**В.Г.ОСМОЛОВСКИЙ**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

## СОДЕРЖАНИЕ



2014

**Осмоловский В.Г.**

**Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред.**

Для одной из возможных макроскопических моделей теории фазовых переходов механики сплошных сред приводится ее математическое исследование. Особое внимание уделяется изучению таких физически важных вопросов, как зависимость состояний равновесия от температуры, коэффициента поверхностного натяжения и области, занимаемой двухфазовой упругой средой.

http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/1999/index.html#03

## ВВЕДЕНИЕ

Стационарная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред может быть отнесена к нестандартным задачам вариационного исчисления. Для мотивации ее математической постановки (она будет дана в соответствующих главах основной части текста) опишем во введении физическую постановку этой задачи.

В квадратичном приближении плотность свободной энергии однофазовой неоднородной анизотропной среды, занимающей область $\Omega \subset R^m$, $m = 1, 2, 3$, записывается в виде

$$F(\nabla u, \tau, x) = a_{ijkl}(e_{ij}(\nabla u) - \zeta_{ij})(e_{kl}(\nabla u) - \zeta_{kl}) - \tau\kappa_{kl}a_{ijkl}(e_{ij}(\nabla u) - \zeta_{ij}) + F_0(\tau), \tag{0.1}$$

где $u = u(x)$, $x \in \Omega$ — поле смещений, $(\nabla u)_{ij} = u^i_{x_j}$, $e_{ij}(\nabla u) = 1/2(u^i_{x_j} + u^j_{x_i})$ — тензор деформации, $\zeta_{ij} = \zeta_{ij}(x)$ — тензор остаточной деформации, $\tau = \tau(x)$ — отклонение температуры от фиксированного значения, $F_0(\tau)$ полином второго порядка аргумента $\tau$. Функции $a_{ijkl}$, $\kappa_{ij}$, коэффициеты полинома $F_0$ зависят от $x \in \Omega$. Они определяются упругими и термодинамическими характеристиками среды и подчинены традиционным ограничениям, а по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до $m$.

Пусть $g$ и $f$ — поля объемных и поверхностных сил, действующих на упругую среду. Тогда для плотности (0.1) функционал энергии деформации определяется равенством

$$I[u, \tau] = \int_\Omega F(\nabla u, \tau, x)\,dx - \int_\Omega g \cdot u\,dx - \int_{\partial\Omega} f \cdot u\,dS, \tag{0.2}$$

а равновесное поле смещений $\hat{u}$ для фиксированного распределения температуры является решением следующей вариационной задачи

$$I[\hat{u}, \tau] = \inf_{u \in \mathbb{X}} I[u, \tau], \quad \hat{u} \in \mathbb{X}, \tag{0.3}$$

где $\mathbb{X}$ — множество допустимых полей смещений, которое задается граничным значением для функции $u$ на части (возможно пустой или совпадающей с $\partial\Omega$) границы области $\Omega$.

В двухфазовых упругих средах в процессе деформации происходят фазовые переходы, связанные с изменением кристаллической структуры. Для двухфазовых сред предполагается возможность реализации лишь двух структур, отмеченных значками $+$ и $-$, с наборами величин $a^\pm_{ijkl}$, $\kappa^\pm_{ij}$, $\zeta^\pm_{ijkl}$, $F^\pm_0$ в представлениях (0.1) плотностей энергии $F^\pm(\nabla u, \tau, x)$.

Обозначим через $\chi(x)$ характеристическую функцию подмножества области $\Omega$, занимаемого фазой с индексом $+$. Тогда энергия деформации двухфазовой упругой среды для данного поля смещений $u$, распределения фаз $\chi$ и температур $\tau$ имеет вид

$$\begin{gathered}I_0[u, \chi, \tau] = \int_\Omega \{\chi F^+(\nabla u, \tau, x) + (1 - \chi)F^-(\nabla u, \tau, x)\}\,dx - \int_\Omega g \cdot u\,dx - \int_{\partial\Omega} f \cdot u\,dS,\\ F^\pm(\nabla u, \tau, x) = a^\pm_{ijkl}(e_{ij}(\nabla u) - \zeta^\pm_{ij})(e_{kl}(\nabla u) - \zeta^\pm_{kl}) - \tau\kappa^\pm_{kl}a^\pm_{ijkl}(e_{ij}(\nabla u) - \zeta^\pm_{ij}) + F^\pm_0(\tau).\end{gathered} \tag{0.4}$$

Под равновесным полем смещений $\hat{u}$ и равновесным распределением фаз $\hat{\chi}$ при данном значении функции $\tau$ будем понимать пару $\hat{u}$, $\hat{\chi}$, минимизирующую функционал энергии

$$I_0[\hat{u}, \hat{\chi}, \tau] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, \tau], \qquad \hat{u} \in \mathbb{X}, \quad \hat{\chi} \in \mathbb{Z}', \tag{0.5}$$

где $\mathbb{Z}'$ — множество всех характеристических функций. Подчеркнем, искомым в вариационной задаче (0.5) является не только равновесное поле смещений $\hat{u}$, но и равновесное распределение фаз $\hat{\chi}$. Если в функционале (0.4) фиксировать функцию $\chi$, положив $\chi = \tilde{\chi}$, то задача (0.3) с функционалом $I_0[u, \tilde{\chi}, \tau]$ будет описывать состояние равновесия композитного материала с фиксированным функцией $\tilde{\chi}$ распределением фаз.

Функционал (0.4) состоит из энергии деформации каждой из фаз, но не содержит поверхностной энергии границы их раздела. Последняя традиционно считается пропорциональной площади границы раздела фаз. Обозначим эту площадь через $S[\chi]$, а коэффициент пропорциональности (коэффициент поверхностного натяжения) — через $\sigma$. Тогда функционал энергии, учитывающий поверхностную энергию границы раздела фаз, примет вид

$$I[u,\chi,\tau,\sigma]=I_0[u,\chi,\tau]+\sigma S[\chi]. \tag{0.6}$$

Под состоянием равновесия двухфазовой упругой среды с функционалом энергии (0.6) при фиксированных $\tau$ и $\sigma$ будем понимать решение $\hat{u}$, $\hat{\chi}$ следующей вариационной задачи

$$I[\hat{u},\hat{\chi},\tau,\sigma]=\inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}} I[u,\chi,\tau,\sigma], \qquad \hat{u}\in\mathbb{X}, \quad \hat{\chi}\in\mathbb{Z}, \tag{0.7}$$

где $\mathbb{Z}$ — множество характеристических функций с конечной площадью границы раздела фаз.

Мы будем исследовать свойства решений задач (0.5), (0.7) при следующих дополнительных ограничениях: двухфазовая упругая среда однородна (числа $a^{\pm}_{ijkl}$, $\kappa^{\pm}_{ij}$, $\zeta^{\pm}_{ij}$, коэффициеты полиномов $F^{\pm}_0$ и отклонение температуры $\tau$ не зависят от $x$), коэффициенты объемного расширения $\kappa^{\pm}_{ij}=0$, силовые поля $g$ и $f$ отсутствуют, на границе области выполнено условие закрепления (для полей смещений из множества $\mathbb{X}$ выполняется граничное условие $u|_{\partial\Omega}=0$).

Положим $t=F^{+}_0(\tau)-F^{-}_0(\tau)$. Тогда с точностью до слагаемого, не сказывающегося на решениях задач (0.5), (0.7), функционалы $I_0[u,\chi,\tau]$ и $I[u,\chi,\tau,\sigma]$ можно заменить на

$$\begin{gathered}I_0[u,\chi,t]=\int_\Omega\{\chi(F^+(\nabla u)+t)+(1-\chi)F^-(\nabla u)\}\,dx, \quad I[u,\chi,t,\sigma]=I_0[u,\chi,t]+\sigma S[\chi],\\ F^{\pm}(\nabla u)=a^{\pm}_{ijkl}(e_{ij}(\nabla u)-\zeta^{\pm}_{ij})(e_{kl}(\nabla u)-\zeta^{\pm}_{kl}),\end{gathered} \tag{0.8}$$

в которых число $t$ (будем считать его произвольным) и положительное число $\sigma$ играют роль параметров. В дальнейшем, число $t$ будем для простоты называть температурой. Вариационные задачи (0.5), (0.7) для функционалов (0.8) заменятся на первую и вторую задачи

$$\begin{aligned}I_0[\hat{u},\hat{\chi},t]&=\inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t], \qquad \hat{u}\in\mathbb{X}, \quad \hat{\chi}\in\mathbb{Z}',\\ I[\hat{u},\hat{\chi},t,\sigma]&=\inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}} I[u,\chi,t,\sigma], \quad \hat{u}\in\mathbb{X}, \quad \hat{\chi}\in\mathbb{Z},\end{aligned} \tag{0.9}$$

соответственно.

Наша цель — не только установить разрешимость этих задач, но и исследовать зависимость их решений от параметров $t$ и $\sigma$ и, тем самым, проследить за процессом фазовых превращений при изменении этих параметров.

С математической точки зрения задачи (0.9) относятся к классу невыпуклых вариационных задач со свободной поверхностью. Чтобы прокоментировать эти утверждения проведем в первой задаче (0.9) сперва минимизацию по $\chi\in\mathbb{Z}'$ и сведем ее к вариационной задаче

$$\begin{gathered}I^{\min}_0[\hat{u},t]=\inf_{u\in\mathbb{X}} I^{\min}_0[u,t], \quad \hat{u}\in\mathbb{X},\\ I^{\min}_0[u,t]=\int_\Omega F^{\min}(\nabla u,t)\,dx, \quad F^{\min}(\nabla u,t)=\min\{F^+(\nabla u)+t,F^-(\nabla u)\}.\end{gathered} \tag{0.10}$$

Очевидно, что функция $F^{\min}(.,t)$ выпукла не для всех $t$. Отсутствие выпуклости у функционала $I^{\min}_0[.,t]$ в некоторых случаях приводит к неразрешимости задачи (0.10). Отметим, что добавление поверхностной энергии существенно улучшает математические свойства функционала энергии деформации. Термин "свободная поверхность" в нашем случае означает, что граница раздела фаз, определяемая функцией $\hat{\chi}$, изначально не фиксирована, но подлежит определению в ходе решения задачи.

Постановка вариационных задач теории упругости однофазовых сред содержится, например, в [1-3]. Первый шаг к задаче о фазовых переходах — задача механики композитов, обсуждается в [4]. Задача о фазовых переходах в механических терминах сформулирована в [5]. Заметим, что макроскопическая идеология, согласно которой энергия двухфазового объекта состоит из суммы энергий обеих фаз и поверхностной энергии границы их раздела, применима и к другим задачам.

Однако, даже в теории упругости, приведенная в [5] постановка задачи о фазовых превращениях, является лишь одной из возможных [6,7].

Методы исследования невыпуклых вариационных задач изложены, например, в [8]. Различные подходы изучения вариационных задач со свободной поверхностью имеются в [9]. Необходимые для дальнейшего сведения о пространствах Соболева и пространствах функций ограниченной вариации покрываются книгой [10]. Некоторые используемые приемы были ранее разработаны в [11].

Остановимся кратко на содержании. В первой главе рассмотрен модельный одномерный случай. В ней принципиально не использовались какие-либо теоремы общего характера. Все результаты получены "вручную". Это специально сделано для читателей-механиков, не желающих вникать в тонкости математических доказательств, но согласных поверить, что все (или, если быть честным, почти все) полученные в одномерном случае результаты могут быть перенесены на многомерный случай. В одномерном случае состояния равновесия двухфазовой упругой среды существует в обеих моделях, как учитывающей, так и не учитывающей поверхностную энергию границы раздела фаз. Все состояния равновесия находятся в явном виде, позволяющем изучить их зависимость от температуры, коэффициента поверхностного натяжения и размеров двухфазового стержня. Строятся явные формулы для температур фазовых переходов, для объема каждой из фаз двухфазового состояния равновесия, находятся предельные точки состояний равновесия при стремлении к нулю коэффициента поверхностного натяжения. Вычисляется критический размер стержня, для которого не существует двухфазовых состояний равновесия. Найдена связь между критическим размером стержня и коэффициентом поверхностного натяжения. Вводится понятие критической точки функционала энергии и химического потенциала. Дается описание множества всех критических точек, устанавливается вид критических точек, не являющихся состояниями равновесия.

Во второй главе исследуется многомерная задача без учета поверхностной энергии границы раздела фаз. Для этой задачи функционал энергии не столь хорош с математической точки зрения: для произвольных коэффициентов $a^{\pm}_{ijkl}$ в плотностях энергии (0.8) существуют такие тензоры остаточной деформации $\zeta^{\pm}$, что первая задача (0.9) для некоторых значений температуры $t$ не разрешима. Ситуация разительным образом улучшается в случае однородной изотропной двухфазовой среды. Для нее (при некоторых дополнительных условиях) первая задача (0.9) разрешима при всех температурах, а ее решения (возможно не все) имеют фрактальный характер и выписываются в явном виде для любой области $\Omega$. Наличие явных формул позволяет полностью повторить результаты одномерного случая. Для анизотропных сред результаты более скромные: удается, в частности, доказать существование независящих от области температур фазовых переходов и получить для них двусторонние оценки. Эти оценки позволяют сформулировать достаточные условия различия или совпадения нижней и верхней температур фазовых переходов. В заключение главы выводятся уравнения равновесия двухфазовой упругой среды при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения в случае гладкой границы раздела фаз.

В третьей главе изучается многомерная задача для функционала $I[u,\chi,t,\sigma]$. Добавка $\sigma S[\chi]$, $\sigma > 0$ существенно улучшает математические свойства функционала энергии, что приводит к разрешимости второй задачи (0.9) при каждом значении температуры. С помощью прямых методов вариационного исчисления на качественном уровне исследуется зависимость состояний равновесия от параметров $t$ и $\sigma$. В частности, установлен вид зависимости температур фазовых переходов от коэффициента $\sigma$, скачкообразный процесс возникновения новой фазы, оценен объем ее зародыша. Найден вклад поверхностного натяжения в уравнения равновесия и определена роль однофазовых критических точек.

Четвертая глава посвящена поведению состояний равновесия функционала $I[u,\chi,t,\sigma_n]$ при $\sigma_n \to 0$. Установлено, что эта последовательность будет минимизирующей для функционала $I_0[u,\chi,t]$, и, следовательно, в определенном смысле сходится к некоторому минимайзеру релаксированной вариационной задачи. Для однородной изотропной среды вычислена квазивыпуклая оболочка плотности (0.10) и дается описание всех минимайзеров релаксированной задачи. Для анизотропной среды получена двусторонняя оценка для квазивыпуклой оболочки. На основе изучения поведения площади границы раздела фаз при $\sigma \to 0$ устаналивается, какой из минимайзеров релаксированной задачи будет предельной точкой состояний равновесия.

Каждая глава завершается библиографическими замечаниями и списком литераьуры. Мы будем придерживаться внутри главы двойной нумерации формул и утверждений: первый номер — номер параграфа, второй — номер объекта. При ссылке на объект из другой главы используется тройная нумерация, в которой первым номером служит номер главы.

## Литература

1 . Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Теория упругости*, Москва: Наука, 1965.
2 . Ф.Сьярле, *Математическая теория упругости*, Москва: Мир, 1992.
3 . В.С.Зарубин, Г.Н.Кувыкин, *Математические модели термомеханики*, Москва: Физматлит, 2002.
4 . Р.Кристенсен, *Введение в механику композитов*, Москва: Мир, 1982.
5 . М.А. Гринфельд, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений*, Москва: Наука, 1990.
6 . S.Müller, "Variational models for microstructure and phase transitions". Max-Planck Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig. Lecture Notes N2 (1998).
7 . G.Dolzmann, *Variational Methods for Crystalline Microstructure — Analysis and Computation*, Lecture Notes in Mathematics, 1803, 2002.
8 . Dacorogna B., *Direct methods in the calculus of variations*, Berlin, 1989.
9 . А.Фридман, *Вариационные принципы и задачи со сободными поверхностями*, Москва: Наука, 1990.
10. Л.К.Эванс, Р.Ф.Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Новосибирск, Научная книга, 2002.
11. В.Г.Осмоловский, *Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды*, Санкт-Петербург: издательство С.-Пб. университета, 2000.

# ГЛАВА 1

# ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ

*Цель этой главы — на примере одномерной вариационной задачи показать: чего следует ожидать и к чему надо стремиться при исследовании многомерного случая. Одномерная задача выбрана в качестве предмета изучения, поскольку в ряде случаев ее решение допускает явное описание.*



## §1. Постановка задачи и предварительные построения.

В модельном одномерном случае в качестве области $\Omega$ возьмем отрезок $(0,l)$. Полем смещения будет скалярная функция $u(x)$, $x \in (0,l)$, а плотности энергии деформации каждой из фаз определятся равенствами

$$F^{\pm}(M) = a_{\pm}(M - c_{\pm})^2, \qquad a_{\pm}, c_{\pm}, M \in R^1, \quad a_{\pm} > 0. \tag{1.1}$$

При нулевом коэффициенте поверхностного натяжения энергия деформации двухфазовой упругой среды задается формулой

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] = \int_0^l \{\chi(x)(F^+(u'(x)) + t) + (1-\chi(x))F^-(u'(x))\}\, dx, \\ u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad t \in R^1. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Множество допустимых полей смещений $\mathbb{X}$ в силу нулевых граничных условий имеет вид

$$\mathbb{X} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l), \tag{1.3}$$

а множество допустимых распределений фаз $\mathbb{Z}'$ определяется соотношением

$$\mathbb{Z}' = \{\chi \in L_\infty(0,l) : \chi^2(x) = \chi(x) \quad \text{почти всюду в} \quad (0,l)\}, \tag{1.4}$$

то есть совпадает с множеством измеримых характеристических функций.

Под состоянием равновесия двухфазовой упругой среды при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения будем понимать равновесное поле смещений $\hat{u}_t$ и равновесное распределение фаз $\hat{\chi}_t$ являющиеся при фиксированном $t$ решением следующей вариационной задачи

$$I_0[\hat{u}_t, \hat{\chi}_t, t] = \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t], \qquad \hat{u}_t \in \mathbb{X}, \quad \hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}'. \tag{1.5}$$

Состояния равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ назовем однофазовыми, если $\hat{\chi}_t(x) = 0$ или $\hat{\chi}_t(x) = 1$ при почти всех $x \in (0,l)$, и двухфазовыми в противном случае.

При положительном коэффициенте поверхностного натяжения нам придется изменить множество допустимых распределений фаз, заменив $\mathbb{Z}'$ на $\mathbb{Z}$

$$\chi \in \mathbb{Z},$$

если существует такой конечный набор открытых интервалов

$$\begin{gathered} l_j \subset (0,l), \quad j = 1,\dots,N[\chi], \qquad \bar{l}_i \cap \bar{l}_k = \emptyset \quad \text{при } i \neq k, \text{ что} \\ \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \cup_j l_j \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \cup_j l_j \end{cases}, \qquad x \in (0,l). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Для каждой функции $\chi \in \mathbb{Z}$, отвечающей набору интервалов $l_j$, $j = 1, \dots, N[\chi]$, обозначим через $S[\chi]$ число граничных точек интервалов $l_j$, лежащих в интервале $(0, l)$. Величина $S[\chi]$ будет интерпретироваться как площадь границы раздела фаз, распределение которых задается функцией $\chi$.

Функционал энергии деформации двухфазовой упругой среды при положительном коэффициенте поверхностного натяжения $\sigma$ определим равенством

$$\begin{gathered} I[u, \chi, t, \sigma] = I_0[u, \chi, t] + \sigma S[\chi], \\ u \in \mathbb{X}, \qquad \chi \in \mathbb{Z}, \qquad t, \sigma \in R^1, \quad \sigma > 0. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Под состоянием равновесия будем понимать равновесное поле смещений $\hat{u}_{t,\sigma}$ и равновесное распределение фаз $\hat{\chi}_{t,\sigma}$, являющиеся при данных $t$ и $\sigma$ решением следующей вариационной задачи

$$I[\hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma}, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}} I[u, \chi, t, \sigma], \qquad \hat{u}_{t,\sigma} \in \mathbb{X}, \quad \hat{\chi}_{t,\sigma} \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Как и для предыдущей задачи состояние равновесия $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ назовем однофазовым, если $\hat{\chi}_{t,\sigma}(x) = 0$ или $\hat{\chi}_{t,\sigma} = 1$ при почти всех $x \in (0, l)$, и двухфазовым в противном случае.

Введем два функционала $I^{\pm}[u]$, являющиеся функционалами энергии однофазовых упругих сред с плотностями (1.1)

$$I^{\pm}[u] = \int_0^l F^{\pm}(u'(x))\, dx, \quad u \in \mathbb{X}. \tag{1.9}$$

Поскольку для функции $u \in \mathbb{X}$

$$I^{\pm}[u] = a_{\pm} \int_0^l (u')^2\, dx + a_{\pm} c_{\pm}^2 l,$$

вариационные задачи

$$I^{\pm}[\hat{u}^{\pm}] = \inf_{u \in \mathbb{X}} I^{\pm}[u], \quad \hat{u}^{\pm} \in \mathbb{X} \tag{1.10}$$

всегда разрешимы и единственными их решениями являются функции

$$\hat{u}^{\pm} = 0. \tag{1.11}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} I^+[u] + tl &= I_0[u, \chi^+, t] = I[u, \chi^+, t, \sigma], \quad \chi^+ \equiv 1, \\ I^-[u] \qquad &= I_0[u, \chi^-, t] = I[u, \chi^-, t, \sigma], \quad \chi^- \equiv 0. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Поэтому однофазовые состояния равновесия для функционалов (1.2) и (1.7) реализуются лишь с $\hat{u}_t$ или $\hat{u}_{t,\sigma}$ тождественно равными нулю, соответственно.

## §2. Задача с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения.

Основой для дальнейших построений служит следующая лемма, дающая отличное от (1.2) представление для функционала $I_0[u, \chi, t]$.

**Лемма 2.1.** *Функционал* (1.2) *для всех* $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$ *представи́м в виде*

$$\begin{gathered} I_0[u, \chi, t] = \\ = \int_0^l (a_+\chi + a_-(1-\chi))(u' - \alpha(Q)(\chi - Q))^2\, dx + lG(Q, t), \\ Q = \frac{1}{l}\int_0^l \chi(x)\, dx, \quad \alpha(Q) = \frac{[ac]}{a_-Q + a_+(1-Q)}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$G(Q, t) = tQ + a_+c_+^2 Q + a_-c_-^2(1-Q) - [ac]\alpha(Q)Q(1-Q),$$

*где* $[ac] = a_+c_+ - a_-c_-$.

Доказательство. Для произвольных чисел $M$ и $\lambda$ имеем

$$a_\pm(M - c_\pm)^2 = a_\pm(M - (c_\pm - \frac{\lambda}{a_\pm}))^2 + 2c_\pm\lambda - \frac{\lambda^2}{a_\pm} - 2M\lambda. \tag{2.2}$$

Следовательно, для любой функции $\chi \in \mathbb{Z}'$

$$\begin{gathered} \chi a_+(M - c_+)^2 + (1-\chi)a_-(M - c_-)^2 = \\ = (a_+\chi + a_-(1-\chi))(M - \chi(c_+ - \frac{\lambda}{a_+}) - (1-\chi)(c_- - \frac{\lambda}{a_-}))^2 + \\ +2\lambda(\chi c_+ + (1-\chi)c_-) - \lambda^2(\frac{\chi}{a_+} + \frac{1-\chi}{a_-}) - 2M\lambda, \end{gathered} \tag{2.3}$$

поскольку (2.3) совпадает с (2.2) для знака $+$ при $\chi(x) = 1$ и с (2.2) для знака $-$ при $\chi(x) = 0$.

Фиксировав число $\lambda$ требованием

$$\int_0^l (\chi(c_+ - \frac{\lambda}{a_+}) + (1-\chi)(c_- - \frac{\lambda}{a_-}))\,dx = 0, \tag{2.4}$$

получим выражение для функции $\lambda(Q)$

$$\lambda(Q) = a_+a_-\frac{Qc_+ + (1-Q)c_-}{Qa_- + (1-Q)a_+},$$

из которого следует, что

$$\chi(c_+ - \frac{\lambda(Q)}{a_+}) + (1-\chi)(c_- - \frac{\lambda(Q)}{a_-}) = \alpha(Q)(\chi - Q).$$

Положим в (2.3) число $M = u'(x)$, $u \in \mathbb{X}$. Проинтегрировав полученное равенство по $x$ на интервале $(0, l)$, придем к формулам (2.1) для функционала $I_0[u, \chi, t]$ и функции $G(Q, t)$. □

Формула (2.1) позволяет "расщепить" вариационную задачу (1.5), сведя ее к задаче

$$G(\hat{Q}(t), t) = \min_{Q \in [0,1]} G(Q, t), \quad \hat{Q}(t) \in [0, 1]. \tag{2.5}$$

Необходимые детали содержатся в доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 2.1.** *Вариационная задача* (1.5) *разрешима. При каждом $t$ множество всех ее решений допускает следующее описание:*

$$\begin{gathered} \hat{\chi}_t(x) \text{ — произвольный элемент множества } \mathbb{Z}', \text{ для которого} \\ \frac{1}{l}\int_0^l \hat{\chi}_t(x)\,dx = \hat{Q}(t), \\ \text{а функция } \hat{u}_t(x) \text{ задается равенством} \\ \hat{u}_t(x) = \alpha(\hat{Q}(t))\int_0^x (\hat{\chi}_t(y) - \hat{Q}(t))\,dy. \end{gathered} \tag{2.6}$$

*где* $\hat{Q}(t)$ *— решение задачи* (2.5).

Доказательство. В силу непрерывности функции $G(., t)$, задача (2.5) разрешима. Благодаря (2.4), функция $\hat{u}_t$ из (2.6) принадлежит множеству $\mathbb{X}$. Учитывая представление (2.1), имеем

$$I_0[u, \chi, t] \geq l \min_{Q \in [0,1]} G(Q, t) = lG(\hat{Q}(t), t),$$

причем равенство возможно в том и только том случае, если $u = \hat{u}_t$, $\chi = \hat{\chi}_t$ с функциями $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ из (2.6). □

Для исследования задачи (2.5) удобно ввести следующие обозначения

$$t_+ = t^* + \frac{[ac]^2}{a_+}, \quad t_- = t^* - \frac{[ac]^2}{a_-}, \qquad t^* = -[ac^2], \tag{2.7}$$

где $[\alpha] = \alpha_+ - \alpha_-$ — скачок величины $\alpha$, принимающей два значение $\alpha_+$ и $\alpha_-$. Числа $t_\pm$ назовем температурами фазовых переходов. Мотивация этого названия будет дана позже.

Очевидно, что

$$t_+ \geq t_-, \quad t_+ - t_- = \frac{[ac]^2}{a_+ a_-}(a_+ + a_-) \tag{2.8}$$

и если $t_+ = t_-$, то $t_+ = t_- = t^*$.

**Лемма 2.2.** *Пусть $t_+ > t_-$. Тогда при $t \leq t_-$ единственным решением задачи* (2.5) *является число $\hat{Q}(t) = 1$, при $t \geq t_+$ — число $\hat{Q}(t) = 0$, а в случае $t \in (t_-, t_+)$ число $\hat{Q}(t) \in (0,1)$ и является единственным решением уравнения*

$$G_Q(Q,t) = 0. \tag{2.9}$$

*Пусть $t_+ = t_-$. Тогда при $t < t^*$ единственным решением задачи* (2.5) *является число $\hat{Q}(t) = 1$, при $t > t^*$ — число $\hat{Q}(t) = 0$, а в случае $t = t^*$ величиной $\hat{Q}(t)$ служит каждое число из интервала* $[0,1]$.

Доказательство. Непосредственные вычисления приводят к следующим формулам для производных по аргументу $Q$ функции $G(Q,t)$

$$\begin{gathered} G_Q(0,t) = t - t_+, \quad G_Q(1,t) = t - t_-, \\ G_{QQ}(Q,t) = \frac{2[ac]^2 a_+ a_-}{(a_- Q + a_+(1-Q))^3}, \quad Q \in [0,1]. \end{gathered} \tag{2.10}$$

В силу последней формулы (2.10) функция $G(.,t)$ строго выпукла при $t_+ > t_-$ и линейна при $t_+ = t_-$.

Пусть $t_+ > t_-$. Тогда при $t \geq t_+$ справедливо неравенство $G_Q(0,t) \geq 0$. Поэтому при $t \geq t_+$ число $\hat{Q}(t) = 0$ — единственное решение задачи (2.5). В случае $t \leq t_-$, справедливо неравенство $G_Q(1,t) \leq 0$. Поэтому при $t \leq t_-$ число $\hat{Q}(t) = 1$ — единственное решение задачи (2.5). Если $t \in (t_-, t_+)$, то $G_Q(0,t) < 0$, $G_Q(1,t) > 0$. Поэтому строго выпуклая функция $G(.,t)$ достигает минимума в единственной точке $\hat{Q}(t) \in (0,1)$, удовлетворяющей уравнению (2.9). Благодаря строгой выпуклости функции $G(.,t)$ решение уравнения (2.9) единственно.

Пусть $t_- = t_+ = t^*$. Тогда в силу (2.10) при $t > t^*$ линейная функция $G(.,t)$ строго монотонно возрастает, а при $t < t^*$ — строго монотонно убывает. Следовательно, она достигает минимума при указанных $t$ в единственной точке $\hat{Q}(t) = 0$ и $\hat{Q}(t) = 1$, соответственно. В случае $t = t^*$ функция $G(.,t)$ постоянна. Поэтому $\hat{Q}(t)$ — любое число интервала $[0,1]$. □

Величина $\hat{Q}(t)$ описывает объемную долю фазы с индексом $+$ при температуре $t$ в состоянии равновесия. Аналогичную роль играет величина $1 - \hat{Q}(t)$ для фазы с индексом $-$.

Рассмотрим вопрос о гладкости функции $\hat{Q}(t)$. Очевидно, что исследование необходимо лишь в случае $t_- < t_+$.

**Лемма 2.3.** *Пусть $t_- < t_+$. Тогда функция $\hat{Q}(t)$ бесконечно дифференцируема по $t \neq t_\pm$, строго монотонно убывает на интервале $(t_-, t_+)$ и непрерывна по $t \in R^1$.*

Доказательство. Гладкость функции $\hat{Q}(t)$ вне интервала $[t_-, t_+]$ очевидна. Гладкость этой функции при $t \in (t_-, t_+)$ следует из теоремы о неявной функции, примененной к уравнению (2.9). Из этой теоремы вытекает, что

$$\hat{Q}_t(t) = -\frac{1}{G_{QQ}(\hat{Q}(t),t)} < 0, \quad t \in (t_-, t_+). \tag{2.11}$$

Поэтому функция $\hat{Q}(t)$ строго монотонно убывает на интервале $(t_-, t_+)$. Осталось установить непрерывность этой функции в точках $t = t_\pm$.

Рассмотрим точку $t = t_+$. Точка $t = t_-$ исследуется аналогично. Из монотонности и ограниченности функции $\hat{Q}(t)$, $t \in (t_-, t_+)$ следует существование предела

$$\lim_{t \uparrow t_+} \hat{Q}(t) \equiv Q_+ \in [0, 1].$$

После предельного перехода в равенстве $G_Q(\hat{Q}(t), t) = 0$ получаем $G_Q(Q_+, t_+) = 0$. В силу строгой выпуклости функции $G(., t)$ и первого равенства (2.10) имеем

$$G_Q(Q, t_+) > G_Q(0, t_+) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < Q \leq 1.$$

Следовательно, $Q_+ = 0 = \hat{Q}(t_+)$. □

Дифференцируя равенство (2.11) по $t$ и используя третье равенство (2.10), получаем

$$\hat{Q}_{tt}(t) = -\frac{6a_+a_-[ac]^2}{G^3_{QQ}(\hat{Q}(t), t)(a_-\hat{Q}(t) + a_+(1 - \hat{Q}(t)))^4}[a], \quad t \in (t_-, t_+). \tag{2.12}$$

Поэтому функция $\hat{Q}(t)$ строго выпукла при $[a] < 0$, строго вогнута при $[a] > 0$ и линейна при $[a] = 0$.

Из непрерывности функции $\hat{Q}(t)$ и формулы (2.11) следует непрерывность ее первой производной на интервале $[t_-, t_+]$. Дифференцируя равенство (2.11) по $t$, придем к непрерывности по $t \in [t_-, t_+]$ любой производной функции $\hat{Q}(t)$. Скачок функции $\hat{Q}_t(t)$ в точках $t = t_\pm$ определяется из формул

$$\hat{Q}_t(t_- + 0) = -\frac{a_-^2}{2a_+[ac]^2}, \quad \hat{Q}_t(t_+ - 0) = -\frac{a_+^2}{2a_-[ac]^2}, \tag{2.13}$$

поскольку $\hat{Q}_t(t_- - 0) = \hat{Q}_t(t_+ + 0) = 0$.

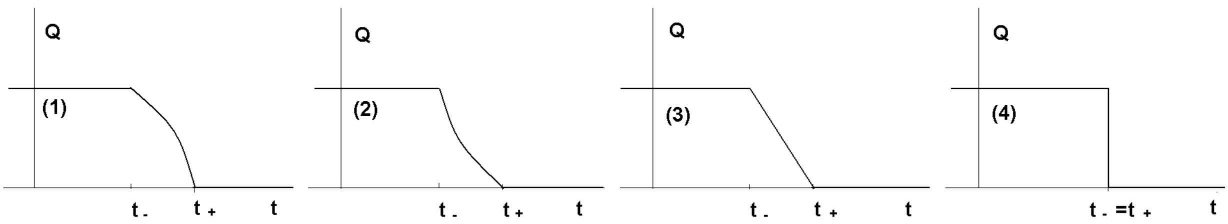


Рис.2.1

Графики функций $\hat{Q}(t)$
(1) $t_- < t_+$, $[a] > 0$, (2) $t_- < t_+$, $[a] < 0$, (3) $t_- < t_+$, $[a] = 0$, (4) $t_- = t_+$

.

Теорема 2.1 и леммы 2.2, 2.3 позволяют на качественном уровне описать процесс фазовых переходов для двухфазовой упругой среды с функционалом энергии (1.2) при изменении температуры $t$ от очень низких до очень высоких значений.

Результат этого описания таков:

пусть $t_- < t_+$, тогда

(1) при $t \in (-\infty, t_-]$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^+$, $\chi^+$,
(2) для каждого $t \in (t_-, t_+)$ реализуется бесконечно много различных состояний равновесия, все они двухфазовые с общей объемной долей фазы с индексом $+$, являющейся однозначной функцией температуры,
(3) при $t \in [t_+, \infty)$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^-$, $\chi^-$,
(4) объемная доля фазы с индексом $+$ — функция $\hat{Q}(t)$ — непрерывно зависит от температуры, равна единице при $t \leq t_-$, нулю при $t \geq t_+$, бесконечно дифференцируема и строго монотонно убывает на интервале $[t_-, t_+]$;

пусть $t_- = t_+ = t^*$, тогда

(5) при $t \in (-\infty, t^*)$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^+$, $\chi^+$,

(6) при $t \in (t^*, +\infty)$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^-$, $\chi^-$,

(7) при $t = t^*$ реализуются только оба однофазовые состояния равновесия $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ и бесконечное семейство различных двухфазовых состояний равновесия с произвольной объемной долей фазы с индексом $+$ и нулевым полем смещений $\hat{u}_t$.

Полученные в леммах 2.2 и 2.3 свойства функции $\hat{Q}(t)$ достаточны для ее качественного описания, однако эти свойства не всегда могут заменить явное выражение для этой функции.

**Лемма 2.4.** *Пусть* $[ac] \neq 0$, $t \in [t_-.t_+]$,

$$h(t) = \frac{t_+ - t}{t_+ - t_-}, \quad g(t) = \frac{1}{a_-^2} h(t) + \frac{1}{a_+^2}(1 - h(t)). \tag{2.14}$$

*Тогда*

$$\hat{Q}(t) = \begin{cases} h(t) & \textit{при} \quad [a] = 0 \\ \frac{a_+ + a_-}{2[a]} + \frac{1}{2} - \frac{1}{[a] g^{1/2}(t)} & \textit{при} \quad [a] \neq 0 \end{cases}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Равенство (2.11) и третья формула (2.10) приводят к дифференциальному уравнению для функции $\hat{Q}(t)$. Разделяя в нем переменные, получаем

$$\frac{d\hat{Q}(t)}{(a_- \hat{Q}(t) + a_+(1 - \hat{Q}(t)))^3} = -\frac{dt}{2[ac]^2 a_+ a_-}. \tag{2.16}$$

Пусть $[a] = 0$. Тогда в силу (2.16) функция $\hat{Q}(t)$ имеет вид

$$\hat{Q}(t) = \alpha t + \beta$$

с некоторыми константами $\alpha$ и $\beta$. Так как $\hat{Q}(t_-) = 1$, $\hat{Q}(t_+) = 0$, приходим к справедливости первого равенства (2.15).

Пусть $[a] \neq 0$. Тогда в силу (2.16)

$$\frac{1}{(a_- \hat{Q}(t) + a_+(1 - \hat{Q}(t)))^2} = \alpha t + \beta$$

с некоторыми константами $\alpha$ и $\beta$. Поскольку

$$\frac{1}{(a_- \hat{Q}(t_-) + a_+(1 - \hat{Q}(t_-)))^2} = \frac{1}{a_-^2}, \quad \frac{1}{(a_- \hat{Q}(t_+) + a_+(1 - \hat{Q}(t_+)))^2} = \frac{1}{a_+^2},$$

приходим к справедливости второго равенства (2.15). □

В описании (1)-(7) множества всех решений задачи (1.5) была установлена роль пар $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ (см.определения в (1.9)-(1.12)), задающих равновесное состояние однофазовых сред:

пара $\hat{u}^+$, $\chi^+$ является единственным решением задачи (1.5)
при $t \leq t_-$ в случае $t_- < t_+$ и при $t < t_-$ в случае $t_- = t_+$,

пара $\hat{u}^-$, $\chi^-$ является единственным решением задачи (1.5)
при $t \geq t_+$ в случае $t_- < t_+$ и при $t > t_+$ в случае $t_- = t_+$, (2.17)

обе пары $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ являются решением задачи (1.5) при $t = t^*$ в случае $t_- = t_+$,

при $t \in (t_-, t_+)$ ни одна из пар $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ не является решением задачи (1.5).

Таким образом, при достаточно низких и достаточно высоких значениях температуры двухфазовая упругая среда состоит из вещества лишь одной фазы (с индексом + при низких и с индексом − — при высоких).

Возникает вопрос об устойчивости состояний $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ для тех температур $t$, при которых они не являются состояниями равновесия двухфазовой упругой среды. Отрицательный ответ на этот вопрос дается в следующей теореме. Прежде чем ее сформулировать, приведем одно определение.

Будем говорить, что пара $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$ является седловой точкой функционала энергии (1.2) для некоторого значения $t$, если для любого $\delta > 0$ существуют такие функции $v_{\pm} \in \mathbb{X}$, $\psi_{\pm} \in \mathbb{Z}'$, что

$$\begin{gathered} \|v_{\pm}\|_{W_2^1} < \delta, \quad \|\tilde{\chi} - \psi_{\pm}\|_{L_1} < \delta, \\ I_0[\tilde{u} + v_+, \psi_+, t] > I_0[\tilde{u}, \tilde{\chi}, t], \quad I_0[\tilde{u} + v_-, \psi_-, t] < I_0[\tilde{u}, \tilde{\chi}, t]. \end{gathered} \tag{2.18}$$

**Теорема 2.2.** *Если для данного $t$ какая-либо из пар $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ не является решением задачи* (1.5), *то эта пара будет седловой точкой функционала энергии* (1.2).

Доказательство. Поскольку функции $\hat{u}^{\pm}$ являются решениями задач (1.10), справедливо первое неравенство второй строки (2.18) с $\tilde{u} = \hat{u}^{\pm}$, $\tilde{\chi} = \psi_{\pm} = \chi^{\pm}$, $v_+ \in \mathbb{X}$, $v_+ \neq 0$.

Обратимся к последнему неравенству (2.18). Для этого перейдем к представлению (2.1) функционала (1.2). Легко видеть, что пары $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ для каждого из знаков обнуляют интегральное слагаемое правой части (2.1). Поэтому пара $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ для какого-либо из знаков не минимизирует функционал (2.1) в том и только том случае, если число

$$Q^{\pm} = \frac{1}{l}\int_0^l \chi^{\pm}(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{для знака} \quad + \\ 0 & \text{для знака} \quad - \end{cases}$$

не минимизирует выпуклую функцию $G(Q,t)$. В этом случае $G_Q(1,t) > 0$ и $G_Q(0,t) < 0$ для знаков + и −, соответственно. Следовательно,

$$\begin{gathered} G(1,t) > G(Q,t), \quad Q \neq 1, \qquad G(0,t) > G(Q,t), \quad Q \neq 0 \\ \text{для всех } Q, \text{ достаточно близких к единице или к нулю} \\ \text{для знаков } + \text{ и } -, \text{ соответственно.} \end{gathered} \tag{2.19}$$

Для этих чисел обозначим через $v_Q$, $\chi_Q$ решение уравнения

$$\begin{gathered} v_Q' = \alpha(Q)(\chi_Q - Q), \\ v_Q \in \mathbb{X}, \quad \chi_Q \in \mathbb{Z}', \quad Q = \frac{1}{l}\int_0^l \chi_Q(x)\,dx. \end{gathered} \tag{2.20}$$

В силу последнего равенства

$$\int_0^l |v_Q'(x)|^2\,dx = \alpha^2(Q)lQ(1-Q).$$

Поэтому функция $v_Q$ мала в пространстве $\mathbb{X}$ при близких к нулю или единице значениях $Q$. Поскольку

$$\int_0^l |\chi_Q - \chi^{\pm}|\,dx = \begin{cases} l(1-Q) & \text{для знака} \quad + \\ lQ & \text{для знака} \quad - \end{cases},$$

функция $\chi_Q$ близка в пространстве $L_1(0,l)$ к функции $\chi^{\pm}$ при близких к единице значениях $Q$ для знака + и к нулю — для знака −.

Проведенные построения убеждают в справедливости последнего неравенства (2.18) с $\tilde{u} = \hat{u}^{\pm}$, $\tilde{\chi} = \chi^{\pm}$, $v_- = v_Q$, $\psi_- = \chi_Q$ при близких к единице значениях $Q < 1$, если пара $\hat{u}^+$, $\chi^+$ не минимизирует функционал энергии, и при близких к нулю значениях $Q > 0$, если пара $\hat{u}^-$, $\chi^-$ не минимизирует этот функционал. □

## §3. Задача с положительным коэффициентом поверхностного натяжения.

Как и в предыдущем параграфе, основой для решения задачи (1.8) служит представление (2.1) функционала (1.2). Для функционала (1.7) оно примет вид

$$
\begin{gathered}
I[u,\chi,t,\sigma] = \\
= \int_0^l (a_+\chi + a_-(1-\chi))(u' - \alpha(Q)(\chi - Q))^2\,dx + J[\chi,t,\sigma], \\
J[\chi,t,\sigma] = lG(Q,t) + \sigma S[\chi], \\
u \in \mathbb{X}, \qquad \chi \in \mathbb{Z}, \quad Q = \frac{1}{l}\int_0^l \chi(x)\,dx, \qquad t,\sigma \in R^1, \quad \sigma > 0.
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

В этом случае аналогом (2.5) служит задача

$$
J[\hat\chi_{t,\sigma},t,\sigma] = \inf_{\chi\in\mathbb{Z}} J[\chi,t,\sigma], \quad \hat\chi_{t,\sigma} \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}
$$

**Лемма 3.1.** *Задача* (3.2) *разрешима. Если для некоторых* $t$ *и* $\sigma$ *среди ее решений есть решение* $\hat\chi_{t,\sigma}$ *с величиной*

$$
\hat Q(t,\sigma) = \frac{1}{l}\int_0^l \hat\chi_{t,\sigma}(x)\,dx, \tag{3.3}
$$

*отличной от нуля и единицы, то* $\hat\chi_{t,\sigma}$ *— характеристическая функция любого из отрезков*

$$
(0, l\hat Q(t,\sigma)), \quad (l(1-\hat Q(t,\sigma)), l). \tag{3.4}
$$

Доказательство. Множество $\mathbb{Z}$ можно разбить на три класса в соответствии со значением величины $Q$:

$$
Q = 0, \quad Q = 1, \quad Q \in (0,1), \qquad Q = \frac{1}{l}\int_0^l \chi(x)\,dx.
$$

В третьем случае заменим функцию $\chi$ на характеристическую функцию любого из интервалов $(0,lQ)$ или $(l(1-Q),l)$. После такой замены величина $S[\chi]$ примет минимально возможное для третьего класса значение, равное единице. Поэтому

$$
\inf_{\chi\in\mathbb{Z}} J[\chi,t,\sigma] = \min\{lG(0,t), lG(1,t), \inf_{Q\in(0,1)} lG(Q,t) + \sigma\}.
$$

Поскольку

$$
\inf_{Q\in(0,1)} G(Q,t) = \min_{Q\in[0,1]} G(Q,t) = G(\hat Q(t),t),
$$

где $\hat Q(t)$ — решение задачи (2.5), имеем

$$
\inf_{\chi\in\mathbb{Z}} J[\chi,t,\sigma] = \min\{lG(0,t), lG(1,t), lG(\hat Q(t),t) + \sigma\} \equiv \gamma(t,\sigma). \tag{3.5}
$$

Следовательно,

$$
\begin{gathered}
\hat\chi_{t,\sigma} = \begin{cases} \chi^+, & \text{если} \quad \gamma(t,\sigma) = lG(1,t) \\ \chi^-, & \text{если} \quad \gamma(t,\sigma) = lG(0,t) \end{cases}, \\
\hat\chi_{t,\sigma} \text{ — характеристическая функция любого из интервалов (3.4),} \\
\text{если } \gamma(t,\sigma) = lG(\hat Q(t),t) + \sigma.
\end{gathered} \tag{3.6}
$$

В соотношениях (3.6) не исключается, что для величины $\gamma(t,\sigma)$ реализуется сразу несколько равенств. □

Представление (3.1) и лемма 3.1 позволяют установить разрешимость вариационной задачи (1.7).

