

О-фреймы для операторов в банаховых пространствах

Олег Рейнов

В работе введено новое понятие О-фрейма для оператора в банаховых пространствах. Исследованы ограниченно полные и натягивающие О-фреймы. Показано, что оператор имеет О-фрейм тогда и только тогда, когда 1) он факторизуется через пространство с базисом, и, если он действует из сепарабельного пространства, то тогда и только тогда, когда 2) он обладает свойством ограниченной аппроксимации. Среди прочего, аналогичный факт установлен для введенных здесь же БО-фреймов (безусловных операторных фреймов).

Также, например, установлено, что всякий оператор имеющий ограниченно полный и натягивающий О-фрейм, слабо компактен. Приведены и другие применения. Одно из них: дан отрицательный ответ на вопрос Марии Скопиной о существовании в $L_1(0, 1)$ безусловной системы представления.

§1. О-фреймы

Мы используем стандартные обозначения и терминологию теории операторов в банаховых пространствах (см., например, [2]).

Определение 1.1. Пусть $T \in L(X, W)$, $(x'_k)_{k=1}^\infty \subset X^*$, $(w_k)_{k=1}^\infty \subset W$. Мы говорим, что $\mathcal{F} := ((x'_k)_{k=1}^\infty, (w_k)_{k=1}^\infty)$ есть О-фрейм для T , если для каждого $x \in X$ ряд $\sum_{k=1}^\infty \langle x'_k, x \rangle w_k$ сходится в W и

$$Tx = \sum_{k=1}^\infty \langle x'_k, x \rangle w_k, \quad x \in X.$$

Если существует О-фрейм для T , то мы говорим, что T имеет О-фрейм.

Примеры, 1) Пусть $\Delta : l_\infty \rightarrow l_1$ — диагональный оператор с диагональю $(\delta_k) \in l_1$. Тогда $\Delta x = \sum \langle e_k, x \rangle e_k$, где (e_k) — последовательность единичных векторов в l_p (в нашем случае, в l_1), $x = (x_k) \in l_\infty$.

2) Если в X есть базис Шаудера $(f_k)_{k=1}^\infty$, то для любого $x \in X$ имеем: $x = \sum_{k=1}^\infty \langle f'_k, x \rangle f_k$, где (f'_k) — биортогональная к (f_k) система. Следовательно, для любого банахова пространства W и каждого оператора $T : X \rightarrow W$

$$Tx = \sum_{k=1}^\infty \langle f'_k, x \rangle T f_k, \quad x \in X.$$

AMS Subject Classification 2010: 46B28 Spaces of operators; tensor products; approximation properties.

Key words: 46B28 Approximation of operators; bounded approximation property.

3) Если W имеет базис Шаудера, например, (w_k) с биортогональной системой (w'_k) , то всякий элемент $w \in W$ разлагается в ряд $w = \sum_{k=1}^{\infty} \langle w'_k, w \rangle w_k$ и для $x \in X$ и $T : X \rightarrow W$ получаем: $\langle Tx, w'_k \rangle = \langle x, T^* w'_k \rangle$ и, следовательно, $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle T^* w'_k, x \rangle w_k$. Отметим, что в этом примере пространство W сепарабельно, а пространство X не обязано быть сепарабельным.

4) Если пространство X сепарабельно и обладает свойством ограниченной аппроксимации, то оно дополняемо вкладывается в некоторое банахово пространство X_0 с базисом [3]. Пусть $P : X_0 \rightarrow X$ — непрерывный проектор и $((x'_k), (x_k))$ — базис для X_0 (т.е., соответствующая биортогональная система). Тогда для $x_0 \in X_0$ мы имеем разложение $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x_0 \rangle x_k$ и, если $x \in X$ и $x = Px_0$, то $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x_0 \rangle Px_k$. Но $x \in X \subset X_0$; следовательно, $x = Px$ и

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle x_k = P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle Px_k.$$

Теперь, любой оператор $T \in L(X, W)$ имеет О-фрейм с разложением вида

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k|_X, x \rangle TPx_k.$$

Аналогичный пример можно рассмотреть и для случая, когда W сепарабельно и обладает свойством ограниченной аппроксимации.

