}^1(0,\, 1)\big).
$$

Используя для $\zeta,\, \xi \in L_2(\Sigma)$ тождества

$$
(\Delta_h(\zeta\xi))(\mathbf{x}) = (\Delta_h\zeta)(\mathbf{x})\, \xi(\mathbf{x}) + \zeta(x_1,\, x_2 + h)\,(\Delta_h\xi)(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Sigma,
$$

и

$$
\int\limits_\Sigma \zeta \Delta_{-h}\xi\, d\mathbf{x} = -\int\limits_\Sigma \Delta_h\zeta \cdot \xi\, d\mathbf{x},
$$

преобразуем полученное соотношение к виду

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Sigma}\Big(g_1(x_1,\,x_2+h)(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u+(\Delta_h g_1)(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)u\Big)\overline{(\mathrm{D}_1+k)\eta}d\mathbf{x}+\\
+\varepsilon\int\limits_{\Sigma}\Big(h_1(x_1,\,x_2+h)(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u+(\Delta_h h_1)(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)u\Big)\overline{\eta}d\mathbf{x}+\\
+\varepsilon\int\limits_{\Sigma}\Big(\Delta_h u\cdot\overline{h_1(x_1,\,x_2+h)}+u\overline{(\Delta_h h_1)(\mathbf{x})}\Big)\overline{(\mathrm{D}_1+k)\eta}d\mathbf{x}+\\
+\varepsilon^2\int\limits_{\Sigma}\Big(Q(x_1,\,x_2+h)\Delta_h u+(\Delta_h Q)(\mathbf{x})u\Big)\overline{\eta}d\mathbf{x}+\\
+\varepsilon^2\lambda\int\limits_{\Sigma}\Big(Q_*(x_1,\,x_2+h)\Delta_h u+(\Delta_h Q_*)(\mathbf{x})u\Big)\overline{\eta}d\mathbf{x}=\\
=\int\limits_{\Sigma}(z\Delta_h u+\Delta_h\varphi)\overline{\eta}d\mathbf{x},\\
\eta\in L_2\big(\mathbb{T};\,\widetilde{H}^1(0,\,1)\big).\end{gathered}\tag{A.3}$$

Подставим теперь в (A.3) $\eta=\Delta_h u$:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Sigma}g_1(x_1,\,x_2+h)\left|(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u\right|^2d\mathbf{x}=-\int\limits_{\Sigma}(\Delta_h g_1)(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)u\cdot\overline{(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u}d\mathbf{x}-\\
-\varepsilon\int\limits_{\Sigma}\Big(h_1(x_1,\,x_2+h)(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u+(\Delta_h h_1)(\mathbf{x})(\mathrm{D}_1+k)u\Big)\overline{\Delta_h u}d\mathbf{x}-\\
-\varepsilon\int\limits_{\Sigma}\Big(\Delta_h u\cdot\overline{h_1(x_1,\,x_2+h)}+u\overline{(\Delta_h h_1)(\mathbf{x})}\Big)\overline{(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u}d\mathbf{x}-\\
-\varepsilon^2\int\limits_{\Sigma}\Big(Q(x_1,\,x_2+h)\Delta_h u+(\Delta_h Q)(\mathbf{x})u\Big)\overline{\Delta_h u}d\mathbf{x}-\\
-\varepsilon^2\lambda\int\limits_{\Sigma}\Big(Q_*(x_1,\,x_2+h)\Delta_h u+(\Delta_h Q_*)(\mathbf{x})u\Big)\overline{\Delta_h u}d\mathbf{x}+\\
+\int\limits_{\Sigma}(z\Delta_h u+\Delta_h\varphi)\overline{\Delta_h u}d\mathbf{x}.\end{gathered}\tag{A.4}$$

Левую часть (A.4) оценим снизу:

$$\int\limits_{\Sigma}g_1(x_1,\,x_2+h)\left|(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u\right|^2d\mathbf{x}\geqslant\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1}\left\|(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u\right\|^2_{L_2(\Sigma)};$$

правую — сверху через

$$\tfrac12\left\|g_1^{-1}\right\|_\infty^{-1}\Big(\left\|(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u\right\|^2_{L_2(\Sigma)}+c_1(\varepsilon;\,\delta)\left\|\Delta_h u\right\|^2_{L_2(\Sigma)}+c_2(\varepsilon;\,\delta)\left\|\varphi\right\|^2_{L_2(\Sigma)}+\left\|\partial_2\varphi\right\|^2_{L_2(\Sigma)}\Big)$$