**Теорема 3.1.** *Вариационная задача* (1.7) *разрешима. При каждых $t$ и $\sigma$ множество всех ее решений допускает следующее описание*

$$\begin{gathered} \hat{\chi}_{t,\sigma} \text{ — произвольное решение задачи (3.2)}, \\ \hat{u}_{t,\sigma}(x) = \alpha(\hat{Q}(t,\sigma)) \int_0^x \{\hat{\chi}_{t,\sigma}(y) - \hat{Q}(t,\sigma)\}\, dy, \end{gathered} \tag{3.7}$$

*где величина $\hat{Q}(t,\sigma)$ вычисляется по функции $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ согласно формуле* (3.3).

Доказательство. В силу представления (3.1)

$$I[u,\chi,t,\sigma] \geq J[\chi,t,\sigma] \geq \gamma(t,\sigma) \qquad \text{для всех} \qquad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z},$$

причем равенство $I[u,\chi,t,\sigma] = \gamma(t,\sigma)$ реализуется в том и только том случае, если $u = \hat{u}_{t,\sigma}$, $\chi = \hat{\chi}_{t,\sigma}$ с указанными в (3.7) функциями $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$. □

Для детального описания множества всех решений задачи (1.7) согласно теореме 3.1 необходимо дать столь же детальное описание множества всех решений задачи (3.2), что в свою очередь, требует ряда дополнительных построений.

Введем функции

$$\begin{gathered} i^+(t) = \inf_{u \in \mathbb{X}} I_0[u,\chi^+,t], \quad i^-(t) = \inf_{u \in \mathbb{X}} I_0[u,\chi^-,t], \quad i_{\min}(t) = \min\{i^+(t), i^-(t)\}, \\ i(t) = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}} I_0[u,\chi,t]. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Благодаря (1.10) — (1.12) и лемме 2.1, имеем

$$\begin{gathered} i^+(t) = l(t + a_+ c_+^2) = lG(1,t), \quad i^-(t) = la_- c_-^2 = lG(0,t), \quad i(t) = lG(\hat{Q}(t),t)), \\ i_{\min}(t) = \begin{cases} l(t + a_+ c_+^2) & \text{при} \quad t \leq t^* \\ la_- c_-^2 & \text{при} \quad t \geq t^* \end{cases}, \qquad t^* = -[ac^2]. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Кроме того,

$$i_{\min}(t) = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \{\chi^-,\chi^+\}} I_0[u,\chi,t] = \min\{lG(0,t), lG(1,t)\}. \tag{3.10}$$

Положим

$$\sigma(t) = i_{\min}(t) - i(t). \tag{3.11}$$

Из первого равенства (3.10) следует неотрицательность функции $\sigma(t)$. Более того, равенство $\sigma(t) = 0$ означает, что среди состояний равновесия функционала $I_0[u,\chi,t]$ существуют однофазовые, а неравенство $\sigma(t) > 0$ возможно в том и только том случае, если у этого функционала все состояния равновесия двухфазовые.

Пользуясь описанием (1) — (7) из §2 множества всех состояний равновесия функционала $I_0[u,\chi,t]$, придем к выводу, что

$$\sigma(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin (t_-, t_+), \qquad \sigma(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (t_-, t_+). \tag{3.12}$$

Соотношения (3.12), в частности, означают, что

$$\sigma(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t_- = t_+ = t^*. \tag{3.13}$$

В силу непрерывности функций $G(Q,t)$, $\hat{Q}(t)$, $i_{\min}(t)$, функция $\sigma(t)$ также непрерывна. Благодаря (3.12), она заведомо ограничена.

График функции $\sigma(t)$ разбивает полуплоскость параметров $t, \sigma \in R^1$, $\sigma > 0$ на следующие зоны

$$V_< = \{t, \sigma : \sigma \in (0, \sigma(t))\}$$
$$V_>^- = \{t, \sigma : t < t^*, \sigma > \sigma(t)\},\ V_>^+ = \{t, \sigma : t > t^*, \sigma > \sigma(t)\},\ V_>^* = \{t, \sigma : t = t^*, \sigma > \sigma(t^*)\},$$
$$V_=^- = \{t, \sigma : t \in (t_-, t^*), \sigma = \sigma(t)\},\ V_=^+ = \{t, \sigma : t \in (t^*, t_+), \sigma = \sigma(t)\},\ V_=^* = \{t, \sigma : t = t^*, \sigma = \sigma(t^*)\}. \tag{3.14}$$

Очевидно, что при $t_- = t_+$ множества $V_<$, $V_=^\pm$, $V_=^*$ пусты. Важно отметить, что в силу леммы 2.2

$$\text{при } t_- < t_+ \text{ в зонах } V_<,\ V_=^\pm,\ V_=^*, \text{ число } \hat{Q}(t) \in (0,1). \tag{3.15}$$

Введенная функция $\sigma(t)$ позволяет дать в каждой из зон (3.14) полное описание множества всех решений задачи (3.2).


Рис.3.1

Разбиение полуплоскости параметров на зоны
(1) случай $t_- < t_+$, (2) случай $t_- = t_+$

.

**Лемма 3.2.** *Для всех решений задачи* (3.2) *величина* (3.3) *допускает следующее описание*

$$\hat{Q}(t,\sigma) = \begin{cases} \hat{Q}(t) & \textit{при} \quad t,\sigma \in V_< \\ 1 & \textit{при} \quad t,\sigma \in V_>^- \\ 0 & \textit{при} \quad t,\sigma \in V_>^+ \end{cases}, \qquad \hat{Q}(t,\sigma) = \begin{cases} 0 \quad \textit{и} \quad 1 & \textit{при} \quad t,\sigma \in V_>^* \\ 1 \quad \textit{и} \quad \hat{Q}(t) & \textit{при} \quad t,\sigma \in V_=^- \\ 0 \quad \textit{и} \quad \hat{Q}(t) & \textit{при} \quad t,\sigma \in V_=^+ \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\hat{Q}(t,\sigma) = \{0, 1, \hat{Q}(t)\} \quad \textit{при} \quad t,\sigma \in V_=^*,$$

*где* $\hat{Q}(t)$ *— решение задачи* (2.5)

Доказательство. Согласно равенству (3.6)

$$\hat{Q}(t,\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \gamma(t,\sigma) = lG(0,t) \\ 1 & \text{при} \quad \gamma(t,\sigma) = lG(1,t) \\ \hat{Q}(t) & \text{при} \quad \gamma(t,\sigma) = lG(\hat{Q}(t),t) + \sigma \end{cases}. \tag{3.17}$$

В силу (3.11) и третьей формулы (3.9) имеем

$$lG(\hat{Q}(t),t) + \sigma = i_{\min}(t) - (\sigma(t) - \sigma). \tag{3.18}$$

Используя (3.10), для величины $\gamma(t,\sigma)$ из (3.5) получаем

$$\gamma(t,\sigma) = \min\{i_{min}(t), i_{\min}(t) - (\sigma(t) - \sigma)\}, \tag{3.19}$$

что позволяет переписать (3.17) в эквивалентном виде

$$\hat{Q}(t,\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \sigma \geq \sigma(t), \quad t \geq t^* \\ 1 & \text{при} \quad \sigma \geq \sigma(t), \quad t \leq t^* \ . \\ \hat{Q}(t) & \text{при} \qquad \sigma \in (0, \sigma(t)] \end{cases} \tag{3.20}$$

Сравнивая (3.20) с определением (3.14) множеств $V$, убеждаемся в справедливости (3.16). □

Следующая лемма позволяет получить ряд свойств функции $\sigma(t)$, исходя только из определения (3.11) и не прибегая к явным, весьма громоздким формулам, которые будут приведены позже. Очевидно, что в рассмотрении нуждается лишь случай $t_- < t_+$. Напомним, что непрерывность функции $\sigma(t)$ уже установлена.

**Лемма 3.3.** *Пусть $t_- < t_+$. Тогда функция $\sigma(t)$ непрерывно дифференцируема по $t \in (-\infty, t^*]$ и $t \in [t^*, \infty)$, строго выпукла и бесконечно дифференцируема на интервалах $[t_-, t^*]$ и $[t^*, t_+]$.*

Доказательство. Так как при $t \in (t_-, t_+)$ справедливо равенство (2.9) с $Q = \hat{Q}(t)$, имеем

$$\frac{d}{dt} G(\hat{Q}(t), t) = G_t(\hat{Q}(t), t) = \hat{Q}(t). \tag{3.21}$$

Поэтому, в силу (3.9)

$$\sigma'(t) = i'_{min}(t) - i'(t) = \begin{cases} l(1 - \hat{Q}(t)) & \text{при} \quad t \in (t_-, t^*] \\ -l\hat{Q}(t) & \text{при} \quad t \in [t^*, t_+) \end{cases} \tag{3.22}$$

(в обоих равенствах в точках $t = t^*$ имеются в виду односторонние производные).

Из гладкости функции $\hat{Q}(t)$, $t \in [t_-, t_+]$ и формулы (3.22) следует бесконечная дифференцируемость функции $\sigma(t)$ на интервалах $[t_-, t^*]$ и $[t^*, t_+]$. Поскольку

$$\sigma'(t_- + 0) = l(1 - \hat{Q}(t_-)) = 0, \quad \sigma'(t_+ - 0) = -l\hat{Q}(t_+) = 0,$$

функция $\sigma(t)$ непрерывно дифференцируема по $t \in (-\infty, t^*]$ и $t \in [t^*, \infty)$. Скачок ее производной при $t = t^*$ выражается равенством

$$\sigma'(t^* + 0) - \sigma'(t^* - 0) = -l. \tag{3.23}$$

Дифференцируя (3.22) по $t$ и пользуясь формулой (2.11), придем к выводу, что

$$\sigma''(t) = \frac{l}{G_{QQ}(\hat{Q}(t), t)} \quad \text{при} \quad t \in (t_-, t^*] \quad \text{и} \quad t \in [t^*, t_+). \tag{3.24}$$

Данная формула по непрерывности распространяется на точки $t = t_\pm$. Из нее и (2.10) следует строгая выпуклость функции $\sigma(t)$ на интервлах $[t_-, t^*]$ и $[t^*, t_+]$. Поскольку

$$\sigma''(t_- + 0) = \frac{l}{G_{QQ}(1, t_-)} = \frac{la_-^2}{2[ac]^2}\frac{1}{a_+}, \quad \sigma''(t_+ - 0) = \frac{l}{G_{QQ}(0, t_+)} = \frac{la_+^2}{2[ac]^2}\frac{1}{a_-},$$

точки $t_\pm$ являются точками скачка второй производной функции $\sigma(t)$. □

Полученные в лемме 3.2 свойства функции $\sigma(t)$ во многих случаях достаточны для ее качественного описания. Однако, бывают ситуации, в которых полезен ее явный вид.

Пользуясь равенством (3.22) и формулами (2.15), несложно получить явное выражение для функции $\sigma(t)$ в случае $t_- < t_+$

$$\text{при } [a] = 0$$

$$\sigma(t) = \frac{l}{2}\frac{(t - t_-)^2}{t_+ - t_-}, \quad \text{если} \quad t \in [t_-, t^*], \qquad \sigma(t) = \frac{l}{2}\frac{(t - t_+)^2}{t_+ - t_-}, \quad \text{если} \quad t \in [t^*, t_+],$$

$$\text{при } [a] \neq 0 \tag{3.25}$$

$$\sigma(t) = \frac{l}{2[a]}([a] - (a_+ + a_-))(t - t_-) - 2l\frac{a_+a_-[ac]^2}{[a]^2}(g^{1/2}(t) - g^{1/2}(t_-)), \quad t \in [t_-, t^*],$$

$$\sigma(t) = \frac{l}{2[a]}([a] + (a_+ + a_-))(t_+ - t) + 2l\frac{a_+a_-[ac]^2}{[a]^2}(g^{1/2}(t_+) - g^{1/2}(t)), \quad t \in [t^*, t_+].$$

Эти формулы позволяют вычислить максимальное значение $\sigma^*$ функции $\sigma(t)$

$$\sigma^* = \sigma(t^*) = \frac{l[ac]^2}{(\sqrt{a_+} + \sqrt{a_-})^2}. \tag{3.26}$$

Равенство (3.26) справедливо как в случае $[a] = 0$, так и в случае $[a] \neq 0$. Заметим, что при $t_+ = t_-$ оно также дает верный результат $\sigma^* = 0$.

Для задачи с положительным коэффициентом поверхностного натяжения мы также введем температуры фазовых переходов $t_\pm(\sigma)$, $\sigma > 0$, сохранив за числами $t_\pm$ и $t^*$ обозначения (2.7), относящиеся к случаю нулевого коэффициента поверхностного натяжения.

Положим

$$t_+(\sigma) = t_-(\sigma) = t^* \quad \text{при} \quad t_+ = t_- = t^*, \quad \sigma > 0, \qquad \text{и при} \qquad t_- < t_+, \quad \sigma \geq \sigma^*, \tag{3.27}$$

$$\begin{gathered} t_\pm(\sigma) \text{— наибольший и наименьший из двух корней уравнения} \\ \sigma = \sigma(t) \\ \text{при } t_- < t_+ \text{ и } 0 < \sigma < \sigma^*. \end{gathered} \tag{3.28}$$

Числа $t_\pm(\sigma)$ назовем верхней и нижней температурами фазовых переходов для двухфазовой упругой среды с положительным коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma$.

Согласно определению, лишь в случае (3.28) числа $t_\pm(\sigma)$ различны и не заданы явным образом. Для их качественного описания в этом случае полезна следующая лемма.

**Лемма 3.4.** *Пусть $t_- < t_+$. Тогда функции $t_\pm(\sigma)$ бесконечно дифференцируемы на интервале $(0, \sigma^*)$, функция $t_-(\sigma)$ строго монотонно возрастает и строго вогнута, функция $t_+(\sigma)$ строго монотонно убывает и строго выпукла,*

$$\begin{gathered} t_-(\sigma) \to t_-, \quad t'_-(\sigma) \to \infty, \quad t_+(\sigma) \to t_+, \quad t'_+(\sigma) \to -\infty, \quad \textit{при} \quad \sigma \to 0, \\ t_\pm(\sigma) \to t^* \quad \textit{при} \quad \sigma \to \sigma^*. \end{gathered} \tag{3.29}$$


Рис.3.2

Графики функций $t_\pm(\sigma)$
(1) случай $t_- < t_+$, (2) случай $t_- = t_+$

.

Доказательство. Введем функцию

$$\psi(\sigma, t) = \sigma - \sigma(t), \quad t \in (t_-, t^*) \cup (t^*, t_+), \quad \sigma \in (0, \sigma^*).$$

В силу леммы 3.3 эта функция бесконечно дифференцируема. Из формул (3.22) и (3.15) следует, что $\psi_t(\sigma, t) \neq 0$. Поскольку $\psi(\sigma, t_\pm(\sigma)) = 0$ для каждого $\sigma \in (0, \sigma^*)$, из теоремы о неявных функциях, примененной к уравнению $\psi(\sigma, t) = 0$, вытекает бесконечная дифференцируемость функций $t_\pm(\sigma)$.

В силу теоремы о неявных функциях и формулы (3.22) имеем

$$t'_\pm(\sigma) = \frac{1}{\sigma'(t_\pm(\sigma))} = \begin{cases} -\frac{1}{l\hat{Q}(t_+(\sigma))} & \text{для знака} \quad + \\ \frac{1}{l(1-\hat{Q}(t_-(\sigma)))} & \text{для знака} \quad - \end{cases}. \tag{3.30}$$

Следовательно, функция $t_+(\sigma)$ строго монотонно убывает, а функция $t_-(\sigma)$ строго монотонно возрастает на интервале $(0, \sigma^*)$.

Дифференцируя первое равенство (3.30) и пользуясь формулой (3.24), получаем

$$t''_\pm(\sigma) = -\frac{1}{\sigma'^3(t_\pm(\sigma))G_{QQ}(\hat{Q}(t_\pm(\sigma)), t_\pm(\sigma))}. \tag{3.31}$$

Поэтому в силу второго равенства (3.30) функция $t_-(\sigma)$ строго вогнута, а функция $t_+(\sigma)$ строго выпукла на интервале $(0, \sigma^*)$.

Из монотонности функций $t_\pm(\sigma)$ следует существование их пределов при $\sigma \to 0$ и $\sigma \to \sigma^*$, для которых из определений $t_\pm(\sigma)$ вытекает справедливость соотношений (3.29). Тогда предельные равенства для производных функций $t_\pm(\sigma)$ получаются из формул (3.30). □

Формула (3.30) и полученные из нее последовательным дифференцированием по $\sigma$ допускают распространение по непрерывности до $\sigma = \sigma^*$, что ведет к бесконечной дифференцируемости функций $t_\pm(\sigma)$ на интервале $(0, \sigma^*]$.

Учитывая равенства (3.29) доопределим функции $t_\pm(\sigma)$ на точку $\sigma = 0$

$$t_\pm(0) = t_\pm. \tag{3.32}$$

Доопределенные таким образом функции (3.28) будут непрерывны на интервале $[0, \infty)$.

Теорема 3.1 и леммы 3.1, 3.2 позволяют на качественном уровне описать процесс фазовых переходов для двухфазовой упругой среды с функционалом энергии (1.7) при изменении температуры $t$ от очень низких, до очень высоких значений. При формулировке утвержденй наряду с парами $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$, определенными в (1.11), (1.12) нами будут использованы пары $\hat{u}^\pm_t$, $\chi^\pm_t$, в которых

$$\begin{aligned} &\chi^+_t \quad \text{— характеристическая функция интервала } (0, l\hat{Q}(t)), \\ &\chi^-_t \text{ — характеристическая функция интервала } (l(1-\hat{Q}(t)), l), \end{aligned}$$

а функции $\hat{u}^\pm_t$ восстанавливаются по функциям $\chi^\pm_t$ согласно формуле (2.6). Очевидно, что

$$\chi^+ = \chi^+_{t_-} = \chi^-_{t_+}, \quad \chi^- = \chi^+_{t_+} = \chi^-_{t_-}.$$

Результат этого описания таков:

пусть $t_- < t_+$ и $\sigma \in (0, \sigma^*)$, тогда

1 при $t \in (-\infty, t_-(\sigma))$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^+$, $\chi^+$,

2 при $t = t_-(\sigma)$ множество всех состояний равновесия состоит из однофазового $\hat{u}^+$, $\chi^+$ и двух двухфазовых $\hat{\chi}^\pm_{t_-(\sigma)}$, $\chi^\pm_{t_-(\sigma)}$,

3 при $t \in (t_-(\sigma), t_+(\sigma))$ реализуются лишь два двухфазовых состояния равновесия $\hat{u}^\pm_t$, $\chi^\pm_t$,

4 при $t = t_+(\sigma)$ множество всех состояний равновесия состоит из однофазового $\hat{u}^-$, $\chi^-$ и двух двухфазовых $\hat{u}^\pm_{t_+(\sigma)}$, $\chi^\pm_{t_+(\sigma)}$,

5 при $t \in (t_+(\sigma), \infty)$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^-$, $\chi^-$,

6 объемная доля фазы с индексом $+$ — функция $\hat{Q}(t, \sigma)$ равна единице при $t < t_-(\sigma)$, нулю при $t > t_+(\sigma)$, совпадает с $\hat{Q}(t)$ при $t \in (t_-(\sigma), t_+(\sigma)$ и принимает два значения 1, $\hat{Q}(t_-(\sigma))$ для $t = t_-(\sigma)$ и 0, $\hat{Q}(t_+(\sigma))$ для $t = t_+(\sigma)$;

пусть $t_- < t_+$, $\sigma = \sigma^*$, тогда

7 при $t \in (-\infty, t^*)$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^+$, $\chi^+$,

8 при $t = t^*$ множество всех состояний равновесия состоит из двух однофазовых $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ и двух двухфазовых $\hat{u}^\pm_{t^*}$, $\chi^\pm_{t^*}$,

9 при $t \in (t^*, \infty)$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^-$, $\chi^-$,

10 объемная доля фазы с индексом $+$ — функция $\hat{Q}(t, \sigma)$ равна единице при $t < t_-(\sigma)$, нулю при $t > t_+(\sigma)$ и принимает три значения 1, $\hat{Q}(t^*)$, 0 при $t = t^*$;

пусть $t_- < t_+$ и $\sigma > \sigma^*$ или $t_- = t_+$ и $\sigma > 0$, тогда

11 при $t \in (-\infty, t^*)$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^+$, $\chi^+$,
12 при $t = t^*$ реализуется только два состояния равновесия $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$,
13 при $t \in (t^*, \infty)$ реализуется только однофазовое состояние равновесия $\hat{u}^-$, $\chi^-$.

Для превращения описания (1) — (13) из "качественного" в "количественное" необходим явный вид функциии $t_\pm(\sigma)$ в случае $t_- < t_+$.

**Лемма 3.5.** *Пусть $t_- < t_+$, $\sigma \in [0, \sigma^*]$. Тогда*

*при $[a] = 0$*

$$t_-(\sigma) = (t^* - t_-)\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}} + t_-, \quad t_+(\sigma) = (t^* - t_+)\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}} + t_+,$$
$$\hat{Q}(t_-(\sigma)) = 1 - \frac{t^* - t_-}{t_+ - t_-}\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}}, \quad \hat{Q}(t_+(\sigma)) = \frac{t_+ - t^*}{t_+ - t_-}\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}}; \tag{3.33}$$

*при $[a] \neq 0$*

$$t_\pm(\sigma) = \frac{t^* - t_\pm}{g(t^*) - g(t_\pm)}\left((g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm))\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}} + g^{1/2}(t_\pm)\right)^2 + \frac{t_\pm g(t^*) - t^* g(t_\pm)}{g(t^*) - g(t_\pm)},$$

$$\hat{Q}(t_\pm(\sigma)) = \hat{Q}(t^*) + \frac{\hat{Q}(t^*) - \hat{Q}(t_\pm)}{g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm)}g^{1/2}(t_\pm)\left(1 - \frac{g^{1/2}(t^*)}{(g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm))\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}} + g^{1/2}(t_\pm)}\right), \tag{3.34}$$

$$\hat{Q}(t_+) = 0, \quad \hat{Q}(t_-) = 1, \quad \hat{Q}(t^*) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{[a]}{(\sqrt{a_+} + \sqrt{a_-})^2}\right).$$

Доказательство. Пусть $[a] = 0$. В силу формулы (3.25) и определения (3.28) справедливы следующие представления для функций $t_\pm(\sigma)$

$$t_-(\sigma) = \alpha_-\sigma^{1/2} + t_-, \quad t_+(\sigma) = \alpha_+\sigma^{1/2} + t_+, \qquad \sigma \in (0, \sigma^*) \tag{3.35}$$

с некоторыми константами $\alpha_\pm$. Согласно (3.29) выполняются равенства $t_\pm(\sigma^*) = t^*$, позволяющие вычислить величины $\alpha_\pm$. Подставляя их в (3.35), приходим к первой паре формул (3.33).

В силу равенств (2.15)

$$\hat{Q}(t_-(\sigma)) = \frac{t_+ - t_-(\sigma)}{t_+ - t_-}, \quad \hat{Q}(t_+(\sigma)) = \frac{t_+ - t_+(\sigma)}{t_+ - t_-}. \tag{3.36}$$

Подставляя в (3.36) найденные выражения для $t_\pm(\sigma)$, приходим ко второй паре формул (3.33).

Пусть $[a] \neq 0$. Из определения (2.14) функции $g(t)$ получаем

$$t = -\frac{[ac]^2 a_+ a_-}{[a]}g(t) + \frac{[c]^2 a_+ a_-}{[a]}. \tag{3.37}$$

Подставляя (3.37) в первые слагаемые правых частей (3.25), имеем

$$\sigma(t) = a_- l\frac{[ac]^2 a_+ a_-}{[a]^2}(g^{1/2}(t) - g^{1/2}(t_-))^2, \quad t \in [t_-, t^*],$$
$$\sigma(t) = a_+ l\frac{[ac]^2 a_+ a_-}{[a]^2}(g^{1/2}(t) - g^{1/2}(t_+))^2, \quad t \in [t^*, t_+]. \tag{3.38}$$

Следовательно, функции $t_\pm(\sigma)$ обязаны удовлетворять уравнениям

$$(g^{1/2}(t_\pm(\sigma)) - g^{1/2}(t_\pm))^2 = \frac{1}{a_\pm}\frac{[a]^2}{l[ac]^2 a_+ a_-}\sigma, \quad \sigma \in [0, \sigma^*]. \tag{3.39}$$

Из равенств $t_\pm(\sigma^*) = t^*$ и (3.39) вытекает, что

$$(g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm))^2 = \frac{1}{a_\pm}\frac{[a]^2}{l[ac]^2 a_+ a_-}\sigma^*. \tag{3.40}$$

Равенство (3.40) позволяет записать (3.39) в эквивалентном виде

$$(g^{1/2}(t_\pm(\sigma)) - g^{1/2}(t_\pm))^2 = (g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm))^2\frac{\sigma}{\sigma^*}. \tag{3.41}$$

Функции $g^{1/2}(t_\pm(\sigma)) - g^{1/2}(t_\pm)$ обращаются в ноль при $\sigma = 0$ и сохраняют знак при $\sigma \in (0, \sigma^*]$. Сдедовательно, выражения в скобках обеих частей равенства (3.41) одинакового знака. Тогда, после извлечения квадратного корня, получаем

$$g^{1/2}(t_\pm(\sigma)) = (g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm))\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}} + g^{1/2}(t_\pm). \tag{3.42}$$

Поэтому

$$g(t_\pm(\sigma)) = \{(g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm))\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma^*}} + g^{1/2}(t_\pm)\}^2. \tag{3.43}$$

Из (3.37) получаем

$$\begin{cases} t_\pm = & -\frac{[ac]^2 a_+ a_-}{[a]} g(t_\pm) + \frac{[c]^2 a_+ a_-}{[a]} \\ t^* = & -\frac{[ac]^2 a_+ a_-}{[a]} g(t^*) + \frac{[c]^2 a_+ a_-}{[a]} \end{cases}.$$

Тогда

$$-\frac{[ac]^2 a_+ a_-}{[a]} = \frac{t^* - t_\pm}{g(t^*) - g(t_\pm)}, \quad \frac{[c]^2 a_+ a_-}{[a]} = \frac{t_\pm g(t^*) - t^* g(t_\pm)}{g(t^*) - g(t_\pm)},$$

что позволяет переписать равенство (3.37) в эквивалентном виде

$$t = \frac{t^* - t_\pm}{g(t^*) - g(t_\pm)} g(t) + \frac{t_\pm g(t^*) - t^* g(t_\pm)}{g(t^*) - g(t_\pm)}. \tag{3.44}$$

Комбинируя (3.43) с (3.44) для одинаковых знаков $\pm$, придем к первой формуле (3.34).

В силу второй формулы (2.15) имеем

$$\begin{cases} \frac{a_+ + a_-}{2[a]} + \frac{1}{2} - \frac{1}{[a]}\frac{1}{g^{1/2}(t^*)} = & \hat{Q}(t^*) \\ \frac{a_+ + a_-}{2[a]} + \frac{1}{2} - \frac{1}{[a]}\frac{1}{g^{1/2}(t_\pm)} = & \hat{Q}(t_\pm) \end{cases}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{[a]} = \frac{\hat{Q}(t^*) - \hat{Q}(t_\pm)}{g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm)} g^{1/2}(t^*) g^{1/2}(t_\pm), \quad \frac{a_+ + a_-}{2[a]} + \frac{1}{2} = \hat{Q}(t^*) + \frac{\hat{Q}(t^*) - \hat{Q}(t_\pm)}{g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm)} g^{1/2}(t_\pm).$$

Поэтому, для каждого из знаков $\pm$

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}(t^*) + \frac{\hat{Q}(t^*) - \hat{Q}(t_\pm)}{g^{1/2}(t^*) - g^{1/2}(t_\pm)} g^{1/2}(t_\pm)(1 - \frac{g^{1/2}(t^*)}{g^{1/2}(t)}). \tag{3.45}$$

Объединяя (3.45) с (3.42), придем ко второй формуле (3.34).

Последнее равенство (3.34) получается комбинацией (2.15) и (2.7), (2.8). Аналогичным образом приходим к соотношению

$$\hat{Q}(t^*) = \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad [a] = 0,$$

совпадающему при $[a]=0$ с последней формулой (3.34). □

В описании (1) — (13) множества всех состояний равновесия для задачи (1.8) установлена роль пар $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$, задающих равновесные состояния однофазовых сред. Оказывается, что в отличие от случая $\sigma=0$, при $\sigma>0$ каждая из пар $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ при всех значениях $t$ является локальным минимумом функционала энергии.

**Лемма 3.7.** *Для каждого значения параметра $t$ пары $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ доставляют функционалу энергии (1.7) локальный минимум относительно любых возмущений в классе $\mathbb{X}$ функций $\hat{u}^{\pm}$ и достаточно малых в пространстве $L_1(0,l)$ возмущений функций $\chi^{\pm}$.*

Доказательство. Начнем с предварительных преобразований. Заметим, что для любых $v\in\mathbb{X}$, $\chi\in\mathbb{Z}$

$$\chi F^{+}((\hat{u}^{\pm})'+v')=\chi^{\pm}F^{+}((\hat{u}^{\pm})')+$$
$$+\chi^{\pm}F^{+}_{M}((\hat{u}^{\pm})')v'+(\chi-\chi^{\pm})(F^{+}((\hat{u}^{\pm})')+F^{+}_{M}((\hat{u}^{\pm})')v')+\frac{\chi}{2}F^{+}_{MM}\cdot(v')^{2},$$

$$(1-\chi)F^{-}((\hat{u}^{\pm})'+v')=(1-\chi^{\pm})F^{-}((\hat{u}^{\pm})')+$$
$$+(1-\chi^{\pm})F^{-}_{M}((\hat{u}^{\pm})')v'-(\chi-\chi^{\pm})(F^{-}((\hat{u}^{\pm})')+F^{-}_{M}((\hat{u}^{\pm})')v')+\frac{1-\chi}{2}F^{-}_{MM}\cdot(v')^{2}.$$

Поэтому

$$\begin{gathered}I_0[\hat{u}^{\pm}+v,\chi,t]-I_0[\hat{u}^{\pm},\chi^{\pm},t]=\\=\int_0^l\{\chi^{\pm}F^{+}_{M}((\hat{u}^{\pm})')+(1-\chi^{\pm})F^{-}_{M}((\hat{u}^{\pm})')\}v'\,dx+\\+\int_0^l(\chi-\chi^{\pm})(F^{+}((\hat{u}^{\pm})')-F^{-}((\hat{u}^{\pm})')+t)\,dx+\int_0^l(\chi-\chi^{\pm})(F^{+}_{M}((\hat{u}^{\pm})')-F^{-}_{M}((\hat{u}^{\pm})'))v'\,dx+\\+\frac{1}{2}\int_0^l(\chi F^{+}_{MM}+(1-\chi)F^{-}_{MM})\cdot(v')^{2}\,dx.\end{gathered}\tag{3.47}$$

Поскольку функции $\hat{u}^{\pm}$ являются решениями задач (1.10), первое слагаемое правой части (3.47) обнуляется. Учитывая равенства (1.1) и (2.7), преобразуем формулу (3.47) следующим образом:

$$\begin{gathered}I_0[\hat{u}^{\pm}+v,\chi,t]-I_0[\hat{u}^{\pm},\chi^{\pm},t]=\\=(t-t^{*})\int_0^l(\chi-\chi^{\pm})\,dx-2[ac]\int_0^l(\chi-\chi^{\pm})v'\,dx+\int_0^l(a_{+}\chi+a_{-}(1-\chi))(v')^{2}\,dx.\end{gathered}\tag{3.48}$$

Пользуясь равенствами (1.12) для функций $\chi^{\pm}$, (2.7) для чисел $t_{\pm}$ и огрубляя последнее слагаемое правой части (3.48), оставляя в нем лишь $a_{-}$ для знака $+$ и $a_{+}$ — для знака $-$, для каждого из знаков $\pm$ получим неравенство

$$I_0[\hat{u}^{+}+v,\chi,t]-I_0[\hat{u}^{+},\chi^{+},t]\ge-(t-t_{-})\int_0^l(1-\chi)\,dx+\int_0^l\frac{1-\chi}{a_{-}}([ac]+a_{-}v')^{2}\,dx,$$
$$I_0[\hat{u}^{-}+v,\chi,t]-I_0[\hat{u}^{-},\chi^{-},t]\ge(t-t_{+})\int_0^l\chi\,dx+\int_0^l\frac{\chi}{a_{+}}([ac]-a_{+}v')^{2}\,dx.$$

Для любой функции $\chi\in\mathbb{Z}$, $\chi\ne\chi^{\pm}$ справедливо соотношение $S[\chi]\ge1$. Поскольку $S[\chi^{\pm}]=0$, приходим к выводу, что

$$\begin{gathered}I[\hat{u}^{+}+v,\chi,t,\sigma]-I[\hat{u}^{+},\chi^{+},t,\sigma]\ge-(t-t_{-})l(1-Q)+\sigma,\\I[\hat{u}^{-}+v,\chi,t,\sigma]-I[\hat{u}^{-},\chi^{-},t,\sigma]\ge(t-t_{+})lQ+\sigma,\\Q=\frac{1}{l}\int_0^l\chi\,dx,\\\text{для всех } v\in\mathbb{X}\text{ и }\chi\in\mathbb{Z},\ \chi\ne\chi^{\pm}.\end{gathered}\tag{3.49}$$

Согласно описанию (1) — (13) пара $\hat{u}^+$, $\chi^+$ может не являться состоянием равновесия лишь при $t > t_-$, а пара $\hat{u}^-$, $\chi^-$ — лишь при $t < t_+$. Однако, благодаря (3.49) условия

$$(1-Q) \leq \frac{\sigma}{l(t-t_-)}, \quad t > t_-, \qquad Q \leq \frac{\sigma}{l(t_+-t)}, \quad t < t_+ \tag{3.50}$$

гарантируют неотрицательность левых частей неравенств (3.49) для знаков + и −, соответственно. Неравенства (3.50) для фиксированного значения температуры заведомо выполнены в случае достаточно малых $\|\chi^+ - \chi\|_{L_1}$ для знака + и достаточно малых $\|\chi^- - \chi\|_{L_1}$ — для знака −. □

Отметим еще ряд отличий в процессе фазовых превращений при нулевом и положительном коэффициентах поверхностного натяжения.

В качестве первого отличия остановимся на скачкообразном возникновении новой фазы при изменении параметра $t$ в случае $\sigma > 0$ и непрерывном в случае $\sigma = 0$. В первом случае наличие скачков функции $\hat{Q}(.,\sigma)$ в точках $t = t_\pm(\sigma)$ следует из описания (1) — (13). Неравенство (3.50) означает энергетическую невыгодность возникновения зародыша новой фазы со сколь угодно малым размером. Во втором случае непрерывность образования новой фазы обусловлена непрерывностью функции $\hat{Q}(t)$ при $t_- < t_+$ и заполнением ее значениями всего интервала $[0,1]$ в случае $t_- = t_+ = t^*$. Отметим также, что при $\sigma > 0$ новая фаза наростает из концов интервала $(0,l)$, в то время как при $\sigma = 0$ она может возникать в любой части этого интервала.

В качестве второго отличия отметим зависимость температур фазовых переходов $t_\pm(\sigma)$ в случае $t_- < t_+$ от длины отрезка $l$. Параметр $l$ проникает в формулы (3.33), (3.34) для величин $t_\pm(\sigma)$ через значение $\sigma^*$, указанное в (3.26). Для учета этой зависимости, включим величину $l$ в число аргументов температур фазовых переходов, обозначив их через $t_\pm(\sigma,l)$. Легко видеть, что функции $t_\pm(\sigma,.)$ непрерывны по $l \in (0,\infty)$,

$$t_+(\sigma,l) = t_-(\sigma,l) \quad \text{при} \quad 0 < l \leq l^* = \frac{(\sqrt{a_+}+\sqrt{a_-})^2}{[ac]^2}\sigma, \qquad t_-(\sigma,l) < t_+(\sigma,l) \quad \text{при} \quad l > l^*, \tag{3.51}$$

функция $t_-(\sigma,.)$ строго монотонно убывает, функция $t_+(\sigma,.)$ строго монотонно возрастает на отрезке $[l^*,\infty)$

$$t_-(\sigma,l) \to t_-, \quad t_+(\sigma,l) \to t_+ \qquad \text{при} \quad l \to \infty. \tag{3.52}$$

Как следует из (3.51) критическая длина $l^*$ стержня характеризуется тем, что для стержня длины $l \leq l^*$ верхняя и нижняя температуры фазовых переходов совпадают, а при $l > l^*$ — различны.


Рис.3.3

Графики функций $t_\pm(\sigma,.)$ при фиксированном $\sigma$
(1) случай $t_- < t_+$, (2) случай $t_- = t_+$

.

Соотношения (3.51) позволяют гипотетически провести следующий эксперимент по определению параметра $\sigma$, характеризующего двухфазовую упругую среду с $[ac] \neq 0$. Для этого нужно нагревать стержень длины $l$, заполненный этой средой, от температуры $t_-$ до температуры $t_+$, определяя температуры фазовых переходов $t_\pm(\sigma, l)$. Меняя длину $l$, определим экспериментальным путем число $l^*$, что позволяет по формуле (3.51) вычислить коэффициент поверхностного натяжения $\sigma$.

В заключение параграфа рассмотрим вопрос о поведении состояний равновесия $\hat u_{t,\sigma}$, $\hat\chi_{t,\sigma}$ функционала $I[u,\chi,t,\sigma]$ при $\sigma\to 0$. Из описания фазовых переходов (1) — (13) следует, что пара $\hat u_{t,\sigma}$, $\hat\chi_{t,\sigma}$ не зависит от $\sigma$ при $t\notin(t_-,t_+)$, а при $t\in(t_-,t_+)$ перестает зависеть от $\sigma$ при $0<\sigma<\sigma(t)$. Из этого же описания, вытекает, что при $t\notin(t_-,t_+)$ для всех $\sigma$ и при $t\in(t_-,t_+)$ для $0<\sigma<\sigma(t)$ эта пара является состоянием равновесия функционала $I_0[u,\chi,t]$. Отметим, что во втором случае на состояниях равновесия (их ровно два для кждого $t\in(t_-,t_+)$) $\hat u_{t,\sigma}$, $\hat\chi_{t,\sigma}$ функционала $I_0$ площадь границы раздела фаз минимальна среди всех состояний равновесия $\hat u_t$, $\hat\chi_t$ этого функционала с $\hat\chi_t\in\mathbb{Z}$. Поэтому "метод исчезающего поверхностного натяжения", заключающийся в предельном переходе по $\sigma\to 0$ в состояниях равновесия функционала $I$, дает все однофазовые состояния равновесия функционала $I_0$, среди двухфазовых состояний равновесия этого функционала при $t\in(t_-,t_+)\neq\emptyset$ сохраняются лишь состояния равновесия с наименьшей границей раздела фаз. Для $t=t_+=t_-=t^*$ указанным методом получаются лишь однофазовые состояния.

## §4. Критические точки функционала энергии.

В этом параграфе нам предстоит выписать первую вариацию функционала энергии двухфазовой упругой среды, равенство нулю которой дает необходимое условие его экстремума. Поскольку множества $\mathbb{Z}'$ и $\mathbb{Z}$ не являются линейными пространствами, придется прибегнуть к технике внутренней вариации.

Рассмотрим диффеоморфизмы $y=y(x)$ класса $C^1[0,l]$ отрезка $[0,l]$ на себя, для котороых обратные отображения $x=x(y)$ имеют вид

$$x(y)=y+h(y),\quad h\in C^1_0[0,l],\quad |h'(y)|\le\frac{1}{2}\tag{4.1}$$

с любой функцией $h$, указанного в (4.1) класса.

Фиксируем функции $\tilde u\in\mathbb{X}$, $\tilde\chi\in\mathbb{Z}'$ и построим их возмущения $u$, $\chi$ согласно правилу

$$u(x)=\tilde u(y(x))+v(y(x)),\quad v\in\mathbb{X},\qquad \chi(x)=\tilde\chi(y(x)).\tag{4.2}$$

Очевидно, что $u\in\mathbb{X}$, $\chi\in\mathbb{Z}'$, а в случае $\tilde\chi\in\mathbb{Z}$ ее возмущение (4.2) также лежит в $\mathbb{Z}$, причем $S[\chi]=S[\tilde\chi]$.