Лемма 1.1. Пусть X, V, Z, W — банаховы пространства, $T \in L(X, W)$, $A \in L(W, V)$, $B \in L(Z, X)$. Если оператор T имеет О-фрейм, то и оператор $ATB : Z \rightarrow V$ имеет О-фрейм.

Доказательство. Пусть $((x'_k), (w_k))$ — О-фрейм для T . Зафиксируем $z \in Z$, и пусть $x = Bz$. Тогда $Tx = \sum \langle x'_k, x \rangle w_k$, $ATx = \sum \langle x'_k, x \rangle Aw_k$ и $ATBz = ATx = \sum \langle x'_k, Bz \rangle Aw_k = \sum \langle B^* x'_k, z \rangle Aw_k$. Таким образом, $((B^* x'_k), (Aw_k))$ есть О-фрейм для оператора ATB .

Следствие 1.1. Если оператор $T \in L(X, W)$ факторизуется через банахово пространство с базисом Шаудера, то он имеет О-фрейм.

Доказательство. Применяем лемму 1.1 и примеры 2–3.

Следствие 1.2. Если оператор $T \in L(X, W)$ факторизуется через банахово пространство со свойством ограниченной аппроксимации, то он имеет О-фрейм.

И еще одно свойство О-фреймов:

Предложение 1.1. Пусть $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$ есть О-фрейм для $T \in L(X, W)$. Тогда дуальная система $\mathcal{F}^d := ((w_k), (x'_k))$ есть w^* -слабый О-фрейм для T^* , то есть

$$T^* w' = w^* \text{-} \lim_N \sum_{k=1}^N \langle w', w_k \rangle x'_k, \quad w' \in W^*.$$

Доказательство. Для $w' \in W^*$ и $x \in X$ имеем:

$$\langle Tx, w' \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle w_k, w' \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle w', w_k \rangle x'_k, x \right\rangle,$$

откуда $T^*w' = w^* - \lim_N \sum_{k=1}^N x'_k \langle w', w_k \rangle$ (предел в топологии $\sigma(X^*, X)$).

Пока мы рассмотрели лишь простейшие свойства О-фреймов. Намного более серьезные результаты появятся ниже.

В теории базисов и фреймов в банаховых пространствах часто возникают термины "натягивающий", "ограниченно полный" (см., например, [1], [2]). Мы вводим соответствующие понятия для операторных фреймов.

Определение 1.2. О-фрейм $((x'_k), (w_k))$ для T называется ограниченно полным, если для любого $x'' \in X^{**}$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k$ сходится в пространстве W .

Определение 1.3. О-фрейм $((x'_k), (w_k))$ для T называется натягивающим, если для любого $w' \in W^*$ норма $\| \sum_{k=n+1}^{\infty} x'_k \langle w', w_k \rangle \| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Предложение 1.2. Пусть $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$ есть О-фрейм для $T \in L(X, W)$. Дуальная система $\mathcal{F}^d := ((w_k), (x'_k))$ есть О-фрейм для T^* тогда и только тогда, когда О-фрейм \mathcal{F} натягивающий.

Доказательство. Если О-фрейм \mathcal{F} является натягивающим, то, во-первых (предложение 1.1), для $w' \in W^*$

$$T^*w' = w^* - \lim_N \sum_{k=1}^N \langle w', w_k \rangle x'_k$$

и, во-вторых,

$$\| \sum_{k=n+1}^{\infty} x'_k \langle w', w_k \rangle \| \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle w', w_k \rangle x'_k$ сходится в X^* , причем к T^*w' .