с рациональными функциями $c_1(\varepsilon;\,\delta)$, $c_2(\varepsilon;\,\delta)$, коэффициенты которых определяются по исходным данным задачи. Здесь были использованы полученные ранее формулы (5.4), (5.5), (A.2) и следствие 1.2 и было учтено, что φ имеет обобщенную производную по второй переменной класса $L_2(\Sigma)$. Таким образом, доказано следующее неравенство:

$$\left\|(\mathrm{D}_1+k)\Delta_h u\right\|^2_{L_2(\Sigma)}\leqslant c_1(\varepsilon;\,\delta)\left\|\Delta_h u\right\|^2_{L_2(\Sigma)}+c_2(\varepsilon;\,\delta)\left\|\varphi\right\|^2_{L_2(\Sigma)}+\left\|\partial_2\varphi\right\|^2_{L_2(\Sigma)}.\tag{A.5}$$

Согласно условию, $\operatorname{Im} z \neq 0$. Приравнивая мнимые составляющие от обеих частей равенства (A.4), приходим к тождеству

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} z \int\limits_{\Sigma} |\Delta_h u|^2 \, d\mathbf{x} = \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} (\Delta_h g_1)(\mathbf{x}) (\mathrm{D}_1 + k) u \cdot \overline{(\mathrm{D}_1 + k) \Delta_h u} d\mathbf{x} + \\ + \varepsilon \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} \Big((\Delta_h h_1)(\mathbf{x}) (\mathrm{D}_1 + k) u \cdot \overline{\Delta_h u} + u \overline{(\Delta_h h_1)(\mathbf{x}) (\mathrm{D}_1 + k) \Delta_h u} \Big) d\mathbf{x} + \\ + \varepsilon^2 \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} (\Delta_h Q)(\mathbf{x}) u \overline{\Delta_h u} d\mathbf{x} + \varepsilon^2 \lambda \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} (\Delta_h Q_*)(\mathbf{x}) u \overline{\Delta_h u} d\mathbf{x} - \operatorname{Im} \int\limits_{\Sigma} \Delta_h \varphi \cdot \overline{\Delta_h u} d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Вместе с (A.5) оно позволяет получить оценку

$$\|\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-2} \, \hat{c}_3 (\varepsilon;\, \delta) \left(\|\varphi\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|\partial_2 \varphi\|^2_{L_2(\Sigma)} \right), \tag{A.6}$$

в которой рациональная функция $\hat{c}_3(\varepsilon;\, \delta)$ задана исходными параметрами задачи и не зависит от h. В итоге, формулы (A.5) и (A.6) доказывают ограниченность множества $\{\Delta_h u\}_{h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$ в пространстве $L_2 \left(\mathbb{T};\, \widetilde{H}^1 (0,\, 1) \right)$:

$$\|\Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|\mathrm{D}_1 \Delta_h u\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant C^2_{\varphi} (\varepsilon;\, \delta;\, z),$$

из чего следует существование обобщенных производных $\mathrm{D}_2 u$ и $\mathrm{D}_2 \mathrm{D}_1 u$ с оценками норм

$$\|\mathrm{D}_2 u\|^2_{L_2(\Sigma)} + \|\mathrm{D}_2 \mathrm{D}_1 u\|^2_{L_2(\Sigma)} \leqslant C^2_{\varphi} (\varepsilon;\, \delta;\, z).$$

●

Список литературы

[BSu] *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. — 2003. — Т. 15, вып. 5. — С. 1–108.

[Su1] *Суслина Т. А.* Об усреднении периодического эллиптического дифференциального оператора в полосе. // Алгебра и анализ. — 2004. — Т. 16, вып. 1. — С. 269–292.

[Su2] *Суслина Т. А.* Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка. // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, вып. 1. — С. 108–222.

[LaU] *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — Москва: Наука, 1973. — С. 578.

[BuCaSu] *Bunoiu R., Cardone G., Suslina T.* Spectral approach to homogenization of an elliptic operator periodic in some directions. // Math. Meth. Appl. Sci. — 2011. — Т. 34, вып. 9. — С. 1075–1096.

[S-HT] *Sanchez-Hubert J., Turbe N.* Ondes élastiques dans une bande périodique. // RAIRO Modélisation mathématique et analyse numérique — 1986. — Т. 20, вып. 3. — С. 539–561.

Санкт-Петербургский
государственный университет
физический факультет
Ульяновская ул., д. 3
Петергоф
Санкт-Петербург
Россия
198504
E-mail: N.N.Senik@gmail.com