**Лемма 4.1.** *Справедливы равенства*

$$I_0[u,\chi,t]-I_0[\tilde u,\tilde\chi,t]=\int_0^l\{\tilde\chi F^+_M(\tilde u')+(1-\tilde\chi)F^-_M(\tilde u')\}v'\,dx+$$
$$+\int_0^l\{\tilde\chi(F^+(\tilde u')+t-\tilde u'F^+_M(\tilde u'))+(1-\tilde\chi)(F^-(\tilde u')-\tilde u'F^-_M(\tilde u'))\}h'\,dx+R,$$
$$\tilde u\in\mathbb{X},\quad\tilde\chi\in\mathbb{Z}',\qquad v\in\mathbb{X},\qquad h\in C^1_0[a,b],\quad |h'(x)|\le\frac{1}{2},$$

$$I[u,\chi,t,\sigma]-I[\tilde u,\tilde\chi,t,\sigma]=\int_0^l\{\tilde\chi F^+_M(\tilde u')+(1-\tilde\chi)F^-_M(\tilde u')\}v'\,dx+\tag{4.3}$$
$$+\int_0^l\{\tilde\chi(F^+(\tilde u')+t-\tilde u'F^+_M(\tilde u'))+(1-\tilde\chi)(F^-(\tilde u')-\tilde u'F^-_M(\tilde u'))\}h'\,dx+R,$$
$$\tilde u\in\mathbb{X},\quad\tilde\chi\in\mathbb{Z},\qquad v\in\mathbb{X},\qquad h\in C^1_0[a,b],\quad |h'(x)|\le\frac{1}{2},$$

$$|R|\le C\int_0^l(|v'|^2+|h'|^2+|h'\tilde u'|^2)\,dx.$$

Доказательство. После замены переменной под знаком интеграла и возвращения к прежнему аргументу интегрирования $x$, имеем

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] = \\ = \int_0^l \left(\tilde{\chi}(x)(F^+(\frac{\tilde{u}'(x)+v'(x)}{1+h'(x)})+t)+(1-\tilde{\chi}(x))F^-(\frac{\tilde{u}'(x)+v'(x)}{1+h'(x)})\right)(1+h'(x))\,dx. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Поскольку

$$\frac{1}{1+h'} = 1-h'+\frac{(h')^2}{1+h'},$$

получаем

$$\begin{gathered} F^\pm(\frac{\tilde{u}'+v'}{1+h'})(1+h') = F^\pm(\tilde{u}')+\{F^\pm(\tilde{u}')h'+F^\pm_M(\tilde{u}')(v'-\tilde{u}'h')\}+R^\pm, \\ |R^\pm| \le C(|v'|^2+|h'|^2+|\tilde{u}'h'|^2). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Объединяя (4.4) с (4.5), приходим к первому равенству (4.3). Доказательство второго равенства (4.3) идентично доказательству первого, так как $S[\tilde{\chi}] = S[\chi]$. □

Будем говорить, что пара $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$ или пара $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}$ является критической точкой функционала $I_0$ или $I$, соответственно, если

$$\begin{gathered} \int_0^l \{\tilde{\chi}(F^+(\tilde{u}')+t-\tilde{u}'F^+_M(\tilde{u}'))+(1-\tilde{\chi})(F^-_M(\tilde{u}')-\tilde{u}'F^-_M(\tilde{u}'))\}h'\,dx+ \\ +\int_0^l \{\tilde{\chi}F^+_M(\tilde{u}')+(1-\tilde{\chi})F^-_M(\tilde{u}')\}v'\,dx = 0 \quad \text{для всех } v,h \in C_0^\infty(0,l). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Поскольку левая часть (4.6) в силу (4.3) дает линейную часть приращения функционалов энергии $I_0$ и $I$ при возмущении (4.2), состояния равновесия этих функционалов являются их критическими точками.

Ответ на вопрос, какие еще существуют критические точки кроме состояний равновесия функционалов энергии, дается в следующей лемме, содержащей список всех критических точек.

**Лемма 4.2.** *(a) Множество всех критических точек $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ функционала $I_0$ для каждого фиксированного значения $t$ состоит из его состояний равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ и однофазовых состояний $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$.*

*(b) Множество всех критических точек $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ функционала $I$ при любых фиксированных значениях $t$ и $\sigma$ совпадает с множеством всех критических точек $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ функционала $I_0$, для которых $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. (a) Пусть $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$ — критическая точка функционала $I_0$. Воспользовавшись представлением (2.1), имеем

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] = lG(Q,t)+ \\ +\int_0^l (a_+\tilde{\chi}+a_-(1-\tilde{\chi}))\left(\frac{\tilde{u}'+v'}{1+h'}-\alpha(Q)(\tilde{\chi}-Q)\right)^2(1+h')\,dx, \\ \tilde{u}=\tilde{u}(x), \quad v=v(x), \quad \tilde{\chi}=\tilde{\chi}(x), \quad h=h(x), \\ Q = \frac{1}{l}\int_0^l \chi\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l \tilde{\chi}\cdot(1+h')\,dx = \tilde{Q}+\frac{1}{l}\int_0^l \tilde{\chi}h'\,dx. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Очевидно, что линейная по $v$ часть приращения $I_0[u,\chi,t]-I_0[\tilde{u},\tilde{\chi},t]$ при $h=0$ в силу (4.8) совпадает с величиной

$$2\int_0^l (a_+\tilde{\chi}+a_-(1-\tilde{\chi}))\left(\tilde{u}'-\alpha(\tilde{Q})(\tilde{\chi}-\tilde{Q})\right)v'\,dx. \tag{4.9}$$

Равенство величины (4.9) нулю для всех $v \in C_0^\infty(0,l)$, означает, что подынтегральный перед функцией $v'$ множитель почти вюду на отрезке $[0,l]$ равен некоторой константе $c_0$. Тогда

$$\tilde{u}' = \alpha(\tilde{Q})(\tilde{\chi} - \tilde{Q}) + (\frac{\tilde{\chi}}{a_+} + \frac{1-\tilde{\chi}}{a_-})c_0 \quad \text{при почти всех } x \in [0,l].$$

Интегрируя полученное соотношение по отрезку $[0,l]$, пользуясь включением $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, получаем

$$(\frac{\tilde{Q}}{a_+} + \frac{1-\tilde{Q}}{a_-})c_0 = 0.$$

Поэтому $c_0 = 0$ и критическая точка $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{u}' = \alpha(\tilde{Q})(\tilde{\chi} - \tilde{Q}). \tag{4.10}$$

Равенство (4.10) показывает, что линейная по $h$ часть приращения $I_0[\tilde{u},\tilde{\chi},t] - I_0[u,\chi,t]$ при нулевом $v$ совпадает линейной частью приращения внеинтегрального слагаемого в (4.8) и, следовательно, задается формулой

$$G_Q(\tilde{Q},t)\int_0^l \tilde{\chi} h'\,dx. \tag{4.11}$$

Величина (4.11) обращается в ноль для всех $h \in C_0^\infty(0,l)$ в том и только том случае, если

$$\tilde{\chi} = \chi^\pm \qquad \text{или} \quad \tilde{Q} \in (0,1) \quad \text{и} \quad G_Q(\tilde{Q},t) = 0. \tag{4.12}$$

Равенство (4.10) и утверждение (4.12) благодаря теореме 2.1 доказывают часть (a) леммы.

(b) Пусть $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}$ — критическая точка функционала $I$. Пользуясь представлением (3.1) для $I$ и учитывая равенство $S[\chi] = S[\tilde{\chi}]$, придем к выводу, что для пары $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ выполняется уравнение (4.10), а для функции $\tilde{\chi}$ — описание (4.12). Следовательно, пара $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ является критичекой точкой функционала $I$ в том и только том случае, если она критическая точка функционала $I_0$ с $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}$. $\square$

Среди всех критических точек функционала $I_0$ только однофазовые состояния $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ не всегда являются состояниями равновесия для этого функционала (см. описание (1) — (7) из §2). Роль пар $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ в том случае, когда они не минимизируют функционал $I_0$, описана в теореме 2.2.

Среди всех критических точек функционала $I$ однофазовые состояния $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ также не всегда являются состояниями равновесия для этого функционала (см. описание (1) — (13) из §3). Роль пар $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$ в том случае, когда они не минимизируют функционал $I$, описана в теореме 3.2.

Согласно тому же описанию, среди критических точек функционала $I$ состояния равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ функционала $I_0$ даже в случае $\chi^\pm \neq \hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}$, также не всегда являются состояниями равновесия для функционала $I$. Это явление возможно лишь в перечисленных ниже случаях:

$$\begin{gathered} \text{при } t_- < t_+, \text{ если } \sigma > \sigma(t) \text{ или } 0 < \sigma \leq \sigma(t), \text{ но } \hat{\chi}_t \neq \chi_t^\pm; \\ \text{при } t_- = t_+ = t^*, \text{ если } \sigma > 0 \text{ и } \hat{\chi}_{t^*} \neq \hat{\chi}^\pm. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Поскольку во всех перечисленных в (4.13) случаях $\hat{\chi}_t \neq \chi^\pm$, для порождаемой парой $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ критической точки $\tilde{u} = \hat{u}_t$, $\tilde{\chi} = \hat{\chi}_t$ функционала $I$ величина $\tilde{Q} \in (0,1)$. Поэтому для пары $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ справедливо не только уравнение (4.10), но и последнее равенство (4.12). Так как для любой функции $\chi \in \mathbb{Z}$ с достаточно малой нормой $\|\chi - \tilde{\chi}\|_{L_1}$ выполняется неравенство $S[\chi] \geq S[\tilde{\chi}]$, из (4.12), (4.10) и представления (3.1) получаем оценку $I[\tilde{u}+v,\chi,t,\sigma] \geq I[\tilde{u},\tilde{\chi},t,\sigma]$, справедливую для всех $v \in \mathbb{X}$ и достаточно близких в пространстве $L_1(0,l)$ к $\tilde{\chi}$ функций $\chi \in \mathbb{Z}$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что критическая точка функционала $I_0$, не служащая для него состоянием равновесия, является седловой точкой этого функционала. Критическая точка $\tilde{u}$,$\tilde{\chi}$ функционала $I$, не служащая для него состоянием равновесия, является локальным минимумом этого функционала относительно любых возмущений функции $\tilde{u}$ в пространстве $\mathbb{X}$ и достаточно малых по $L_1(0,l)$ норме отклонений класса $\mathbb{Z}$ от функции $\tilde{\chi}$.

Пусть $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$ при $\sigma = 0$ и $\chi \in \mathbb{Z}$ при $\sigma > 0$. Введем величины

$$\Theta[u,\chi](x) = \chi(x)F_M^+(u'(x)) + (1-\chi(x))F_M^-(u'(x)),$$
$$\Phi[u,\chi](x,t) = \chi(x)(F^+(u'(x)) + t - u'(x)F_M^+(u'(x))) + (1-\chi(x))(F^-(u'(x)) - u'(x)F_M^+(u'(x))). \tag{4.14}$$

Функция $\Theta[u,\chi](x)$ задает напряжение в двухфазовой упругой среде для поля смещений $u$ и распределения фаз $\chi$, а функция $\Phi[u,\chi](x,t)$ — химический потенциал этой среды при тех же условиях. Из (4.6) следует, что при фиксированном $t$ для критической точки $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$

$$\Theta[\tilde{u},\tilde{\chi}](x) = C_\Theta = \mathrm{const}, \quad \Phi[\tilde{u},\tilde{\chi}](x,t) = C_\Phi = \mathrm{const} \qquad \text{для почти всех } x \in [0,l]. \tag{4.15}$$

Соотношения (4.15) означают, в частности, непрерывность в критической точке $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ напряжения и химического потенциала при переходе границы раздела фаз.

Предположим, что для некоторой точки $x_0 \in (0,l)$ и достаточно малого $\delta > 0$ функция $\tilde{\chi}$ постоянна при $x \in (x_0-\delta, x_0)$ и при $x \in (x_0, x_0+\delta)$, но не совпадает с константой на интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Тогда точка $x_0$ служит точкой границы раздела фаз. Из первого равенства (4.15) следует, что функция $\tilde{u}$ линейна на каждом из интервалов $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$. Положим

$$\begin{aligned} M_+ &= \tilde{u}'(x) \text{ для тех } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \text{ для которых } \tilde{\chi}(x) = 1, \\ M_- &= \tilde{u}'(x) \text{ для тех } x \in (x_0-\delta, x_0+\delta), \text{ для которых } \tilde{\chi}(x) = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Тогда из (4.15) имеем

$$[F(\tilde{u}')] = 0, \quad [F(\tilde{u}') - \tilde{u}'F_M(\tilde{u}')] + t = 0, \qquad \text{где} \quad [\alpha(\tilde{u}')] = \alpha^+(M_+) - \alpha^-(M_-). \tag{4.17}$$

Условия (4.17) являются классическими необходимыми условиями экстремума Вейерштрасса-Эрдмана для интегрального функционала

$$I_0^{\min}[u,t] = \int_0^l F^{\min}(u',t)\,dx, \qquad F^{\min}(M,t) = \min\{F^+(M)+t, F^-(M)\}, \quad u \in \mathbb{X} \tag{4.18}$$

на множестве функций с разрешенным скачком производной в заранее неизвестной точке $x_0$. Соотношения (4.17) допускают геометрическую интерпретацию, согласно которой точки $(M_-, F^-(M_-))$ и $(M_+, F^+(M_+)+t)$ соединяются общей касательной к графикам функций $F^-(M)$ и $F^+(M)+t$ в этих точках.

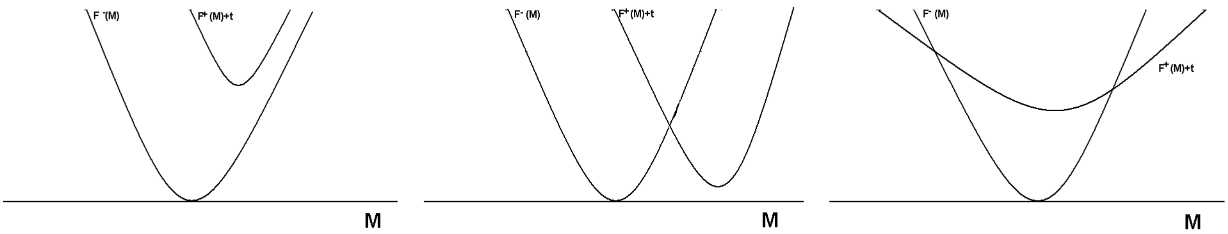


Рис.4.1

Расположение графиков функций $F^+(M)+t$ и $F^-(M)$

.

В зависимости от величин $a_\pm$, $c_\pm$ и $t$ такая пара $M_\pm$ может не существовать, могут существовать только одна или только две такие пары.

### Библиографические замечания к главе 1.

Утверждения данной главы основаны на работах [1-4]. В них же содержатся другие приемы, позволяющие получить аналогичные результаты для иных граничных условий и ненулевых силовых полей.

С применением внутренней вариации к одномерным вариационным задачам можно познакомиться по книге [5]. Канонический вывод условий Вейерштрасса-Эрдмана, основанный на общей форме первой вариации интегрального функционала, и его геометрическая интерпретация содержатся в [6].

### Литература

1. В.Г.Осмоловский. "Существование состояний равновесия в одномерной задаче о фазовых переходах". Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер.1, вып. 3 (2006), с. 54-65.
2. В.Г.Осмоловский. "Устойчивость однофазовых состояний равновесия для двухфазовой упругой среды при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения. Одномерный случай". Проблемы математического анализа, вып. 32 (2006), с.3-19.
3. В.Г.Осмоловский. "Точные решения задачи о фазовых переходах в одномерном модельном случае". Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер.1, вып. 3 (2007), с. 42-48.
4. В.Г.Осмоловский. "Одномерная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред при наличии микронеоднородностей". Проблемы математического анализа, вып. 46 (2010), с.105-115.
5. Буттацо Д.,Джаквинта М., Гильдебрандт С. *Одномерные вариацинные задачи.* Новосибирск, 1998.
6. Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление.* М., 1961.

# ГЛАВА 2

# ЗАДАЧА С НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

*В главе предпринимается попытка частичного переноса результатов §1.2 на многомерный ($m \geq 2$) случай. Существенным отличием многомерного случая от одномерного является возможность несуществования состояний равновесия.*



## §1. Постановка задачи и предварительные построения.

Для постановки многомерной вариационной задачи о фазовых переходах при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения введем тензоры модулей упругости $a^{\pm}_{ijkl}$, $i,j,k,l = 1,\dots,m$, $m \geq 2$ для каждой из фаз $\pm$, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности

$$\begin{gathered} a^{\pm}_{ijkl} = a^{\pm}_{klij} = a^{\pm}_{jikl} = a^{\pm}_{ijlk}, \\ a^{\pm}_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \nu\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \nu > 0, \qquad \text{для всех матриц} \quad \xi \in R^{m\times m}_s, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $R^{m\times m}_s$ — пространство $m\times m$-симметричных матриц, а по повторяющимся индексам в (1.1) и везде ниже предполагается суммирование от 1 до $m$.

В пространстве $R^{m\times m}_s$ зададим скалярное произведение Гильберта-Шмидта

$$< \alpha, \beta >= \operatorname{tr}\alpha\beta, \qquad \alpha,\beta \in R^{m\times m}_s. \tag{1.2}$$

Тогда для каждого из знаков $\pm$ коэффициенты $a^{\pm}_{ijkl}$ порождают линейное отображение

$$A^{\pm} : R^{m\times m}_s \to R^{m\times m}_s, \quad (A^{\pm}\xi)_{kl} = a^{\pm}_{ijkl}\xi_{ij}, \tag{1.3}$$

являющееся симметричным и положительно определенным относительно скалярного произведения (1.2)

$$\begin{gathered} < A^{\pm}\xi, \zeta >=< \xi, A^{\pm}\zeta >, \quad < A^{\pm}\xi, \xi > \geq \nu < \xi, \xi > \equiv \nu|\xi|^2 \\ \text{для всех матриц} \quad \xi, \zeta \in R^{m\times m}_s. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Кроме тензоров модулей упругости нам потребуются тензоры остаточной деформации $\zeta^{\pm}_{ij}$ и тензоры деформации $e_{ij}(M)$

$$\zeta^{\pm} \in R^{m\times m}_s, \qquad e(M) = \frac{M + M^*}{2} \in R^{m\times m}_s, \quad M \in R^{m\times m}, \tag{1.5}$$

где $R^{m\times m}$ — пространство $m\times m$-матриц.

Определим функции $F^{\pm}(M)$ равенством

$$F^{\pm}(M) =< A^{\pm}(e(M) - \zeta^{\pm}), e(M) - \zeta^{\pm} > . \tag{1.6}$$

Очевидно, что квадратичные функции $F^{\pm}(M)$ бесконечно дифференцируемы, выпуклы

$$F^{\pm}_{M_{ij}M_{kl}} C_{ij}C_{kl} = 2 < A^{\pm}e(C), e(C) > \geq 0 \quad \text{для всех матриц} \quad C \in R^{m\times m} \tag{1.7}$$

и удовлетворяют условию Лежандра-Адамара

$$F^{\pm}_{M_{ij}M_{kl}}\xi_i\xi_k\lambda_j\lambda_l \geq \nu|\lambda|^2|\xi|^2 \quad \text{для всех векторов} \quad \lambda,\xi \in R^m. \tag{1.8}$$

С помощью функций (1.6) определим функционал энергии деформации двухфазовой упругой среды в ограниченной области $\Omega \subset R^m$, $m \geq 2$ равенством

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] = \int_\Omega \{\chi(F^+(\nabla u)+t) + (1-\chi)F^-(\nabla u)\}\,dx, \\ u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad t \in R^1, \end{gathered} \tag{1.9}$$

где множества допустимых полей смещений $\mathbb{X}$ и допустимых распределений фаз $\mathbb{Z}'$ имеют вид

$$\mathbb{X} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m), \quad \mathbb{Z}' = \{\chi \in L_\infty(\Omega), \chi(x) = \chi^2(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega\}, \tag{1.10}$$

а $(\nabla u)_{ij} = u^i_{x_j}$. Очевидно, что в гильбертовом пространстве $\mathbb{X}$ скалярное произведение

$$(u,v)_{\mathbb{X}} = \int_\Omega < e(\nabla u), e(\nabla v) > \, dx \tag{1.11}$$

и соответствующая ему норма эквивалентны стандартным.

Под состоянием равновесия двухфазовой упругой среды с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения при фиксированном значении температуры $t$ будем понимать равновесное поле смещений $\hat{u}_t$ и равновесное распределение фаз $\hat{\chi}_t$, минимизирующие при данном $t$ функционал энергии

$$I_0[\hat{u}_t,\hat{\chi}_t,t] = \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t]. \qquad \hat{u}_t \in \mathbb{X}, \quad \hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}'. \tag{1.12}$$

Состояние равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ назовем однофазовым, если $\hat{\chi}_t = 1$ или $\hat{\chi}_t = 0$ почти всюду в $\Omega$ и двухфазовым в противном случае.

Введем два функционала $I^{\pm}[u]$, являющиеся функционалами энергии однофазовых сред с плотностями (1.6)

$$I^{\pm}[u] = \int_\Omega F^{\pm}(\nabla u)\,dx, \quad u \in \mathbb{X}. \tag{1.13}$$

Поскольку для функций $u \in \mathbb{X}$

$$I^{\pm}[u] = \int_\Omega < A^{\pm}e(\nabla u), e(\nabla u) > \, dx + |\Omega| < A^{\pm}\zeta^{\pm}, \zeta^{\pm} >,$$

вариационные задачи

$$I^{\pm}[\hat{u}^{\pm}] = \inf_{u\in\mathbb{X}} I[u], \quad \hat{u}^{\pm} \in \mathbb{X} \tag{1.14}$$

однозначно разрешимы и их решениями являются функции

$$\hat{u}^{\pm} = 0. \tag{1.15}$$

Очевидно, что

$$I^+[u] + |\Omega|t = I_0[u,\chi^+,t], \quad \chi^+(x) \equiv 1, \qquad I^-[u] = I_0[u,\chi^-,t], \quad \chi^-(x) \equiv 0. \tag{1.16}$$

Поэтому однофазовые состояния равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ функционала (1.9) реализуются лишь с нулевыми равновесными полями смещения.

Основной неприятностью при изучении задачи (1.12) является тот факт, что она может оказаться неразрешимой.

**Лемма 1.1.** *Пусть* $\lambda \in R^m$, $|\lambda| = 1$,

$$\zeta^{\pm} = \pm\lambda \otimes \lambda, \quad (\lambda \otimes \lambda)_{ij} = \lambda_i\lambda_j. \tag{1.17}$$

*Тогда задача* (1.12) *при* $t=0$ *не имеет решений.*

Доказательство. Очевидно, что $I_0[u,\chi,0]\geq 0$ и равенство достигается в том и только том случае, если

$$e(\nabla u)=\chi\zeta^+ + (1-\chi)\zeta^-, \qquad u\in\mathbb{X}, \quad \chi\in\mathbb{Z}'. \tag{1.18}$$

Поэтому для доказательства утверждения леммы достаточно установить, что при выполнении условий (1.17) задача (1.18) не разрешима относительно $u$ и $\chi$, но существуют такие последовательности $u_k\in\mathbb{X}$, $\chi_k\in\mathbb{Z}'$, что $I_0[u_k,\chi_k,0]\to 0$.

При выполнении условий (1.17) уравнение (1.18) имеет вид

$$u^i_{x_j}+u^j_{x_i}=2(2\chi-1)\lambda_i\lambda_j. \tag{1.19}$$

Фиксируем вектор $\tau\in R^m$, $|\tau|=1$, $\tau\perp\lambda$. Из (1.19) получаем

$$\frac{\partial(u\cdot\tau)}{\partial\tau}=0, \quad \frac{\partial(u\cdot\tau)}{\partial\lambda}+\frac{\partial(u\cdot\lambda)}{\partial\tau}=0, \quad \frac{\partial(u\cdot\lambda)}{\partial\lambda}=(2\chi-1). \tag{1.20}$$

Обозначим через $\Lambda$ подпространство $R^m$, ортогональное вектору $\tau$. Очевидно, что $\lambda\in\Lambda$. Положим

$$\Omega_x=\{r\in R^1 : x+r\tau\in\Omega\}, \quad x\in\Lambda.$$

Поскольку множество $\Omega_x$ открыто на прямой, оно либо пусто, либо является объединением некоторого, не более чем счетного, набора открытых непересекающихся интервалов $l_j(x)$, $j=1,\ldots$.

Для функции $u\in\mathbb{X}$ ее ограничение на каждый из интервалов $l_j(x)$, $j=1,\ldots$, при почти всех $x\in\Lambda$, для которых $\Omega_x\neq\emptyset$, принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(l_j(x),R^m)$, а соболевская производная ограничения совпадает с ограничением соответствующей соболевской производной на указанные интервалы.

Из приведенных рассуждений и первого равенства (1.20) следует, что $u\cdot\tau=0$ на множестве полной меры $E'_\tau\subset\Omega$. Тогда второе равенство (1.20) приводит к соотношению $u\cdot\lambda=0$ на множестве полной меры $E''_\tau\subset\Omega$. Следовательно, $u\cdot\tau=u\cdot\lambda=0$ почти всюду в $\Omega$. Повторяя эти рассуждения для элементов $\tau^1,\ldots,\tau^{m-1}$ ортонормированного базиса $\tau^1,\ldots,\tau^{(m-1)},\lambda$ пространства $R^m$, приходим к выводу, что функция $u\in\mathbb{X}$, удовлетворяющая (1.19) обязана равняться нулю почти всюду в $\Omega$, что противоречит третьему равенству (1.20).

Фиксируем функцию $h(t)$, $t\in R^1$ со свойствами

$$h\in W^1_\infty(R^1), \qquad h(t)=h(t+1), \qquad |h'(t)|=1 \quad \text{почти всюду}. \tag{1.21}$$

Положим

$$v_k(x)=\frac{\lambda}{k}h(kx\cdot\lambda), \quad k=1,2,\ldots \tag{1.22}$$

Тогда $v_k\in W^1_2(\Omega,R^m)$ и $e(\nabla v_k)=h'(kx\cdot\lambda)\lambda\otimes\lambda$. Пусть $\chi_k(x)$ — характеристическая функция множества точек $x\in\Omega$, для которых $h'(kx\cdot\lambda)=1$. Тогда $\chi_k\in\mathbb{Z}'$ и

$$e(\nabla v_k)=\chi_k\zeta^+ + (1-\chi^k)\zeta^-.$$

Для каждого достаточно малого положительного $\delta$ обозначим через $\Omega_\delta$ строго внутреннюю подобласть области $\Omega$, для которой

$$|x-y|\geq\delta \qquad \text{для всех} \quad y\in\partial\Omega, \quad x\in\bar\Omega_\delta.$$

Тогда существует такая функция $\phi_\delta\in C_0^\infty(\Omega)$, что

$$\phi_\delta(x)=1 \quad \text{при} \quad x\in\bar\Omega_\delta, \qquad |\nabla\phi_\delta(x)|\leq\frac{C}{\delta} \quad \text{при} \quad x\in\bar\Omega.$$

Очевидно, что для каждого натурального $k$ и положительного $\delta$ функции $u_k = v_k\phi_\delta$ лежат в пространстве $\mathbb{X}$. Кроме того,

$$e(\nabla u_k) = \phi_\delta e(\nabla v_k) + \frac{1}{2}(\nabla\phi_\delta \otimes v_k + v_k \otimes \nabla\phi_\delta) = \phi_\delta(\chi_k\zeta^+ + (1-\chi_k)\zeta^-) + \frac{1}{2}(\nabla\phi_\delta \otimes v_k + v_k \otimes \nabla\phi_\delta).$$

Следовательно, $I_0[u_k, \chi_k, 0] = o(1)$ при $\delta = 1/k$, $k \to \infty$. □

Из формулы (1.5) следует, что величина $e(\nabla u)$ жестко связана с выбранной в $R^m$ системой координат. Исследуем вопрос о преобразовании выражения для $F^\pm(\nabla u)$ при переходе от одной декартовой системы к другой, осуществляемом сдвигом начала координат и поворотом ортов.

Фиксируем в пространстве $R^m$ оператор поворота $V$ и вектор $x^0$. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — координатные орты исходной системы координат, $e'_i = Ve_i$, $i = 1, \ldots, m$ — координатные орты новой системы. Компоненты матрицы оператора $V$ в базисе $e_i$, $i = 1, \ldots, m$ задаются равенством $V_{ij} = Ve_j \cdot e_i$ (здесь $x \cdot y$ — скалярное произведение в $R^m$ векторов $x$ и $y$), а в базисе $e'_i$, $i = 1, \ldots, m$ — равенством $V'_{ij} = Ve'_j \cdot e'_i$. Следовательно

$$V_{ij} = e'_j \cdot e_i = e'_j \cdot V^* e'_i = Ve'_j \cdot e'_i = V'_{ij}. \tag{1.23}$$

Один и тот же вектор $x \in R^m$ в разных системах координат представим в виде

$$x = (x_1, \ldots, x_m), \quad x_i = x \cdot e_i, \qquad x' = (x'_1, \ldots, x'_m), \quad x'_i = (x - x^0) \cdot e'_i. \tag{1.24}$$

Очевидно, что

$$x'_i = V^*(x - x^0) \cdot e_i = (V^*(x - x^0))^i = V_{pi}(x - x^0)_p. \tag{1.25}$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial x'_r}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x'_r} = V_{jr}\frac{\partial}{\partial x'_r}. \tag{1.26}$$

Пусть $u(x)$ — $m$-мерная вектор-функция. Положим $v(x') = u(x)$. Компоненты функции $u(x)$ в базисе $e_i$, $i = 1, \ldots, m$ имеют вид $u^i(x) = u(x) \cdot e_i$. Компоненты этой же функции в базисе $e'_i$, $i = 1, \ldots, m$ задаются равенствами $v^i(x') = v(x') \cdot e'_i$. Тогда в силу (1.23)

$$u^i(x) = u(x) \cdot e_i = u(x) \cdot V^* e'_i = Vu(x) \cdot e'_i = Vv(x') \cdot e'_i = v^j(x')Ve'_j \cdot e'_i = V_{ij}v^j(x'). \tag{1.27}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u^i(x)}{\partial x_j} = V_{jr}V_{ip}\frac{\partial v^p(x')}{\partial x'_r}. \tag{1.28}$$

Поэтому

$$2e_{ij}(\nabla u(x)) = (V_{jr}V_{ip} + V_{ir}V_{jp})v^p_{x'_r}(x'). \tag{1.29}$$

Пользуясь полученными формулами и условиями симметрии (1.1), приходим к утверждению.

**Лемма 1.2.** *Справедливы равенства*

$$\begin{gathered} a^\pm_{ijkl}(e(\nabla u(x)) - \zeta^\pm)_{ij}(e(\nabla u(x)) - \zeta^\pm)_{kl} = a'^\pm_{prst}(e(\nabla v(x')) - \zeta'^\pm)_{pr}(e(\nabla v(x')) - \zeta'^\pm)_{st}, \\ a'^\pm_{prst} = a^\pm_{ijkl}V_{ip}V_{jr}V_{ks}V_{lt}, \quad \zeta'^\pm_{pr} = V_{pi}V_{rj}\zeta^\pm_{ij}. \end{gathered} \tag{1.30}$$

Заметим, что из унитарности матрицы $V$ и условий (1.1) для $a^\pm_{ijkl}$ и $\zeta^\pm_{ij}$ следует аналог (1.1) для величин $a'^\pm_{ijkl}$ и $\zeta'^\pm_{ij}$.

Пусть $\zeta^\pm = c_\pm\lambda \otimes \lambda$, $\lambda \in R^m$, $|\lambda| = 1$. Выберем поворот $V$ таким образом, чтобы $Ve_m = \lambda$. Тогда $\lambda = V^* e_m$ и

$$\zeta'^\pm = c_\pm(e_m \otimes e_m). \tag{1.31}$$

Итак (лемма 1.1), задача (1.12) может, но не обязана быть неразрешимой. В следующем параграфе мы не только установим существование ее решений для важного класса двухфазовых упругих сред, но и получим для них явные формулы.

## §2. Фазовые переходы для изотропных сред.

Двухфазовая среда называется изотропной, если

$$a^{\pm}_{ijkl} = \frac{a_{\pm}}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + b_{\pm}\delta_{ij}\delta_{kl}, \quad \zeta^{\pm}_{ij} = c_{\pm}\delta_{ij},$$
$$a_{\pm}, b_{\pm}, c_{\pm} \in R^1, \qquad a_{\pm} > 0, \quad b_{\pm} \geq 0. \tag{2.1}$$

В этом случае

$$F^{\pm}(M) = a_{\pm}\,\mathrm{tr}(e(M) - c_{\pm}i)^2 + b_{\pm}\,\mathrm{tr}^2(e(M) - c_{\pm}i),$$
$$i \text{ — единичная матрица в пространстве } R^m. \tag{2.2}$$

Наша цель — доказать разрешимость задачи (1.12) для плотностей энергии (2.2) и описать зависимость состояний равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ от температуры $t$. Как результаты, так и схема их получения будут аналогичны изложенным в §1.2. К сожалению, реализация этих планов удается лишь при дополнительном ограничении

$$a_+ = a_- \equiv a. \tag{2.3}$$

Начнем с преобразования функционала энергии (1.12) для плотностей (2.2).

**Лемма 2.1.** *Для любых функций $u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'$ функционал энергии (1.12) с плотностями (2.2) представим в виде*

$$I_0[u,\chi,t] = \int_\Omega (a_+\chi + a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx +$$
$$+\int_\Omega \{\frac{a_+\chi + a_-(1-\chi)}{4}|\,\mathrm{rot}\,u|^2 + ((a_+ + b_+)\chi + (a_- + b_-)(1-\chi))(\mathrm{div}\,u - \alpha(Q)(\chi - Q))^2\}\,dx +$$
$$+|\Omega|G(Q,t),$$

$$(\mathrm{rot}\,u)_{ij} = u^i_{x_j} - u^j_{x_i}, \quad |\,\mathrm{rot}\,u|^2 = (\mathrm{rot}\,u)_{ij}(\mathrm{rot}\,u)_{ij}, \tag{2.4}$$

$$Q = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi\,dx, \quad \alpha(Q) = \frac{[c(a+bm)]}{(a_- + b_-)Q + (a_+ + b_+)(1-Q)},$$

$$G(Q,t) = Qt + mc_+^2(a_+ + b_+m)Q + mc_-^2(a_- + b_-m)(1-Q) - [c(a+bm)]\alpha(Q)Q(1-Q).$$

Доказательство. Поскольку для любой функции $u \in W^1_2(\Omega, R^m)$

$$(u^i_{x_j} + u^j_{x_i})(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}) = (u^i_{x_j} - u^j_{x_i})(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}) + 4u^i_{x_j}u^j_{x_i} = |\,\mathrm{rot}\,u|^2 + 4u^i_{x_j}u^j_{x_i},$$

имеем

$$F^{\pm}(\nabla u) =$$
$$= \frac{a_{\pm}}{4}|\,\mathrm{rot}\,u|^2 + (a_{\pm} + b_{\pm})|\,\mathrm{div}\,u|^2 - 2c_{\pm}(a_{\pm} + b_{\pm}m)\,\mathrm{div}\,u + mc_{\pm}^2(a_{\pm} + b_{\pm}m) + a_{\pm}(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j}).$$

Так как для любого числа $\lambda$

$$(a_{\pm} + b_{\pm})|\,\mathrm{div}\,u|^2 - 2c_{\pm}(a_{\pm} + b_{\pm}m)\,\mathrm{div}\,u =$$
$$= (a_{\pm} + b_{\pm})\left(\mathrm{div}\,u - \frac{c_{\pm}(a_{\pm} + b_{\pm}m) - \lambda/2}{a_{\pm} + b_{\pm}}\right)^2 - \frac{(c_{\pm}(a_{\pm} + b_{\pm}m) - \lambda/2)^2}{a_{\pm} + b_{\pm}} - \lambda\,\mathrm{div}\,u,$$

получаем

$$F^{\pm}(\nabla u) =$$
$$= \frac{a_\pm}{4}|\operatorname{rot} u|^2 + (a_\pm + b_\pm)\left(\operatorname{div} u - \frac{c_\pm(a_\pm + b_\pm m) - \lambda/2}{a_\pm + b_\pm}\right)^2 + a_\pm(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j}) - \lambda \operatorname{div} u + \tag{2.5}$$
$$+ m c_\pm^2(a_\pm + b_\pm m) - \frac{(c_\pm(a_\pm + b_\pm m) - \lambda/2)^2}{a_\pm + b_\pm}.$$

Следовательно, для всех $u \in W_2^1(\Omega, R^m)$, $\chi \in \mathbb{Z}'$

$$\begin{gathered}\chi F^+(\nabla u) + (1-\chi)F^-(\nabla u) = \\ = \frac{a_+\chi + a_-(1-\chi)}{4}|\operatorname{rot} u|^2 + \\ + ((a_+ + b_+)\chi + (a_- + b_-)(1-\chi)) \times \\ \times \left(\operatorname{div} u - \frac{c_+(a_+ + b_+ m) - \lambda/2}{a_+ + b_+}\chi - \frac{c_-(a_- + b_- m) - \lambda/2}{a_- + b_-}(1-\chi)\right)^2 + \\ + (a_+\chi + a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j}) - \lambda \operatorname{div} u + \\ + \chi(m c_+^2(a_+ + b_+ m) - \frac{(c_+(a_+ + b_+ m) - \lambda/2)^2}{a_+ + b_+}) + \\ + (1-\chi)(m c_-^2(a_- + b_- m) - \frac{(c_-(a_- + b_- m) - \lambda/2)^2}{a_- + b_-}),\end{gathered} \tag{2.6}$$

ибо при $\chi(x) = 1$ и $\chi(x) = 0$ равенство (2.6) совпадает с равенством (2.5) для знаков $+$ и $-$, соответственно.

Фиксируем число $\lambda = \lambda(Q)$, положив

$$\frac{c_+(a_+ + b_+ m) - \lambda/2}{a_+ + b_+}Q + \frac{c_-(a_- + b_- m) - \lambda/2}{a_- + b_-}(1-Q) = 0. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\lambda(Q) = 2\frac{c_+(a_+ + b_+ m)(a_- + b_-)Q + c_-(a_- + b_- m)(a_+ + b_+)(1-Q)}{(a_- + b_-)Q + (a_+ + b_+)(1-Q)}, \\ \frac{c_+(a_+ + b_+ m) - \lambda(Q)/2}{a_+ + b_+} = \alpha(Q)(1-Q), \quad \frac{c_-(a_- + b_- m) - \lambda(Q)/2}{a_- + b_-} = -\alpha(Q)Q,\end{gathered} \tag{2.8}$$

и в силу (2.6) получаем

$$\chi F^+(\nabla u) + (1-\chi)F^-(\nabla u) =$$

$$\begin{gathered}= \frac{a_+\chi + a_-(1-\chi)}{4}|\operatorname{rot} u|^2 + ((a_+ + b_+)\chi + (a_- + b_-)(1-\chi))(\operatorname{div} u - \alpha(Q)(\chi - Q))^2 + \\ + (a_+\chi + a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j}) - \lambda(Q) \operatorname{div} u + \\ + \chi(m c_+^2(a_+ + b_+ m) - (a_+ + b_+)\alpha^2(Q)(1-Q)^2) + (1-\chi)(m c_-^2(a_- + b_- m) - (a_- + b_-)\alpha^2(Q)Q^2).\end{gathered}$$

Интегрируя последнее равенство по области $\Omega$, завершим доказательство леммы. □

Представление (2.4) позволяет расщепить вариационную задачу (1.12) на две. Одна из них является системой уравнений по определению функций $u$ и $\chi$

$$\begin{gathered}\operatorname{div} u = \alpha(Q)(\chi - Q), \quad \operatorname{rot} u = 0, \qquad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \\ Q = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi \, dx.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Другая — задача на экстремум функции $G(.,t)$ при фиксированном значении $t$

$$G(\hat{Q}(t),t) = \min_{Q\in[0,1]} G(Q,t), \quad \hat{Q}(t) \in [0,1]. \tag{2.10}$$

Разрешимость задачи (2.10) очевидна в силу непрерывности функции $G(.,t)$. Поскольку разрешимость системы (2.9) еще не установлена, следующая лемма о разрешимости задачи (1.12) носит пока условный характер.

**Лемма 2.2.** *Пусть система* (2.9) *разрешима для любого* $Q \in [0,1]$. *Тогда задача* (1.12) *с плотностями энергии* (2.2) *при условии* (2.3) *также разрешима и множество всех ее решений* $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ *совпадает с множеством всех решений системы*

$$\begin{gathered} \operatorname{div} \hat{u}_t = \alpha(\hat{Q}(t))(\hat{\chi}_t - \hat{Q}(t)), \quad \operatorname{rot} \hat{u}_t = 0, \qquad \hat{\chi}_t \in \mathbb{X}, \quad \hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}', \\ \hat{Q}(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_t\,dx, \quad \hat{Q}(t) = \min_{Q\in[0,1]} G(Q,t). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Доказательство. При выполнении условия (2.3)

$$\int_\Omega (a_+\chi + a_-(1-\chi))(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx = a\int_\Omega (u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx = 0$$
$$\text{для все } u \in \mathbb{X},\, \chi \in \mathbb{Z}'.$$

Последнее равенство сперва устанавливается с помощью формулы интегрирования по частям для функций $u \in C_0^\infty(\Omega, R^m)$, затем по непрерывности переносится на все пространство $\mathbb{X}$. Тогда, благодаря (2.4)

$$I_0[u,\chi,t] \ge |\Omega| G(\hat{Q}(t),t), \quad \text{для всех } u \in \mathbb{X},\, \chi \in \mathbb{Z}',$$

причем равенство реализуется лишь на функциях $u = \hat{u}_t$, $\chi = \hat{\chi}_t$, удовлетворяющих требованиям (2.11). В силу предположения о разрешимости задачи (2.9), такие функции существуют. Следовательно, задача (1.12) разрешима и множество всех ее решений совпадает с множеством решений системы (2.11). □

Обратимся к исследованию системы (2.9). В следующей лемме будет доказана ее разрешимость для произвольной константы $\alpha$ и каждого числа $Q \in [0,1]$. Ценность леммы не только в установлении разрешимости системы, но и в построении явных формул для некоторого класса ее решений.

**Лемма 2.3.** *Система*

$$\begin{gathered} \operatorname{div} v = \alpha(\chi - Q), \quad \operatorname{rot} v = 0, \qquad v \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \\ Q = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi\,dx \end{gathered} \tag{2.12}$$

*разрешима относительно искомых функций* $v$ *и* $\chi$ *для любого числа* $\alpha$ *и каждого значения числа* $Q \in [0,1]$.

Доказательство. Доказательство леммы разобьем на ряд этапов. Сначала установим ее справедливость для $\Omega = B_R$, где $B_R$ — открытый шар радиуса $R$ с центром в нуле. В этом случае для сферически симметричной функции $\chi$, удовлетворящей последнему равенству (2.12), будет найдена в явном виде сферически симметричная функция $v$, удовлетворяющая первым двум равенствам (2.12). Затем при помощи переноса этот результат распространим на любой открытый шар $B_R(x_0)$ — шар радиуса $R$ с центром в точке $x_0$.

Для исследования системы (2.12) в произвольной области $\Omega$ нам потребуется конструкция, называемая покрытием Витали открытого множества $\Omega$.

> *Пусть* $\Omega \subset R^m$ *— открытое множество и* $\delta > 0$. *Тогда существует такое счетное семейство непересекающихся замкнутых шаров* $\bar{B}_{R_j}(x_j) \subset \Omega$, $j = 1,\ldots,$ *что* $\operatorname{diam} B_{R_j}(x_j) \le \delta$ *для всех* $j$ *и* $|\Omega \setminus \cup_j \bar{B}_{R_j}(x_j)| = 0$.

Здесь модуль множества означает его $m$-мерную меру Лебега. Очевидно, что для каждой области $\Omega$ можно найти бесконечное множество различных покрытий Витали.

Для построения решения системы (2.12) в произвольной области $\Omega$ фиксируем для нее какое-либо покрытие Витали. В каждом шаре $B_{R_j}(x_j)$ покрытия возьмем произвольное сферически симметричное решение. Решение в области $\Omega$ получается суммированием этих решений по шарам покрытия.

Обратимся к деталям.

(*a*) *Решение системы* (2.12) *в шаре* $B_R$. Фиксируем число $Q \in [0,1]$ и произвольную функцию $\chi \in \mathbb{Z}'$ со свойствами

$$\chi(x) = \chi(|x|), \qquad \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} \chi(|x|)\,dx = Q. \tag{2.13}$$

Первое условие (2.13) означает сферическую симметрию функцию $\chi$.

Функцию $v$ будем также искать в сферически симметричном виде

$$v(x) = \frac{x}{|x|} w(|x|),$$

где $w(r)$, $r \in [0,R]$ — некоторая скалярная функция.