Обратно, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle w', w_k \rangle x'_k$ сходится к x_0 в X^* , то, по тому же предложению 1.1, он сходится к T^*w' . Следовательно, остаток этого ряда стремится к нулю в X^* , то есть, О-фрейм \mathcal{F} натягивающий.

Предложение 1.3. Пусть $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$ есть О-фрейм для $T \in L(X, W)$. Следующие утверждения равносильны:

- 1) О-фрейм \mathcal{F} ограниченно полный;
- 2) для каждого $x'' \in X^{**}$ из ограниченности последовательности частичных сумм $(\sum_{k=1}^N \langle x'', x'_k \rangle w_k)_{N=1}^{\infty}$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k$ в пространстве W .

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) очевидна.

2) \Rightarrow 1). Пусть $x'' \in X^{**}$. Надо показать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k$ сходится в W .

Для любых $w' \in W^*$ и $x \in X$ имеем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{k=1}^N \langle w', w_k \rangle x'_k, x \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle w', \sum_{k=1}^N w_k \langle x'_k, x \rangle \rangle = \langle w', Tx \rangle.$$

В частности, последовательность $(\sum_{k=1}^N \langle w', w_k \rangle x'_k)_{N=1}^{\infty}$ ограничена в X^* . Поэтому, для $w' \in W^*$ и $x'' \in X^{**}$ числовая последовательность

$$\left(\sum_{k=1}^N \langle w', w_k \rangle \langle x'', x'_k \rangle \right)_{N=1}^{\infty}$$

ограничена, то есть последовательность $(\sum_{k=1}^N w_k \langle x'', x'_k \rangle)_{N=1}^{\infty}$ является $\sigma(W, W^*)$ -ограниченной. Следовательно, она сильно ограничена в W . По условию 2), ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k$ сходится в пространстве W , т.е. наш О-фрейм \mathcal{F} — ограниченно полный.

Применяя оба предложения, получаем один из основных фактов данного раздела:

Теорема 1.1. Пусть $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$ есть О-фрейм для $T \in L(X, W)$. Если этот О-фрейм \mathcal{F} ограниченно полный и натягивающий, то оператор T слабо компактен.

Доказательство. Так как \mathcal{F} натягивающий, то по предложению 1.2 \mathcal{F}^d есть О-фрейм для T^* , т.е. для любого $w' \in W^*$

$$T^*w' = \sum_{k=1}^{\infty} \langle w', w_k \rangle x'_k.$$

Поэтому, для $x'' \in X^{**}$

$$\langle T^*w', x'' \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle w', w_k \rangle \langle x'', x'_k \rangle = \lim_N \langle w', \sum_{k=1}^N \langle x'', x'_k \rangle w_k \rangle,$$

или

$$\langle w', T^{**}x'' \rangle = \lim_N \langle w', \sum_{k=1}^N \langle x'', x'_k \rangle w_k \rangle.$$

Так как \mathcal{F} есть ограниченно полный О-фрейм, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k$ сходится в W , пусть, например, к элементу $w_0 \in W$. Следовательно,

$$\langle w', T^{**}x'' \rangle = \langle w', \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'', x'_k \rangle w_k \rangle. \quad w' \in W^*.$$

Или: $\langle T^{**}x'', w' \rangle = \langle w', w_0 \rangle$ для всякого $w' \in W^*$. Таким образом, $T^{**}x'' = w_0$ и, в частности, $T^{**}x'' \in W$, то есть, если $x'' \in X^{**}$, то $T^{**}x'' \in W$ и, следовательно, оператор T слабо компактен.

Следующая теорема — первая из теорем, которые связывают введенное нами понятие О-фрейма и понятие свойства ВАР (ограниченной аппроксимации) для операторов (подробней о ВАР см. ниже).