Поскольку

$$v^i_{x_j}(x) = \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right) w(|x|) + \frac{x_i x_j}{|x|^2} w'(|x|), \tag{2.14}$$

получаем

$$\operatorname{rot} v(x) = 0, \quad \operatorname{div} v(x) = w'(|x|) + \frac{m-1}{|x|} w(|x|) = \frac{1}{|x|^{m-1}}(|x|^{m-1} w(|x|))'. \tag{2.15}$$

Следовательно, первые два равенства системы (2.12) эквивалентны соотношению

$$\frac{1}{|x|^{m-1}}(|x|^{m-1} w(|x|))' = \alpha(\chi(|x|) - Q). \tag{2.16}$$

Интегрируя (2.16) с учетом граничного условия $w(R) = 0$, имеем

$$-|x|^{m-1} w(|x|) = \alpha \int_{|x|}^{R} |z|^{m-1}(\chi(|z|) - Q)\,d|z| = \frac{\alpha}{|S_1|}\int_{|x|<|z|<R} (\chi(|z|) - Q)\,dz, \tag{2.17}$$

где $|S_1|$ — площадь единичной сферы в пространстве $R^m$. Так как

$$|B_{|x|}| = \frac{|S_1|}{m}|x|^m, \qquad \int_{B_R} (\chi(|z|) - Q)\,dz = 0,$$

из (2.17) получаем

$$w(|x|) = \frac{\alpha |x|}{m|B_{|x|}|}\int_{|z|<|x|} (\chi(|z|) - Q)\,dz. \tag{2.18}$$

Таким образом,

$$v(x) = \alpha \frac{x}{|x|}\frac{|x|}{m}\frac{1}{|B_{|x|}|}\int_{B_{|x|}} (\chi(|z|) - Q)\,dz. \tag{2.19}$$

Очевидно, что функция $v$ из (2.19) непрерывна в $\bar{B}_R$. В силу (2.18)

$$w(.) \in C[0,R], \qquad \frac{|w(|x|)|}{|x|} \le \frac{|\alpha|}{m}. \tag{2.20}$$

Из уравнения (2.16) имеем

$$w'(|x|) = -\frac{m-1}{|x|} w(|x|) + \alpha(\chi(|x|) - Q). \tag{2.21}$$

Поэтому функция $w'(|x|)$ ограничена на отрезке $[0,R]$ и в силу (2.20)

$$|w'(|x|)| \leq |\alpha| \frac{2m-1}{m}. \tag{2.22}$$

Тогда равенство (2.14) приводит к включению $v^i_{x_j} \in L_\infty(B_R)$, $i,j=1,\dots,m$. Следовательно, функция (2.19) принадлежит пространству $\mathbb{X} \cap W^1_\infty(B_R, R^m)$.

Отметим, что в силу (2.19), (2.14), (2.20), (2.22)

$$|v(x)| \leq \frac{|\alpha|}{m}|x|, \quad |v^i_{x_j}(x)| \leq |\alpha| \frac{2m+1}{m}. \tag{2.23}$$

$(b)$ *Решение системы* (2.12) *в шаре* $B_R(x_0)$. Пусть функции $v(x)$, $\chi(x)$, $x \in B_R$ удовлетворяют при фиксированных $Q$ и $\alpha$ системе (2.12) с $\Omega = B_R$. Очевидно, что функции $v'(x) = v(x-x^0)$, $\chi'(x) = \chi(x-x^0)$, $x \in B_R(x^0)$ удовлетворяют этой системе с теми же параметрами $Q$ и $\alpha$ в $\Omega = B_R(x^0)$.

$(c)$ *Решение системы* (2.12) *в произвольной области* $\Omega$. Пусть $\Omega \subset R^m$ — произвольная область, $Q \in [0,1]$, $\alpha \in R^1$. Фиксируем какое-либо покрытие Витали области $\Omega$ шарами $\bar{B}_{R_j}(x^j)$, $j=1,2\dots$. Пусть $v_j$, $\chi_j$ — построенные в разделе $(b)$ сферически симметричные решения системы (2.12) с указанными $Q$ и $\alpha$ в шарах $B_{R_j}(x^j)$. Распространим эти функции нулем в область $\Omega$. Продолженные таким образом функции обозначим через $\tilde{v}_j$, $\tilde{\chi}_j$. Очевидно, что $\tilde{v}_j \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$. Покажем, что функции

$$v(x) = \Sigma^\infty_{j=1} \tilde{v}_j(x), \quad \chi(x) = \Sigma^\infty_{j=1} \tilde{\chi}_j(x) \tag{2.24}$$

являются решением системы (2.12) в области $\Omega$ для выбранных $Q$ и $\alpha$.

Пусть

$$v^n(x) = \Sigma^n_{j=1} \tilde{v}_j(x), \quad \chi^n(x) = \Sigma^n_{j=1} \tilde{\chi}_j(x). \tag{2.25}$$

Очевидно, что $v^n \in \mathbb{X}$, $\chi^n \in \mathbb{Z}'$. Так как шары покрытия Витали не пересекаются, имеем

$$||v^{n+k} - v^n||^2_{W^1_2(\Omega)} = \Sigma^{n+k}_{j=n+1} ||v_j||^2_{W^1_2(B_{R_j}(x^j))} \leq C \Sigma^{n+k}_{j=n+1} |B_{R_j}|(1+R_j^2), \quad C \neq C(n,k),$$

$$||\chi^{n+k} - \chi^n||^2_{L_2(\Omega)} = \Sigma^{n+k}_{j=n+1} ||\chi_j||^2_{L_2(B_{R_j}(x^j))} \leq \Sigma^{n+k}_{j=n+1} |B_{R_j}|$$

(при выводе первого неравенства использовалась оценка (2.23)). Поскольку область $\Omega$ ограничена, а $\Sigma^\infty_{j=1} |B_{R_j}| = |\Omega|$, из предыдущих неравенств следует, что

$$||v^{n+k} - v^n||_{W^1_2(\Omega)} \to 0, \quad ||\chi^{n+k} - \chi^n||_{L_2(\Omega)} \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому ряды (2.25) сходятся в пространствах $W^1_2(\Omega, R^m)$ и $L_2(\Omega)$, соответственно.

Из определения функций $\tilde{v}_j(x)$ и $\tilde{\chi}_j(x)$, $x \in \Omega$, следует, что

$$\operatorname{rot} \tilde{v}_j(x) = 0, \quad \operatorname{div} \tilde{v}_j(x) = \alpha(\tilde{\chi}_j(x) - Q)\psi_j(x),$$

где $\psi_j(x)$ — характеристическая функция шара $B_{R_j}(x^j)$. Тогда

$$\operatorname{rot} v^n(x) = 0, \quad \operatorname{div} v^n(x) = \alpha(\chi^n - Q\Sigma^n_{j=1}\psi_j(x)). \tag{2.26}$$

Поскольку для шаров покрытия Витали

$$\Sigma^n_{j=1}\psi_j(x) \to 1 \quad \text{в пространстве} \quad L_2(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

переходя в (2.26) к пределу для функций (2.24) получаем

$$\operatorname{rot} v(x) = 0, \quad \operatorname{div} v(x) = \alpha(\chi(x) - Q).$$

Кроме того,

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi\, dx = \frac{1}{|\Omega|}\lim_{n\to\infty}\Sigma_{j=1}^n \int_{B_{R_j}(x^j)} \chi_j\, dx = \frac{1}{|\Omega|}Q \lim_{n\to\infty}\Sigma_{j=1}^n |B_{R_j}| = Q,$$

что завершает доказательство леммы. □

Из построений леммы следует, что при $Q \in (0,1)$, $\alpha \neq 0$ решение системы (2.12) заведомо не единственно. Эта неединственность обеспечивается неединственностью решения системы в шаре $B_{R_j}(x^j)$ и неединственностью покрытия Витали. В лемме 2.3 не утверждается, что построенные в ней при $Q \in (0,1)$ и $\alpha \neq 0$ решения — все решения системы (2.12). Отметим, что для построенных решений функция $v \in \mathbb{X} \cap W^1_\infty(\Omega, R^m)$.

При $Q = 0$, $Q = 1$ или $\alpha = 0$ система (2.12) примет вид

$$\operatorname{rot} v = 0, \quad \operatorname{div} v = 0, \qquad v \in \mathbb{X}. \tag{2.27}$$

Поскольку для всех $v \in \mathbb{X}$

$$\int_\Omega (|\operatorname{rot} v|^2 + 4|\operatorname{div} v|^2)\, dx = \int_\Omega e_{ij}(\nabla v) e_{ij}(\nabla v)\, dx,$$

единственным решением системы (2.27) служит функция $v = 0$.

Для исследования задачи (2.10) удобно ввести следующие обозначения

$$t_- = t^* - \frac{[c(a+bm)]^2}{a_- + b_-}, \quad t_+ = t^* + \frac{[c(a+bm)]^2}{a_+ + b_+}, \quad t^* = -[mc^2(a+bm)]. \tag{2.28}$$

Числа $t_\pm$ назовем температурами фазовых переходов. Очевидно, что

$$t_+ \geq t_-, \quad t_+ - t_- = [c(a+bm)]^2 \frac{(a_+ + b_+) + (a_- + b_-)}{(a_+ + b_+)(a_- + b_-)}, \tag{2.29}$$

а если $t_+ = t_-$, то $t_\pm = t^*$.

Непосредственные вычисления приводят к формулам для производных функции $G(.,t)$ из (2.4)

$$G_Q(0,t) = t - t_+, \quad G_Q(1,t) = t - t_-,$$

$$G_{QQ}(Q,t) = \frac{2[c(a+bm)]^2(a_+ + b_+)(a_- + b_-)}{((a_- + b_-)Q + (a_+ + b_+)(1-Q))^3}. \tag{2.30}$$

Поскольку формулы (2.30) аналогичны формулам (1.2.10) для одномерного случая, для решений задачи (2.10) справедливы утверждения лемм 1.2.2 и 1.2.3. Фурмулы (1.2.12) и (1.2.13) в многомерном случае примут вид

$$\hat{Q}_{tt}(t) = -\frac{6[c(a+bm)]^2(a_+ + b_+)(a_- + b_-)}{G^3_{QQ}(\hat{Q}(t),t)((a_- + b_-)\hat{Q}(t) + (a_+ + b_+)(1-\hat{Q}(t)))^4}[a+b], \quad t \in (t_-, t_+),$$

$$\hat{Q}_t(t_- + 0) = -\frac{a_- + b_-}{2(a_+ + b_+)[c(a+bm)]^2}, \quad \hat{Q}_t(t_+ - 0) = -\frac{a_+ + b_+}{2(a_- + b_-)[c(a+bm)]^2}. \tag{2.31}$$

Пользуясь леммами 2.2, 2.3 и свойствами решений задачи (2.10), приходим к следующему выводу.

**Теорема 2.1.** *Задача* (1.12) *с плотностями энергии* (2.2) *при условии* (2.3) *разрешима для каждого значения параметра* $t$. *Для множества всех ее решений справедливо описание* (1) — (7) *из* §1.2 *с зафиксированными в* (2.29) *температурами фазовых переходов* $t_\pm$.

Как и в одномерном случае, функция $\hat{Q}(t)$, $t \in (t_-, t_+)$ находится в явном виде.

**Лемма 2.4.** *Пусть* $[c(a+bm)] \neq 0$, $t \in (t_-, t_+)$

$$h(t) = \frac{t_+ - t}{t_+ - t_-}, \quad g(t) = \frac{1}{(a_- + b_-)^2} h(t) + \frac{1}{(a_+ + b_+)^2}(1 - h(t)). \tag{2.32}$$

*Тогда*

$$\hat{Q}(t) = \begin{cases} h(t) & \textit{при} \quad [a+b] = 0 \\ \frac{(a_+ + b_+) + (a_- + b_-)}{2[a+b]} + \frac{1}{2} - \frac{1}{[a+b] g^{1/2}(t)} & \textit{при} \quad [a+b] \neq 0 \end{cases}. \tag{2.33}$$

Доказательство. Доказательство данной леммы идентично доказательству леммы 1.2.4. Следует лишь заменить равенство 1.2.16 равенством

$$\frac{d\hat{Q}(t)}{((a_- + b_-)\hat{Q}(t) + (a_+ + b_+)(1 - \hat{Q}(t)))^3} = -\frac{dt}{2[c(a+bm)]^2 (a_+ + b_+)(a_- + b_-)}$$

и подправить формулу 1.2.14 для функции $g(t)$. □

Рис.2.1

Покрытие Витали области $\Omega$ и распределение фаз в шаре покрытия.

В заключение параграфа, как и в одномерном случае, исследуем вопрос об устойчивости состояний $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ (см. определения (1.14) — (1.16)).

Из теоремы 2.1 следует, что для пар $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ справедливы утверждения (1.2.17), в которых задача (1.1.5) заменена задачей (1.12) с плотностями энергии (2.2), удовлетворяющими условию (2.3). Ответ на вопрос, чем являются пары $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$, если они не минимизируют функционал энергии двухфазовой упругой среды, дан в следующей теореме.

**Теорема 2.2.** *Если для данного $t$ какая-либо из пар $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ не является решением задачи* (1.12) *с плотностями эрергии* (2.2), (2.3), *то эта пара будет седловой точкой функционала энергии* (1.9) *с теми же плотностями.*

Доказательство. Остановимся на несущественных отличиях в доказательстве данной теоремы и теоремы 1.2.2. Систему (1.2.20) в многомерном случае следует заменить системой

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} v_Q = 0, \quad \operatorname{div} v_Q = \alpha(Q)(\chi_Q - Q), \quad Q = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi_Q(x)\,dx, \\ v_Q \in \mathbb{X}, \quad \chi_Q \in \mathbb{Z}', \end{gathered} \tag{2.34}$$

разрешимость которой гарантированна леммой 2.3. Поскольку

$$\int_\Omega e_{ij}(\nabla v_Q)e_{ij}(\nabla v_Q)\,dx = \int_\Omega (|\operatorname{rot} v_Q|^2 + 4|\operatorname{div} v_Q|^2)\,dx = 4\alpha^2(Q)|\Omega|Q(1-Q), \tag{2.35}$$

любое решение $v_Q$ системы (2.34) мало в пространстве $\mathbb{X}$ при близких к нулю или единице значениях числа $Q$. □

Построенные в этом параграфе состояния равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ имеют довольно сложную структуру, а распределения фаз с индексом " + " — носители функций $\hat{\chi}_t$ могут обладать фрактальными чертами, характеризующимися самоподобием. Для иллюстрации этого положения в случае $\hat{Q}(t) \in (0,1)$ построим следующий пример состояния равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ для единичного шара с нулевым центром $B \subset R^m$. Фиксируем для этого шара покрытие Витали $B_{R_j}(x_j)$, $j = 1,\ldots,$ и произвольное (из построенных ранее) соответствуюшее ему состояние равновесия $\hat{u}_t^{(0)}$, $\hat{\chi}_t^{(0)}$. С помощью сдвига и сжатия шара $B$ переселим состояние равновесия $\hat{u}_t^{(0)}$, $\hat{\chi}_t^{(0)}$ из шара $B$ в каждый шар покрытия, и заменим в нем исходное состояние равновесия $\hat{u}_t^{(0)}$, $\hat{\chi}_t^{(0)}$ переселенным. Полученная суммированием по шарам покрытия пара $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ также будет состоянием равновесия в шаре $B$. Для него функция $\hat{\chi}_t$ не тривиальна и самоподобна.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующее множество пар функций

$$\mathbb{Y}'_t = \{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}' :\ \operatorname{rot} u = 0, \operatorname{div} u = \alpha(\hat{Q}(t))(\chi - \hat{Q}(t)), \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi\,dx = \hat{Q}(t)\}, \tag{2.36}$$

задающее совокупность всех решений вариационной задачи (1.12) с плотностями энергии (2.2) при условии (2.3). Если $[c(a+bm)] \neq 0$, то функция $\hat{Q}(t)$ однозначна и $\alpha(\hat{Q}(t)) \neq 0$. Поэтому в указанном случае в паре $u,\chi \in \mathbb{Y}'_t$ каждая ее компонента однозначно определяется другой. Если $[c(a+bm)] = 0$, но $t \neq t^*(= t_\pm)$, то $\hat{Q}(t)$ по-прежнему однозначна, но $\alpha(\hat{Q}(t)) = 0$. Поэтому в данном случае множнство $\mathbb{Y}'_t$ исчерпывается парами $u = 0$, $\chi = 1$ при $t < t^*$ и $u = 0$, $\chi = 0$ при $t > t^*$. Если же $[c(a+bm)] = 0$ и $t = t^*$, то в силу неоднозначности величины $\hat{Q}(t)$ и равенства нулю числа $\alpha(\hat{Q}(t))$, множество $\mathbb{Y}'_t$ состоит из пар $u = 0$, $\chi$ — произвольный элемент множества $\mathbb{Z}'$.

В заключение отметим, что для изотропных двухфазовых сред и тезоров остаточной деформации (2.1) при переходе от одной декартовой системе координат к другой в силу (1.30) справедливы равенства

$$a^{\pm}_{ijkl} = a'^{\pm}_{ijkl}, \quad \zeta^{\pm}_{ij} = \zeta'^{\pm}_{ij}, \tag{2.37}$$

означающие инвариантность плотностей энергии двухфазовой изотропной упругой среды относительно замены координат.

## §3. Температуры фазовых переходов.

В силу формулы (1.9) для функционала энергии двухфазовой среды кажется правдоподобным существование температур фазовых переходов $t_\pm$, $t_- \leq t_+$, характеризующихся тем, что

$$\begin{aligned}
&\text{при } t < t_- \text{ реализуется только состояние равновесия } \hat{u}_t = \hat{u}^+,\ \hat{\chi}_t = \chi^+,\\
&\text{при } t > t_+ \text{ реализуется только состояние равновесия } \hat{u}_t = \hat{u}^-,\ \hat{\chi}_t = \chi^-,\\
&\text{при} \quad t \in (t_-, t_+) \quad \text{не существует однофазовых состояний равновсия}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

(см. обозначения (1.14) — (1.16)). Это подозрение оправдано в одномерном случае с $t_\pm$, заданными равенством (1.2.7), и для многомерных изотропных сред при предположении (2.3) с определенными в (2.28) температурами $t_\pm$. В обоих случаях температуры $t_\pm$ не зависят от области, занимаемой средой, и для каждого $t \in (t_-, t_+)$ существует (двухфазовое) состояние равновесия. Учитывая лемму 1.1, для общего вида функционала энергии (1.9) можно надеяться лишь на доказательство существования независящих от области $\Omega$ и определяемых только характеристиками двухфазовой среды температур фазовых переходов $t_\pm$, чему и будет посвящен данный параграф. Разумеется, проводимые ниже построения справедливы и в одномерном случае, но там мы были от них избавлены благодаря разрешимости одномерной задачи в явном виде.

Для реализации этой цели нам потребуется аналог функций (1.3.8) для многомерного случая

$$i^+(t,\Omega) = \inf_{u\in\mathbb{X}} I_0[u,\chi^+,t], \quad i^-(t,\Omega) = \inf_{u\in\mathbb{X}} I_0[u,\chi^-,t], \quad i_{\min}(t,\Omega) = \min\{i^+(t,\Omega), t^-(t,\Omega)\},$$
$$i(t,\Omega) = \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t] \tag{3.2}$$

с заданным формулой (1.9) функионалом энергии $I_0[u,\chi,t]$.

Благодаря (1.14) — (1.16)

$$i^+(t,\Omega) = |\Omega|(< A^+\zeta^+,\zeta^+ > +t), \quad i^-(t,\Omega) = |\Omega| < A^-\zeta^-,\zeta^- >,$$
$$i_{\min}(t,\Omega) = |\Omega|\begin{cases} < A^+\zeta^+,\zeta^+ > +t & \text{при} \quad t \le t^* \\ < A^-\zeta^-,\zeta^- > & \text{при} \quad t \ge t^* \end{cases}, \qquad t^* = -[< A\zeta,\zeta >]. \tag{3.3}$$

Поскольку

$$i_{\min}(t,\Omega) = \inf_{u\in\mathbb{X},\chi=\chi^\pm} I_0[u,\chi,t],$$

справедливо неравенство

$$i(t,\Omega) \le i_{\min}(t,\Omega). \tag{3.4}$$

Очевидно, что о наличии или отсутствии у функционала (1.9) однофазовых состояний равновесия можно судить по величине функции $i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega)$:

если для данного $t$ функция $i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega) > 0$,
то у функционала (1.9) нет однофазовых состояний равновесия,

если для данного $t < t^*$ функция $i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega) = 0$,
то у функционала (1.9) есть только одно однофазовое состояние равновесия $\hat{u}_t = \hat{u}^+$, $\hat{\chi}_t = \chi^+$,

если для данного $t > t^*$ функция $i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega) = 0$,
то у функционала (1.9) есть только одно однофазовое состояние равновесия $\hat{u}_t = \hat{u}^-$, $\hat{\chi}_t = \chi^-$,

если для данного $t = t^*$ функция $i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega) = 0$,
то у функционала (1.9) с $t = t^*$ реализуются оба однофазовые состояния равновесия
$\hat{u}_t = \hat{u}^\pm, \quad \hat{\chi}_t = \chi^\pm.$
(3.5)

Для применения соображений (3.5) к доказательству существования температур фазовых переходов, будет полезна следующая лемма.

**Лемма 3.1.** *Для каждой фиксированной области $\Omega \ne \emptyset$ функция $i(.,\Omega)$ вогнута и удовлетворяет локальному условию Липшица.*

*Если для некоторого $t'_- \le t^*$ выполняется равенство $i(t'_-,\Omega) = i_{\min}(t'_-,\Omega)$, то $i(t,\Omega) = i_{\min}(t,\Omega)$ для всех $t < t'_-$ и для этих $t$ у функционала* (1.9) *единственным состоянием равновесия является пара $\hat{u}_t = \hat{u}^+$, $\hat{\chi}_t = \chi^+$.*

*Если для некоторого $t'_+ \ge t^*$ выполняется равенство $i(t'_+,\Omega) = i_{\min}(t'_+,\Omega)$, то $i(t,\Omega) = i_{\min}(t,\Omega)$ для всех $t > t'_+$ и для этих $t$ у функционала* (1.9) *единственным состоянием равновесия является пара $\hat{u}_t = \hat{u}^-$, $\hat{\chi}_t = \chi^-$.*

Доказательство. Функция $i(.,\Omega)$ является инфимумом по параметрам $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$ семейства линейных (стало быть, вогнутых) функций $I_0[u,\chi,.]$. Следовательно, функция $i(.,\Omega)$ вогнута. Так как для любых $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$

$$I_0[u,\chi,t] \geq t\int_\Omega \chi\,dx \geq |\Omega|\phi(t), \qquad \phi(t) = \begin{cases} t & \text{при} \quad t \leq 0 \\ 0 & \text{при} \quad t \geq 0 \end{cases}, \tag{3.6}$$

справедливо неравенство

$$i(t,\Omega) \geq |\Omega|\phi(t). \tag{3.7}$$

Следовательно, функция $i(.,\Omega)$ ограничена снизу на каждом конечном интервале. Из этих двух утверждений вытекает локальная липшицевость функции $i(.,\Omega)$.

Из существования числа $t'_-$ следует справедливость соотношения

$$I_0[\hat{u}^+,\chi^+,t'_-] \leq I_0[u,\chi,t'_-] \quad \text{для всех} \qquad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}'.$$

Тогда для любого значения $t$

$$I_0[\hat{u}^+,\chi^+,t] + (t'_- - t)\int_\Omega (\chi^+ - \chi)\,dx \leq I_0[u,\chi,t] \quad \text{для всех} \qquad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}'.$$

Поэтому

$$I_0[\hat{u}^+,\chi^+,t] < I_0[u,\chi,t] \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad \chi \neq \chi^+, \quad t < t'_-.$$

Следовательно, пара $\hat{u}^+$, $\chi^+$ — единственное состояние равновесия функционала $I_0[u,\chi,t]$ при $t < t'_-$ и для этих значений аргумента $t$ выполняется равенство $i(t,\Omega) = i_{\min}(t,\Omega)$.

Последнее утверждение леммы доказывается аналогично. □

Из доказанной леммы следует замкнутость каждого из множеств $\{t'_\pm\}$ и справедливость утверждений

$$\begin{gathered}
t_+ \text{ — минимальное число из множества } \{t'_+\} \text{ при } \{t'_+\} \neq \emptyset, \\
t_- \text{ — максимальное число из множества } \{t'_-\} \text{ при } \{t'_-\} \neq \emptyset, \\
\text{если числа } t_\pm \text{ существуют, то } t_- \leq t^* \leq t_+, \text{ причем оба} \\
\text{равенства реализуются или не реализуются одновременно,} \\
\text{если числа } t^\pm \text{ существуют, то при } t_- = t_+ = t^* \\
i(t,\Omega) = t_{\min}(t,\Omega) \text{ для всех } t \in R^1, \\
\text{если числа } t_\pm \text{ существуют, то при } t_- < t_+ \\
i(t,\Omega) < i_{\min}(t,\Omega) \text{ для } t \in (t_-,t_+), \text{ и } i(t,\Omega) = i_{\min}(t,\Omega) \text{ для } t \notin (t_-,t_+).
\end{gathered} \tag{3.8}$$

На следующем этапе мы докажем существование температур фазовых переходов в случае $\Omega = B$, $B$ — единичный шар с центром в нуле. Для удобства реализации этой программы константу $\nu$ в условии положительной определенности (1.4) выберем таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\begin{gathered}
\nu|\xi|^2 \leq < A^\pm\xi,\xi > \leq \nu^{-1}|\xi|^2 \\
\text{для всех } \xi \in R_s^{m\times m} \text{ и некоторого } \nu \in (0,1).
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Кроме того, введем обозначения

$$\begin{gathered}
\mu_1^+ = t^* - \frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A\zeta]}{m^2}, \quad \mu_1^- = t^* - \frac{|[A\zeta]|^2}{\nu}, \\
\mu_2^+ = t^* + \frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A\zeta]}{m^2}, \quad \mu_2^- = t^* + \frac{|[A\zeta]|^2}{\nu}.
\end{gathered} \tag{3.10}$$

В силу неравенства

$$\begin{gathered}
|\,\mathrm{tr}\,B| = |< B,i >| \leq < B,B >^{1/2} < i,i >^{1/2} = |B|\sqrt{m}, \\
B \in R_s^{m\times m}, \quad i \text{ — единичная матрица в } \quad R^m,
\end{gathered} \tag{3.11}$$

для чисел (3.10) справедливы оценки

$$\mu_1^- \le \mu_1^+ \le t^*, \quad t^* \le \mu_2^+ \le \mu_2^- . \tag{3.12}$$

**Лемма 3.2.** *В случае $\Omega = B$ температуры фазовых переходов существуют и удовлетворяют двусторонним оценкам*

$$t_- \in [\mu_1^-, \mu_1^+], \quad t_+ \in [\mu_2^+, \mu_2^-]. \tag{3.13}$$

Доказательство. Доказательство будет базироваться на построении функций $g_\pm(t, B)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} g_-(t,B) \le i(t,B) \le g_+(t,B) \le i_{\min}(t,B), \\ g_+(t,B) = i_{\min}(t,B) \quad \text{в том и только том случае, если} \quad t \notin (\mu_1^+, \mu_2^+), \\ g_-(t,B) = i_{\min}(t,B) \quad \text{в том и только том случае, если} \quad t \notin (\mu_1^-, \mu_2^-). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Если функции $g_\pm(t, B)$ построены, из (3.14) получаем

$$i(t,B) = i_{\min}(t,B) \quad \text{при} \quad t \notin (\mu_1^-, \mu_2^-), \qquad i(t,B) < i_{\min}(t,B) \quad \text{при} \quad t \in (\mu_1^+, \mu_2^+).$$

Тогда из (3.8) вытекает существование температур $t_\pm$ и справедливость для них соотношений (3.13).

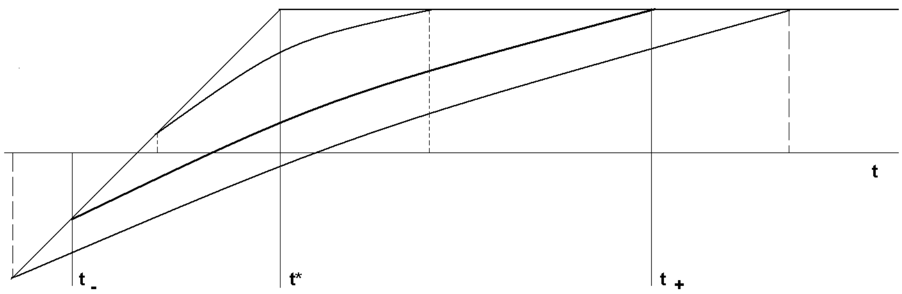


Рис.3.1

Графики функций (снизу вверх)
$g_-(.,B)$, $i(.,B)$, $g_+(.,B)$, $i_{\min}(.,B)$ при $\mu_1^+ < \mu_2^+$.

При построении функций $g_\pm(t, B)$ нам предстоит "зажать" функционал (1.9) между двумя функционалами энергии изотропных двухфазовых сред, для которых информация о температурах фазовых переходов получена в §2. Поскольку тензоры остаточной деформации $\zeta^\pm$ не обязаны совпадать с тензорами $c_\pm i$ для изотропных сред, при применении неравенств (3.9) для двусторонней оценки функционала (1.9), кроме функционалов энергии изотропных сред возникают дополнительные слагаемые. Оценка этих слагаемых и составляет основную трудность доказательства леммы. Сформулированный прием будет использован в явном виде при построении функции $g_+(t, B)$ и в завуалированном — при построении $g_-(t, B)$.

(1) *Построение функции $g_+(t, B)$.* Поскольку для всех $e \in R_s^{m\times m}$, $c_\pm \in R$

$$\begin{gathered} < A^\pm(e-\zeta^\pm), e-\zeta^\pm > = < A^\pm e, e > -2 < e, A^\pm\zeta^\pm > + < A^\pm\zeta^\pm, \zeta^\pm >, \\ < e - c_\pm i, e - c_\pm i > = < e, e > -2 < e, c_\pm i > + < c_\pm i, c_\pm i >, \end{gathered}$$

где $i$ — единичная матрица в пространстве $R^m$, из второго неравенства (3.9), примененного к оценке величины $< A^{\pm}e, e >$, получаем

$$< A^{\pm}(e-\zeta^{\pm}), e-\zeta^{\pm} > \le$$
$$\le \nu^{-1} < e - c_{\pm}i, e - c_{\pm}i > +2 < e, \nu^{-1}c_{\pm}i - A^{\pm}\zeta^{\pm} > + < A^{\pm}\zeta^{\pm}, \zeta^{\pm} > -\nu^{-1} < c_{\pm}i, c_{\pm}i > .$$

Тогда для всех $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] \le \\ \le \int_B \{\chi(\nu^{-1} < e(\nabla u) - c_+ i, e(\nabla u) - c_+ i > +t) + (1-\chi)\nu^{-1} < e(\nabla u) - c_- i, e(\nabla u) - c_- i >\}\, dx + \\ +2\int_B < e(\nabla u), \chi(\nu^{-1}c_+ i - A^+\zeta^+) + (1-\chi)(\nu^{-1}c_- i - A^-\zeta^-) > \, dx + \\ +|B|\{(< A^+\zeta^+, \zeta^+ > -\nu^{-1} < c_+ i, c_+ i >)Q + (< A^-\zeta^-, \zeta^- > -\nu^{-1} < c_- i, c_- i >)(1-Q)\}, \\ Q = \frac{1}{|B|}\int_\Omega \chi\, dx. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Первое слагаемое правой части (3.15) задает функционал энергии изотропной двухфазовой среды

$$I_0^{isot}[u,\chi,t] \equiv \int_B \{\chi(\nu^{-1}\,\mathrm{tr}(e(\nabla u) - c_+ i)^2 + t) + (1-\chi)\nu^{-1}\,\mathrm{tr}(e(\nabla u) - c_- i)^2\}\, dx, \tag{3.16}$$

для которой согласно (2.2)

$$a_+ = a_- = \nu^{-1}, \quad b_+ = b_- = 0. \tag{3.17}$$

Поскольку $u \in \mathbb{X}$, второе слагаемое правой часть (3.15) упрощается

$$\int_B < e(\nabla u), \chi(\nu^{-1}c_+ i - A^+\zeta^+) + (1-\chi)(\nu^{-1}c_- i - A^-\zeta^-) > \, dx = \int_B < e(\nabla u), \chi[\nu^{-1}ci - A\zeta] > \, dx.$$

Пользуясь полученным равенством и обозначением (3.16), перепишем соотношение (3.15) в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] \le I_0^{isot}[u,\chi,t] + 2\int_B < e(\nabla u), \chi[\nu^{-1}ci - A\zeta] > \, dx + \\ +|B|\{(< A^+\zeta^+, \zeta^+ > -\nu^{-1} < c_+ i, c_+ i >)Q + (< A^-\zeta^-, \zeta^- > -\nu^{-1} < c_- i, c_- i >)(1-Q)\}, \\ Q = \frac{1}{|B|}\int_B \chi\, dx. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Следовательно, для всех $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$

$$\begin{gathered} i(t,B) \le \\ \le I_0^{isot}[u,\chi,t] + 2\int_B < e(\nabla u), \chi[\nu^{-1}ci - A\zeta] > \, dx + \\ +|B|\{(< A^+\zeta^+, \zeta^+ > -\nu^{-1} < c_+ i, c_+ i >)Q + (< A^-\zeta^-, \zeta^- > -\nu^{-1} < c_- i, c_- i >)(1-Q)\}. \\ Q = \frac{1}{|B|}\int_B \chi\, dx. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Возьмем в правой части (3.19) в качестве пары $u$, $\chi$ произвольное решение системы (2.12) с $\alpha = [c]$, $\Omega = B$ и некоторым $Q \in [0,1]$. Так как при условии (3.17) для величин $\alpha(Q)$ и $G(Q,t)$ из (2.4) выполняются равенства

$$\alpha(Q) = [c], \quad G(Q,t) = Qt + mc_+^2\nu^{-1}Q + mc_-^2\nu^{-1}(1-Q) - \nu^{-1}[c]^2 Q(1-Q),$$

из леммы 2.1 вытекает формула для значения $I^{isot}[u,\chi,t]$ на указанном решении

$$I_0^{isot}[u,\chi,t]=|B|(Qt+mc_+^2\nu^{-1}Q+mc_-^2\nu^{-1}(1-Q)-\nu^{-1}[c]^2Q(1-Q)).$$

Объединяя полученное равенство с оценкой (3.19) приходим к выводу, что

$$\begin{gathered} i(t,B)\le|B|\{Qt+<A^+\zeta^+,\zeta^+>Q+<A^-\zeta^-,\zeta^->(1-Q)-\nu^{-1}[c]^2Q(1-Q)\}+\\ +2\int_B<e(\nabla u),\chi[\nu^{-1}ci-A\zeta]>\,dx,\\ Q=\frac{1}{|B|}\int_B\chi\,dx \end{gathered}\tag{3.20}$$

для всех решений системы (2.12) с $\alpha=[c]$, $\Omega=B$ и любым $Q\in[0,1]$.

Для дальнейшего продвижения в оценке правой части (3.20) возьмем в качестве $u$, $\chi$ сферически симметричное решение системы (2.12), построенное в разделе ($a$) доказательства леммы 2.3 и вычислим для него последнее слагаемое правой части (3.20).

Для любых $S\in R_s^{m\times m}$, $v\in\mathbb{X}$, $\chi\in\mathbb{Z}'$, в частности, сферически симметричного решения $v$, $\chi$, имеем

$$\int_B<e(\nabla v),\chi S>\,dx=S_{kl}\int_B v^k_{x_l}\chi\,dx.$$

Фиксируем функцию $\chi$ таким образом, чтобы ее носитель совпал с шаром $B_r(0)$. Из определения числа $Q$ следует, что $|B_r|=Q|B|$. Тогда

$$\begin{gathered}\int_B<e(\nabla v),\chi S>\,dx=S_{kl}\int_{B_r(0)}v^k_{x_l}\,dx=S_{kl}\int_{S_r(0)}v^kn_l\,dS=\\ =\frac{w(r)}{r^2}S_{kl}\int_{S_r(0)}x_kx_l\,dS=w(r)r^{m-1}S_{kl}\int_{|y|=1}y_ky_l\,dS,\end{gathered}$$

где $n_l$ — $l$-ая компонента единичной внешней нормали $n$ к сфере $S_r(0)$. Для вычисления интеграла по единичной сфере в правой части последнего равенства заметим, что

$$\Delta y_ky_l=2\delta_{kl},\quad |y|\le1,\qquad \frac{\partial}{\partial n}y_ky_l=2y_ky_l,\quad |y|=1$$

(здесь $n$ — внешняя нормаль к единичной сфере). Поэтому

$$2\delta_{kl}|B|=\int_B\Delta y_ky_l\,dy=\int_{|y|=1}\frac{\partial}{\partial n}y_ky_l\,dS=2\int_{|y|=1}y_ky_l\,dS.$$

Следовательно,

$$\int_B<e(\nabla v),\chi S>\,dx=w(r)r^{m-1}|B|\operatorname{tr}S.$$

В силу (2.18)

$$\frac{w(r)}{r}=\frac{[c]}{m|B_r|}\int_{B_r(0)}(\chi(|z|)-Q)\,dz=\frac{[c]}{m}(1-Q).$$

Тогда

$$\int_B<e(\nabla v),\chi S>\,dx=\frac{w(r)}{r}r^m|B|\operatorname{tr}S=\frac{[c]}{m}(1-Q)|B_r|\operatorname{tr}S=\frac{[c]}{m}Q(1-Q)|B|\operatorname{tr}S.\tag{3.21}$$

Объединяя (3.20) с (3.21), получаем

$$\begin{gathered} i(t,B)\le\\ \le|B|\{Qt+<A^+\zeta^+,\zeta^+>Q+<A^-\zeta^-,\zeta^->(1-Q)-(\nu^{-1}[c]^2-\frac{2[c]}{m}\operatorname{tr}[\nu^{-1}ci-A\zeta])Q(1-Q)\}\\ \text{для всех } Q\in[0,1]. \end{gathered}\tag{3.22}$$

Фиксируем числа $c_\pm$, положив

$$\operatorname{tr} A^\pm \zeta^\pm = \nu^{-1} \operatorname{tr} c_\pm i = \nu^{-1} c_\pm m. \tag{3.23}$$

В этом случае

$$[c] = \frac{\nu}{m} \operatorname{tr}[A\zeta], \quad \operatorname{tr}[\nu^{-1} ci - A\zeta] = 0.$$

Тогда из (3.22) следует. что

$$i(t,B) \le |B|\{Qt + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > Q + < A^-\zeta^-, \zeta^- > (1-Q) - \frac{\nu \operatorname{tr}^2[A\zeta]}{m^2} Q(1-Q)\} \tag{3.24}$$
$$\text{для всех } Q \in [0,1].$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} i(t,B) \le g_+(t,B), \quad g_+(t,B) = |B| \min_{Q\in[0,1]} G_+(Q,t), \\ G_+(Q,t) = \{Qt + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > Q + < A^-\zeta^-, \zeta^- > (1-Q) - \frac{\nu \operatorname{tr}^2[A\zeta]}{m^2} Q(1-Q)\}. \end{gathered} \tag{3.25}$$

(2) *Построение функции $g_-(t,B)$.* Для произвольных симметричных матриц $e$ и $\gamma$ имеем

$$\begin{gathered} < A^\pm(e - \zeta^\pm - (A^\pm)^{-1}\gamma), e - \zeta^\pm - (A^\pm)^{-1}\gamma >= \\ =< A^\pm(e-\zeta^\pm), e - \zeta^\pm > -2 < e, \gamma > + < 2\zeta^\pm + (A^\pm)^{-1}\gamma, \gamma > . \end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] = |B|\{Qt - < 2\zeta^+ + (A^+)^{-1}\gamma, \gamma > Q - < 2\zeta^- + (A^-)^{-1}\gamma, \gamma > (1-Q)\} + \\ + \int_\Omega \{\Phi^+\chi + \Phi^-(1-\chi)\}\, dx, \\ \Phi^\pm =< A^\pm(e(\nabla u) - \zeta^\pm - (A^\pm)^{-1}\gamma), e(\nabla u) - \zeta^\pm - (A^\pm)^{-1}\gamma > . \end{gathered}$$

Из последнего равенства в силу (3.9) вытекает оценка

$$I_0[u,\chi,t] \ge |B|\{Qt - < 2\zeta^+ + (A^+)^{-1}\gamma, \gamma > Q - < 2\zeta^- + (A^-)^{-1}\gamma, \gamma > (1-Q)\}. \tag{3.26}$$

Положим

$$\gamma = \gamma(Q) = -QA^+\zeta^+ - (1-Q)A^-\zeta^-. \tag{3.27}$$

В этом случае

$$\begin{gathered} \gamma = -A^+\zeta^+ + (1-Q)[A\zeta], \quad 2\zeta^+ + (A^+)^{-1}\gamma = (A^+)^{-1}(A^+\zeta^+ + (1-Q)[A\zeta]), \\ < 2\zeta^+ + (A^+)^{-1}\gamma, \gamma >=< (A^+)^{-1}(A^+\zeta^+ + (1-Q)[A\zeta]), (1-Q)[A\zeta] - A^+\zeta^+ >= \\ = - < A^+\zeta^+, \zeta^+ > +(1-Q)^2 < (A^+)^{-1}[A\zeta], [A\zeta] >; \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \gamma = -A^-\zeta^- - Q[A\zeta], \quad 2\zeta^- + (A^-)^{-1}\gamma = (A^-)^{-1}(A^-\zeta^- - Q[A\zeta]), \\ < 2\zeta^- + (A^-)^{-1}\gamma, \gamma >=< (A^-)^{-1}(A^-\zeta^- - Q[A\zeta]), -A^-\zeta^- - Q[A\zeta] >= \\ = - < A^-\zeta^-, \zeta^- > +Q^2 < (A^-)^{-1}[A\zeta], [A\zeta] > . \end{gathered}$$

Подстановка преобразованных выражений в (3.26) дает

$$\begin{gathered} |B|^{-1} I_0[u,\chi,t] \ge \\ \ge Qt + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > Q + < A^-\zeta^-, \zeta^- > (1-Q) - \\ - < ((1-Q)(A^+)^{-1} + Q(A^-)^{-1})[A\zeta], [A\zeta] > Q(1-Q). \end{gathered}$$

Поскольку

$$0 \leq < ((1-Q)(A^+)^{-1} + Q(A^-)^{-1}))[A\zeta], [A\zeta] > \leq ((1-Q)|(A^+)^{-1}| + Q|(A^-)^{-1}|)|[A\zeta]|^2,$$

в силу (3.9) имеем

$$0 \leq < ((1-Q)(A^+)^{-1} + Q(A^-)^{-1})[A\zeta], [A\zeta] > \leq \nu^{-1}|[A\zeta]|^2.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] \geq |B|\{Qt + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > Q + < A^-\zeta^-, \zeta^- > (1-Q) - \nu^{-1}|[A\zeta]|^2 Q(1-Q)\} \\ \text{для всех} \quad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad Q = \frac{1}{|B|}\int_B \chi\, dx. \end{gathered} \tag{3.28}$$

Минимизируя сначала правую часть (3.28) по всем $Q \in [0,1]$, а затем, в получившемся неравенстве – его левую часть по всем $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$, придем к выводу, что

$$\begin{gathered} i(t,B)) \geq g_-(t,B), \quad g_-(t,B) = |B| \min_{Q\in[0,1]} G_-(Q,t), \\ G_-(Q,t) = \{Qt + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > Q + < A^-\zeta^-, \zeta^- > (1-Q) - \nu^{-1}|[A\zeta]|^2 Q(1-Q)\}. \end{gathered} \tag{3.29}$$

(3) *Проверка свойств* (3.14). Первое и второе неравенство (3.14) выполняются по построению функций $g_\pm(t,B)$. Третье неравенство (3.14) непосредственно следует из (3.3) и (3.25), поскольку

$$i_{\min}(t,B) = |B| \min_{Q\in[0,1]} \{Qt + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > Q + < A^-\zeta^-, \zeta^- > (1-Q) >\}.$$

Для самоконтроля заметим, что благодаря неравенству (3.11), соотношение $g_-(t,B) \leq g_+(t,B)$ очевидно. Таким образом, в проверке нуждаются лишь свойства из второй и третьей строки (3.14).

Справедливы равенства

$$\begin{gathered} G_{+Q}(Q,t) = t - t^* - \frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A\zeta]}{m^2}(1-2Q), \quad G_{-Q}(Q,t) = t - t^* - \frac{|[A\zeta]|^2}{\nu}(1-2Q), \\ G_{+QQ}(Q,t) = 2\frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A\zeta]}{m^2}, \quad G_{-QQ}(Q,t) = 2\frac{|[A\zeta]|^2}{\nu}, \end{gathered} \tag{3.30}$$

из которых, в частности, следует выпуклость функций $G_\pm(.,t)$.