Теорема 1.2. Пусть $T \in L(X, W)$. Следующие утверждения равносильны:

- 1) T имеет О-фрейм;
- 2) оператор T факторизуется через банахово пространство с базисом Шаудера;
- 3) оператор T факторизуется через банахово пространство последовательностей с базисом Шаудера;

Доказательство. Сначала мы покажем, что из 1) вытекает 3). Пусть оператор T имеет О-фрейм $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$. Мы можем (и будем) считать, что $w_k \neq 0$ для каждого k . Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle w_k$ сходится (к Tx) для каждого $x \in X$, то нормы операторов $\sum_{k=1}^N x'_k \otimes w_k$ (равномерно) ограничены (например, константой $K > 0$).

Рассмотрим пространство числовых последовательностей

$$t := \{a = (a_k)_{k=1}^{\infty} : \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k \text{ сходится в } W\},$$

и пусть e_k — k -й единичный вектор в t (т.е., $(e_k)_s = 0$ при $k \neq s$ и $(e_k)_k = 1$).

Положим

$$\| \|a\| \|_t := \sup_N \left\| \sum_{k=1}^N a_k w_k \right\| \left(\geq \lim_N \left\| \sum_{k=1}^N a_k w_k \right\| \right).$$

Так как для финитной последовательности $a = (a_1, a_2, \dots, a_{N+s}, 0, 0, \dots)$

$$\| \| \sum_{k=1}^N a_k e_k \| \| \leq \| \| \sum_{k=1}^{N+s} a_k e_k \| \|$$

и линейная оболочка векторов $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ плотна в t , то (e_k) — монотонный базис (см. [2]) в банаховом пространстве t . При этом, если $j : t \rightarrow W$ — естественное отображение $a \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k$, то $\| \|j\| \| \leq 1$ (по определению нормы $\| \| \cdot \| \|$ в t). Положим $Ax := (\langle x'_k, x \rangle)_{k=1}^{\infty}$; так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle w_k$ сходится, то $Ax \in t$. Далее,

$$\| \|Ax\| \|_t = \sup_N \left\| \sum_{k=1}^N \langle x'_k, x \rangle w_k \right\| \leq K \| \|x\| \|, \quad \forall x \in X.$$

Таким образом, линейное отображение A непрерывно из X в t , и $T = jA : X \rightarrow W$.

3) влечет 2) — очевидно, а утверждение 1) вытекает из утверждения 2) по следствию 1.1.

Наряду с понятием О-фрейма, мы можем рассмотреть (и кратко рассмотрим) понятие безусловного О-фрейма.

Определение 1.4. Пусть $T \in L(X, W)$, $(x'_k)_{k=1}^{\infty} \subset X^*$, $(w_k)_{k=1}^{\infty} \subset W$. Мы говорим, что $\mathcal{F} := ((x'_k)_{k=1}^{\infty}, (w_k)_{k=1}^{\infty})$ есть БО-фрейм для T , если для каждого $x \in X$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle w_k$ сходится безусловно в W и

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle w_k, \quad x \in X.$$

Если существует БО-фрейм для T , то мы говорим, что T имеет БО-фрейм.

Теорема 1.3. Пусть $T \in L(X, W)$. Следующие утверждения равносильны:

- 1) T имеет БО-фрейм;
- 2) оператор T факторизуется через банахово пространство с безусловным базисом;
- 3) оператор T факторизуется через банахово пространство последовательностей с безусловным базисом.

Доказательство. Сначала мы покажем, что из 1) вытекает 3). Пусть оператор T имеет БО-фрейм $\mathcal{F} := ((x'_k), (w_k))$. Мы можем (и будем) считать, что $w_k \neq 0$ для каждого k . Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle w_k$ безусловно сходится (к Tx) для каждого $x \in X$, то билинейная форма $B(\cdot, \cdot) : X \times l_{\infty} \rightarrow X$, определенная для $x \in X$ и $a \in l_{\infty}$ формулой $B(x, a) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle x'_k, x \rangle w_k$, ограничена.

Рассмотрим пространство числовых последовательностей

$$u := \{a = (a_k)_{k=1}^{\infty} : \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k \text{ безусловно сходится в } W\},$$

и пусть e_k — k -й единичный вектор в t (т.е., $(e_k)_s = 0$ при $k \neq s$ и $(e_k)_k = 1$).

Положим

$$\| \|a\| \|_u := \sup_{\|(b_k)\|_{l_{\infty}} \leq 1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k a_k w_k \right\|.$$

Тогда (e_k) — безусловный базис в банаховом пространстве u . При этом, если $j : u \rightarrow W$ — естественное отображение $a \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k$, то $\|j\| \leq 1$ (по определению нормы $\| \cdot \|_u$ в u). Положим $Ax := (\langle x'_k, x \rangle)_{k=1}^{\infty}$; так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x \rangle w_k$ безусловно сходится, то $Ax \in t$. Далее,

$$\| \|Ax\| \|_t = \sup_{\|(b_k)\|_{l_{\infty}} \leq 1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} b_k \langle x'_k, x \rangle w_k \right\| \leq \|B\| \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Таким образом, линейное отображение A непрерывно из X в u , и $T = jA : X \rightarrow u \rightarrow W$.

То, что 3) влечет 2) и 2) влечет 1) — очевидно.

В качестве одного из следствий последнего факта, приведем ответ на вопрос Марии Скопиной (примерно трех-летней давности; тогда я ответил на вопрос о существовании в L_1 безусловной системы представления, используя совершенно другие соображения):

Следствие 1.3. Пространство $L_1(0, 1)$ не имеет счетной безусловной системы представления, то есть, тождественный оператор в этом пространстве не обладает безусловным фреймом.

Для доказательства достаточно вспомнить теорему А. Пелчинского (см. [2, р.24; 1.d.1]): пространство $L_1(0, 1)$ не является подпространством банахова пространства с безусловным базисом.

Наша следующая цель — связать понятие О-фрейма со свойством ограниченной аппроксимации операторов.

§2. Об операторах со свойством ограниченной аппроксимации

Определение 2.1. Пусть $T \in L(X, W)$, $C \geq 1$. Мы говорим, что T имеет свойство С-ВАР (свойство С-ограниченной аппроксимации), если для всякого компактного подмножества K из X , для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $R : X \rightarrow W$, что $\|R\| \leq C\|T\|$ и $\sup_{x \in K} \|Rx - Tx\| \leq \varepsilon$. Оператор T имеет (свойство) ВАР, если он имеет свойство С-ВАР для некоторой постоянной $C \in [1, \infty)$.

Лемма 2.1. T имеет С-ВАР тогда и только тогда, когда для любого конечного семейства $(x_k)_{k=1}^N \subset X$, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $R : X \rightarrow W$, что $\|R\| \leq C\|T\|$ и $\sup_{1 \leq k \leq N} \|Rx_k - Tx_k\| \leq \varepsilon$.

Доказательство. Мы можем (и будем) считать, что $\|T\| = 1$. Зафиксируем компактное подмножество $K \subset X$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $\varepsilon_0 := \varepsilon/(2 + C)$, $(x_k)_{k=1}^M$ — ε_0 -сеть для K в X , $R \in X^* \otimes W$, $\|R\| \leq C$ и $\sup_{1 \leq k \leq M} \|Rx_k - Tx_k\| \leq \varepsilon_0$. Возьмем произвольный $x \in K$, и пусть x_k таков, что $\|x - x_k\| \leq \varepsilon_0$. Тогда $\|Tx - Rx\| \leq \|x - x_k\| + \|Tx_k - Rx_k\| + \|Rx_k - Rx\| \leq \varepsilon_0 + \varepsilon_0 + C\varepsilon_0 = \varepsilon$.