Отметим, что числа (3.10) являются единственными решениями уравнений

$$G_{+Q}(0,\mu_2^+) = G_{+Q}(1,\mu_1^+) = G_{-Q}(0,\mu_2^-) = G_{-Q}(1,\mu_1^-) = 0. \tag{3.31}$$

В силу (3.30) и (3.31)

$$\begin{gathered} G_{\pm Q}(0,t) \geq 0 \quad \text{в том и только том случае, если} \quad t \geq \mu_2^\pm, \\ G_{\pm Q}(1,t) \leq 0 \quad \text{в том и только том случае, если} \quad t \leq \mu_1^\pm. \end{gathered} \tag{3.32}$$

Свойства (3.32) для выпуклых функций $G_\pm(.,t)$ означают, что

$$\begin{gathered} \text{функции} \quad G_\pm(.,t) \quad \text{при} \quad t \geq \mu_2^\pm \quad \text{достигают своего минимума в точке} \quad Q = 0, \\ \text{функции} \quad G_\pm(.,t) \quad \text{при} \quad t \leq \mu_1^\pm \quad \text{достигают своего минимума в точке} \quad Q = 1, \\ \\ \text{в случае} \quad (\mu_1^\pm, \mu_2^\pm) \neq \emptyset \\ \text{функции} \quad G_\pm(.,t) \quad \text{при} \quad t \in (\mu_1^\pm, \mu_2^\pm) \quad \text{достигают своего минимума в единственной точке} \\ Q = Q(t) \in (0,1). \end{gathered} \tag{3.33}$$

Следовательно,

$$g_\pm(t,B) = |B| \min_{Q\in[0,1]} G_\pm(Q,t) = \begin{cases} |B|G_\pm(0,t) = i_{\min}(t,B) & \text{при} \quad t \geq \mu_2^\pm \\ |B|G_\pm(1,t) = i_{\min}(t,B) & \text{при} \quad t \leq \mu_1^\pm \end{cases},$$

$$g_\pm(t,B) < |B| \min\{G_\pm(0,t), G_\pm(1,t)\} = i_{\min}(t,B) \quad \text{при} \quad t \in (\mu_1^\pm, \mu_2^\pm),$$

что завершает проверку свойств второй и третьей строки (3.14). □

Положим

$$L(\Omega) = \{t \in R^1 : i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega) > 0\}. \tag{3.34}$$

В силу леммы 3.1 и утверждений (3.5), (3.8) множество $L(\Omega)$ — открытый (в частности, пустой) интервал. Если $L(\Omega) \neq \emptyset$, то $t^* \in L(\Omega)$, а ограниченность интервала $L(\Omega)$ (слева или справа) означает существование температур фазовых переходов ($t_-$ или $t_+$, соответственно), совпадающих с его концами. Если $L(\Omega) = \emptyset$, то температуры фазовых переходов существуют и $t_\pm = t^*$.

Следующая лемма содержит ряд утверждений о зависимости множества $L(\Omega)$ от области $\Omega$.

**Лемма 3.3.** *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &L(\Omega_e) = L(\Omega), \quad \Omega_e = \{x+e : x \in \Omega, \quad e\text{— фиксированный вектор пространства } R^m\}, \\ &L(\Omega^\lambda) = L(\Omega), \quad \Omega^\lambda = \{\lambda x : x \in \Omega, \quad \lambda\text{— фиксированное число из интервала } (0,\infty)\}, \\ &L(\Omega') \supset L(\Omega) \quad \text{для произвольной ограниченной области} \quad \Omega' \subset R^m, \quad \Omega' \supset \Omega\ . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Доказательство. Замена переменных в интеграле дает

$$\begin{gathered} \int_{\Omega_e} \{\chi(F^+(\nabla u)+t) + (1-\chi)F^-(\nabla u)\}\,dx = \int_\Omega \{\tilde\chi(F^+(\nabla\tilde u)+t) + (1-\tilde\chi)F^-(\nabla\tilde u)\}\,d\tilde x \\ x \in \Omega_e, \quad \tilde x \in \Omega, \quad x = \tilde x + e, \qquad \chi(x) = \tilde\chi(\tilde x), \quad u(x) = \tilde u(\tilde x), \\ \tilde u \in \mathbb{X} \equiv \mathbb{X}(\Omega), \quad \tilde\chi \in \mathbb{Z}' \equiv \mathbb{Z}'(\Omega). \end{gathered} \tag{3.36}$$

Так как любая пара $u \in \mathbb{X} \equiv \mathbb{X}(\Omega_e)$, $\chi \in \mathbb{Z}' \equiv \mathbb{Z}'(\Omega_e)$ может быть получена указанным в (3.36) способом из некоторой пары $\tilde u$, $\tilde\chi$, справедливо равенство $i(t,\Omega_e) = i(t,\Omega)$. В силу (3.3) для функции $i_{\min}$ выполняется аналогичное равенство $i_{\min}(t,\Omega_e) = i_{\min}(t,\Omega)$. Тогда

$$i_{\min}(t,\Omega_e) - i(t,\Omega_e) = i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega), \tag{3.37}$$

что приводит к справедливости первого утверждения (3.35).

Замена переменных в интеграле дает

$$\begin{gathered} \int_{\Omega^\lambda} \{\chi(F^+(\nabla u)+t) + (1-\chi)F^-(\nabla u)\}\,dx = \lambda^m \int_\Omega \{\tilde\chi(F^+(\nabla\tilde u)+t) + (1-\tilde\chi)F^-(\nabla\tilde u)\}\,d\tilde x \\ x \in \Omega^\lambda, \quad \tilde x \in \Omega, \quad x = \lambda\tilde x, \qquad \chi(x) = \tilde\chi(\tilde x), \quad u(x) = \lambda\tilde u(\tilde x), \\ \tilde u \in \mathbb{X} \equiv \mathbb{X}(\Omega), \quad \tilde\chi \in \mathbb{Z}' \equiv \mathbb{Z}'(\Omega). \end{gathered} \tag{3.38}$$

Так как любая пара $u \in \mathbb{X} \equiv \mathbb{X}(\Omega^\lambda)$, $\chi \in \mathbb{Z}' \equiv \mathbb{Z}'(\Omega^\lambda)$ может быть получена указанным в (3.38) способом из некоторой пары $\tilde u$, $\tilde\chi$, справедливо равенство $i(t,\Omega^\lambda) = \lambda^m i(t,\Omega)$. В силу (3.3) для функции $i_{\min}$ выполняется аналогичное равенство $i_{\min}(t,\Omega^\lambda) = \lambda^m i_{\min}(t,\Omega)$. Тогда

$$i_{\min}(t,\Omega^\lambda) - i(t,\Omega^\lambda) = \lambda^m(i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega)), \tag{3.39}$$

что приводит к справедливости второго утверждения (3.35).

Для произвольных ограниченных областей $\Omega \subset \Omega' \subset R^m$ и функций $u \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}'(\Omega)$ положим

$$u'(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega' \setminus \Omega \end{cases}, \qquad \chi'(x) = \begin{cases} \chi(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega' \setminus \Omega \end{cases}. \tag{3.40}$$

Тогда $u' \in \mathbb{X}(\Omega')$, $\chi' \in \mathbb{Z}'(\Omega')$ и

$$\begin{gathered}\int_{\Omega'} \{\chi'(F^+(\nabla u') + t) + (1-\chi')F^-(\nabla u')\}\, dx = \int_{\Omega} \{\chi(F^+(\nabla u) + t) + (1-\chi)F^-(\nabla u)\}\, dx + \\ + |\Omega' \setminus \Omega| < A^-\zeta^-, \zeta^- > .\end{gathered} \tag{3.41}$$

Левую часть (3.41) оценим снизу величиной $i(t, \Omega')$. Минимизируя в полученном неравенстве правую часть по всем $u \in \mathbb{X}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}'(\Omega)$, имеем

$$i(t, \Omega') \le i(t, \Omega) + |\Omega' \setminus \Omega| < A^-\zeta^-, \zeta^- > . \tag{3.42}$$

Изменим конструкцию (3.40), положив

$$u'(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \Omega' \setminus \Omega \end{cases}, \qquad \chi'(x) = \begin{cases} \chi(x), & x \in \Omega \\ 1, & x \in \Omega' \setminus \Omega \end{cases}. \tag{3.43}$$

Тогда $u' \in \mathbb{X}(\Omega')$, $\chi' \in \mathbb{Z}'(\Omega')$ и

$$\begin{gathered}\int_{\Omega'} \{\chi'(F^+(\nabla u') + t) + (1-\chi')F^-(\nabla u')\}\, dx = \int_{\Omega} \{\chi(F^+(\nabla u) + t) + (1-\chi)F^-(\nabla u)\}\, dx + \\ + |\Omega' \setminus \Omega|(< A^+\zeta^+, \zeta^+ > + t).\end{gathered} \tag{3.44}$$

Следовательно,

$$i(t, \Omega') \le i(t, \Omega) + |\Omega' \setminus \Omega|(< A^+\zeta^+, \zeta^+ > + t). \tag{3.45}$$

Объединяя неравенства (3.42) и (3.45), приходим к выводу, что

$$\begin{gathered}i(t, \Omega') \le i(t, \Omega) + |\Omega' \setminus \Omega| \min\{< A^+\zeta^+, \zeta^+ > + t, < A^-\zeta^-, \zeta^- >\} = \\ = i(t, \Omega) + i_{\min}(t, \Omega') - i_{\min}(t, \Omega).\end{gathered} \tag{3.46}$$

Из оценки (3.46) получаем

$$i_{\min}(t, \Omega) - i(t, \Omega) \le i_{\min}(t, \Omega') - i(t, \Omega'), \tag{3.47}$$

что приводит к справедливости третьего утверждения (3.35). □

Полученные леммы позволяют доказать основное утверждение параграфа о существовании и оценке температур фазовых переходов для функционала (1.9) и их независимости от области $\Omega$.

**Теорема 3.1.** *Для функционала* (1.9) *температуры фазовых переходов существуют, они не зависят от области* $\Omega$ *и удовлтворяют соотношениям* (3.13).

Доказательство. Сдвинем область $\Omega$ на вектор $e$ таким образом, чтобы начало координат попало в область $\Omega_e$. Фиксируем два шара $B_r(0)$ и $B_R(0)$ условием

$$B_r(0) \subset \Omega_e \subset B_R(0).$$

Тогда по лемме 3.3

$$\begin{gathered}L(B_r(0)) \subset L(\Omega_e) \subset L(B_R(0)), \\ L(\Omega_e) = L(\Omega), \quad L(B_r(0)) = L(B_R(0)) = L(B),\end{gathered}$$

где $B$ — единичный шар в пространстве $R^m$ с центром в начале координат. Следовательно, $L(\Omega) = L(B)$. Поэтому температуры фазовых переходов для функционала (1.9) в произвольной области $\Omega$ совпадают с температурами фазовых переходов для этого функционала в $B$.

Применение леммы 3.2 завершает доказательство теоремы. □

Доказанная теорема 3.1 не только гарантирует существование температур фазовых переходов $t_{\pm}$, но и справедливость соотношений

$$t_- < t^* < t_+ \quad \text{при} \quad \operatorname{tr}[A\zeta] \neq 0, \qquad t_- = t^* = t_+ \quad \text{при} \quad [A\zeta] = 0. \tag{3.48}$$

Заметим, что для изотропного случая (2.1)

$$A^{\pm}\zeta^{\pm} = c_{\pm}(a_{\pm} + b_{\pm}m)i. \tag{3.49}$$

Поэтому в изотропном случае

$$\operatorname{tr}^2[A\zeta] = m^2[c(a+bm)]^2, \quad |[A\zeta]|^2 = m[c(a+bm)]^2. \tag{3.50}$$

Тогда, в силу (2.28), утверждения (3.48) для изотропного и общего случая имеют одинаковый вид.

Исследуем вопрос о роли однофазовых состояний $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ для двухфазовой среды с функционалом энергии (1.9). Для одномерного случая (теорема 1.2.2) и для многомерной изотропной среды (теорема 2.2) было установлено, что для тех значений температуры $t$, при которых какая-либо из пар $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ не является состоянием равновесия, она будет седловой точкой функционала энергии. Для общего вида плотностей энергии (1.6) удается лишь получить более скромный результат.

**Теорема 3.2.** *При $t > \mu_1^+$ пара $\hat{u}^+$, $\chi^+$ и при $t < \mu_2^+$ пара $\hat{u}^-$, $\chi^-$ является седловой точкой функционала энергии* (1.9).

Доказательство. Первое неравенство второй строки определения (2.2.18) седловой точки функционала энергии выполняется для функций $\tilde{u} = \hat{u}^{\pm}$, $\tilde{\chi} = \chi^{\pm}$ при $\psi_+ = \chi^{\pm}$ и любых $t \in R^1$, $v_+ \in \mathbb{X}$, $v_+ \neq 0$, в силу определения (1.14) функций $\hat{u}^{\pm}$.

Последнее неравенство второй строки (2.2.18) очевидно при $\tilde{u} = \hat{u}^+$, $\tilde{\chi} = \chi^+$, $v_- = 0$ и любых $\psi_- \neq \chi^+$ в случае $t > t^*$, и при $\tilde{u} = \hat{u}^-$, $\tilde{\chi} = \chi^-$, $v_- = 0$ и любых $\psi_- \neq \chi^-$ в случае $t < t^*$, поскольку

$$I_0[\hat{u}^+, \chi^+, t] - I_0[\hat{u}^+, \psi_-, t] = (t - t^*)\int_\Omega (\chi^+ - \psi_-)\,dx,$$
$$I_0[\hat{u}^-, \chi^-, t] - I_0[\hat{u}^-, \psi_-, t] = (t^* - t)\int_\Omega (\psi_- - \chi^-)\,dx.$$

Таким образом, для доказательства теоремы осталось установить справедливость последнего неравенства (1.2.18) для

$$\begin{gathered}\tilde{u} = \hat{u}^+, \quad \tilde{\chi} = \chi^+ \quad \text{в случае} \quad t \in (\mu_1^+, t^*], \qquad \tilde{u} = \hat{u}^-, \quad \tilde{\chi} = \chi^- \quad \text{в случае} \quad t \in [t^*, \mu_2^+), \\ \text{при условии} \quad \mu_1^+ < t^* < \mu_2^+.\end{gathered} \tag{3.51}$$

Поскольку при выводе неравенство (3.18) предположение $\Omega = B$ не использовалось, для любой ограниченной области $\Omega \subset R^m$ имеем

$$\begin{gathered}I_0[u, \chi, t] \leq I_0^{isot}[u, \chi, t] + 2\int_\Omega < e(\nabla u), \chi[\nu^{-1}ci - A\zeta] > \,dx + \\ +|\Omega|\{(< A^+\zeta^+, \zeta^+ > -\nu^{-1} < c_+ i, c_+ i >)Q + (< A^-\zeta^-, \zeta^- > -\nu^{-1} < c_- i, c_- i >)(1-Q)\}, \\ u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad Q = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi\,dx,\end{gathered} \tag{3.52}$$

где левая часть определяется равенством (1.9), а первое слагаемое правой — формулой (3.16), в которой шар $B$ заменен областью $\Omega$.

Положим в (3.52) $u = v_Q$, $\chi = \chi_Q$, где $v_Q$, $\chi_Q$ — решение системы (2.34) с произвольным $Q \in [0, 1]$ и $\alpha(Q) = [c]$, построенное по некоторому покрытию Витали области $\Omega$ (лемма 2.3). Представляя интеграл в правой части (3.52) как сумму интегралов по шарам покрытия и проводя вычисления, аналогичные совершенным при докзательстве леммы 3.2, придем к выводу, что для любой симметричной матрицы $S$

$$\int_\Omega < e(\nabla v_Q), \chi_Q S > \,dx = \frac{[c]}{m}Q(1-Q)|\Omega| \operatorname{tr} S. \tag{3.53}$$

Пользуясь равенствами (3.23) для чисел $c_\pm$, из (3.52) и (3.53) получаем

$$I_0[v_Q,\chi_Q,t] \leq |\Omega| G_+(Q,t). \tag{3.54}$$

В силу соотношений (3.30), (3.31)

$$G_{+Q}(0,t) < 0 \quad \text{при} \quad t < \mu_2^+, \qquad G_{+Q}(1,t) > 0 \quad \text{при} \quad t > \mu_1^+.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &G_+(Q,t) < G_+(0,t) \quad \text{при } t \in [t^*, \mu_2^+) \text{ и сколь угодно малых } \quad Q > 0, \\ &G_+(Q,t) < G_+(1,t) \quad \text{при } t \in (\mu_1^+, t^*] \text{ и сколь угодно малых } 1 - Q > 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Поскольку

$$|\Omega| G_+(0,t) = i_{\min}(t,\Omega) \quad \text{при} \quad t \geq t^*, \quad |\Omega| G_+(1,t) = i_{\min}(t,\Omega) \quad \text{при} \quad t \leq t^*,$$

неравенства (3.54), (3.55) и соотношение (2.35) с $\alpha(Q) = [c]$ приводят к справедливости (3.51). $\square$

Из определения температур фазовых переходов вытекает, что при $t \in (t_-, \mu_1^+]$ однофазовое состояние $\hat{u}^+$, $\chi^+$ и при $t \in [\mu_2^+, t_+)$ однофазовое состояние $\hat{u}^-$, $\chi^-$ не минимизируют функционал энергии двухфазовой упругой среды. Однако, теорема 3.2 не гарантирует неустойчивость этих состояний при указанных значениях $t$.

Теорема 3.1 позволяет расширить список двухфазовых упругих сред, для которых удается в явном виде вычислить температуры фазовых переходов.

Рассмотрим следующие плотности энергии двухфазовой упругой среды

$$\begin{gathered} F^\pm(M) = a_\pm \operatorname{tr}(e(M) - c_\pm \lambda \otimes \lambda)^2, \qquad M \in R^{m\times m}, \quad \lambda \in R^m, \quad |\lambda| = 1, \quad m \geq 2, \\ a_\pm, c_\pm \in R^1, \quad a_\pm > 0. \end{gathered} \tag{3.56}$$

Их отличие от исследованного ранее изотропного случая (2.2) заключается в упрощающем предположении $b_\pm = 0$ и в анизотропности тензоров остаточной деформации $c_\pm \lambda \otimes \lambda$. Последнее при $t = 0$, $c_\pm = \pm 1$ приводит к отсутствию состояний равновесия (лемма 1.1).

Соотношения (3.13) для плотностей (3.56) гарантируют существование температур фазовых переходов и устанавливают для них двусторонние оценки. Явные формулы для этих температур выводятся в следующей теореме.

**Теорема 3.3.** *Для плотностей энергии* (3.56) *температуры фазовых переходов* $t_\pm$ *определяются равенствами* (1.2.7).

Доказательство. Поскольку температуры фазовых переходов не зависят от занимаемой двухфазовой средой области $\Omega$, возьмем в качестве последней цилиндр $\Omega = B \times (0,l)$, в основании которого лежит единичный шар $B$ пространства $R^{m-1}$. Ось цилиндра направим вдоль вектора $\lambda$. Вдоль него же направим координатную ось $x_m$. Совокупность координат $x_1, \ldots, x_{m-1}$ обозначим через $x'$. Возможность такой замены координат без ущерба для формул (3.56) следует из равенств (1.31), (2.37).

(1) *Оценка функционала энергии снизу.* Поскольку

$$\operatorname{tr}(e(M) - c_\pm \lambda \otimes \lambda)^2 = (e_{mm}(M) - c_\pm)^2 + \Sigma_{i,j=1,\ldots,m,\, i+j<2m} e_{ij}(M) e_{ij}(M),$$

получаем

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] = J_1[u,\chi,t] + J_2[u,\chi], \\ J_1[u,\chi,t] = \int_\Omega \{\chi(a_+(e_{mm}(\nabla u) - c_+)^2 + t) + (1-\chi) a_-(e_{mm}(\nabla u) - c_-)^2\}\, dx, \\ J_2[u,\chi] = \int_\Omega (\chi a_+ + (1-\chi) a_-) \Sigma_{i,j=1,\ldots,m,\, i+j<2m} e_{ij}(\nabla u) e_{ij}(\nabla u)\, dx, \\ u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}'. \end{gathered} \tag{3.57}$$

Следовательно,

$$I_0[u,\chi,t] \geq J_1[u,\chi,t] =$$
$$= \int_B \left( \int_0^l \{\chi(x',x_m)(a_+(u^m_{x_m}(x',x_m)-c_+)^2+t)+(1-\chi(x',x_m))(u^m_{x_m}(x',x_m)-c_-)^2\}\,dx_m \right) dx'. \tag{3.58}$$

При почти всех $x' \in B$ функция $\chi(x',.)$ будет измеримой и характеристической на интервале $(0,l)$, а функция $u^m(x',.)$ — лежать в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)$. Так как внутренний интеграл в правой части (3.58) совпадает с функционалом энергии одномерной двухфазовой среды (1.1.2) для плотностей (1.1.1), согласно теореме 1.2.1 при почти всех $x' \in B$ справедлива оценка

$$\int_0^l \{\chi(x',x^m)(a_+(u^m_{x_m}(x',x_m)-c_+)^2+t)+(1-\chi(x',x_m))a_-(u^m_{x_m}(x',x_m)-c_-)^2\}\,dx_m \geq lG(\hat{Q}(t),t), \tag{3.59}$$

в которой функция $G(Q,t)$ определена равенством (1.2.1), а $\hat{Q}(t)$ — формулой (1.2.15).

Из (3.58) и (3.59) следует, что

$$I_0[u,\chi,t] \geq |\Omega| G(\hat{Q}(t),t) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{Z}, \quad \chi \in \mathbb{Z}'. \tag{3.60}$$

Используя обозначение (3.2), получаем

$$i(t,\Omega) \equiv \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t] \geq |\Omega| G(\hat{Q}(t),t). \tag{3.61}$$

(2) *Вычисление функции* $i(t,\Omega)$. Докажем, что в соотношении (3.61) на самом деле реализуется равенство. Для достижения этой цели нам потребуется следующая пара функций

$$\tilde{u}(x) = \hat{u}_t(x_m)\phi_r(x')e_m, \quad \tilde{\chi}(x) = \hat{\chi}_t(x_m), \tag{3.62}$$

где $e_m$ — единичный орт вдоль оси $x_m$, срезка $\phi_r(x')$ обладает свойствами

$$\phi_r \in C_0^\infty(B), \quad 0 \leq \phi_r(x') \leq 1, \quad \phi_r(x') = 1 \quad \text{при} \quad |x'| \leq r \in [1/2,1), \quad |\nabla\phi_r(x')| \leq C(1-r)^{-1},$$

а пара $\hat{u}_t(x_m)$, $\hat{\chi}_t(x_m)$ — произвольное решение задачи (1.1.5), определяемое соотношениями (1.2.4). Важно отметить, что $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$.

Для пары (3.62) при фиксированном значении $t$ имеем

$$\begin{gathered} |J_1[\tilde{u},\tilde{\chi},t] - |\Omega|G(\hat{Q}(t),t)| \leq L(1-r)(1+||\hat{u}'_t||^2_{C[0,l]}), \quad |J_2[\tilde{u},\tilde{\chi}]| \leq \frac{L}{(1-r)}||\hat{u}_t||^2_{C[0,l]}, \\ 0 < L \neq L(r,\hat{u}_t,\hat{\chi}_t). \end{gathered} \tag{3.63}$$

Следовательно, для этой пары

$$i(t,\Omega) \leq I_0[\tilde{u},\tilde{\chi},t] \leq |\Omega|G(\hat{Q}(t),t) + L\left(\frac{||\hat{u}_t||^2_{C[0,l]}}{(1-r)} + (1-r)(1+||\hat{u}'_t||^2_{C[0,l]})\right). \tag{3.64}$$

Положим $r = r_n = 1-1/n$, $n = 2,3,\dots$. В этом случае сомножитель последнего слагаемого правой части (3.64) примет вид

$$n||\hat{u}_t||^2_{C[0,l]} + n^{-1}(1+||\hat{u}'_t||^2_{C[0,l]}). \tag{3.65}$$

Если нам удастся построить такую последовательность решений $\hat{u}^{(n)}_t$, $\hat{\chi}^{(n)}_t$ задачи (1.1.5), что

$$n||\hat{u}^{(n)}_t||^2_{C[0,l]} + n^{-1}(1+||(\hat{u}^{(n)}_t)'||^2_{C[0,l]}) \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

то после предельного перехода в (3.64), с помощью неравенства (3.61) приходим к выводу, что

$$i(t,\Omega)=|\Omega|G(\hat{Q}(t),t). \tag{3.66}$$

Любое решение $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ задачи (1.1.5) определяется соотношениями (1.2.6). Поэтому для каждого решения выполняется оценка

$$||\hat{u}_t'||_{C[0,l]}\leq \alpha(\hat{Q}(t)). \tag{3.67}$$

Разобьем отрезок $[0,l]$ на $n$ равных интервалов $l_k$, $k=1,\dots,n$. Возьмем в качестве функции $\hat{\chi}_t^{(n)}$ такую измеримую характеристическую функцию на отрезке $[0,l]$, для которой

$$\frac{1}{|l_k|}\int_{l_k}\hat{\chi}_t^{(n)}(x_m)\,dx_m=\hat{Q}(t),\quad k=1\dots,n.$$

Эта функция удовлетворяет всем требованиям (1.2.6), а построенная по ней функция $\hat{u}_t^{(n)}$ обращается в ноль на концах каждого интервала $l_k$ длины $ln^{-1}$. Учитывая (3.67), приходим к выводу, что

$$||\hat{u}_t^{(n)}||_{C[0,l]}\leq \alpha(\hat{Q}(t))\frac{l}{n}. \tag{3.68}$$

Оценки (3.67), (3.68) завершают доказательство равенства (3.66).

(3) *Вычисление функции* $i_{\min}(t,\Omega)$. Пользуясь определением (3.2) и формулой (3.3), устанавливаем, что для исследуемого функционала

$$i_{\min}(t,\Omega)=|\Omega|\begin{cases} a_+c_+^2+t & \text{при}\quad t\leq t^*\\ a_-c^2 & \text{при}\quad t\geq t^*\end{cases},\qquad t^*=-[ac^2]. \tag{3.69}$$

(4) *Завершение доказательства теоремы.* Из равенств (3.66), (3.69) и результатов §1.2 следует, что функции $i(t,\Omega)$ и $i_{\min}(t,\Omega)$ для исследуемой многомерной задачи отличаются от аналогичных функций для одномерной задачи множителем $|B|$. Поскольку (утверждение (3.2)) температуры фазовых переходов определяются интервалом несовпадения функция $i(t,\Omega)$ и $i_{\min}(t,\Omega)$, эти температуры одинаковы для одномерной задачи (1.1.5) и многомерной задачи с плотностями энергии (3.56). □

Предложенная в доказательстве теоремы 3.3 процедура может быть проведена при вычислении температур фазовых переходов и для тезоров $\zeta^{\pm}=c_{\pm}P$, где $P$ — ортопроектор в пространстве $R^m$ на некоторое его подпространство $R^{m'}$, $2\leq m'<m$. Поскольку на области своего значения проектор $P$ совпадает с единичным оператором, в качестве модельной задачи выступит изотропная в пространстве $R^{m'}$ задача с плотностями энергии (2.2) при условии (2.3) с $b_{\pm}=0$. Вместо цилиндра $B\times(0,l)$ следует взять область $\Omega=B_R''\times B_R'$, $B_R''\subset R^{m''}$, $B_R'\subset R^{m'}$, $R^m=R^{m'}\oplus R^{m''}$. Тогда температуры фазовых переходов для тензоров $c_{\pm}P$ определятся равенствами (2.28) с заменой размерности $m$ на $m'$.

В начала §1 было отмечено, что однофазовые состояния равновесия могут релизоваться лишь с нулевым полем смещений. Заключительная лемма данного параграфа частично обращает этот факт.

**Лемма 3.4.** *Пусть* $\hat{u}_t\equiv 0$, $\hat{\chi}_t$ *— решение вариационной задачи* (1.12). *Тогда при* $t_-<t_+$ *это решение однофазовое. Если* $t_-=t_+(=t^*)$, *но* $t\neq t^*$ *оно также будет однофазовым. При* $t_-=t_+(=t^*)$ *и* $t=t^*$ *каждая пара* $\hat{u}_t\equiv 0$, $\hat{\chi}_t$ *с произвольной функцией* $\hat{\chi}_t\in\mathbb{Z}'$ *будет решением этой задачи.*

Доказательство. Поскольку при $\hat{u}_t\equiv 0$

$$I_0[\hat{u}_t,\hat{\chi}_t,t]=(t-t^*)\int_{\Omega}\hat{\chi}_t\,dx+|\Omega|<A^-\zeta^-,\zeta^->, \tag{3.70}$$

для $t\neq t^*$ возможны лишь равенства

$$\hat{\chi}_t=\chi^+\quad\text{при}\quad t<t^*,\qquad \hat{\chi}_t=\chi^-\quad\text{при}\quad t>t^*.$$

Следовательно, пара $\hat{u}_t \equiv 0$, $\hat{\chi}_t$ при $t \neq t^*$ может быть лишь однофазовым состоянием равновесия.

Если $\hat{u}_t \equiv 0$, в силу (3.70) и (3.2), (3.3) имеем

$$i(t,\Omega) = I_0[\hat{u}_t, \hat{\chi}_t, t] = \inf_{\chi \in \mathbb{Z}'} \{(t-t^*)\int_\Omega \chi\, dx + |\Omega| < A^-\zeta^-, \zeta^- >\} = i_{\min}(t,\Omega), \tag{3.71}$$

в то время как благодаря (3.8) для $t \in (t_-, t_+) \neq \emptyset$ справедливо неравенство $i(t,\Omega) < i_{\min}(t,\Omega)$. Так как $t^* \in (t_-, t_+)$, реализуется неравенство $t \neq t^*$. Следовательно, состояние равновесия $\hat{u}_t \equiv 0$, $\hat{\chi}_t$ — однофазовое.

Поскольку $I_0[0,\chi,t^*] = i_{\min}(t^*,\Omega)$ для всех функций $\chi \in \mathbb{Z}'$, а при $t_- = t_+$ выполняется равенство $i_{\min}(t,\Omega) = i(t,\Omega)$, пара $\hat{u}_{t^*} \equiv 0$, $\hat{\chi}_{t^*}$ с произвольной второй компонентой будет состоянием равновесия. □

## §4. Критические точки функционала энергии.

В этом параграфе будут частично перенесены результаты §1.4 на многомерный случай. Рассмотрим диффеоморфизмы $y = y(x)$ класса $C^1(\bar{\Omega}, R^m)$ области $\Omega$ на себя, для которых обратные отображения $x = x(y)$ имеют вид

$$x(y) = y + h(y), \quad h \in C_0^1(\Omega, R^m), \quad ||h||_{C^1} \leq \frac{1}{2} \tag{4.1}$$

с любой функцией $h$, указанного в (4.1) класса. Фиксируем функции $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$ и построим их возмущения $u$, $\chi$ согласно равенствам

$$u(x) = \tilde{u}(y(x)) + v(y(x)), \quad v \in \mathbb{X}, \qquad \chi(x) = \tilde{\chi}(y(x)). \tag{4.2}$$

**Лемма 4.1.** *Справедливо равенство*

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] - I_0[\tilde{u},\tilde{\chi},t] = \int_\Omega \{\tilde{\chi} F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}) + (1-\tilde{\chi}) F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u})\} v^i_{x_j}\, dx + \\ + \int_\Omega \{\tilde{\chi}((F^+(\nabla\tilde{u}) + t)\delta_{kj} - \tilde{u}^i_{x_k} F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u})) + (1-\tilde{\chi})(F^-(\nabla\tilde{u})\delta_{kj} - \tilde{u}^i_{x_k} F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}))\} h^k_{x_j}\, dx + R, \\ \tilde{\chi} = \tilde{\chi}(x), \quad \tilde{u} = \tilde{u}(x), \quad v = v(x), \quad h = h(x), \\ |R| \leq C \int_\Omega (|\nabla v|^2 + ||h||^2_{C^1}(1 + |\nabla\tilde{u}|^2))\, dx. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Доказательство. Так как $y(x(y)) \equiv y$, для матрицы Якоби справедливо равенство $\dot{y}(x) = \dot{x}^{-1}(y)$. Поэтому

$$\begin{gathered} u^i_{x_j}(x) = \tilde{u}^i_{y_k}(y)\dot{x}^{-1}_{kj}(y) + v^i_{y_k}(y)\dot{x}^{-1}_{kj}(y) = \tilde{u}^i_{y_j}(y) - \tilde{u}^i_{y_k}(y)h^k_{y_j} + v^i_{y_j}(y) + \alpha_{ij}(y), \\ \alpha_{ij}(y) = \tilde{u}^i_{y_k}(y)(\dot{x}^{-1}_{kj}(y) - \delta_{kj} + h^k_{y_j}(y)) + v^i_{y_k}(y)(\dot{x}^{-1}_{kj}(y) - \delta_{kj}). \end{gathered} \tag{4.4}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} F^\pm(\nabla u(x)) = F^\pm(\nabla\tilde{u}(y)) + F^\pm_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(y))(v^i_{y_j}(y) - \tilde{u}^i_{y_k}(y)h^k_{y_j}(y)) + \\ + F^\pm_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(y))\alpha_{ij}(y) + \frac{1}{2}F^\pm_{M_{ij}M_{rs}}\beta_{ij}(y)\beta_{rs}(y), \\ \beta_{pq}(y) = \alpha_{pq}(y) + v^p_{y_q}(y) - \tilde{u}^p_{y_k}(y)h^k_{y_q}(y). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Поскольку

$$|F^\pm_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(y))\alpha_{ij}(y)| + |F^\pm_{M_{ij}M_{rs}}\beta_{ij}(y)\beta_{rs}(y)| + |\det\dot{x}(y) - 1 - \operatorname{div} h(y)| \leq C(||h||^2_{C^1}(1 + |\nabla\tilde{u}(y)|^2) + |\nabla v(y)|^2),$$

равенство (4.3) получается заменой переменных в формуле для функционала $I_0[u,\chi,t]$. □

Будем говорить, что пара $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$ является критической точкой функционала $I_0$, если

$$\int_\Omega \{\tilde{\chi} F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}) + (1-\tilde{\chi}) F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u})\} v^i_{x_j}\, dx +$$
$$+\int_\Omega \{\tilde{\chi}((F^+(\nabla\tilde{u}) + t)\delta_{kj} - \tilde{u}^i_{x_k} F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u})) + (1-\tilde{\chi})(F^-(\nabla\tilde{u})\delta_{kj} - \tilde{u}^i_{x_k} F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}))\} h^k_{x_j}\, dx = 0 \tag{4.6}$$
$$\text{для всех} \quad v \in \mathbb{X}, \quad h \in C^1_0(\Omega, R^m).$$

Так как левая часть (4.6) в силу (4.3) служит линейной частью приращения функционала $I_0$ при возмущении (4.2), состояния равновесия $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ обязаны быть критическими точками. Однако не любая критическая точка будет состоянием равновесия. Например, пары $\tilde{u} = \hat{u}^\pm$, $\tilde{\chi} = \chi^\pm$ — критические точки функционала энергии при всех значениях $t$, в то время как состояниями равновесия они будут при $t \le t_-$ и $t \ge t_+$ для знаков $+$ и $-$, соответственно.

Условие (4.6) на пару $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ естественно назвать обобщенной формой уравнений равновесия двухфазовой упругой среды. Для описания классической формы этих уравнений введем обозначения

$$\Theta_{kj}[u,\chi](x) = \chi(x) F^+_{M_{kj}}(\nabla u(x)) + (1-\chi(x)) F^-_{M_{kj}}(\nabla u(x)),$$
$$\Phi_{kj}[u,\chi](x,t) =$$
$$= \chi(x)((F^+(\nabla u(x)) + t)\delta_{kj} - u^i_{x_k}(x) F^+_{M_{ij}}(\nabla u(x))) + (1-\chi(x))(F^-(\nabla u(x))\delta_{kj} - u^i_{x_k}(x) F^-_{M_{ij}}(\nabla u(x))),$$
$$u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \qquad x \in \Omega, \quad t \in R^1, \qquad k,j = 1,\dots,m. \tag{4.7}$$

Для поля смещений $u$ и расределения фаз $\chi$ величина $\Theta$ является тензором напряжения, а $\Phi$ называется тензором химического потенциала.

**Теорема 4.1.** *Фиксируем шар $B_r(x_0) \subset \Omega$ и критическую точку $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ функционала энергии $I_0$.*

*(а) Если функция $\tilde{\chi}$ постоянна в $B_r(x_0)$, то функция $\tilde{u} \in C^\infty(B_r(x_0), R^m)$ и удовлетворяет системе уравнений.*

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx_j} F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(x)) = 0, \quad x \in B_r(x_0), \quad i = 1,\dots,m, \qquad \text{в случае } \tilde{\chi} \equiv 1 \text{ в шаре } B_r(x_0), \\ -\frac{d}{dx_j} F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(x)) = 0, \quad x \in B_r(x_0), \quad i = 1,\dots,m, \qquad \text{в случае } \tilde{\chi} \equiv 0 \text{ в шаре } B_r(x_0). \end{aligned} \tag{4.8}$$

*(б) Пусть шар $B_r(x_0)$ разделен на две части $(m-1)$-мерной поверхностью $\Gamma$ класса $C^{k,\varepsilon}$, $k \ge 2$, $\varepsilon \in (0,1)$. Предположим, что в одной из них — $B^+_r(x_0)$, функция $\tilde{\chi} \equiv 1$, а в другой — $B^-_r(x_0)$, функция $\tilde{\chi} \equiv 0$. Тогда функция $\tilde{u}$ принадлежит классу $C^{k,\varepsilon}$ в каждой из областей $B^\pm_r(x_0)$ вплоть до границы их раздела $\Gamma$ и*

$$\begin{gathered} -\frac{d}{dx_j} F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(x)) = 0, \quad x \in B^+_r(x_0), \qquad -\frac{d}{dx_j} F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(x)) = 0, \quad x \in B^-_r(x_0), \\ [\Theta_{kj}[\tilde{u},\tilde{\chi}]]|_\Gamma n_j = 0, \quad [\Phi_{kj}[\tilde{u},\tilde{\chi}]]|_\Gamma n_j = 0, \qquad k = 1,\dots,m, \end{gathered} \tag{4.9}$$

*где $[Z]|_\Gamma$ — скачок величины $Z$ при переходе границы раздела $\Gamma$, а $n$ — единичная нормаль к этой границе.*

Доказательство. Из (4.6) с $h = 0$ следует, что функция $\tilde{u}$ является обобщенным решением системы

$$-\frac{d}{dx_j}(\tilde{\chi}(x) F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(x)) + (1-\tilde{\chi}(x)) F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}(x))) = 0, \quad i = 1,\dots,m. \tag{4.10}$$

В силу (1.8) эта система эллиптична. Поэтому ее обобщенное решение $\tilde{u}$ обладает гладкостью, указанной в формулировке теоремы.

а). Уравнение (4.8) вытекает из тождества (4.6) с $h = 0$ и $\operatorname{supp} v \subset B_r(x_0)$. Очевидно, что при наличии уравнений (4.8) тождество (4.6) с $v = 0$ и $\operatorname{supp} h \subset B_r(x_0)$ выполняется автоматически, поскольку

$$\frac{d}{dx_j}\{F^\pm(\nabla\tilde{u})\delta_{kj} - \tilde{u}^i_{x_k} F^\pm_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u})\} = -\tilde{u}^i_{x_k} \frac{d}{dx_j} F^\pm_{M_{ij}}(\nabla\tilde{u}). \tag{4.11}$$

б). Справедливость уравнений первой строки (4.9) установлена в разделе а) доказательства теоремы. Из этих уравнений, равенства (4.11) и тождества (4.6) с $\operatorname{supp} h \subset B_r(x_0)$, $\operatorname{supp} v \subset B_r(x_0)$, интегрированием по частям приходим к справедливости второй строки (4.9). □

Уравнения (4.8) являются классическими уравнениями равновесия для однофазовых сред с плотностями энергии $F^{\pm}$. Уравнения (4.9) и условие на скачок напряжений при переходе поверхности $\Gamma$ соответствуют стандартным необходимым условиям равновесия для композитных сред. Задачу о фазовых переходах отличает от задачи о равновесии композитных сред априорная неизвестность границы раздела фаз $\Gamma$. Этот факт приводит к появлению дополнительного условия в уравнениях равновесия — условия на скачок химического потенциала.

Из доказательства теоремы следует, что при сделанных в ней предположениях равенства (4.8), (4.9) эквивалентны тождеству (4.6) с $\operatorname{supp} v \subset B_r(x_0)$, $\operatorname{supp} h \subset B_r(x_0)$.

Отметим, что предположения о гладкости границы раздела фаз для состояний равновесия (а стало быть и критических точек) остаются лишь предположениями. Действительно, для состояний равновесия изотропных двухфазовых сред, построенных в §2, ограничение функции $\hat{\chi}_t$ на любой шар покрытия Витали может быть произвольной измеримой сферически симметричной характеристической функцией. Поэтому для этих состояний равновесия ни о какой гладкости границы раздела фаз не может быть и речи. Ситуация несколько исправляется при учете поверхностной энергии. В этом случае при достаточно близких значениях коэффициентов $a^{\pm}_{ijkl}$ удается доказать определенную гладкость границы раздела фаз.

Условие (4.9) на скачок химического потенциала не смотря на его векторный вид имеет скалярный характер. Действительно, в силу равенства

$$\begin{gathered}\Phi_{kj}[\tilde{u},\tilde{\chi}](x,t) = \\ = \{\tilde{\chi}(x)(F^{+}(\nabla\tilde{u}(x))+t)+(1-\tilde{\chi}(x))F^{-}(\nabla\tilde{\chi}(x))\}\delta_{kj}-\tilde{u}^{i}_{x_k}(x)\Theta_{ij}[\tilde{u},\tilde{\chi}](x),\end{gathered}$$

вытекающего из определения (4.7), для любого касательного к $\Gamma$ вектора $\tau$ имеем

$$\begin{gathered}[\Phi_{kj}[\tilde{u},\tilde{\chi}]]|_{\Gamma}n_j\tau_k = \\ = [\tilde{\chi}(F^{+}(\nabla\tilde{\chi})+t)+(1-\tilde{\chi})F^{-}(\nabla\tilde{\chi})]|_{\Gamma}n\cdot\tau-[\Theta_{ij}[\tilde{u},\tilde{\chi}]\frac{\partial\tilde{u}^{i}}{\partial\tau}]|_{\Gamma}n_j.\end{gathered}$$

Благодаря непрерывности функции $\tilde{u}$ при переходе через границу раздела $\Gamma$ и условию (4.3) на скачок тензора напряжений, из предыдущего равенства получаем

$$[\Phi_{kj}[\tilde{u},\tilde{\chi}]]|_{\Gamma}n_j\tau_k = -\frac{\partial\tilde{u}^{i}}{\partial\tau}|_{\Gamma}[\Theta_{ij}[\tilde{u},\tilde{\chi}]]|_{\Gamma}n_j = 0.$$

Следовательно, условие (4.9) на скачок химического потенциала эквивалентно равенству

$$[\Phi_{kj}[\tilde{u},\tilde{\chi}]]|_{\Gamma}n_k n_j = 0. \tag{4.12}$$

### Библиографические замечания к главе 2.

Результаты данной главы основаны на работах [1-15]. В них же содержится ряд утверждений, относящихся к другим граничным условиям и ненулевым силовым полям. Конструкция, близкая к покрытию Витали, использовалась механиками при исследовании композитных сред [16-17]. Уравнения равновесия для двухфазовых сред иными способами получены в [18]. Сформулированные утверждения о гладкости обобщенного решения эллиптической системы приведены в [19-20]. Доказательство леммы 1.1 использует приемы, разработанные для задачи включения [21]. Построение покрытия Витали изложено в [22]. Самоподобие фрактальных множеств обсуждается в [23]. Возможность использования необходимых условий равновесия (4.9) при исследовании квазистационарной эволюции межфазовой границы от одного состояния равновесия к другому при резкой смене температуры продемонстрирована в [24].

Следует отметить, что равновесная энергия $i(t,\Omega)$ выражается через квазивыпуклую оболочку $\mathcal{F}(M,t)$ функции $F^{\min}(M,t) = \min\{F^+(M)+t, F^-(M)\}$ согласно равенству $i(t,\Omega) = |\Omega|\mathcal{F}(0,t)$. Последняя формула конкретизирует зависимость величины $i(t,\Omega)$ от $\Omega$, что позволяет упростить доказательство независимости температур фазовых переходов от области. Квазивыпуклые оболочки плотностей энергии двухфазовой упругой среды будут исследоваться в четвертой главе.

### Литература


1 . В.Г.Осмоловский, "Теорема существования и слабая форма уравнений Лагранжа для вариационной задачи теории фазовых превращений", Сибирский математический журнал, 35, N4(1994), с. 835-846.
2 . В.Г.Осмоловский, "Теорема существования и точные решения в вариационной задаче о высокотемпературных фазовых переходах при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения", Проблемы математического анализа, вып. 15(1995), с.201-212.
3 . Osmolovski V.G., "The phase transition in mechanic of continuum media for big loading". Math. Nachr.,v.177(1996), s. 233-250.
4 . В.Г.Осмоловский, "Необходимые условия экстремума в вариационной задаче о фазовых переходах с неоднородными граничными условиями", Проблемы математического анализа, вып.22 (2001), с.160-178.
5 . В.А.Кучер, В.Г.Осмоловский, "Вычисление второй вариации для функционала энергии двухфазовой среды", Проблемы математического анализа, вып. 22(2001), с.41-73.
6 . В.Г.Осмоловский, "Критерий слабой полунепрерывности снизу функционала энергии двухфазовой упругой среды". Проблемы математического анализа, вып 26(2003), с.215-254.
7 . В.Г.Осмоловский, "Точные решения вариационной задачи теории фазовых переходов механики сплошных сред", Проблемы математического анализа, вып.27(2004), с.171-205.
8 . В.Г.Осмоловский, "Зависимость состояний равновесия двухфазовой упругой среды от температуры при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения". Проблемы математического анализа, вып.28 (2004), с.98-114.
9 . В.Г.Осмоловский, "Существование температур фазовых переходов для неоднородной анизотропной двухфазовой упругой среды". Проблемы математического анализа, вып.31 (2005), с.59-66.
10. В.Г.Осмоловский, "О температурах фазовых переходов в вариационной задаче теории упругости двухфазовых сред", Проблемы математического анализа, вып.41(2009), с.37-47.
11. В.Г.Осмоловский, "Роль однофазовых состояний равновесия для двухфазовой упругой среды", Проблемы математического анализа, вып.41(2009), с.37-47.
12. В.Г.Осмоловский, "Вариационная задача о фазовых переходах при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения", Алгебра и Анализ, т.22, N 6(2010), с.214-234.
13. В.Г.Осмоловский, "Вычисление энтропии в задаче термоупругости для двухфазовых упругих сред", Проблемы математического анализа, вып.56(2011), с.115-127.
14. В.Г.Осмоловский, "Многомерная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред при наличии микронеоднородстей", Проблемы математического анализа, вып.64(2012), с.93-100.
15. В.Г.Осмоловский, "Независимость температур фазовых переходов от области, занимаемой двухфазовой упругой средой", Проблемы математического анализа, вып.66(2012), с.147-151.
16. Hashin Z., "The elastic moduli of heterogeneuos materials". ASME J. Appl. Mech. v.29(1962), p.143-159.
17. Р.Кристенсен, *Введение в механику композитов*, Москва: Мир, 1982.
18. М.А.Гринфельд, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений*, Москва: Наука, 1990.
19. Г.Фикера, *Теоремы существования в теории упругости*, Москва: Наука, 1974.
20. гладкость задачи дифракции
21. S.Müller, "Microstructure, phase transitions and geometry". Max-Planc-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig. Preprint Nr.3(1997).
22. Л.К.Эванс, Р.Ф.Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Новосибирск, Научная книга, 2002.
23. Р.М.Кроновер, *Фракталы и хаос в динамических системах*, Москва, Постмаркет, 2000.

24. В.Г.Осмоловский, "Квазистационарная задача о движении межфазовых границ в теории фазовых переходов механики сплошных сред", Проблемы математического анализа, вып.73 (2013), с.115-123.

# ГЛАВА 3

# ЗАДАЧА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

*В главе осуществляется частичный перенос результатов §1.3 на многомерный ($m \geq 2$) случай. По причине невозможности построения состояний равновесия в явном виде, осовной упор делается на их качественном анализе.*



## §1. Постановка задачи и предварительные построения.

Для определения площади границы раздела фаз, которой пропорциональна поверхностная энергия, для каждой функции $\chi \in \mathbb{Z}'$ введем величину

$$S[\chi] = \sup_{h \in C_0^1(\Omega, R^m), |h| \leq 1} \int_\Omega \chi \operatorname{div} h \, dx. \tag{1.1}$$

Положим

$$\mathbb{Z} = \{\chi \in \mathbb{Z}' : S[\chi] < \infty\}. \tag{1.2}$$

В случае, когда носитель функции $\chi$ отделяется от своего дополнения в области $\Omega$ непрерывно дифференцируемой $(m-1)$-мерной поверхностью $\Gamma$, формула Стокса дает

$$S[\chi] = \sup_{h \in C_0^1(\Omega, R^m), |h| \leq 1} \int_\Gamma h \cdot n \, dS, \tag{1.3}$$

где $n$ — единичная, внешняя по отношению к $\operatorname{supp} \chi$ нормаль к $\Gamma$. Вычисляя супремум в правой части (1.3), приходим к выводу, что для гладких границ раздела фаз величина $S[\chi]$ совпадает с площадью этой границы. Для произвольной функции $\chi \in \mathbb{Z}'$ под площадью границы раздела $\operatorname{supp} \chi$ и его дополнения будем понимать величину (1.1). По определению, эта величина конечна в том и только том случае, если $\chi \in \mathbb{Z}$.

Пользуясь определением (1.2), запишем функционал энергии двухфазовой упругой среды, учитывающий поверхностную энергию границы раздела фаз, в виде

$$\begin{gathered} I[u, \chi, t, \sigma] = I_0[u, \chi, t] + \sigma S[\chi], \\ u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}, \quad \sigma > 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где функционал $I_0[u, \chi, t]$ и пространство $\mathbb{X}$ заданы равенствами (2.1.9) и (2.1.10), соответственно.

Под состоянием равновесия двухфазовой упругой среды с функционалом энергии (1.4) будем понимать пару $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$, минимизирующую этот функционал

$$I[\hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma}, t, \sigma] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}} I[u, \chi, t, \sigma], \qquad \hat{u}_{t,\sigma} \in \mathbb{X}, \quad \hat{\chi}_{t,\sigma} \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Как и ранее, состояние равновесия назовем однофазовым, если $\hat{\chi}_{t,\sigma} = 0$ или $\hat{\chi}_{t,\sigma} = 1$ почти всюду в $\Omega$, и двухфазовым в противном случае.

Перечислим ряд необходимых для дальнейшего свойств величины $S[\chi]$. Для их справедливости потребуется ограничение на гладкость границы области $\Omega$, которое начиная с этого места всегда предполагается выполненным.

Пусть

$$\Omega \subset R^m, \quad m \geq 2\text{— ограниченная область с липшицевой границей.} \tag{1.6}$$

Тогда

(1) если последовательность функций $\chi_n \in \mathbb{Z}$ сходится почти всюду к функции $\chi$, то

$$S[\chi] \leq \varliminf_{n\to\infty} S[\chi_n], \tag{1.7}$$

в случае конечности правой части (1.7) функция $\chi \in \mathbb{Z}$;

(2) из последовательности функций $\chi_n \in \mathbb{Z}$, $S[\chi_n] \leq R \neq R(n)$, можно выделить такую подпоследовательность $\chi_{n'}$, что

$$\chi_{n'}(x) \to \chi(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \quad \text{и} \quad \chi \in \mathbb{Z}; \tag{1.8}$$

(3) для всех функций $\chi \in \mathbb{Z}$, для которых с фиксированным числом $\gamma \in (0,1)$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi\, dx \leq \gamma, \tag{1.9}$$

с некоторой положительной константой $\kappa_\gamma = \kappa_\gamma(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\left(\int_\Omega \chi\, dx\right)^{\frac{m-1}{m}} \leq \kappa_\gamma S[\chi]. \tag{1.10}$$

Утверждение (1) означает полунепрерывность снизу величины $S[\chi]$ относительно сходимости почти всюду, утверждение (2) связано с компактностью вложения пространства $BV(\Omega)$ в $L_1(\Omega)$, а утверждение (3) называется изопериметрическим неравенством. Из определения (1.1) вытекает, что для $\Omega = B_R(0)$ константа $\kappa_\gamma$ не зависит от размера шара. Очевидно, что $S[\chi] = 0$ в том и только том случае, если $\chi = \chi^\pm$ (см. определение (2.1.16)).

Нам будет полезен следующий пример функции $\chi \in \mathbb{Z}' \setminus \mathbb{Z}$.

**Лемма 1.1.** *Для любого решения* $v$, $\chi$ *системы* (2.2.12) *с* $\alpha \neq 0$, $Q \in (0,1)$, *построенного в лемме* 2.2.3 *по некоторому покрытию Витали области* $\Omega$, *функция* $\chi \in \mathbb{Z}' \setminus \mathbb{Z}$.

Доказательство. Фиксируем покрытие Витали области $\Omega$ шарами $\bar{B}_{R_j}(x_j)$, числа $\alpha \neq 0$, $Q \in (0,1)$ и решение $v$, $\chi$ системы (2.2.12) с указанными параметрами. Положим

$$\tilde{h}(x) = \Sigma_{j=1}^\infty h_j(x), \quad h_j \in C^1(\Omega, R^m), \quad |h_j| \leq 1, \quad \operatorname{supp} h_j \subset B_{R_j}(x_j).$$

Тогда

$$S[\chi] =$$

$$= \sup_{h\in C_0^1(\Omega,R^m),|h|\leq 1}\int_\Omega \chi \operatorname{div} h\, dx \geq \sup_{\tilde{h}}\int_\Omega \chi \operatorname{div}\tilde{h}\, dx = \Sigma_{j=1}^\infty \sup_{h_j}\int_{B_{R_j}(x_j)} \chi \operatorname{div} h_j\, dx \equiv$$

$$\equiv \Sigma_{j=1}^\infty S_{B_{R_j}(x_j)}[\chi].$$

Таким образом, для доказательства леммы следует установить, что

$$\Sigma_{j=1}^\infty S_{B_{R_j}(x_j)}[\chi] = \infty. \tag{1.11}$$

Если хоть одно слагаемое левой части (1.11) бесконечно, то равенство (1.11) заведомо справедливо. Поэтому интерес представляет случай конечности всех слагаемых суммы (1.11).

В силу изопериметрического неравенства (1.10) с общей для всех шаров константой $\kappa_Q$ имеем

$$(Q|B_{R_j}|)^{\frac{m-1}{m}} \le \kappa_Q S_{B_{R_j}(x_j)}[\chi].$$

Поскольку

$$(Q|B_{R_j}|)^{\frac{m-1}{m}} = \frac{(Q|B_1|)^{\frac{m-1}{m}}}{|S_1|}|S_{R_j}|,$$

для доказательства (1.11) достаточно установить расходимость ряда $\Sigma_{j=1}^{\infty}|S_{R_j}|$ для любого покрытия Витали.

Пусть $\chi_j$ — характеристическая функция шара $B_{R_j}(x_j)$. По определению покрытия Витали

$$\Sigma_{j=1}^{\infty}\chi_j = \chi^+ \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega,$$

причем ряд левой части последнего равенства сходится почти всюду. Очевидно, что

$$S[\Sigma_{j=N+1}^{\infty}\chi_j] = S[\chi^+ - \Sigma_{j=1}^{N}\chi_j] = S[\Sigma_{j=1}^{N}\chi_j] = \Sigma_{j=1}^{N}|S_{R_j}|.$$

В силу свойства (1)

$$S[\Sigma_{j=N+1}^{\infty}\chi_j] \le \varliminf_{M\to\infty} S[\Sigma_{j=N+1}^{M}\chi_j] = \lim_{M\to\infty}\Sigma_{j=N+1}^{M}|S_{R_j}|.$$

Следовательно,

$$\Sigma_{j=1}^{N}|S_{R_j}| \le \Sigma_{j=N+1}^{\infty}|S_{R_j}|,$$

что невозможно для сходящейся суммы положительных слагаемых. □

Для установления связи между множествами $\mathbb{Z}'$ и $\mathbb{Z}$ введем дополнительное множество

$$\mathbb{Z}'' = \{\chi \in L_\infty(\Omega) : 0 \le \chi(x) \le 1 \text{ почти всюду в } \Omega\}. \tag{1.12}$$

Очевидно, что

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}' \subset \mathbb{Z}''. \tag{1.13}$$

Напомним определение $*$-слабой сходимости. Будем говорить, что $\chi_n \xrightarrow{*} \chi$, $\chi_n, \chi \in L_\infty(\Omega)$, если для всех $f \in L_1(\Omega)$

$$\int_\Omega f\chi_n\,dx \to \int_\Omega f\chi\,dx. \tag{1.14}$$

Известно, что множество $\mathbb{Z}''$ компактно относительно $*$-слабой сходимости:

> из любой последовательности $\chi_n \in \mathbb{Z}''$ можно выделить подпоследовательность $\chi_{n'}$, $*$-слабо сходящуюся к некоторой функции $\chi \in \mathbb{Z}''$.

Обозначим через $\mathbb{Z}_*$, $\mathbb{Z}'_*$, $\mathbb{Z}''_*$ $*$-слабые замыкания множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}'$, $\mathbb{Z}''$, соответственно. В силу сказанного

$$\mathbb{Z}''_* = \mathbb{Z}''. \tag{1.15}$$

**Лемма 1.2.** (*a*) *Справедливы равенства*

$$\mathbb{Z}_* = \mathbb{Z}'_* = \mathbb{Z}''_*. \tag{1.16}$$

(*b*) *Если последовательность функций $\chi_n \in \mathbb{Z}'$ $*$-слабо сходится к функции $\chi \in \mathbb{Z}'$, то $\chi_n \to \chi$ в пространстве $L_p(\Omega)$ с любым $p \in [1,\infty)$.*

(*c*) *Для любой функции $\chi \in \mathbb{Z}'$ существует такая последовательность $\chi_n \in \mathbb{Z}$, что $\chi_n \to \chi$ в пространстве $L_p(\Omega)$ при любом $p \in [1,\infty)$. Последовательность $\chi_n$ можно выбрать таким образом, что при каждом $n$*

$$\operatorname{supp}\chi_n = \cup_{j=1}^{N(n)}\bar{\omega}_j,$$

*где $\omega_j$ — строго внутренние подобласти области $\Omega$ с гладкими границами, $\bar{\omega}_j \cap \bar{\omega}_k = \emptyset$ при $j \neq k$.*

Доказательство. $(a)$ Из соотношений (1.13), (1.15) следует, что

$$\mathbb{Z}_* \subset \mathbb{Z}'_* \subset \mathbb{Z}''_* = \mathbb{Z}''.$$

Поэтому для доказательства равенств (1.16) достаточно установить, что

$$\mathbb{Z}_* = \mathbb{Z}''. \tag{1.17}$$

Для доказательства (1.17) нужно для каждой функци $\chi \in \mathbb{Z}''$ указать такую последовательность $\chi_n \in \mathbb{Z}$, что $\chi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \chi$.

Разобьем пространство $R^m$ плоскостями, каждая из которых ортогональна одному из координатных ортов, на открытые кубы $K_j^n$, $j = 1, 2, \dots$ с длиной ребра, равной $1/n$. Положим

$$\Omega_j^n = \Omega \cap K_j^n. \tag{1.18}$$

Для каждого $n$ и $j$ выделим из подмножеств (1.18) те, для которых

$$\Omega_j^n = K_j^n. \tag{1.19}$$

Семейство подмножеств (1.19) обозначим через $\mathcal{N}(n)$. Изменяя нумерацию, будем считать, что для семейства (1.19) числа $j$ изменяются от 1 до $N(n)$.

Пусть $\chi \in \mathbb{Z}''$. Для каждого множества $\Omega_j^n \in \mathcal{N}(n)$ положим

$$c_j^n = \frac{1}{|\Omega_j^n|} \int_{\Omega_j^n} \chi \, dx. \tag{1.20}$$

Поскольку $\chi \in \mathbb{Z}''$, для чисел $c_j^n$ справедливы неравенств $0 \leq c_j^n \leq 1$. Пусть

$$\alpha_j^n = \begin{cases} c_j^n & \text{при} \quad c_j^n \in [0, 1) \\ c_j^n - \frac{1}{n} & \text{при} \quad c_j^n = 1 \end{cases}. \tag{1.21}$$

Очевидно, что $\alpha_j^n \in [0, 1)$ для всех $n$ и $j$.

Для каждого множества $\Omega_j^n \in \mathcal{N}(n)$ введем подобласть $\omega_j^n \subset \Omega$, для которой

$$\omega_j^n \subset \bar{\omega}_j^n \subset \Omega_j^n, \quad |\omega_j^n| = \alpha_j^n |\Omega_j^n|, \quad \partial\omega_j^n \in C^\infty \tag{1.22}$$

(замена (1.21) чисел $c_j^n$ на $\alpha_j^n$ позволяет добиться гладкости $\partial\omega_j^n$ при $c_j^n = 1$).

Зададим функции $\chi_n$ согласно правилу

$$\begin{gathered} \chi_n|_{\Omega_j^n} \text{ – характеристическая функция подобласти } \omega_j^n \text{ для всех } \Omega_j^n \in \mathcal{N}(n), \\ \chi_n|_{\tilde{\Omega}} = 0, \quad \tilde{\Omega} = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{N(n)} \Omega_j^n. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Очевидно, что функция $\chi_n \in \mathbb{Z}$, поскольку ее носитель совпадает с объединением $\bar{\omega}_j^n$.

Докажем, что $\chi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \chi$. В силу неравенства $|\chi_n| \leq 1$, $|\chi| \leq 1$ достаточно доказать справедливость соотношения (1.14) для всех $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, поскольку множество $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_1(\Omega)$.

Так как длина ребра куба $K_j^n$ стремится к нулю с ростом $n$, а функция $\phi$ финитна, то при достаточно больших $n$

$$\int_\Omega (\chi(x) - \chi_n(x))\phi(x)\, dx = \Sigma_{j=1}^{N(n)} \int_{\Omega_j^n} (\chi(x) - \chi_n(x))\phi(x)\, dx. \tag{1.24}$$

Фиксируем точки $y_j^n \in \Omega_j^n$. Тогда правая часть (1.24) может быть записана в виде

$$\Sigma_{j=1}^{N(n)} \int_{\Omega_j^n} (\chi(x) - \chi_n(x))\phi(y_j^n)\, dx + \Sigma_{j=1}^{N(n)} \int_{\Omega_j^n} (\chi(x) - \chi_n(x))(\phi(x) - \phi(y_j^n))\, dx. \tag{1.25}$$

Для первого слагаемого (1.25) в силу (1.20)–(1.22) имеем

$$|\Sigma_{j=1}^{N(n)} \int_{\Omega_j^n} (\chi(x) - \chi_n(x))\phi(y_j^n)\, dx| = |\Sigma_{j=1}^{N(n)} |\Omega_j^n| (c_j^n - \alpha_j^n)\phi(y_j^n)| \le \frac{1}{n} \Sigma_{j=1}^{N(n)} |\phi(y_j^n)||\Omega_j^n|.$$

Так как

$$\Sigma_{j=1}^{N(n)} |\phi(y_j^n)||\Omega_j^n| \to \int_\Omega |\phi(y)|\, dy \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

первое слагаемое (1.25) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Поскольку

$$|\phi(x) - \phi(y_j^n)| \le \frac{C}{n} \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega_j^n,$$
$$C = \sqrt{m} \max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla \phi(x)|,$$

для второго слагаемого (1.25) справедливы соотношения

$$|\Sigma_{j=1}^{N(n)} \int_{\Omega_j^n} (\chi(x) - \chi_n(x))(\phi(x) - \phi(y_j^n))\, dx| \le \frac{C}{n} |\Omega| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, второе слагаемое (1.25) также стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, левая часть (1.24) стремится к нулю при $n \to \infty$ для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

$(b)$ Из $*$-слабой сходимости в ограниченной области следует слабая сходимость в пространстве $L_2(\Omega)$. Так как для функций $\chi_n$, $\chi$ из множества $\mathbb{Z}'$

$$\|\chi_n\|_{L_2}^2 = \int_\Omega \chi_n^2\, dx = \int_\Omega \chi_n\, dx, \quad \int_\Omega \chi\, dx = \int_\Omega \chi^2\, dx = \|\chi\|_{L_2}^2,$$

из слабой сходимости последовательности $\chi_n$ к функции $\chi$ в пространстве $L_2(\Omega)$ вытекает соотношение $\|\chi_n\|_{L_2} \to \|\chi\|_{L_2}$. Тогда $\chi_n \to \chi$ в пространстве $L_2(\Omega)$. В силу равномерной ограниченности функций $\chi_n$ и $\chi$, последовательность $\chi_n \to \chi$ в пространстве $L_p(\Omega)$ с любым $p \in [1, \infty)$.

$(c)$ Справедливость последнего утверждения леммы вытекает из доказанных первых двух ее утверждений. □

Вернемся на некоторое время к функционалу с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения $I_0[u, \chi, t]$. По-прежнему будем считать, что допустимыми полями смещения являются функции пространства $\mathbb{X}$, а в качестве допустимых распределений фаз выберем одно из трех множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}'$ или $\mathbb{Z}''$. Если считать множество $\mathbb{Z}'$ стандартным допустимым множеством распредения фаз, то множество $\mathbb{Z}$ сужает, а множество $\mathbb{Z}''$ расширяет область определения функционала $I_0$.

Для каждого значения $t$ положим

$$\mu(t) = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}} I_0[u, \chi, t], \quad \mu'(t) = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t], \quad \mu''(t) = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}''} I_0[u, \chi, t]. \tag{1.26}$$

Для введенных величин при каждом значении $t$ очевидны неравенства

$$-\infty < \mu''(t) \le \mu'(t) \le \mu(t) < \infty. \tag{1.27}$$

**Лемма 1.3.** *Справедливы равенства*

$$\mu''(t) = \mu'(t) = \mu(t). \tag{1.28}$$

Доказательство. В силу (1.27) достаточно установить справедливость неравенства $\mu''(t) \ge \mu(t)$.

По определению числа $\mu''(t)$ при фиксированном $t$ для каждого $n$ существует такая пара $u''_n \in \mathbb{X}$, $\chi''_n \in \mathbb{Z}''$, что

$$\mu''(t) + \frac{1}{n} \geq I_0[u''_n, \chi''_n, t]. \tag{1.29}$$

Из леммы 1.2 вытекает существование для каждого $n$ такой последовательности $\chi^n_k \in \mathbb{Z}$, $k = 1, 2, \ldots$, что $\chi^n_k \xrightarrow{*} \chi''_n$ при $k \to \infty$. Тогда

$$I_0[u''_n, \chi^n_k, t] \to I_0[u''_n, \chi''_n, t] \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

и существует такое $k_0(n)$, что

$$I_0[u''_n, \chi^n_{k_0(n)}, t] \leq I_0[u''_n, \chi''_n, t] + \frac{1}{n} \quad \text{для всех} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку $\chi^n_{k_0(n)} \in \mathbb{Z}$, имеем

$$\mu''(t) + \frac{2}{n} \geq I_0[u''_n, \chi''_n, t] + \frac{1}{n} \geq I_0[u''_n, \chi^n_{k_0(n)}, t] \geq \mu(t) \quad \text{для всех} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, $\mu''(t) \geq \mu(t)$. □

Полезность второго равенства (1.28) заключается в том, что в определении (2.3.2) функции $i(t, \Omega)$ замена множества $\mathbb{Z}'$ на множество $\mathbb{Z}$ не сказывается на величине этой функции.

Замена допустимого множества распределения фаз $\mathbb{Z}'$ на множество $\mathbb{Z}''$ имеет механическую интерпретацию. Функция $\chi \in \mathbb{Z}'$ описывает ситуацию, когда в каждой точке $x \in \Omega$ может реализоваться вещество лишь одной из фаз, в то время как функция $\chi \in \mathbb{Z}''$ допускает существование смеси в точке $x$ фаз с идексами $+$ и $-$ в долях $\chi(x)$ и $1 - \chi(x)$, соответственно.

Связь исходной и расширенной задач для функционала $I_0[u, \chi, t]$ обсуждается в следующей лемме.

**Лемма 1.4.** *Пусть вариационная задача*

$$I_0[\tilde{u}_t, \tilde{\chi}_t, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}''} I_0[u, \chi, t], \qquad \tilde{u}_t \in \mathbb{X}, \quad \tilde{\chi}_t \in \mathbb{Z}'' \tag{1.30}$$

*разрешима для некоторого $t$. Тогда*

(*a*) *для любого ее решения $\tilde{u}_t$, $\tilde{\chi}_t$ справедливы соотношения*

$$\begin{gathered}
\tilde{\chi}_t(x) = 1 \quad \textit{при почти всех } x \in \Omega, \textit{ для которых } \phi(x,t) < 0, \\
\tilde{\chi}_t(x) = 0 \quad \textit{при почти всех } x \in \Omega, \textit{ для которых } \phi(x,t) > 0, \\
\tilde{\chi}_t(x) \in [0,1] \textit{ при почти всех } x \in \Omega, \textit{ для которых } \phi(x,t) = 0, \\
\phi(x,t) = \big(F^+(\nabla \tilde{u}_t(x)) - F^-(\nabla \tilde{u}_t(x))\big) + t;
\end{gathered} \tag{1.31}$$

(*b*) *для этого $t$ задача* (2.1.12) *также разрешима; каждое ее решение $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ является решением задачи* (1.30) *и любое решение $\tilde{u}_t$, $\tilde{\chi}_t$ задачи* (1.30) *порождает решение $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ задачи* (2.1.12) *согласно правилу*

$$\begin{gathered}
\hat{u}_t(x) = \tilde{u}_t(x) \quad \textit{всюду в} \quad \Omega, \qquad \hat{\chi}_t(x) = \tilde{\chi}_t(x) \quad \textit{для тех } x \in \Omega, \textit{ при которых } \phi(x,t) \neq 0, \\
\hat{\chi}_t(x) \textit{— произвольная характеристическая функция на множестве точек } x \in \Omega, \\
\textit{для которых } \phi(x,t) = 0.
\end{gathered} \tag{1.32}$$

Доказательство. (*a*) Пусть $\tilde{u}_t$, $\tilde{\chi}_t$ — решение вариационной задачи (1.30). Тогда для любой функции $\psi \in \mathbb{Z}''$ и всех $s \in [0,1]$ выпуклая комбинация $(1-s)\tilde{\chi}_t + s\psi \in \mathbb{Z}''$ и

$$\frac{d}{ds} I_0[\tilde{u}_t, (1-s)\tilde{\chi}_t + s\psi, t]|_{s=0} \geq 0.$$

Раскрывая полученное неравенство, приходим к (1.31).

(b) В силу (1.28) и (1.13) каждое решение задачи (2.1.12) будет решением задачи (1.30). Поскольку

$$I_0[\tilde{u}_t, \tilde{\chi}_t, t] = \int_\Omega F^-(\nabla \tilde{u}_t)\, dx + \int_\Omega \tilde{\chi}_t \phi(x,t)\, dx, \tag{1.33}$$

для пары $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ из (1.32) справедливо равенство

$$I_0[\tilde{u}_t, \tilde{\chi}_t, t] = I_0[\hat{u}_t, \hat{\chi}_t, t]. \tag{1.34}$$

В силу включения $\hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}'$, из (1.30) и (1.34) получаем

$$\mu''(t) = I_0[\tilde{u}_t, \tilde{\chi}_t, t] = I_0[\hat{u}_t, \hat{\chi}_t, t] \geq \mu'(t).$$

Так как $\mu''(t) = \mu'(t)$, пара $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ — решение вариационной задачи (2.1.12). □

Выясним, к чему приводят утверждения леммы 1.4 в случае однородных изотропных двухфазовых сред.

**Лемма 1.5.** *Пусть тензоры модулей упругости двухфазовой среды задаются равенствами* (2.2.1) *и удовлетворяют условию* (2.2.3). *Тогда*

(*a*) *при* $t_- < t_+$ *каждое решение задачи* (1.30) *является решением задачи* (1.1.12),

(*b*) *при* $t_- = t_+ = t^*$ *и* $t \neq t^*$ *каждое решение задачи* (1.30) *также является решением задачи* (1.1.12),

(*c*) *при* $t_- = t_+ = t^*$ *и* $t = t^*$ *множество всех решений задачи* (1.30) *исчерпывается парами* $\tilde{u}_t = 0$, $\tilde{\chi}_t$ *– произвольная функция множества* $\mathbb{Z}''$, *в то время как множество всех решений задачи* (1.1.12) *имеет вид* $\hat{u}_t = 0$, $\hat{\chi}_t$ *— произвольный элемент множества* $\mathbb{Z}'$.

Доказательство. Согласно лемме 1.4 решение $\tilde{u}_t$, $\tilde{\chi}_t$ задачи (1.30) может не быть решением задачи (1.1.12) только лишь за счет функции $\tilde{\chi}_t$. Для фиксированного $t$ данная возможность имеет место в том и только том случае, если функция $\phi(.,t)$, определенная равенством (1.31), обращается в ноль на множестве положительной меры.

При выполнении условия (*a*) или (*b*) настоящей леммы такая возможность исключена. Действительно, в противном случае решение $\tilde{u}_t$, $\tilde{\chi}_t$ задачи (1.30) породило бы ряд решений задачи (1.1.12) с различными значениями величины $\hat{Q}(t)$, что невозможно в силу теоремы 2.2.1.

При выполнении условий (*c*) описание множества всех решений задачи (1.1.12) дано в теореме 2.2.1. Поскольку для плотностей (2.1.6) и любых функций $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}''$

$$\begin{aligned} &\chi(F^+(\nabla u) + t^*) + (1-\chi)F^-(\nabla u) = \\ &= \chi < A^+ e(\nabla u), e(\nabla u) > + (1-\chi) < A^- e(\nabla u), e(\nabla u) > + \\ &+ < A^-\zeta^-, \zeta^- > - 2 < e(\nabla u), \chi A^+\zeta^+ + (1-\chi)A^-\zeta^- > \end{aligned} \tag{1.35}$$

(была использована формула (2.3.3) для числа $t^*$), а в случае (2.2.1), (2.2.3) при $t_- = t_+$

$$\left(\chi A^+\zeta^+ + (1-\chi)A^-\zeta^-\right)_{ij} = (ac_- + b_-c_-m)\,\delta_{ij} \tag{1.37}$$

(была использована формула (2.2.29) для величины $t_+ - t_- = 0$), при выполнении условий (*c*) леммы имеем

$$\begin{aligned} &I_0[u, \chi, t^*] = |\Omega| < A^-\zeta^-, \zeta^- > + \\ &+ \int_\Omega \left(\chi < A^+ e(\nabla u), e(\nabla u) > + (1-\chi) < A^- e(\nabla u), e(\nabla u) >\right) dx \\ &\text{для всех} \quad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}''. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Следовательно, в случае (*c*) множество всех решений задачи (1.30) исчерпывается парами $\tilde{u}_t = 0$, $\tilde{\chi}_t$ — произвольный элемент множества $\mathbb{Z}''$. □.

Таким образом, в случае однородных изотропных сред предложенный в лемме 1.4 переход к смеси фаз, вообще говоря, не приводит к состояниям равновесия, в которых эти смеси реализуются. Исключением является лишь вырожденный случай, рассмотренный в части (*c*) леммы.

## §2. Существование состояний равновесия.

Учет поверхностной энергии границы раздела фаз существенно улучшает математические свойства функционала энергии двухфазовой упругой среды, что, в частности, приводит к разрешимости вариационной задачи (1.5) при любых температурах $t$ и любых положительных коэффициентах поверхностного натяжения $\sigma$. Доказательство существования состояний равновесия базируется на традиционных методах вариационного исчисления, связанных с коэрцитивностью и полунепрерывностью снизу исследуемого функционала. Наличие этих свойств у функционала (1.4) устанаиливается в ближайшиих двух леммах.

**Лемма 2.1.** *Функционал энергии* (1.4) *коэрцитивен:*

$$I[u_n,\chi_n,t,\sigma]\to\infty$$

*для фиксированных* $t,\sigma\in R^1$, $\sigma>0$ *и любых последовательностей* $u_n\in\mathbb{X}$, $\chi_n\in\mathbb{Z}$, $n=1,2,\dots$ *с*

$$\|u_n\|_{W_2^1}+S[\chi_n]\to\infty \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2.1}$$

Доказательство. В силу формулы (2.1.6) для всех матриц $M\in R^{m\times m}$

$$F^{\pm}(M)=<A^{\pm}\zeta^{\pm},\zeta^{\pm}>-2<A^{\pm}\zeta^{\pm},e(M)>+<A^{\pm}e(M),e(M)>.$$

Пользуясь неравенством (2.1.4), получаем

$$F^{\pm}(M)\ge\frac{\nu}{2}|e(M)|^2-\frac{2}{\nu}|A^{\pm}\zeta^{\pm}|^2+<A^{\pm}\zeta^{\pm},\zeta^{\pm}>.$$

Следовательно, для всех $\chi\in\mathbb{Z}'$ и $t\in R^1$

$$\chi(F^+(M)+t)+(1-\chi)F^-(M)\ge\frac{\nu}{2}|e(M)|^2+$$
$$+\chi(<A^+\zeta^+,\zeta^+>+t)+(1-\chi)<A^-\zeta^-,\zeta^->-\frac{2}{\nu}(|A^+\zeta^+|^2+|A^-\zeta^-|^2).$$

Тогда

$$I_0[u,\chi,t]\ge\frac{\nu}{2}\int_\Omega|e(\nabla u)|^2\,dx-\frac{2|\Omega|}{\nu}(|A^+\zeta^+|^2+|A^-\zeta^-|^2)+i_{\min}(t,\Omega), \tag{2.2}$$

где функция $i_{\min}$ задана равенством (2.3.3.).

Утверждение леммы вытекает из оценки (2.2) и определения (1.4) функционала $I[u,\chi,t,\sigma]$. □

**Лемма 2.2.** *Функционал* (1.4) *полунепрерывен снизу: для любых функций* $u_n,u\in W_2^1(\Omega,R^m)$, $\chi_n,\chi\in\mathbb{Z}$, $n=1,2,\dots$, *для которых*

$$u_n\rightharpoonup u \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega,R^m), \qquad \chi_n\to\chi \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \tag{2.3}$$

*при всех* $t,\sigma\in R^1$, $\sigma>0$ *выполняется неравенство*

$$I[u,\chi,t,\sigma]\le\varliminf_{n\to\infty}I[u_n,\chi_n,t,\sigma]. \tag{2.4}$$

Доказательство. В силу формулы (2.1.6) для всх матриц $M,N\in R^{m\times m}$

$$F^{\pm}(M+N)=<A^{\pm}(e(M)-\zeta^{\pm}),e(M)-\zeta^{\pm}>+2<A^{\pm}(e(M)-\zeta^{\pm}),e(N)>+<A^{\pm}e(N),e(N)>.$$

Пользуясь неравенством (2.1.4), получаем

$$F^{\pm}(M+N)\ge F^{\pm}(M)+2<A^{\pm}(e(M)-\zeta^{\pm}),e(N)>.$$

Следовательно, для всех $\chi \in \mathbb{Z}'$ и $t \in R^1$

$$\chi(F^+(M+N)+t)+(1-\chi)F^-(M+N) \geq \chi(F^+(M)+t)+(1-\chi)F^-(M)+$$
$$+2\left(\chi < A^+(e(M)-\zeta^+), e(N) > +(1-\chi) < A^-(e(M)-\zeta^-), e(N) >\right).$$

Тогда

$$I_0[u,\chi,t] \leq I_0[u+v,\chi,t]-$$
$$-2\int_\Omega \{\chi < A^+(e(\nabla u)-\zeta^+), e(\nabla v) > +(1-\chi) < A^-(e(\nabla u)-\zeta^-), e(\nabla v) >\}\,dx, \tag{2.5}$$
$$u,v \in W_2^1(\Omega,R^m), \quad \chi \in \mathbb{Z}'.$$

Фиксируем функции $u_n, u \in W_2^1(\Omega,R^m)$, $\chi_n,\chi \in \mathbb{Z}'$, $n=1,2,\ldots$, для которых выполняются соотношения (2.3). Из (2.5) для этих функций следует, что

$$I_0[u,\chi_n,t] \leq I_0[u_n,\chi_n,t]+$$
$$+2\int_\Omega \{\chi_n < A^+(e(\nabla u)-\zeta^+), e(\nabla(u-u_n)) > +(1-\chi_n) < A^-(e(\nabla u)-\zeta^-), e(\nabla(u-u_n)) >\}\,dx. \tag{2.6}$$

Поскольку при сходиости (2.3) последнее слагаемое правой части (2.6) стремится к нулю, а предел левой части равен величине $I_0[u,\chi,t]$, из (2.6) получаем

$$I_0[u,\chi,t] \leq \varliminf_{n\to\infty} I_0[u_n,\chi_n,t]. \tag{2.7}$$

Утверждение леммы вытекает из оценки (2.7) и свойства (1.7) величины $S[\chi]$. Отметим, что правая часть (2.7) заведомо конечна, в то время, как правая часть (2.4) может оказаться и бесконечной (см. лемму 1.1). $\square$

Покажем, как доказанные леммы позволяют установить существование состояний равновесия для двухфазовой упругой среды с положительным коэффициентом поверхностного натяжения.

**Теорема 2.1.** *Вариационная задача* (1.5) *для функционала* (1.4) *разрешима.*

Доказательство. Фиксируем температуру $t$ и положительный коэффициент поверхностного натяжения $\sigma$. Для этих параметров обозначим через $\gamma$ правую часть равенства (1.5). Очевидно, что $\gamma \neq \pm\infty$. Пусть $u_n \in \mathbb{X}$, $\chi_n \in \mathbb{Z}$ — минимизирующая последовательность функционала $I[.,.,t,\sigma]$:

$$I[u_n,\chi_n,t,\sigma] \to \gamma \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из леммы 2.1 вытекает ограниченность этой последовательности

$$\|u_n\|_{W_2^1} \leq R, \quad S[\chi_n] \leq R, \qquad R \neq R(n).$$

Переходя к подпоследовательности, будем считать, что

$$u_n \rightharpoonup \tilde{u} \in \mathbb{X} \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega,R^m), \qquad \chi_n \to \tilde{\chi} \in \mathbb{Z} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega.$$

Пользуясь утверждением леммы 2.2, получаем

$$I[\tilde{u},\tilde{\chi},t,\sigma] \leq \gamma.$$

Следовательно, пара $\hat{u}_{t,\sigma} = \tilde{u}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma} = \tilde{\chi}$ является решением задачи (1.5). $\square$

Постараемся ответить на вопрос, почему описанный выше прием не приводит к разрешимости задачи (2.1.12).

Пусть $u_n \in \mathbb{X}$, $\chi_n \in \mathbb{Z}'$ — минимизирующая последовательность функционала $I_0[u,\chi,t]$ для некоторого значения $t$. Тогда из неравенства (2.2) вытекает равномерная по $n$ ограниченность величин

$||u_n||_{W_2^1}$. Поэтому из минимизирующей последовательности можно выделить подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение), для которой

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega, R^m), \qquad \chi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \chi, \qquad u \in W_2^1(\Omega, R^m), \quad \chi \in \mathbb{Z}''. \tag{2.8}$$

Поскольку предельная функция $\chi$ в соотношении (2.8) не обязана принадлежать множеству $\mathbb{Z}'$, а неравенство (2.2) остается верным для функций $\chi \in \mathbb{Z}''$, следует заменить задачу (2.1.12) задачей (1.30). Согласно лемме 1.4 разрешимость задачи (1.30) влечет за собой разрешимость задачи (2.1.12). Для задачи (1.30) будет справедлив аналог теоремы 2.1, если удастся доказать, что для любых последовательностей $u_n \in W_2^1(\Omega, R^m)$, $\chi_n \in \mathbb{Z}''$, удовлетворяющих соотношениям (2.8), справедливо неравенство (2.7).

**Теорема 2.2.** *Неравенство* (2.7) *выполняется для некоторого* $t$ *и всех последовательностей* $u_n \in W_2^1(\Omega, R^m)$, $\chi_n \in \mathbb{Z}''$, *удовлетворяющих условиям* (2.8), *в том и только том случае, если*

$$A^+ = A^-, \quad \zeta^+ = \zeta^-. \tag{2.9}$$

Доказательство. Достаточность условий (2.9) очевидна в силу возникающего из них равенства

$$F^+(M) = F^-(M) \quad \text{при всех} \quad M \in R^{m\times m}$$

и соотношения (2.7) с $\chi = \chi_n = \chi^-$, $n = 1, 2, \ldots$.

Для доказательства необходимости будут построены специальные последовательности (2.8), из соотношения (2.7) для которых вытекают равенства (2.9). Очевидно, что справедливость неравенства (2.7) для какого-то $t = t_0$ влечет за собой его справедивость для всех значений $t$. Поэтому дальнейшие рассуждения проведем при $t = 0$.

*Построение последовательностей* (2.8). Фиксируем единичный куб

$$K = (0,1)^m \subset R^m. \tag{2.10}$$

Зададим функции

$$\phi \in C_0^\infty(K, R^m), \qquad \psi \in L_\infty(K), \quad 0 \le \psi(x) \le 1 \quad \text{почти всюду в} \quad K. \tag{2.11}$$

Обозначим через $\mathcal{N}$ совокупность всех векторов пространства $R^m$ с целочисленными координатами. Представим пространство $R^m$ с точностью до множества нулевой меры в виде объединения кубов

$$R^m = \cup_{z_j \in \mathcal{N}} K_{z_j}, \quad K_{z_j} = K + z_j. \tag{2.12}$$

Пусть $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi}$ — периодическое распространение функций $\phi$, $\psi$ в пространство $R^m$ с куба $K$:

$$\begin{gathered}\tilde{\phi}(z + z_j) = \phi(z), \quad \tilde{\psi}(z + z_j) = \psi(z) \\ \text{при } z \in K.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Пусть $x^0 \in \Omega$, а положительное число $l$ настолько мало, что куб

$$K(l, x^0) = \{x \in R^m : x_i^0 < x_i < l\} \subset \Omega. \tag{2.14}$$

По функциям (2.13) и кубу (2.14) зададим последовательности $\tilde{\phi}_n$ и $\tilde{\psi}_n$ равенствами

$$\tilde{\phi}_n(x) = \frac{l}{n}\tilde{\phi}(\frac{x - x^0}{l}n), \quad \tilde{\psi}_n(x) = \tilde{\psi}(\frac{x - x^0}{l}n), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

Тогда функции

$$\begin{gathered}\phi_n(x) = \begin{cases} \tilde{\phi}_n(x) & \text{при} \quad x \in K(l, x^0) \\ 0 \quad \text{при} & x \in \Omega \setminus K(l, x^0) \end{cases}, \qquad \chi_n(x) = \begin{cases} \tilde{\psi}_n(x) & \text{при} \quad x \in K(l, x^0) \\ 0 \quad \text{при} & x \in \Omega \setminus K(l, x^0) \end{cases}, \\ n = 1, 2, \ldots, \quad x \in \Omega\end{gathered} \tag{2.16}$$

лежат в пространствах $C_0^\infty(\Omega, R^m)$ и $\mathbb{Z}''$, соответственно.

В качестве $u_n$ в (2.8) возьмем последовательность

$$u_n = M(x - x^0) + \phi_n(x), \quad M \in R^{m\times m}, \tag{2.17}$$

а в качестве $\chi_n$ — последовательность из (2.16).

*Вычиследние пределов последовательностей $u_n$ и $\chi_n$.* Докажем, что

$$u_n \rightharpoonup u = M(x - x^0) \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega, R^m). \tag{2.18}$$

В силу (2.15) и (2.16)

$$|\phi_n(x)| \le \frac{l}{n}\|\phi\|_{C(\bar K)}, \quad |\nabla\phi_n(x)| \le \|\nabla\phi\|_{C(\bar K)} \\ \text{для всех } x \in \Omega. \tag{2.19}$$

Поэтому достаточно установить, что

$$\int_\Omega \nabla\phi_n(x) f(x)\,dx \to 0 \quad \text{для всех} \quad f \in C_0^\infty(\Omega, R^m). \tag{2.20}$$

Интегрируя в (2.20) по частям и учитывая первое неравенство в (2.19), приходим к справедливости (2.20).