Лемма 2.2. Пусть X, W — банаховы пространства, причем пространство X сепарабельно, и $T \in L(X, W)$. T имеет С-ВАР тогда и только тогда, когда существует последовательность $(Q_l)_{l=1}^\infty$ конечномерных операторов из X в W , для которой

1) при любом $x \in X$ ряд $\sum_{l=1}^\infty Q_l x$ сходится и

$$Tx = \sum_{l=1}^\infty Q_l x, \quad x \in X;$$

2) $\sup_N \|\sum_{l=1}^N Q_l\| \leq C\|T\|$.

Доказательство. Так как X сепарабельно, то существует последовательность $(x_k)_{k=1}^\infty$, которая плотна в замкнутом единичном шаре $\bar{B}_1(0)$ пространства X . Предположим, как и выше, что $\|T\| = 1$ и T имеет С-ВАР, то есть для каждого конечного множества $F \subset X$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой конечномерный оператор $R : X \rightarrow W$, что $\|R\| \leq C$ и $\sup_{f \in F} \|Rf - Tf\| \leq \varepsilon$. Для каждого N , пусть R_N есть конечномерный оператор из X в W со следующими свойствами:

- (i) $\|R_N\| \leq C$ и
- (ii) $\sup_{1 \leq n \leq N} \|R_N x_n - T x_n\| \leq 1/2^{N+1}$.

Если $n \in \mathbb{N}$, то для всякого $N \geq n$ имеем:

$$(iii) \quad \|R_N x_n - T x_n\| \leq \frac{1}{2^{N+1}}$$

и, следовательно, для фиксированного x_n

$$R_N x_n \rightarrow T x_n$$

при N стремящемся к ∞ .

Теперь, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta > 0$ таково, что $C\delta + \delta < \varepsilon$. Для $x \in \bar{B}_1(0)$, возьмем такой x_n , что $\|x_n - x\| < \delta$. Тогда найдется такой номер N_0 , что при $N \geq N_0$

$$\|R_N x - Tx\| \leq \|R_N\| \|x_n - x\| + \|R_N x_n - T x_n\| + \|T x_n - Tx\| \leq C\delta + \|T\|\delta < \varepsilon.$$

Таким образом, если $x \in X$, то $R_N x \rightarrow Tx$ при $N \rightarrow +\infty$.

Для завершения доказательства в части "только тогда" мы применим лемму:

Лемма 2.3. Пусть X, W — произвольные банаховы пространства, $C \geq 1$ и $T \in L(X, W)$. Предположим, что

(*) существует такая последовательность $(S_N)_{N=1}^\infty$ конечномерных операторов из X в W , что если $x \in X$, то $S_N x \rightarrow Tx$ при $N \rightarrow +\infty$ и $\|S_N\| \leq C\|T\|$ для каждого N .

Тогда существует такая последовательность $(Q_l)_{l=1}^\infty$ конечномерных операторов из X в W , что

1) для любого $x \in X$ ряд $\sum_{l=1}^\infty Q_l x$ сходится и

$$Tx = \sum_{l=1}^\infty Q_l x, \quad x \in X;$$

2) $\sup_N \|\sum_{l=1}^N Q_l\| \leq C\|T\|$.

Доказательство. Мы снова предполагаем, что $\|T\| = 1$. Положим $Q_1 := S_1, Q_l := S_l - S_{l-1}$ для $l > 1$, так что

$$S_N = S_1 + (S_2 - S_1) + \dots + (S_{N-1} - S_{N-2}) + (S_N - S_{N-1}) = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_N.$$

Отсюда следует, что

$$(1) \quad Tx = \sum_{l=1}^\infty Q_l x \quad \forall x \in X$$

и

$$(2) \quad \sup_N \|\sum_{l=1}^N Q_l\| = \sup_N \|S_N\| \leq C.$$

Часть "тогда, когда" доказательства леммы 2.2 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2.4. Пусть X, W — произвольные банаховы пространства, $C \geq 1$ и $T \in L(X, W)$. Если существует последовательность $(R_N)_{N=1}^\infty$ конечномерных операторов из X в W , сходящаяся поточечно к T и такая, что $\|R_N\| \leq C\|T\|$ для всех N , то T имеет С-ВАР.