Докажем, что

$$\chi_n \xrightharpoonup{*} \chi, \qquad \chi(x) = \begin{cases} \int_K \psi(y)\,dy & \text{при} \quad x \in K(l, x^0) \\ 0 \quad \text{при} & x \in \Omega \setminus K(l, x^0) \end{cases}. \tag{2.21}$$

В силу неравенства $|\chi_n| \le 1$ для доказательства (2.21) достаточно установить справедливость соотношения

$$\int_\Omega \chi_n f\,dx \to \int_\Omega \chi f\,dx \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{2.22}$$

для всех $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Благодаря (2.16) и (2.15), имеем

$$\int_\Omega \chi_n(x) f(x)\,dx = \int_{K(l,x^0)} \tilde\psi_n(x) f(x)\,dx = \int_{K(l,x^0)} \tilde\psi(\frac{x - x^0}{l} n) f(x)\,dx.$$

Совершим в последнем интеграле замену координат

$$K(l, x^0) \ni x \mapsto y \in nK, \quad y = \frac{x - x^0}{l} n. \tag{2.23}$$

Тогда

$$\int_{K(l,x^0)} \tilde\psi(\frac{x - x^0}{l} n) f(x)\,dx = (\frac{l}{n})^m \int_{nK} \tilde\psi(y) f(\frac{ly}{n} + x^0)\,dy.$$

Пусть подмножество $\mathcal{N}(n) \subset \mathcal{N}$ таково, что с точностью до множества нулевой меры

$$nK = \cup_{z^j \in \mathcal{N}(n)} K_{z^j}, \quad K_{z^j} = K + z^j,$$

Очевидно, что множество $\mathcal{N}(n)$ состоит из $N = n^m$ точек $z^j$. Тогда, изменяя при необходимости нумерацию точек $z^j$, получаем

$$(\frac{l}{n})^m \int_{nK} \tilde\psi(y) f(\frac{ly}{n} + x^0)\,dy = (\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N \int_{K_{z^j}} \tilde\psi(y) f(\frac{ly}{n} + x^0)\,dy.$$

В каждом из интегралов по кубам $K_{z^j}$ сделаем замену координат

$$K_{z^j} \ni y \mapsto z \in K, \quad z = y - z^j. \tag{2.24}$$

Тогда в силу (2.13)

$$(\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N \int_{K_{zj}} \tilde{\psi}(y) f(\frac{ly}{n} + x^0)\, dy = (\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N \int_K \tilde{\psi}(z + z^j) f(\frac{lz^j}{n} + x^0 + \frac{lz}{n})\, dz =$$
$$= (\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N \int_K \psi(z) f(\frac{lz^j}{n} + x^0 + \frac{lz}{n})\, dz.$$

Из равномерной непрерывности в $\bar{\Omega}$ функции $f$ следует равенство

$$\max_{z \in K,\, j=1,\dots,n^m} |f(\frac{lz^j}{n} + x^0 + \frac{lz}{n}) - f(\frac{lz^j}{n} + x^0)| = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$(\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N \int_K \psi(z) f(\frac{lz^j}{n} + x^0 + \frac{lz}{n})\, dz = (\int_K \psi(z)\, dz)(\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N f(\frac{lz^j}{n} + x^0) + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку величина

$$(\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N f(\frac{lz^j}{n} + x^0)$$

является суммой Римана для интеграла

$$\int_{K(l,x^0)} f(z)\, dz,$$

получаем

$$(\int_K \psi(x)\, dx)(\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N f(\frac{lz^j}{n} + x^0) = (\int_K \psi(x)\, dx)(\int_{K(l,x^0)} f(z)\, dz) + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\int_\Omega \chi_n(x) f(x)\, dx = (\int_K \psi(x)\, dx)(\int_{K(l,x^0)} f(x)\, dx) + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что после предельного перехода приводит к справедливости (2.21).

*Преобразование условия* (2.7) *для построенной последовательности* (2.8). Учитывая (2.16), имеем

$$I_0[u_n, \chi_n, 0] = \int_{\Omega \setminus K(l,x^0)} F^-(M)\, dx + \int_{K(l,x^0)} \{\tilde{\psi}_n(x) F^+(M + \nabla\tilde{\phi}_n(x)) + (1 - \tilde{\psi}_n(x)) F^-(M + \nabla\tilde{\phi}_n(x))\}\, dx. \tag{2.25}$$

Займемся вычислением второго слагаемого правой части (2.25). В силу (2.15) получаем

$$\int_{K(l,x^0)} \{\tilde{\psi}_n(x) F^+(M + \nabla\tilde{\phi}_n(x)) + (1 - \tilde{\psi}_n(x)) F^-(M + \nabla\tilde{\phi}_n(x))\}\, dx =$$
$$= \int_{K(l,x^0)} \{\tilde{\psi}(\frac{x - x^0}{l} n) F^+(M + \nabla\tilde{\phi}(\frac{x - x^0}{l} n)) + (1 - \tilde{\psi}(\frac{x - x^0}{l} n)) F^-(M + \nabla\tilde{\phi}(\frac{x - x^0}{l} n))\}\, dx.$$

Совершая замену координат (2.23), приходим к выводу, что правая часть последнего равенства совпадает с величиной

$$(\frac{l}{n})^m \int_{nK} \{\tilde{\psi}(y) F^+(M + \nabla\tilde{\phi}(y)) + (1 - \tilde{\psi}(y)) F^-(M + \nabla\tilde{\phi}(y))\}\, dy =$$
$$= (\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N \int_{K_{zj}} \{\tilde{\psi}(y) F^+(M + \nabla\tilde{\phi}(y)) + (1 - \tilde{\psi}(y)) F^-(M + \nabla\tilde{\phi}(y))\}\, dy.$$

Проводя в каждом из кубов $K_{x^j}$ замену координат (2.24), преобразуем правую часть последнего равенства к виду

$$(\frac{l}{n})^m \Sigma_{j=1}^N \int_K \{\tilde{\psi}(z+z^j)F^+(M+\nabla\tilde{\phi}(z+z^j)) + (1-\tilde{\psi}(z+z^j))F^-(M+\nabla\tilde{\phi}(z+z^j))\}\,dz.$$

Учитывая условия (2.13), получим формулу для второго слагаемого правой части (2.25)

$$\int_{K(l.x^0)} \{\tilde{\psi}_n(x)F^+(M+\nabla\tilde{\phi}_n(x)) + (1-\tilde{\psi}_n(x))F^-(M+\nabla\tilde{\phi}_n(x))\}\,dx =$$
$$= l^m \int_K \{\psi(x)F^-(M+\nabla\phi(x)) + (1-\psi(x))F^-(M+\nabla\phi(x))\}\,dx.$$

Следовательно,

$$\varliminf_{n\to\infty} I_0[u_n,\chi_n,0] = \int_{\Omega\setminus K(l,x^0)} F^-(M)\,dx + l^m \int_K \{\psi(x)F^-(M+\nabla\phi(x)) + (1-\psi(x))F^-(M+\nabla\phi(x))\}\,dx. \tag{2.26}$$

Далее, для пары $u$, $\chi$ из (2.18), (2.21)

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,0] = \int_\Omega \{\chi F^+(\nabla u) + (1-\chi)F^-(\nabla u)\}\,dx = \\ = \int_{\Omega\setminus K(l,x^0)} F^-(M)\,dx + \int_{K(l,x^0)} \{(\int_K \psi(y)\,dy)F^+(M) + (1-\int_K \psi(y)\,dy)F^-(M)\}\,dx. \end{gathered} \tag{2.27}$$

Учитывая (2.26) и (2.27), перепишем неравенство (2.7) в виде

$$\begin{gathered} F^+(M)\int_K \psi(x)\,dx + F^-(M)(1-\int_K \psi(x)\,dx) \le \\ \le \int_K \{\psi(x)F^+(M+\nabla\phi(x)) + (1-\psi(x))F^-(M+\nabla\phi(x))\}\,dx. \end{gathered} \tag{2.28}$$

*Вывод соотношений* (2.9) *из неравенства* (2.28). Итак, из условий (2.7), (2.8) следует справедливость неравенства (2.28) для всех $M \in R^{m\times m}$ и функций $\phi$, $\psi$, удовлетворяющих условиям (2.11).

Так как

$$F^\pm(M+\nabla\phi(x)) = F^\pm(M) + F^\pm_{M_{ij}}(M)\phi^i_{x_j}(x) + \frac{1}{2}F^\pm_{M_{ij}M_{kl}}\phi^i_{x_j}(x)\phi^k_{x_l}(x),$$

неравенство (2.28) эквивалентно соотношению

$$\begin{gathered} 0 \le F^+_{M_{ij}}(M)\int_K \psi(x)\phi^i_{x_j}(x)\,dx + F^-_{M_{ij}}(M)\int_K (1-\psi(x))\phi^i_{x_j}(x)\,dx + \\ +\frac{1}{2}F^+_{M_{ij}M_{kl}}\int_K \psi(x)\phi^i_{x_j}(x)\phi^k_{x_l}(x)\,dx + \frac{1}{2}F^-_{M_{ij}M_{kl}}\int_K (1-\psi(x))\phi^i_{x_j}(x)\phi^k_{x_l}(x)\,dx. \end{gathered}$$

Заменяя в последнем неравенстве функцию $\phi$ на функцию $\varepsilon\phi$, $\varepsilon > 0$, сокращая обе части полученного неравенства на положительное число $\varepsilon$ и устремляя $\varepsilon$ к нулю, приходим к выводу, что

$$0 \le F^+_{M_{ij}}(M)\int_K \psi(x)\phi^i_{x_j}(x)\,dx + F^-_{M_{ij}}(M)\int_K (1-\psi(x))\phi^i_{x_j}(x)\,dx.$$

В силу финитности функции $\phi$ данное неравенство эквивалентно соотношению

$$0 \le (F^+_{M_{ij}}(M) - F^-_{M_{ij}}(M))\int_K \psi(x)\phi^i_{x_j}(x)\,dx.$$

Поскольку оно должно одновременно выполняться для функции $\phi$ и функции $-\phi$, получаем

$$0 = (F^+_{M_{ij}}(M) - F^-_{M_{ij}}(M)) \int_K \psi(x)\phi^i_{x_j}(x)\,dx. \tag{2.29}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}(F^+_{M_{ij}}(M) - F^-_{M_{ij}}(M))\phi^i_{x_j}(x) \equiv 0 \\ \text{для всех} \quad \phi \in C_0^\infty(K), \quad M \in R^{m\times m}.\end{gathered} \tag{2.30}$$

Действительно, выбирая в противном случае в качестве функции $\psi$ характеристическую функцию множества положительности и отрицательности левой части (2.30), приходим к противоречию с (2.29).

Для каждой пары векторов $\xi, \lambda \in R^m$ возьмем такую функцию $\phi(x)$, что в некоторой точке $\hat{x} \in K$

$$\phi^i_{x_j}(\hat{x}) = \xi_i\lambda_j.$$

Тогда из (2.30) имеем

$$(F^+_{M_{ij}}(M) - F^-_{M_{ij}}(M))\xi_i\lambda_j = 0 \quad \text{для всех} \quad M \in R^{m\times m}, \quad \lambda, \xi \in R^m.$$

Следовательно, $F^+_{M_{ij}}(M) = F^-_{M_{ij}}(M)$, то есть

$$a^+_{ijkl}(M_{kl} - \zeta^+_{kl}) = a^-_{ijkl}(M_{kl} - \zeta^-_{kl}). \tag{2.31}$$

Из (2.31) с $M_{kl} = \zeta^-_{kl}$ следует, что

$$a^+_{ijkl}(\zeta^+ - \zeta^-)_{kl} = 0.$$

Поэтому из условия положительной определенности (2.1.4) вытекает равенство $\zeta^+ = \zeta^-$. Из (2.31) с $M = 0$ получаем

$$a^+_{ijkl}\zeta^+_{kl} = a^-_{ijkl}\zeta^-_{kl}.$$

Тогда $a^+_{ijkl}M_{kl} = a^-_{ijkl}M_{kl}$. Взяв в качестве $M$ матрицу с нулевыми (за исключением одного) коэффициентами, приходим к равенству $a^+_{ijkl} = a^-_{ijkl}$. □

Доказанная теорема снимает диссонанс между примером несуществования состояний равновесия при $\sigma = 0$, построенным в лемме 2.1.1, и приемом доказательства существования состояний равновесия при $\sigma > 0$, изложенным в теореме 2.1.

Положительность коэффициента поверхностного натяжения не только приводит к существованию состояний равновесия, но и накладывет определенный отпечаток на их свойства. Для формулировки соответствующих результатов нам потребуется следующая техническая лемма, в которой используются обозначения (2.1.15), (2.1.16), (2.3.3) и константа $\nu$ из условия (2.1.4).

**Лемма 2.3.** *Для всех $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} I[u,\chi,t,\sigma] - I[\hat{u}^+,\chi^+,t,\sigma] &\ge (t^* - t - \frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2)\int_\Omega (1-\chi)\,dx + \frac{\nu}{2}\int_\Omega |e(\nabla u)|^2\,dx + \sigma S[1-\chi], \\ I[u,\chi,t,\sigma] - I[\hat{u}^-,\chi^-,t,\sigma] &\ge (t - t^* - \frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2)\int_\Omega \chi\,dx + \frac{\nu}{2}\int_\Omega |e(\nabla u)|^2\,dx + \sigma S[\chi]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Доказательство. Поскольку для всех матриц $M \in R^{m\times m}$

$$F^\pm(M) = F^\pm(0) - 2 < A^\pm\zeta^\pm, e(M) > + < A^\pm e(M), e(M) >,$$

для каждой функции $\chi \in \mathbb{Z}'$ имеем

$$\begin{gathered}\chi(F^+(M) + t) + (1-\chi)F^-(M) = \chi(F^+(0) + t) + (1-\chi)F^-(0) + \\ + < (\chi A^+ + (1-\chi)A^-)e(M), e(M) > -2 < \chi A^+\zeta^+ + (1-\chi)A^-\zeta^-, e(M) > .\end{gathered}$$

Далее

$$\begin{aligned}\chi(F^+(0)+t)+(1-\chi)F^-(0) &= (F^+(0)+t)+(1-\chi)(F^-(0)-F^+(0)-t) = \\ &= \chi^+(F^+(\nabla\hat u^+)+t)+(1-\chi^+)F^-(\nabla\hat u^+)-(1-\chi)([<A\zeta,\zeta>]+t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi(F^+(0)+t)+(1-\chi)F^-(0) &= F^-(0)+\chi(F^+(0)-F^-(0)+t) = \\ &= \chi^-(F^+(\nabla\hat u^-)+t)+(1-\chi^-)F^-(\nabla\hat u^-)+\chi([<A\zeta,\zeta>]+t).\end{aligned}$$

Кроме того

$$\begin{aligned}&<\chi A^+\zeta^+ + (1-\chi)A^-\zeta^-, e(M)> = -(1-\chi) < [A\zeta], e(M)> + < A^+\zeta^+, e(M)>,\\ &<\chi A^+\zeta^+ + (1-\chi)A^-\zeta^-, e(M)> = \chi < [A\zeta], e(M)> + < A^-\zeta^-, e(M)>.\end{aligned}$$

Следовательно, для всех $u\in\mathbb{X}$, $\chi\in\mathbb{Z}'$

$$\begin{aligned}&I_0[u,\chi,t,\sigma]-I_0[\hat u^+,\chi^+,t] = -([<A\zeta,\zeta>]+t)\int_\Omega(1-\chi)\,dx+\\ &+\int_\Omega <(\chi A^+ + (1-\chi)A^-)e(\nabla u), e(\nabla u)>\,dx - 2\int_\Omega(1-\chi)<[A\zeta],e(\nabla u)>\,dx,\\ &I_0[u,\chi,t,\sigma]-I_0[\hat u^-,\chi^-,t] = ([<A\zeta,\zeta>]+t)\int_\Omega\chi\,dx+\\ &+\int_\Omega <(\chi A^+ + (1-\chi)A^-)e(\nabla u), e(\nabla u)>\,dx - 2\int_\Omega\chi<[A\zeta],e(\nabla u)>\,dx.\end{aligned}\tag{2.33}$$

Из условия положительной определенности (2.1.4) и неравенства Гельдера получаем

$$\begin{aligned}&<(\chi A^+ + (1-\chi)A^-)e(\nabla u), e(\nabla u)> \geq \nu|e(\nabla u)|^2,\\ &2|<[A\zeta],e(\nabla u)>| \leq \frac{\nu}{2}|e(\nabla u)|^2+\frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2.\end{aligned}$$

Последние неравенства и оценки (2.33) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned}&I_0[u,\chi,t]-I_0[\hat u^+,\chi^+,t] \geq (t^*-t-\frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2)\int_\Omega(1-\chi)\,dx+\frac{\nu}{2}\int_\Omega|e(\nabla u)|^2\,dx,\\ &I_0[u,\chi,t]-I_0[\hat u^-,\chi^-,t] \geq (t-t^*-\frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2)\int_\Omega\chi\,dx+\frac{\nu}{2}\int_\Omega|e(\nabla u)|^2\,dx.\end{aligned}\tag{2.34}$$

Формулы (2.34) вместе с равенством $S[\chi]=S[1-\chi]$, $\chi\in\mathbb{Z}$ завершают доказательство леммы. □

В формулировке следующей теоремы будут участвовать температуры фазовых переходов (2.3.1) и константа из изопериметрического неравенства (1.10). Для константы из условия положительной определенности будем придерживаться соглашения (2.3.9).

**Теорема 2.3.** (*a*) *Двухфазовые состояния равновесия могут существовать лишь при следующих ограничениях на параметры $t$ и $\sigma$*

$$t_- < t < t_+,\quad 0<\sigma\leq \frac{3\kappa_{1/2}(\Omega)}{\nu}|[A\zeta]|^2(\frac{|\Omega|}{2})^{\frac{1}{m}}.\tag{2.35}$$

(*b*) *Для всех двухфазовых состояний равновесия $\hat u_{t,\sigma}$, $\hat\chi_{t,\sigma}$ объемная доля фазы с индексом + удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned}&\gamma(\sigma)\leq\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\hat\chi_{t,\sigma}\,dx\leq 1-\gamma(\sigma),\quad \sigma>0,\\ &(0,1/2]\ni\gamma(\sigma)=\frac{1}{|\Omega|}\left(\frac{\nu\sigma}{3\kappa_{1/2}(\Omega)|[A\zeta]|^2}\right)^m.\end{aligned}\tag{2.36}$$

(c) *Для каждого $t$ и любого положительного $\sigma$ однофазовые состояния $\hat{u}^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ являются локальными минимумами функционала* (1.4) *относительно любого возмущения в пространстве $\mathbb{X}$ функций $\hat{u}^{\pm}$ и достаточно малых в пространстве $L_1(\Omega)$ возмущений функций $\chi^{\pm}$.*

Доказательство. (*a*) Для любых состояний равновесия $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ справедливы неравенства

$$I[\hat{u}_{t,\sigma},\hat{\chi}_{t,\sigma},t,\sigma] \le I[\hat{u}^+,\chi^+,t,\sigma], \quad I[\hat{u}_{t,\sigma},\hat{\chi}_{t,\sigma},t,\sigma] \le I[\hat{u}^-,\chi^-,t,\sigma]. \tag{2.37}$$

Следовательно,

$$i(t,\Omega)+\sigma S[\hat{\chi}_{t,\sigma}] \le I[\hat{u}_{t,\sigma},\hat{\chi}_{t,\sigma},t,\sigma] \le i_{\min}(t,\Omega).$$

(см. определения (2.3.2) и (2.3.3.)). Тогда

$$\sigma S[\hat{\chi}_{t,\sigma}] \le i_{\min}(t,\Omega) - i(t,\Omega). \tag{2.38}$$

Поскольку правая часть (2.38) равна нулю при $t \notin (t_-,t_+)$, двухфазовые состояния равновесия могут существовать лишь при указанных в (2.35) значениях $t$.

Из неравенств (2.37) и (2.32) с $u=\hat{u}_{t,\sigma}$, $\chi=\hat{\chi}_{t,\sigma}$ получаем

$$\sigma S[1-\hat{\chi}_{t,\sigma}] \le (t-t^*+\frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2)\int_\Omega (1-\hat{\chi}_{t,\sigma})\,dx, \quad \sigma S[\hat{\chi}_{t,\sigma}] \le (t^*-t+\frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2)\int_\Omega \hat{\chi}_{t,\sigma}\,dx. \tag{2.39}$$

Для двухфазовых состояий равновесия $t\in(t_-,t_+)$. Оценка (2.3.13) для этих значений $t$ дает

$$t-t^* \le t_+-t^* \le \mu_2^- - t^* = \frac{|[A\zeta]|^2}{\nu}, \quad t^*-t \le t^*-t_- \le t^*-\mu_1^- = \frac{|[A\zeta]|^2}{\nu}. \tag{2.40}$$

Обозначим через $\tilde{\chi}_{t,\sigma}$ ту из функций $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ или $1-\hat{\chi}_{t,\sigma}$ для которой

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{\chi}_{t,\sigma}\,dx \le \frac{1}{2}. \tag{2.41}$$

Тогда из (2.39), (2.40), (2.41) и изопериметрического неравенства (1.10) для любого двухфазового состояния равновесия имеем

$$\begin{aligned} \sigma S[\tilde{\chi}_{t,\sigma}] &\le \frac{3}{\nu}|[A\zeta]|^2\int_\Omega \tilde{\chi}_{t,\sigma}\,dx = \frac{3}{\nu}|[A\zeta]|^2(\int_\Omega \tilde{\chi}_{t,\sigma}\,dx)^{\frac{1}{m}}(\int_\Omega \tilde{\chi}_{t,\sigma}\,dx)^{\frac{m-1}{m}} \le \\ &\le \frac{3\kappa_{1/2}(\Omega)}{\nu}|[A\zeta]|^2(\int_\Omega \tilde{\chi}_{t,\sigma}\,dx)^{1/m} S[\tilde{\chi}_{t,\sigma}] \le \\ &\le \frac{3\kappa_{1/2}(\Omega)}{\nu}|[A\zeta]|^2(\frac{|\Omega|}{2})^{1/m} S[\tilde{\chi}_{t,\sigma}]. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Для двухфазовых состояний равновесия величина $S[\tilde{\chi}_{t,\sigma}]>0$. Сокращая на нее, приходим к справедливости второго соотношения (2.35).

(*b*) Оценка (2.36) для числа $\gamma$ следует из второго неравенства (2.35). Из промежуточного неравенства (2.42) имеем

$$\gamma(\sigma) \le \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{\chi}_{t,\sigma}\,dx. \tag{2.43}$$

Тогда

$$\gamma(\sigma) \le \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_{t,\sigma}\,dx \le \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \le \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_{t,\sigma}\,dx \le 1-\gamma(\sigma), \tag{2.44}$$

в случае $\tilde{\chi}_{t,\sigma}=\hat{\chi}_{t,\sigma}$ и $\tilde{\chi}_{t,\sigma}=1-\hat{\chi}_{t,\sigma}$, соответственно. Оценка (2.36) является следствием неравенств (2.44).

($c$) Из (2.32) и изопериметрического неравенства (1.10) следует, что

$$\begin{gathered}
I[u,\chi,t,\sigma]-I[\hat{u}^+,\chi^+,t,\sigma]\geq\\
\geq\frac{\nu}{2}\int_\Omega|e(\nabla(u-u^+))|^2\,dx+\left(\sigma-\kappa_{1/2}(\Omega)|t^*-t-\frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2|(\int_\Omega|\chi-\chi^+|\,dx)^{\frac{1}{m}}\right)S[\chi^+-\chi]\\
\text{при условии}\quad\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega|\chi-\chi^+|\,dx\leq\frac{1}{2},\\
I[u,\chi,t,\sigma]-I[\hat{u}^-,\chi^-,t,\sigma]\geq\\
\geq\frac{\nu}{2}\int_\Omega|e(\nabla(u-u^-))|^2\,dx+\left(\sigma-\kappa_{1/2}(\Omega)|t-t^*-\frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2|(\int_\Omega|\chi-\chi^-|\,dx)^{\frac{1}{m}}\right)S[\chi-\chi^-]\\
\text{при условии}\quad\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega|\chi-\chi^-|\,dx\leq\frac{1}{2}.
\end{gathered}\tag{2.45}$$

Очевидно, что при любых $u\in\mathbb{X}$ и всех достаточно малых по $L_1(\Omega)$-норме функций $\chi-\chi^\pm$, $\chi\in\mathbb{Z}$, правые части (2.45) положительны в случае $||u||_{W_2^1}+||\chi-\chi^\pm||_{L_1}>0$. □

Утверждение ($a$) теоремы 2.3 устанавливает локализацию значений параметров $t,\sigma$, при которых могут существовать двухфазовые состояния равновесия. Сам факт локализации довольно правдоподобен: существование двухфазовых состояний равновесия энергетически невыгодно при больших значениях $|t|$ и $\sigma$. Внимания заслуживают оценки (2.35) и согласование первой из них со случаем $\sigma=0$. Отметим, что при $t_-=t_+$ у функционала (1.4) нет двухфазовых состояний равновесия ни при каком $\sigma$. Утверждения ($b$) и ($c$) теоремы с разных позиций констатируют, что при $\sigma>0$ появление зародышей новой фазы со сколь угодно малым объемом энергетически невыгодно.

## §3. Температуры фазовых переходов.

В этом параграфе нам предстоит осуществить частичный перенос описания множества всех состояний равновесия для одномерного случая из §1.3 на многомерную задачу.

На первом этапе исследуем зависимость температур фазовых переходов от коэффициента поверхностного натяжения. Начнем с уточнения множества значений параметров $t$ и $\sigma$, при которых возможны двухфазовые состояния равновесия, полученного в теореме 2.3(a).

По аналогии с (2.3.2) введем функции

$$\begin{gathered}
j^+(t,\sigma,\Omega)=\inf_{u\in\mathbb{X}}I[u,\chi^+,t,\sigma],\quad j^-(t,\sigma,\Omega)=\inf_{u\in\mathbb{X}}I[u,\chi^-,t,\sigma],\\
j_{\min}(t,\sigma,\Omega)=\min\{j^-(t,\sigma,\Omega),j^+(t,\sigma,\Omega)\},\quad j(t,\sigma,\Omega)=\inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}}I[u,\chi,t,\sigma],\\
t,\sigma\in R^1,\quad\sigma\geq0.
\end{gathered}\tag{3.1}$$

Очевидно, что

$$j^+(t,\sigma,\Omega)=i^+(t,\Omega),\quad j^-(t,\sigma,\Omega)=i^-(t,\Omega),\quad j_{\min}(t,\sigma,\Omega)=i_{\min}(t,\Omega).\tag{3.2}$$

Благодаря оценке (2.3.6) функция $j(.,.,\Omega)$ конечна и

$$j(t,\sigma,\Omega)\geq|\Omega|\phi(t),\tag{3.3}$$

а в силу леммы 1.3

$$j(t,0,\Omega)=i(t,\Omega).\tag{3.4}$$

Из определений (3.1) следует, что

$$\begin{gathered}
j_{\min}(t,\sigma,\Omega)-j(t,\sigma,\Omega)\geq0\quad\text{для всех}\quad t,\sigma\in R^1,\quad\sigma\geq0,\\
\text{а строгое неравенство служит критерием отсутствия однофазовых состояний равновесия.}
\end{gathered}\tag{3.5}$$

Описание множества положительности левой части неравенства (3.5) содержится в доказываемых ниже леммах

**Лемма 3.1.** *Функция $j(.,.,\Omega)$ вогнута и непрерывна при $t, \sigma \in R^1$, $\sigma \geq 0$, и удовлетворяет локальному условию Липшица при $\sigma > 0$. При фиксированном значении $t$ функция $j(t,.,\Omega)$ монотонно возрастает.*

Доказательство. Вогнустость функции $j(.,.,\Omega)$ очевидна, поскольку она является инфимумом по параметрам $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}$ семейства вогнутых функций $I[u,\chi,.,.]$. Благодаря (3.3) вогнутая функция $j(.,.,\Omega)$ удовлетворяет локальному условию Липшица по $t, \sigma \in R^1$, при $\sigma > 0$.

Пусть $t_n \to t$, $\sigma_n \to 0$, $\sigma_n > 0$. Докажем, что $j(t_n, \sigma_n, \Omega) \to i(t,\Omega)$. Для этого заметим, что при произвольных $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}$

$$i(t_n,\Omega) \leq I_0[\hat{u}_{t_n,\sigma_n}, \hat{\chi}_{t_n,\sigma_n}, t_n] \leq I[\hat{u}_{t_n,\sigma_n}, \hat{\chi}_{t_n,\sigma_n}, t_n, \sigma_n] = j(t_n,\sigma_n,\Omega) \leq I[u,\chi,t_n,\sigma_n].$$

В силу непрерывности функции $i(.,\Omega)$ (лемма 2.3.1)

$$i(t,\Omega) \leq \varliminf_{n\to\infty} j(t_n,\sigma_n,\Omega) \leq \varlimsup_{n\to\infty} j(t_n,\sigma_n,\Omega) \leq I_0[u,\chi,t].$$

Минимизируя правую часть последнего неравенства по всем $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}$ и учитывая утверждение леммы 1.3, приходим к требуемому соотношению.

Из цепочки неравенств, справедливой для любых $0 < \sigma_1 < \sigma_2$

$$\begin{gathered} j(t,\sigma_1,\Omega) = \\ = I[\hat{u}_{t,\sigma_1}, \hat{\chi}_{t,\sigma_1}, t, \sigma_1] \leq I[\hat{u}_{t,\sigma_2}, \hat{\chi}_{t,\sigma_2}, t, \sigma_1] \leq I[\hat{u}_{t,\sigma_2}, \hat{\chi}_{t,\sigma_2}, t, \sigma_2] = \\ = j(t,\sigma_2,\Omega) \end{gathered}$$

следует монотонный рост функции $j(t,.,\Omega)$. □

**Лемма 3.2.** *Существует такая неотрицательная ограниченная функция $\sigma(t,\Omega)$, что*

$$\begin{aligned} &j_{\min}(t,\sigma,\Omega) - j(t,\sigma,\Omega) > 0 \quad \textit{при} \quad \sigma \in (0,\sigma(t,\Omega)), \\ &j_{\min}(t,\sigma,\Omega) - j(t,\sigma,\Omega) = 0 \quad \textit{при} \quad \sigma \geq \sigma(t,\Omega). \end{aligned} \tag{3.6}$$

*Кроме того*

$$\sigma(t,\Omega) = 0 \quad \textit{при} \quad t \notin (t_-,t_+), \qquad \sigma(t,\Omega) > 0 \quad \textit{при} \quad t \in (t_-,t_+). \tag{3.7}$$

Доказательство. В силу третьего равенства (3.2) и монотонного роста функции $j(t,.,\Omega)$ при фиксированном $t = t_0$ левая часть (3.5) либо положительна для всех $\sigma \geq 0$, либо начиная с кокого-то $\sigma = \sigma(t_0,\Omega) \geq 0$ обращается в ноль. Поскольку ее положительность в точке $t_0, \sigma$ с $\sigma > 0$ означает существование двухфазового состояния равновесия $\hat{u}_{t_0,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t_0,\sigma}$, утверждение $(a)$ теоремы 2.3 блокирует первую возможность. Из него же вытекает ограниченность функции $\sigma(.,\Omega)$.

Благодаря (3.2), (3.4) и утверждениям §2.3

$$\begin{aligned} &j_{\min}(t,0,\Omega) - j(t,0,\Omega) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin (t_-,t_+), \\ &j_{\min}(t,0,\Omega) - j(t,0,\Omega) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (t_-,t_+). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Поэтому $\sigma(t,\Omega) = 0$ при $t \notin (t_-,t_+)$ и $\sigma(t,\Omega) > 0$ при $t \in (t_-,t_+)$. □

**Лемма 3.3.** *Функция $\sigma(.,\Omega)$ выпукла на каждой из полуосей $(-\infty,t^*]$, $[t^*,\infty)$ и удовлетворяет на них локальному условию Липшица. Эта функция строго монотонно возрастает по $t \in [t_-,t^*]$, строго монотонно убывает по $t \in [t^*,t_+]$ и непрерывна на всей оси.*

Доказательство. В силу лемм 3.1, 3.2 и равенств (3.2) надграфик функции $\sigma(.,\Omega)$ на каждой из полуосей $(-\infty,t^*]$ и $[t^*,\infty)$ совпадает с множеством нулей неотрицательной выпуклой функции $j_{\min}(.,.,\Omega) - j(.,.,\Omega)$, поэтому является выпуклым множеством. Тогда функци $\sigma(.,\Omega)$ выпукла на каждой из указанных полуосей и, следовательно, удовлетворяет на них локальному условию Липшица.

Из (3.7) и доказанной выпуклости вытекает требуемая монотонность, благодаря которой существуют пределы

$$\sigma(t^* - 0, \Omega) \le \sigma(t^*, \Omega), \quad \sigma(t^* + 0, \Omega) \le \sigma(t^*, \Omega).$$

Надграфик функции $\sigma(., \Omega)$ замкнут, поскольку совпадает с множеством нулей непрерывной функции $j_{\min}(., ., \Omega) - j(., ., \Omega)$. Его замкнутость возможна лишь при реализации равенств в последних соотношениях, приводящих к непрерывности функции $\sigma(., \Omega)$ на всей оси. □

График функции $\sigma(., \Omega)$ разбивает полуплоскость параметров $t, \sigma$, $\sigma > 0$ на зоны (1.3.14). Наша следующая задача — описать множества всех состояний равновесия в каждой из этих зон.

Начнем с более простого случая, когда параметры $t, \sigma$ лежат в одной из зон $V_<$, $V_>^-$, $V_>^+$, $V_>^*$.

**Теорема 3.1.** *Справедливы утверждения*

$$\hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma} = \begin{cases} \hat{u}^+, \chi^+ & \text{при} \quad t, \sigma \in V_>^- \\ \hat{u}^-, \chi^- & \text{при} \quad t, \sigma \in V_>^+ \\ \hat{u}^\pm, \chi^\pm & \text{при} \quad t, \sigma \in V_>^* \end{cases}, \tag{3.9}$$

*при $t, \sigma \in V_<$ существуют только двухфазовые состояния равновесия.*

Доказательство. Последнее утверждение (3.9) очевидно, поскольку в зоне $V_<$ выполняется строгое неравенство (3.5).

Обратимся к первым трем утверждениям (3.9). В силу определения зон $V_>^\pm$ и последнего равенства (3.2) в этих зонах реализуются указанные в (3.9) однофазовые состояния равновесия, причем других однофазовых состояний равновесия нет. По тем же причинам в зоне $V_>^*$ реализуются оба однофазовые состояния равновесия. Таким образом, осталось установить, что в исследуемых зонах невозможны двухфазовые состояния равновесия. Их отсутствие следует из приводимых ниже рассуждений.

Пусть при некоторых $t_0, \sigma_0 \in R^1$, $\sigma_0 > 0$ существует однофазовое состояние равновесия

$$\tilde{u}_0, \quad \tilde{\chi}_0 : \qquad \tilde{u}_0 = \hat{u}^\pm, \quad \tilde{\chi}_0 = \chi^\pm$$

для одного из знаков $\pm$. Тогда

$$\begin{gathered} \text{для всех } u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z} \text{ с } S[\chi] > 0 \text{ и } \sigma > \sigma_0 \\ I[\tilde{u}_0, \tilde{\chi}_0, t_0, \sigma] = I[\tilde{u}_0, \tilde{\chi}_0, t_0, \sigma_0] \le I[u, \chi, t_0, \sigma_0] < I[u, \chi, t, \sigma]. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Поэтому для любых состояний равновесия $\hat{u}_{t_0,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t_0,\sigma}$ неравенство $S[\hat{\chi}_{t_0,\sigma}] > 0$ невозможно. □

Для описания множества всех состояний равновесия в оставшихся зонах $V_=^-$, $V_=^+$, $V_=^*$ нам потребуются дополнительные сведения о свойствах решений задачи (1.5). Эти свойства изложены в леммах 3.4 — 3.7 и не только используются для описания состояний равновесия в оставшихся зонах, но и имеют самостоятельный интерес.

Первое из доказываемых утверждений расширяет свойство полунепрерывности снизу (2.7), (2.4) на случай переменных параметров $t$ и $\sigma$.

**Лемма 3.4.** (*a*) *Пусть $t_n, t \in R^1$, $u_n, u \in \mathbb{X}$, $\chi_n, \chi \in \mathbb{Z}'$ и*

$$\begin{gathered} t_n \to t, \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega, R^m), \quad \chi_n(x) \to \chi(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \\ \text{при} \quad n \to \infty. \end{gathered} \tag{3.11}$$

*Тогда*

$$I_0[u, \chi, t] \le \varliminf_{n \to \infty} I_0[u_n, \chi_n, t_n]. \tag{3.12}$$

(*b*) *Пусть* $t_n, t, \sigma_n, \sigma \in R^1$, $\sigma_n, \sigma > 0$, $u_n, u \in \mathbb{X}$, $\chi_n, \chi \in \mathbb{Z}$ *и*

$$t_n \to t, \quad \sigma_n \to \sigma, \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega, R^m), \quad \chi_n(x) \to \chi(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.13}$$

*Тогда при условии* $S[\chi_n] \le R \ne R(n)$

$$I[u, \chi, t, \sigma] \le \varliminf_{n\to\infty} I[u_n, \chi_n, t_n, \sigma_n]. \tag{3.14}$$

Доказательство. Доказательство утверждения (*a*) посуществу содержится в доказательстве леммы 2.2. Для установления справедливости утверждения (*b*) следует лишь заметить, что

$$\sigma S[\chi] \le \varliminf_{n\to\infty} \sigma S[\chi_n] \le \varliminf_{n\to\infty} (\sigma_n S[\chi_n] + |\sigma - \sigma_n| R) = \varliminf_{n\to\infty} \sigma_n S[\chi_n] \tag{3.15}$$

и воспользоваться неравенством (3.12). □

Следующая лемма утверждает, что сходимость функционалов энергий улучшает сходимость их аргументов.

**Лемма 3.5.** (*a*) *Пусть выполняется условие* (3.11) *и*

$$I_0[u_n, \chi_n, t_n] \to I_0[u, \chi, t]. \tag{3.16}$$

*Тогда* $u_n \to u$ *в пространстве* $W_2^1(\Omega, R^m)$.

(*b*) *Пусть выполняется условие* (3.13) *и*

$$I[u_n, \chi_n, t_n, \sigma_n] \to I[u, \chi, t, \sigma], \quad S[\chi_n] \le R \ne R(n). \tag{3.17}$$

*Тогда*

$$u_n \to u \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega, R^m), \qquad S[\chi_n] \to S[\chi]. \tag{3.18}$$

Доказательство. (*a*) Из (3.11) и (3.16) получаем

$$\int_\Omega \{\chi_n F^+(\nabla u_n) + (1-\chi_n) F^-(\nabla u_n)\}\, dx \to \int_\Omega \{\chi F^+(\nabla u) + (1-\chi) F^-(\nabla u)\}\, dx. \tag{3.19}$$

Поскольку

$$F^\pm(\nabla u_n) = F^\pm(\nabla u) + 2 < A^\pm(e(\nabla u) - \zeta^\pm), e(\nabla v) > + < A^\pm e(\nabla v), e(\nabla v) >, \quad v = u_n - u,$$

из (3.19) следует

$$\int_\Omega < (\chi_n A^+ + (1-\chi_n) A^-) e(\nabla v), e(\nabla v) > \, dx \to 0,$$

что в силу положительной определенности (2.1.4) приводит к сильной сходимости последовательности $u_n$ к функции $u$ в пространстве $W_2^1(\Omega, R^m)$.

(*b*) Если первое утверждение (3.18) уже доказано, то справедливо соотношение (3.16). Тогда из (3.17) получаем

$$\sigma_n S[\chi_n] \to \sigma S[\chi]. \tag{3.20}$$

Так как при достаточно больших $n$ числа $\sigma_n$ равномерно отделены от нуля, из (3.20) следует второе утверждение (3.18).

Доказательство первого утверждения (3.18) проведем от противного. Допустим, что последовательность $u_n$ не сходится к функции $u$ в пространстве $W_2^1(\Omega, R^m)$. Тогда для некоторых подпоследовательностей (сохраним за ними прежние обозначения $u_n$, $\chi_n$, $t_n$, $\sigma_n$) и некоторого положительного числа $\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\|u_n - u\|_{W_2^1} \geq \varepsilon. \tag{3.21}$$

В силу леммы 3.4(a), неравенства (3.15) и условия (3.17) получаем

$$I_0[u,\chi,t] + \sigma S[\chi] = I[u,\chi,t,\sigma] = \lim_{n\to\infty} I[u_n,\chi_n,t_n,\sigma_n] \geq$$
$$\geq \varliminf_{n\to\infty} I_0[u_n,\chi_n,t_n] + \varliminf_{n\to\infty} \sigma_n S[\chi_n] \geq I_0[u,\chi,t] + \sigma S[\chi].$$

Поэтому

$$I_0[u,\chi,t] + \sigma S[\chi] = \varliminf_{n\to\infty} I_0[u_n,\chi_n,t_n] + \varliminf_{n\to\infty} \sigma_n S[\chi_n].$$

Пользуясь еще раз утверждением леммы 3.4(a) и неравенством (3.15), приходим к выводу, что

$$I_0[u,\chi,t] = \varliminf_{n\to\infty} I_0[u_n,\chi_n,t_n], \quad \sigma S[\chi] = \varliminf_{n\to\infty} \sigma_n S[\chi_n]. \tag{3.22}$$

Из первого равенства (3.22) следует существование таких $u_{n'}$, $\chi_{n'}$, $t_{n'}$, $\sigma_{n'}$, что для этих подпоследовательностей справедливо соотношение (3.16). Тогда доказанное утверждение ($a$) настоящей леммы вступает в противоречие с неравенством (3.21). □

Сейчас нам предстоит установить непрерывную зависимость состояний равновесия от параметров $t$ и $\sigma$. Поскольку даже в одномерном случае (см.§1.3) при фиксированных $t$ и $\sigma$ состояние равновесия, вообще говоря, не единственно, само понятие непрерывной зависимости нуждается в уточнении.

**Лемма 3.6.** *Для любых последовательностей* $t_n$, $\sigma_n$

$$t_n \to t, \qquad \sigma_n \to \sigma, \quad \sigma, \sigma_n > 0 \tag{3.23}$$

*и любой последовательности состоянй равновесия* $\hat{u}_{t_n,\sigma_n}$, $\hat{\chi}_{t_n,\sigma_n}$ *существует такая подпоследовательность* $t_{n'}$, $\sigma_{n'}$ *и такое состояние равновесия* $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$, *что*

$$\begin{gathered} \hat{u}_{t_{n'},\sigma_{n'}} \to \hat{u}_{t,\sigma} \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega, R^m), \\ \hat{\chi}_{t_{n'},\sigma_{n'}} \to \hat{\chi}_{t,\sigma} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad S[\hat{\chi}_{t_{n'},\sigma_{n'}}] \to S[\hat{\chi}_{t,\sigma}]. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Доказательство. Из (3.23) следует существование такого числа $R > 1$, что

$$|t| + |t_n| \leq R, \quad R^{-1} \leq \sigma_n \leq R. \tag{3.25}$$

Благодаря (3.25) и оценке

$$I[\hat{u}_{t_n,\sigma_n}, \hat{\chi}_{t_n,\sigma_n}, t_n, \sigma_n] \leq i_{\min}(t_n, \Omega)$$

из неравенства (2.2) вытекает существование такой константы $C(R) > 0$, что

$$\|\hat{u}_{t_n,\sigma_n}\|_{W_2^1} + S[\hat{\chi}_{t_n,\sigma_n}] \leq C(R). \tag{3.26}$$

Поэтому, переходя к подпоследовательности, будем считать, что

$$\hat{u}_{t_{n'},\sigma_{n'}} \rightharpoondown \tilde{u} \in \mathbb{X} \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega, R^m), \qquad \hat{\chi}_{t_{n'},\sigma_{n'}} \to \tilde{\chi} \in \mathbb{Z} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{3.27}$$

Для этой подпоследовательности из лемм 3.4(b) и 3.1 следует цепочка соотношений

$$I[\tilde{u}, \tilde{\chi}, t, \sigma] \leq \varliminf_{n'\to\infty} I[\hat{u}_{t_{n'},\sigma_{n'}}, \hat{\chi}_{t_{n'},\sigma_{n'}}, t_{n'}, \sigma_{n'}] = \lim_{n'\to\infty} j(t_{n'}, \sigma_{n'}, \Omega) = j(t, \sigma, \Omega). \tag{3.28}$$

Поэтому пара функций $\hat{u}_{t,\sigma} = \tilde{u}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma} = \tilde{\chi}$ является состоянием равновесия функционала $I[u,\chi,t,\sigma]$. В этом случае в (3.28) реализуется равенство и соотношения (3.24) вытекают из утверждения леммы 3.5. □

Обозначим через $\mathfrak{B}_{t,\sigma}$, $t,\sigma \in R^1$, $\sigma > 0$ множество всех состояний равновесия функционала $I[u,\chi,t,\sigma]$. В силу теоремы 2.1 множество $\mathfrak{B}_{t,\sigma} \neq \emptyset$ для любых указанных $t$ и $\sigma$.