Доказательство. Действительно, пусть $R_N x \rightarrow Tx$ для каждого $x \in X$ (и $\|R_N\| \leq C\|T\|$). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и компактное подмножество $K \subset X$. Положим $\varepsilon_0 := \varepsilon(\|T\| + 1 + C\|T\|)^{-1}$. Выберем конечную ε_0 -сеть $F \subset X$ для K и рассмотрим такой оператор R_{N_0} , что $\sup_{f \in F} \|R_{N_0} f - Tf\| \leq \varepsilon_0$. Тогда, для любого $x \in K$ найдется такой элемент $f_0 \in F$, что $\|f_0 - x\| \leq \varepsilon_0$, и мы получаем:

$$\|Tx - R_{N_0} x\| \leq \|T\| \varepsilon_0 + \varepsilon_0 + \|R_{N_0}\| \varepsilon_0 \leq \varepsilon_0(\|T\| + 1 + C\|T\|) = \varepsilon.$$

Следствие 2.1. Если X сепарабельно и $T \in L(X, W)$, то T имеет С-ВАР тогда и только тогда, когда существует последовательность $(R_N)_{N=1}^\infty$ конечномерных

операторов из X в W , которая поточечно сходится к оператору T и для которой $\|R_N\| \leq C\|T\|$ для всех N .

Следствие 2.2. Если X сепарабельно и $T \in L(X, W)$, то T имеет ВАР тогда и только тогда, когда существует последовательность конечномерных операторов из X в W , сходящаяся к оператору T поточечно.

§3. Свойство ограниченной аппроксимации и О-фреймы.

В этом разделе мы покажем, в частности, что каждый оператор в сепарабельных банаховых пространствах, обладающий свойством ограниченной аппроксимации, имеет О-фрейм.

Мы будем использовать результаты предыдущего параграфа, но заменим некоторые обозначения, поскольку основная идея доказательства центральной теоремы 3.1 восходит к А. Пелчинскому и нам представляется, что наилучшим вариантом является вариант с использованием обозначений из его важной работы [3].

Пусть X, W — произвольные банаховы пространства, $T \in L(X, W)$ и T обладает свойством (*) из Леммы 2.3. Рассмотрим последовательность $(Q_l)_{l=1}^\infty$, полученную в утверждении Леммы 2.3, и положим $A_p := Q_p$ ($p = 1, 2, \dots$) и $K := C(\geq 1)$, предполагая, что $\|T\| = 1$. Сейчас мы — в обозначениях (частично) статьи [3].

Теорема 3.1. Если $T : X \rightarrow W$ имеет свойство (*), то есть, если существует такая последовательность $(S_N)_{N=1}^\infty$ конечномерных операторов из X в W , что для любого $x \in X$ $S_N x \rightarrow T x$ при $N \rightarrow +\infty$ и $\|S_N\| \leq C\|T\|$ для каждого N , то оператор T имеет О-фрейм.

Доказательство. В вышеприведенных обозначениях (предполагая, что $\|T\| = 1$), имеем:

$$Tx = \sum_{p=1}^{\infty} A_p x, \quad \forall x \in X; \quad A_p \in X^* \otimes W, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{p=1}^n A_p \right\| \leq K$$

(заметим, что для каждого n $\|A_n\| \leq \left\| \sum_{p=1}^n A_p - \sum_{p=1}^{n-1} A_p \right\| \leq 2K$). Пусть $E_p = A_p(X) \subset W$, $m_p := \dim E_p$ для $p \geq 1$ и $m_0 = 0$. Мы будем действовать как в [3].

По лемме Ауэрбаха, существуют такие одномерные операторы $B_j^{(p)} : E_p \rightarrow E_p$, что $\|B_j^{(p)}\| = 1$ для $j = 1, 2, \dots, m_p$, и

$$\sum_{j=1}^{m_p} B_j^{(p)}(e) = e, \quad e \in E_p.$$

Положим $C_i^{(p)} := \frac{1}{m_p} B_j^{(p)}$ для $i = rm_p + j$ (где $r = 0, 1, \dots, m_p - 1; j = 1, 2, \dots, m_p$).

Тогда, для $e \in E_p$

$$\sum_{i=1}^{m_p^2} C_i^{(p)}(e) = m_p \cdot \sum_{j=1}^{m_p} \frac{1}{m_p} B_j^{(p)} e = \sum_{j=1}^{m_p} B_j^{(p)} e = e.$$

Кроме того, для любого $q \geq 1, q \leq m_p^2$ и некоторых $l < m_p$ и $k \leq m_p$ имеем:

$$\left\| \sum_{i=1}^q C_i^{(p)} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{lm_p} C_i^{(p)} + \sum_{i=lm_p+1}^{lm_p+k} C_i^{(p)} \right\| \leq l \cdot \frac{1}{m_p} \left\| \sum_{j=1}^{m_p} B_j^{(p)} \right\| + \frac{1}{m_p} \cdot \left\| \sum_{j=1}^k B_j^{(p)} \right\| \leq 1 + 1 = 2.$$

Теперь, пусть

$$\tilde{A}_s := C_i^{(p)} A_p$$

для $p \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, m_p^2$ и $s = m_0^2 + m_1^2 + \dots + m_{p-1}^2 + i$. Одномерный оператор \tilde{A}_s отображает X в $E_p \subset W$ следующим образом:

$$\tilde{A}_s : X \xrightarrow{A_p} E_p = A_p(X) \xrightarrow{C_i^{(p)}} E_p (\subset W).$$

Так как для каждого $n \in \mathbb{N}$, для некоторых k и $r \leq m_k^2$

$$\sum_{s=1}^n \tilde{A}_s = \sum_{p=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{m_p^2} C_i^{(p)} A_p + \sum_{i=1}^r C_i^{(k)} A_k,$$

то мы получаем, что

$$\left\| \sum_{s=1}^n \tilde{A}_s \right\| \leq \left\| \sum_{p=1}^{k-1} A_p \right\| + \left\| \sum_{i=1}^r C_i^{(k)} A_k \right\| \leq K + 2\|A_k\| \leq 5K.$$

Поскольку для каждого $x, x \in X, A_k x \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^n \tilde{A}_s x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^N A_p x = Tx.$$

Таким образом, $\sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s(x) = Tx$, где $\tilde{A}_s \in X^* \otimes W$ — одномерный оператор для любого s , откуда и следует, что оператор T имеет О-фрейм.

Из доказанной теоремы и результатов предыдущих параграфов получаем важнейшие следствия.

Следствие 3.1. Для любых банаховых пространств X и W и для любого оператора $T \in L(X, W)$ равносильны утверждения:

- (1) T имеет О-фрейм;
- (2) оператор T факторизуется через банахово пространство последовательностей с базисом;
- (3) существует последовательность конечномерных операторов из X в W , сходящаяся к оператору T поточечно.

Следствие 3.2. Пусть X — сепарабельное банахово пространство, W — произвольное банахово пространство и $T \in L(X, W)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) T имеет О-фрейм;
- (2) T обладает свойством ограниченной аппроксимации;
- (3) оператор T факторизуется через банахово пространство с базисом Шаудера.

References

- [1] P. Casazza, O. Christensen, D.T. Stoeva: *Frame expansions in separable Banach spaces*, J.Math.Anal.Appl., **307**(2) (2005), 710-723.
- [2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach spaces I: Sequence spaces*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1977).
- [3] A. Pełczyński : *Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis*, Studia Math., **XL** (1971), 239-243.

ST. PETERSBURG STATE UNIVERSITY, SAINT PETERSBURG, RUSSIA.

E-mail address: orein51@mail.ru