**Лемма 3.7.** *Из любой последовательности $\hat{u}_n, \hat{\chi}_n \in \mathfrak{B}_{t,\sigma}$ можно выделить такую подпоследовательность $\hat{u}_{n'}$, $\hat{\chi}_{n'}$, что*

$$\begin{gathered} \hat{u}_{n'} \to \hat{u} \in \mathbb{X} \quad \textit{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega, R^m), \\ \hat{\chi}_{n'} \to \hat{\chi} \in \mathbb{Z} \quad \textit{почти всюду в} \quad \Omega, \quad S[\hat{\chi}_{n'}] \to S[\hat{\chi}] \end{gathered} \tag{3.29}$$

*и пара $\hat{u}, \hat{\chi} \in \mathfrak{B}_{t,\sigma}$.*

Доказательство. Утверждение данной леммы вытекает из леммы 3.6, если положить в ней $t_n = t$, $\sigma_n = \sigma$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. □

Леммы 3.4—3.7 частично используются при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 3.2.** *Справедливы утверждения*

$$\mathfrak{B}_{t,\sigma} = \begin{cases} \hat{u}^+, \chi^+ & \textit{и хотя бы одно двухфазовое состояние равновесия при} \quad t,\sigma \in V_=^- \\ \hat{u}^-, \chi^- & \textit{и хотя бы одно двухфазовое состояние равновесия при} \quad t,\sigma \in V_=^+ \\ \hat{u}^\pm, \chi^\pm & \textit{и хотя бы одно двухфазовое состояние равновесия при} \quad t,\sigma \in V_=^* \end{cases}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Справедливость информации (3.30) об однофазовых состояниях равновесия устанавливается так же, как в теореме 3.1.

Для доказательства существования в исследуемых зонах двухфазового состояния равновесия к фиксированной точке $t,\sigma \in V_=^- \cup V_=^+ \cup V_=^*$ приблизимся последовательностью точек $t_n, \sigma_n \in V_<$. В силу теоремы 3.1 любые состояния равновесия $\hat{u}_{t_n,\sigma_n}$, $\hat{\chi}_{t_n,\sigma_n}$ будут двухфазовыми. Пользуясь леммой 3.6 и теоремой 2.3(b), придем к существованию двухфазового состояния равновесия $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$. □

В силу леммы 3.3 функция $\sigma(.,\Omega)$ при $t_- < t_+$ достигает наибольшего значения $\sigma^*$ в единственной точке $t = t^*$. Как и в одномерном случае определим температуры фазовых переходов $t_\pm(\sigma,\Omega)$ равенствами, аналогичными (1.3.27), (1.3.28), (1.3.32). Из леммы 3.3 вытекает непрерывность функций $t_\pm(.,\Omega)$. В случае $t_- < t_+$ функция $t_-(.,\Omega)$ строго монотонно возрастает на интервале $[0,\sigma^*]$, функция $t_+(.,\Omega)$ строго монотонно убывает на том же интервале, причем

$$t_\pm(0,\Omega) = t_\pm, \quad t_\pm(\sigma^*,\Omega) = t^*.$$

Так как функции $t_\pm(.,\Omega)$ являются обратными к функции $\sigma(.,\Omega)$ на интервалах $(-\infty, t^*]$ и $[t^*, \infty)$, соответственно, то функция $t_+(.,\Omega)$ выпукла, а функция $t_-(.,\Omega)$ вогнута. Поэтому функции $t_\pm(.,\Omega)$ удовлетворяют условию Липшица на полуоси $(0,\infty)$. Как показывает одномерный случай (формула (1.3.29)), константа Липшица может неограниченно возрастать при $\sigma \to 0$.

Из результатов теорем 3.1 и 3.2 следует частичная справедливость описания 1-13 из §1.3 процесса фазовых переходов при изменении температуры $t$ от $-\infty$ до $+\infty$. Выполняются утверждения 1-5, 11-13, в которых информацию о двухфазовых состояниях равновесия следует заменить словами "и, по крайней мере, одно двухфазовое состояние равновесия".

Для переформулировки утверждений 6 и 10 описания 1-13 на многомерный случай нам потребуется дополнительное исследование многозначной функции

$$\hat{Q}[t,\sigma] = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \hat{\chi}_{t,\sigma}(x)\, dx, \qquad \hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma} \in \mathfrak{B}_{t,\sigma}, \tag{3.31}$$

значение которой при каждых $t$ и $\sigma$ является подмножеством интервала $[0,1]$, состоящим, возможно, из одной точки.

**Лемма 3.8.** (*a*) *Множество $\hat{Q}[t,\sigma]$ замкнуто. Существуют такие состояния равновесия*

$$\hat{u}_{t,\sigma,\min}, \quad \hat{\chi}_{t,\sigma,\min}, \quad \hat{u}_{t,\sigma,\max}, \quad \hat{\chi}_{t,\sigma,\max}, \tag{3.32}$$

*для которых числа*

$$\hat{Q}_{\min}(t,\sigma) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_{t,\sigma,\min}(x)\,dx, \quad \hat{Q}_{\max}(t,\sigma) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_{t,\sigma,\max}(x)\,dx \tag{3.33}$$

*являются минимальными и максимальными элементами множества $\hat{Q}[t,\sigma]$.*

(*b*) *Функции $\hat{Q}_{\min}(.,\sigma)$, $\hat{Q}_{\max}(.,\sigma)$ монотонно убывают. Для них при $t_2 > t_1$ справедливо неравенство*

$$\hat{Q}_{\min}(t_1,\sigma) \geq \hat{Q}_{\max}(t_2,\sigma). \tag{3.34}$$

(*c*) *Существуют пределы*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\uparrow t_0}\hat{Q}_{\min}(t,\sigma) \equiv \hat{Q}_{\min}(t_0-0,\sigma), \quad \lim_{t\downarrow t_0}\hat{Q}_{\min}(t,\sigma) \equiv \hat{Q}_{\min}(t_0+0,\sigma),\\ &\lim_{t\uparrow t_0}\hat{Q}_{\max}(t,\sigma) \equiv \hat{Q}_{\max}(t_0-0,\sigma), \quad \lim_{t\downarrow t_0}\hat{Q}_{\max}(t,\sigma) \equiv \hat{Q}_{\max}(t_0+0,\sigma), \end{aligned} \tag{3.35}$$

*удовлетворяющие соотношениям*

$$\begin{aligned} &\hat{Q}_{\min}(t_0-0,\sigma) = \hat{Q}_{\max}(t_0,\sigma), \quad \hat{Q}_{\min}(t_0+0,\sigma) = \hat{Q}_{\min}(t_0,\sigma),\\ &\hat{Q}_{\max}(t_0-0,\sigma) = \hat{Q}_{\max}(t_0,\sigma), \quad \hat{Q}_{\max}(t_0+0,\sigma) = \hat{Q}_{\min}(t_0,\sigma), \end{aligned} \tag{3.36}$$

*из которых вытекает непрерывность функции $\hat{Q}_{\min}(.,\sigma)$ справа, а функции $\hat{Q}_{\max}(.,\sigma)$ слева.*

Доказательство. (*a*) Функционал

$$Q[\chi] = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi(x)\,dx, \quad \chi \in \mathbb{Z}$$

непрерывен относительно сходимости почти вюду последовательности функций $\chi_n \in \mathbb{Z}$ к функции $\chi \in \mathbb{Z}$. Поэтому справедливость утверждения (*a*) вытекает из компактности множества $\mathfrak{B}_{t,\sigma}$ относительно сходимости (3.29), доказанной в лемме 3.7.

(*b*) Пусть $\hat{u}_{t_i,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t_i,\sigma}$, $i = 1,2$ — какие-либо состояния равновесия. Складывая два очевидных неравенства

$$I[\hat{u}_{t_1,\sigma},\hat{\chi}_{t_1,\sigma},t_1,\sigma] \leq I[\hat{u}_{t_2,\sigma},\hat{\chi}_{t_2,\sigma},t_1,\sigma], \quad I[\hat{u}_{t_2,\sigma},\hat{\chi}_{t_2,\sigma},t_2,\sigma] \leq I[\hat{u}_{t_1,\sigma},\hat{\chi}_{t_1,\sigma},t_2,\sigma]$$

и сокращая подобные члены, получаем

$$(t_2-t_1)\int_\Omega (\hat{\chi}_{t_2,\sigma} - \hat{\chi}_{t_1,\sigma})\,dx \leq 0.$$

Пусть $t_2 > t_1$. Тогда

$$\int_\Omega \hat{\chi}_{t_1,\sigma}\,dx \geq \int_\Omega \hat{\chi}_{t_2,\sigma}\,dx.$$

Положив $\hat{\chi}_{t_1,\sigma} = \hat{\chi}_{t_1,\sigma,\min}$, $\hat{\chi}_{t_2,\sigma} = \hat{\chi}_{t_2,\sigma,\max}$, придем к неравенству(3.34), из которого следует монотонность каждой из функций $\hat{Q}_{\min}(.,\sigma)$ и $\hat{Q}_{\max}(.,\sigma)$.

(c) Существование пределов (3.35) является следствием установленной монотонности каждой из функций $\hat{Q}_{\min}(.,\sigma)$ и $\hat{Q}_{\max}(.,\sigma)$. Докажем первую пару равенств из (3.36). Вторая доказывается аналогично.

Начнем с первого равенства (3.36). Пусть $t_n \uparrow t_0$, $\hat{u}_{t_n,\sigma,\min}, \hat{\chi}_{t_n,\sigma,\min} \in \mathfrak{B}_{t_n,\sigma}$, $n = 1,2,\ldots$. Согласно лемме 3.6 существует такая подпоследовательность $\hat{u}_{t_{n'},\sigma,\min}$, $\hat{\chi}_{t_{n'},\sigma,\min}$, что

$$\hat{u}_{t_{n'},\sigma,\min} \to \hat{u}_0 \quad \text{в} \quad W_2^1(\Omega,R^m), \qquad \hat{\chi}_{t_{n'},\sigma,\min} \to \hat{\chi}_0 \quad \text{при почти всех} \quad x\in\Omega, \qquad \hat{u}_0,\hat{\chi}_0 \in \mathfrak{B}_{t_0,\sigma}. \tag{3.37}$$

Тогда

$$\hat{Q}_{\min}(t_0-0,\sigma)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_0\,dx.$$

Так как правая часть этого равенства не превосходит величины $\hat{Q}_{\max}(t_0,\sigma)$, из (3.34) получаем

$$\hat{Q}_{\max}(t_0,\sigma)\le \hat{Q}_{\min}(t_0-0,\sigma)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_0\,dx\le \hat{Q}_{\max}(t_0,\sigma),$$

что доказывает первое соотношение из (3.36).

Перейдем ко второму равенству (3.36). Пусть $t_n\downarrow t_0$, $\hat{u}_{t_n,\sigma,\min},\hat{\chi}_{t_n,\sigma,\min}\in\mathfrak{B}_{t_n,\sigma}$, $n=1,2,\ldots$. Согласно лемме 3.6 существует такая подпоследовательность, для которой выполняются соотношения (3.37). Тогда

$$\hat{Q}_{\min}(t_0+0,\sigma)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_0\,dx.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \hat{\chi}_0\,dx\ge \hat{Q}_{\min}(t_0,\sigma).$$

Если в последнем соотношении выполняется строгое неравенство, то для достаточно больших $n'$

$$\hat{Q}_{\min}(t_{n'},\sigma)>\hat{Q}_{\min}(t_0,\sigma),$$

что противоречит монотонному убыванию функции $\hat{Q}_{\min}(.,\sigma)$. □

Доказанные теоремы 3.1, 3.2 и лемма 3.8 позволяют сформулировать аналог утверждений 6 и 10 описания 1-13 фазовых переходов в одномерном случае из §1.3 для многомерной задачи.

6' . Пусть $t_-<t_+$, $\sigma\in(0,\sigma^*)$. Тогда

$$\hat{Q}_{\min}(t,\sigma)=\hat{Q}_{\max}(t,\sigma)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad t<t_-(\sigma,\Omega)\\ 0 & \text{при}\quad t>t_+(\sigma,\Omega)\end{cases},$$

$$0<\hat{Q}_{\min}(t,\sigma)\le\hat{Q}_{\max}(t,\sigma)<1\quad\text{при}\quad t\in(t_-(\sigma,\Omega),t_+(\sigma,\Omega)),$$

$$\hat{Q}_{\max}(t_-(\sigma,\Omega),\sigma)=1,\quad \hat{Q}_{\min}(t_-(\sigma,\Omega),\sigma)\in(0,1),$$
$$\hat{Q}_{\max}(t_+(\sigma,\Omega),\sigma)\in(0,1),\quad \hat{Q}_{\min}(t_+(\sigma,\Omega),\sigma)=0.$$

10'. Пусть $t_-<t_+$, $\sigma=\sigma^*$. Тогда

$$\hat{Q}_{\min}(t,\sigma^*)=\hat{Q}_{\max}(t,\sigma^*)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad t<t^*\\ 0 & \text{при}\quad t>t^*\end{cases},$$

$$\hat{Q}_{\max}(t^*,\sigma^*)=1,\quad \hat{Q}_{\min}(t^*,\sigma^*)=0,$$
$$\hat{Q}[t^*,\sigma^*]\quad\text{содержит непустое подмножество интервала}\quad(0,1).$$

На втором этапе обратимся к исследованию зависимости температур фазовых переходов $t_\pm(\sigma,\Omega)$ от второго аргумента. Исчерпывающий результат получается лишь для семейств областей $\Omega_e$ и $\Omega^\lambda$, определенных в (2.3.35).

Введем временно в обозначение (1.1) площади границы раздела фаз аргумент $\Omega$, указывающий на ее зависимость от области интегрирования. Очевидно, что при $\tilde{\chi}\in\mathbb{Z}\equiv\mathbb{Z}(\Omega)$

$$\begin{gathered}S[\chi,\Omega_e]=S[\tilde{\chi},\Omega],\\ x\in\Omega_e,\quad \tilde{x}\in\Omega,\quad x=\tilde{x}+e,\quad \chi(x)=\tilde{\chi}(\tilde{x}),\quad \chi\in\mathbb{Z}(\Omega_e),\\ \\ S[\chi,\Omega^\lambda]=\lambda^{m-1}S[\tilde{\chi},\Omega],\\ x\in\Omega^\lambda,\quad \tilde{x}\in\Omega,\quad x=\lambda\tilde{x},\quad \chi(x)=\tilde{\chi}(\tilde{x}),\quad \chi\in\mathbb{Z}(\Omega^\lambda).\end{gathered}\tag{3.38}$$

Введем временно в обозначение (1.4) функционала энергии двухфазовой среды аргумент $\Omega$, указывающий на его зависимость от области интегрирования. Пользуясь равенствами (3.38) и формулами (2.3.36) и (2.3.38), получаем

$$I[u,\chi,t,\sigma,\Omega_e] = I[\tilde{u},\tilde{\chi},t,\sigma,\Omega], \quad I[u,\chi,t,\sigma,\Omega^\lambda] = \lambda^m I[\tilde{u},\tilde{\chi},t,\frac{\sigma}{\lambda},\Omega]. \tag{3.39}$$

Тогда для равновесных энергий (3.1)

$$j(t,\sigma,\Omega_e) = j(t,\sigma,\Omega), \quad j(t,\sigma,\Omega^\lambda) = \lambda^m j(t,\frac{\sigma}{\lambda},\Omega). \tag{3.40}$$

Кроме того,

$$j_{\min}(t,\sigma,\Omega_e) = j_{\min}(t,\sigma,\Omega) = i_{\min}(t,\Omega), \quad j_{\min}(t,\sigma,\Omega^\lambda) = \lambda^m j_{\min}(t,\frac{\sigma}{\lambda},\Omega) = \lambda^m i_{\min}(t,\Omega). \tag{3.41}$$

Формулы (3.40), (3.41) приводят к физически очевидному выводу, что и при положительном коэффициенте поверхностного натяжения процесс фазовых переходов не зависит от сдвига области $\Omega$ на фиксированный вектор $e$. Эти же формулы доказывают, что процесс фазовых переходов в области $\Omega^\lambda$ для среды с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma > 0$ происходит так же, как в области $\Omega$ для среды с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma/\lambda$. Последний результат является прямым аналогом одномерного случая (§1.3) и обусловлен разномасштабностью объемной и поверхностной компонент функционала энергии при растяжении области интегрирования.

Как и в одномерном случае при $t_- < t_+$ для среды с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma > 0$ введем критическое значение параметра растяжения $\lambda$

$$\lambda^* = \frac{\sigma}{\sigma^*}, \tag{3.42}$$

характеризующееся тем, что

$$\begin{aligned} t_-(\sigma,\Omega^\lambda) &< t_+(\sigma,\Omega^\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda > \lambda^*, \\ t_-(\sigma,\Omega^\lambda) &= t_+(\sigma,\Omega^\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \le \lambda^*. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Определяя экспериментально значение парамтра $\lambda^*$ вычислим с помощью формулы (3.42) величину коэффициента поверхностного натяжения $\sigma$, характеризующего данною двухфазовую среду.

К сожалению, в многомерном случае мы не располагаем явной формулой для величины $\sigma^*$, аналогичной равенству (1.3.26) в одномерном случае. Этот дефект не позволяет заменить равенство (3.42) многомерным аналогом формулы (1.3.51). Нам предется довольствоваться лишь двусторонней оценкой величины $\sigma^*$ в единичном шаре.

**Лемма 3.9.** *Пусть $\Omega = B$ — единичный шар пространства $R^3$ с ценктром в нуле. Тогда*

$$\begin{gathered} \sigma^*_{\min} \le \sigma^* \le \sigma^*_{\max}, \\ \sigma^*_{\min} = \frac{1}{54\sqrt[3]{2}} \nu \operatorname{tr}^2[A\zeta], \quad \sigma^*_{\max} = \frac{2}{\nu}|[A\zeta]|^2 \end{gathered} \tag{3.44}$$

*с фиксированной оценками* (2.3.9) *константой $\nu$.*

Доказательство. Поскольку в шаре трехмерного пространства

$$\kappa_{1/2}(B) = \sqrt[3]{\frac{4}{9\pi}}, \tag{3.45}$$

оценка сверху из неравенства (3.44) вытекает из (2.35).

Прибавим к обеим частям неравенства (2.3.18) с $\chi \in \mathbb{Z}$ слагаемое $\sigma S[\chi]$. Минимизируем левую часть получившегося соотношения по всем $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}$, а в его правой части возьмем в качестве пары $u$, $\chi$ сферически симметричное решение системы (2.2.12) с $\alpha = [c]$, $\Omega = B$ и некоторым

$Q \in [0,1]$. Будем считать, что носитель функции $\chi$ сосредоточен в шаре $B_r(0) \subset B$. Так как в этом случае

$$S[\chi] = |S_r| = |S_1| r^{m-1} = m|B|(|B|r^m)^{\frac{m-1}{m}}|B|^{\frac{1-m}{m}} = m|B|Q^{\frac{m-1}{m}},$$

описанная процедура приводит к оценке, аналогичной (2.3.24)

$$j(t,\sigma,B) \le |B|\{Qt + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > Q + < A^-\zeta^-, \zeta^- > (1-Q) - \frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A\zeta]}{m^2} Q(1-Q) + \sigma m Q^{\frac{m-1}{m}}\}$$
$$\text{для всех } Q \in [0,1].$$

Положив в нем $Q = 1/2$, $t = t^*$, $\sigma = \sigma^*$, получаем

$$j(t^*, \sigma^*, B) \le \frac{|B|}{2}\{t^* + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > + < A^-\zeta^-, \zeta^- > - \frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A\zeta]}{2m^2} + \sigma^* m \sqrt[m]{2}\}.$$

Поскольку у функционала $I[u,\chi,t^*,\sigma^*]$ существуют оба однофазовые состояния равновесия $\hat{u}^\pm$, $\chi^\pm$, имеем

$$j(t^*,\sigma^*,B) = I[\hat{u}^\pm, \chi^\pm, t^*, \sigma^*] =$$
$$= |B|\left\{ \begin{array}{ll} t^* + & < A^+\zeta^+, \zeta^+ > \\ & < A^-\zeta^-, \zeta^- > \end{array} \right. =$$
$$= \frac{|B|}{2}(t^* + < A^+\zeta^+, \zeta^+ > + < A^-\zeta^-, \zeta^- >).$$

Следовательно,

$$\sigma^* m \sqrt[m]{2} \ge \frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A\zeta]}{2m^2}. \tag{3.46}$$

При $m = 3$ неравенство (3.46) переходит в оценку снизу в (3.44). □

Учитывая оценки (3.44) и формулу (3.42), получим интервал для коэффициента поверхностного натяжения $\sigma$, как функцию параметра $\lambda^*$, найденного экспериментально для единичного шара

$$\sigma \in [\lambda^*\sigma^*_{\min}, \lambda^*\sigma^*_{\max}]. \tag{3.47}$$

В заключение параграфа вернемся к функции $\sigma(.,\Omega)$. Наша цель — усилить утверждение леммы 3.3 о гладкости этой функции, доказав отсутствие заострения ее графика в точке $t^*$.

**Лемма 3.10.** *Функция $\sigma(.,\Omega)$ удовлетворяет условию Липшица на всей оси.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь липшицевость функции $\sigma(.,\Omega)$ в некоторой окрестности точки $t^*$ при условии $t_- < t_+$.

Начнем с предварительных построений. Фиксируем число $\sigma_0 \in (0,\sigma^*)$ и определим температуры фазовых переходов $t_\pm(\sigma_0,\Omega)$. Для данного $\sigma_0$ рассмотрим прямоугольник

$$U_{\sigma_0} = \{t,\sigma \in R^1 : t \in [t_-(\sigma_0,\Omega), t_+(\sigma_0,\Omega)], \sigma \in [\sigma_0,\sigma^*]\}. \tag{3.48}$$

В силу установленной монотонности функции $\sigma(t,\Omega)$, ее график при $t \in [t_-(\sigma_0,\Omega), t_+(\sigma_0,\Omega)]$ лежит в прямоугольнике $U_{\sigma_0}$.

Для каждого $t_0 \in [t_-(\sigma_0,\Omega), t_+(\sigma_0,\Omega)]$ и положительного числа $a$ зададим множество

$$K_{t_0,a} = \{t,\sigma \in R^1 : |t_0 - t| < a(\sigma(t_0,\Omega) - \sigma), 0 < \sigma < \sigma(t_0,\Omega)\}. \tag{3.49}$$

Нами будет установлена справедливость следующего утверждения

$$\begin{array}{c} \text{существует такое число } a > 0, \text{ что для всех } t_0 \in [t_-(\sigma_0,\Omega), t_+(\sigma_0,\Omega)] \\ K_{t_0,a} \subset V_<. \end{array} \tag{3.50}$$

Замыкание множества (3.50) является равнобедренным треугольником с основанием, лежащим на оси $t$. Утверждение (3.50) означает, что каждой точки $t_0, \sigma(t_0, \Omega)$ графика функции $\sigma(t, \Omega)$, попавшей в прямоугольник (3.48), можно коснуться со стороны множества $V_<$ вершиной треугольника $\bar{K}_{t_0,a}$. Боковые стороны этого треугольника задаются графиками функций $\tilde{\sigma}_\pm(t)$ (знак $+$ для правой стороны, знак $-$ — для левой):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_+(t) &= -\frac{t-t_0}{a} + \sigma(t_0, \Omega), \quad 0 \le t - t_0 \le a\sigma(t_0, \Omega), \\ \tilde{\sigma}_-(t) &= +\frac{t-t_0}{a} + \sigma(t_0, \Omega), \quad 0 \le t_0 - t \le a\sigma(t_0, \Omega). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Очевидно, что неравенства в (3.51) заведомо справедливы при $|t - t_0| \le a\sigma_0$ в случае $t - t_0 \ge 0$ и $t - t_0 \le 0$, соответственно.

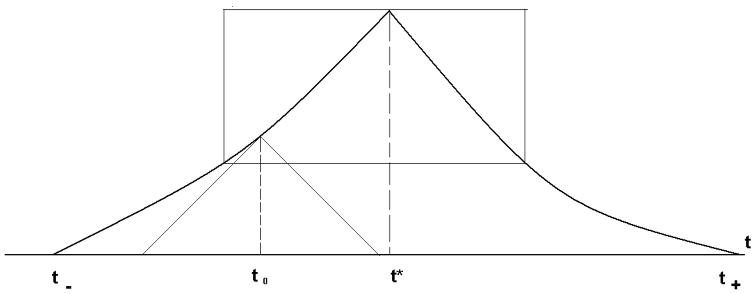


Рис.3.1

Иллюстрация к утверждению (3.50).

Предположим, что утверждение (3.50) справедливо. Поясним, как с его помощью доказать утверждение леммы.

Пусть

$$t_-(\sigma_0, \Omega) \le t_1 \le t_0 \le t^*, \quad |t_1 - t_0| \le a\sigma_0.$$

Тогда в силу (3.50), монотонности функции $\sigma(t, \Omega)$ и (3.51) имеем

$$\sigma(t_0, \Omega) = \tilde{\sigma}_-(t_0), \quad \sigma(t_1, \Omega) \ge \tilde{\sigma}_-(t_1), \quad \sigma(t_0, \Omega) \ge \sigma(t_1, \Omega).$$

Поэтому

$$0 \le \sigma(t_0, \Omega) - \sigma(t_1, \Omega) \le \tilde{\sigma}_-(t_0) - \tilde{\sigma}_-(t_1) = \frac{t_0 - t_1}{a}.$$

Следовательно,

$$|\sigma(t_1, \Omega) - \sigma(t_0, \Omega)| \le \frac{|t_1 - t_0|}{a} \quad \text{для любых} \quad t_0, t_1 \in [t_-(\sigma_0, \Omega), t^*], \quad |t_1 - t_0| \le a\sigma_0.$$

Пусть

$$t^* \le t_0 \le t_1 \le t_+(\sigma_0, \Omega), \quad |t_1 - t_0| \le a\sigma_0.$$

Тогда в силу (3.50), монотонности функции $\sigma(t, \Omega)$ и (3.51) имеем

$$\sigma(t_0, \Omega) = \tilde{\sigma}_+(t_0), \quad \sigma(t_1, \Omega) \ge \tilde{\sigma}_+(t_1), \quad \sigma(t_0, \Omega) \ge \sigma(t_1, \Omega).$$

Поэтому

$$0 \le \sigma(t_0, \Omega) - \sigma(t_1, \Omega) \le \tilde{\sigma}_+(t_0) - \tilde{\sigma}_+(t_1) = \frac{t_1 - t_0}{a}.$$

Следовательно,

$$|\sigma(t_1,\Omega)-\sigma(t_0,\Omega)|\le\frac{|t_1-t_0|}{a}\quad\text{для любых}\quad t_0,t_1\in[t^*,t_+(\sigma_0,\Omega)],\quad |t_1-t_0|\le a\sigma_0.$$

Пусть

$$t_1\in[t_-(\sigma_0,\Omega),t^*],\quad t_2\in[t^*,t_+(\sigma_0,\Omega)],\quad |t_2-t_1|\le a\sigma_0.$$

Тогда в силу доказанного

$$|\sigma(t_1,\Omega)-\sigma(t_2,\Omega)|\le|\sigma(t_1,\Omega)-\sigma(t^*,\Omega)|+|\sigma(t_2,\Omega)-\sigma(t^*,\Omega)|\le\frac{|t_1-t^*|+|t_2-t^*|}{a}=\frac{|t_1-t_2|}{a}.$$

Завершим доказательство леммы, установив справедливость утверждения (3.50).

Поскольку у функционала $I[u,\chi,t_0,\sigma(t_0,\Omega)]$ существует хотя бы одно духфазовое состояние равновесия $\hat u_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}$, $\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}$, имеем

$$I[\hat u_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)},\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)},t_0,\sigma(t_0,\Omega)]\le I[\hat u^{\pm},\chi^{\pm},t_0,\sigma(t_0,\Omega)]. \tag{3.52}$$

В (3.52) знаки распределяются следующим образом: при $t_0<t^*$ строгое неравенство для знака $-$ в правой части и равенство для знака $+$, при $t_0>t^*$ строгое неравенство для знака $+$ в правой части и равенство для знака $-$, при $t_0=t^*$ — равенство для обоих знаков.

Для любых $t,\sigma\in R^1$, $\sigma>0$ справедливы равенства

$$I[\hat u_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)},\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)},t_0,\sigma(t_0,\Omega)]=I[\hat u_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)},\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)},t,\sigma]+$$
$$+(t_0-t)\int_\Omega\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}\,dx+(\sigma(t_0,\Omega)-\sigma)S[\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}],$$

$$I[\hat u^{\pm},\chi^{\pm},t_0,\sigma(t_0,\Omega)]=I[\hat u^{\pm},\chi^{\pm},t,\sigma]+(t_0-t)\int_\Omega\chi^{\pm}\,dx.$$

Тогда из (3.52) получаем

$$\begin{gathered}I[\hat u_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)},\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)},t,\sigma]\\ \le\\ \le I[\hat u^{\pm},\chi^{\pm},t,\sigma]+(t_0-t)\int_\Omega(\chi^{\pm}-\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)})\,dx+(\sigma-\sigma(t_0,\Omega))S[\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}].\end{gathered} \tag{3.53}$$

Из (3.53) вытекает, что при условии

$$(t_0-t)\int_\Omega(\chi^{\pm}-\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)})\,dx+(\sigma-\sigma(t_0,\Omega))S[\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}]<0 \tag{3.54}$$

у функционала $I[u,\chi,t,\sigma]$ нет однофазовых состояний равновесия. Поскольку

$$(t_0-t)\int_\Omega(\chi^{\pm}-\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)})\,dx\le|t_0-t||\Omega|,$$

неравенство (3.54) заведомо справедливо, если

$$|\Omega||t_0-t|<(\sigma(t_0,\Omega)-\sigma)S[\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}]. \tag{3.55}$$

Положим

$$\tilde\chi=\begin{cases}\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}, & \text{если}\quad \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0)}\,dx\le\frac12\\ \chi^{+}-\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}, & \text{если}\quad \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\hat\chi_{t_0,\sigma(t_0)}\,dx>\frac12\end{cases}.$$

Тогда

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{\chi}\,dx \le \frac{1}{2}, \quad S[\hat{\chi}_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}] = S[\chi^+ - \hat{\chi}_{t_0,\sigma(t_0,\Omega)}] = S[\tilde{\chi}].$$

В силу изопериметрического неравенства имеем

$$\left(\int_\Omega \tilde{\chi}\,dx\right)^{\frac{m-1}{m}} \le \kappa_{1/2} S[\tilde{\chi}].$$

Следовательно, неравенство (3.55) заведомо справедливо, если

$$0 < \sigma < \sigma(t_0,\Omega), \qquad \kappa_{1/2}|\Omega||t_0 - t| < (\sigma(t_0,\Omega) - \sigma)\left(\int_\Omega \tilde{\chi}\,dx\right)^{\frac{m-1}{m}}. \tag{3.56}$$

В силу теоремы 2.3(b) для всех точек $\{t_0, \sigma(t_0,\Omega)\} \in U_{\sigma_0}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \tilde{\chi}\,dx \ge \gamma(\sigma_0).$$

Таким образом, неравенство (3.56) заведомо справедливо при

$$\begin{gathered} 0 < \sigma < \sigma(t_0,\Omega), \quad |t_0 - t| < a(\sigma(t_0,\Omega) - \sigma), \\ a = \frac{(|\Omega|\gamma(\sigma_0))^{\frac{m-1}{m}}}{\kappa_{1/2}|\Omega|}. \end{gathered} \tag{3.57}$$

Итак, для точек $t, \sigma$, удовлетворяющих неравенствам (3.57), у функционала $I[u,\chi,t,\sigma]$ нет однофазовых состояний равновесия, что приводит к справедливости утверждения (3.50). □

## §4. Критические точки функционала энергии.

Для определения критической точки функционала энергии при положительном коэффициенте поверхностного натяжения нам потребуется аналог семейства диффеоморфизмов (2.4.1) области $\Omega$ на себя. В отличие от (2.4.1) построенные в этом параграфе диффеоморфизмы не обязаны оставлять точки множества $\partial\Omega$ неподвижными. Для реализации этой цели сделаем дополнительное предположение о гладкости границы ограниченной области $\Omega \subset R^m$

$$\partial\Omega \in C^{2,\varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{4.1}$$

Рассмотрим отображения $x = x(y)$, $y \in \bar{\Omega}$ вида

$$x(y) = y + h(y), \quad h \in C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m), \quad ||h||_{C^{1,\varepsilon}} < \delta \tag{4.2}$$

с достаточно малым положительным числом $\delta$. Гладкости (4.1) заведомо достаточно для существования линейного ограниченного оператора продолжения

$$\begin{gathered} \Pi: C^1(\bar{\Omega}, R^m) \to C^1(R^m, R^m): \\ \operatorname{supp}\Pi h \subset B_R(0), \quad \Pi h|_{\bar{\Omega}} = h \end{gathered} \tag{4.3}$$

в предположении, что $\bar{\Omega} \subset B_R(0)$. В этом случае функция $\hat{h} = \Pi h$ удовлетворяет оценке

$$||\hat{h}||_{C^1(R^m)} \le C||h||_{C^1(\bar{\Omega})}. \tag{4.4}$$

Поэтому для каждой функции $h$ из (4.2) при достаточно малом $\delta$ отображение

$$\hat{x}(y) = y + \hat{h}(y)$$

будет диффеоморфизмом пространства $R^m$ на себя, совпадающим с отображением (4.2) при $y \in \bar{\Omega}$.

Следовательно, при достаточно малом $\delta$ отображение (4.2) будет диффеоморфизмом области $\Omega$ на область $x(\Omega)$. Очевидно, что $x(\bar{\Omega}) = \overline{x(\Omega)}$ и $x(\partial\Omega) = \partial x(\Omega)$. Это отображение будет диффеоморфизмом области $\Omega$ на себя в том и только том случае, если

$$x(\Omega) = \Omega. \tag{4.5}$$

Покажем, что условие (4.5) эквивалентно равенству

$$x(\partial\Omega) = \partial\Omega. \tag{4.6}$$

Достаточно установить, что из (4.6) следует соотношение (4.5). Для этого заметим, что в силу (4.6) множество $\partial\Omega$ является границей для области $\Omega$ и открытого множества $\hat{x}(R^m \setminus \bar{\Omega})$. Поэтому $x(\Omega)$ может совпадать лишь с одним из множеств $\Omega$ или $R^m \setminus \bar{\Omega}$. Вторая возможность исключается, например, условием малости числа $\delta$.

Покажем , что при достаточно малом числе $\delta$ условие (4.6) эквивалентно включению

$$x(\partial\Omega) \subset \partial\Omega. \tag{4.7}$$

Для этого заметим, что при предположении (4.1) граница области $\Omega$ состоит из конечного числа компонент связности $\partial\Omega_j$, $j = 1, \ldots, N$, $N \geq 1$, отделенных друг от друга расстояниями, подпертыми снизу некоторым положительным числом. Гомеоморфное $\partial\Omega$ множество $x(\partial\Omega)$ также состоит из $N$ компонент связности и при достаточно малом $\delta$ для каждого $j$ справедливо включение $x(\partial\Omega_j) \subset \partial\Omega_j$. Поскольку $\partial\Omega_j$ и $x(\partial\Omega_j)$ — $m-1$-мерные многообразия без края, строгое включение реализоваться не может ни при каком $j$.

Из приведенных рассуждений вытекает существование такого положительного числа $\delta$, что любое отображение (4.2) будет осуществлять диффеоморфизм области $\Omega$ с границей (4.1) на себя в том и только том случае, если оно удовлетворяет условию (4.7).

Чтобы придать геометрическому условию (4.7) аналитический характер, введем функцию

$$d(x) = \begin{cases} +\rho(x) & \text{при} \quad x \in U \setminus \bar{\Omega} \\ -\rho(x) & \text{при} \quad x \in U \cap \Omega \end{cases}, \tag{4.8}$$

где $U \subset R^m$ — достаточно узкая окрестность границы области $\Omega$, а

$$\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega). \tag{4.9}$$

Из свойств функции (4.9) вытекает, что при условии (4.1)

$$d \in C^{2,\varepsilon}(U), \quad \nabla d(x)|_{\partial\Omega} = n(x), \tag{4.10}$$

где $n(x)$, $x \in \partial\Omega$ — единичная внешняя нормаль к границе области $\Omega$.

При достаточно малом в (4.2) числе $\delta$, точки $x(y)$, $y \in \partial\Omega$ попадут в окрестность $U$. Поэтому соотношение (4.7) с помощью функции (4.8) перепишется в эквивалентном виде

$$d[h](y) \equiv d(y + h(y)) = 0, \quad y \in \partial\Omega. \tag{4.11}$$

В силу (4.10) отображение $d[.]$, как отображение достаточно малой окрестности нуля пространства $C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m)$ в пространство $C^{1,\varepsilon}(\partial\Omega)$ непрерывно дифференцируемо и

$$d[0] = 0, \quad \dot{d}[0]h = h \cdot n|_{\partial\Omega}. \tag{4.12}$$

Поэтому

$$\ker \dot{d}[0] \equiv N = \{g \in C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m) : g \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{4.13}$$

Положим

$$\begin{gathered} Ph = h - \nabla p, \quad h \in C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m), \\ -\Delta p + p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = h \cdot n|_{\partial\Omega}, \quad p \in C^{2,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m). \end{gathered} \tag{4.14}$$

Очевидно (именно для разрешимости краевой задачи в (4.14) требовалась положительность числа $\varepsilon$ в условии (4.1)), что $P$ — линейный ограниченный оператор в пространстве $C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m)$, удовлетворяющий равенству $P^2 = P$. Поэтому оператор $P$ является проектором. Легко видеть, что его образ совпадает с пространством $N$.

С помощью проектора $P$ разложим пространство $C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m)$ в прямую сумму

$$C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m) = PC^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m) \dot{+} (1-P)C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m) = N \dot{+} N'. \tag{4.15}$$

Введем отображение

$$\begin{gathered} \tilde{d}[g, g'] = d[h], \\ h \in C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m), \quad ||h||_{C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega})} < \delta, \quad h = g + g', \quad g \in N, \quad g' \in N', \end{gathered} \tag{4.16}$$

с помощью которого равенство (4.11) запишется в эквивалентном виде

$$\tilde{d}[g, g'] = 0. \tag{4.17}$$

Очевидно, что отображение $\tilde{d}[.,.]$ непрерывно дифференцируемо, $\tilde{d}[0,0] = 0$, а для его дифференциала по первому и второму аргументу справедливы равенства

$$\tilde{d}_g[0,0]g = 0, \quad \tilde{d}_{g'}[0,0]g' = g' \cdot n|_{\partial\Omega}, \quad g \in N, \quad g' \in N'. \tag{4.18}$$

Проделанные построения позволяют доказать справедливость следующего утверждения.

**Лемма 4.1.** *При выполнении условия (4.1) существует такое непрерывно дифференцируемое оображение $T$ достаточно малой окрестности нуля пространства $N$ в пространство $N'$, удовлетворяющее условиям*

$$T[0] = 0, \quad \dot{T}[0] = 0, \tag{4.19}$$

*что множество всех диффеоморфизмов области $\Omega$ на себя, достаточно близких в пространстве $C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m)$ к тождественному, задается равенством*

$$x(y) = y + h(y), \quad h = g + T[g], \quad y \in \bar{\Omega}, \quad g \in N \tag{4.20}$$

*с достаточно близкими в пространстве $C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m)$ к нулю функциями $g$.*

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из теоремы о неявных функциях, примененной к уравнению (4.17). Для возможности применения этой теоремы следует доказать, что линейный ограниченный оператор $B \equiv \tilde{d}_{g'}[0,0]$ осуществляет изоморфизм пространств $N'$ и $C^{1,\varepsilon}(\partial\Omega)$.

Взаимооднозначность этого оператора следует из разложения (4.15). Для любой функции $\phi \in C^{1,\varepsilon}(\partial\Omega)$ задача

$$-\Delta p + p = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \phi, \quad p \in C^{2,\varepsilon}(\bar{\Omega}) \tag{4.21}$$

однозначно разрешима и

$$g' = (1-P)\nabla p \in N', \quad Bg' = g' \cdot n|_{\partial\Omega} = \phi. \tag{4.22}$$

Поэтому образ оператора $B$ совпадает с пространсвом $C^{1,\varepsilon}(\partial\Omega)$. Непрерывность отображения $B^{-1}$ вытекает из теоремы о замкнутом графике. □

Рассмотрим диффеоморфизмы $y = y(x)$ класса $C^{1,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m)$ области $\Omega$ на себя, для которых обратные отображения $x = x(y)$ имеют вид (4.20). Фиксируем функции $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}$ и построим их возмущения $u$, $\chi$ согласно формулам (2.4.2).

Пользуясь равенством (2.4.3) приходим к выводу, что

$$\text{линейная по } g\in N \text{ часть приращения} \quad I_0[u,\chi,t]-I_0[\tilde u,\tilde\chi,t] \quad \text{совпадает с величиной}$$
$$\begin{gathered}\int_\Omega \{\tilde\chi F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde u)+(1-\tilde\chi)F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde u)\}v^i_{x_j}\,dx+\\ +\int_\Omega\{\tilde\chi((F^+(\nabla\tilde u)+t)\delta_{kj}-\tilde u^i_{x_k}F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde u))+(1-\tilde\chi)(F^-(\nabla\tilde u)\delta_{kj}-\tilde u^i_{x_k}F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde u))\}g^k_{x_j}\,dx,\\ \tilde\chi=\tilde\chi(x),\quad \tilde u=\tilde u(x),\quad v=v(x),\quad g=g(x).\end{gathered} \tag{4.23}$$

Известно, что

(1) Функция $\chi\in\mathbb{Z}$, а линейная по $g\in N$ часть приращения $S[\chi]-S[\tilde\chi]$ совпадает с величиной

$$\int_\Omega (\operatorname{div} g(x)-(\nabla g(x)\tilde\nu(x),\tilde\nu(x)))\,d\tilde\mu(x), \tag{4.24}$$

где борелевская мера $\tilde\mu$ и вектор-функция $\tilde\nu$ определяются функцией $\tilde\chi$, носитель меры $\tilde\mu$ лежит в

$$\Gamma=\Omega\cap\partial(\operatorname{supp}\tilde\chi),$$

а $|\tilde\nu(x)|=1$ при $\tilde\mu$-почти всех точках $x\in\Omega$.

(2) Если на носителе фунции $g$ множество $\Gamma$ является непрерывно дифференцируемой поверхностью, то в (4.24) можно положить

$$\tilde\nu(x)=n(x),\quad x\in\Gamma,\qquad \tilde\mu(x)=dS_x, \tag{4.25}$$

где $n(x)$ — единичная нормаль к $\Gamma$, внешняя по отношению к $\operatorname{supp}\tilde\chi$.

Будем говорить, что пара $\tilde u\in\mathbb{X}$, $\tilde\chi\in\mathbb{Z}$ является критической точкой функционала энергии $I$, если

$$\begin{gathered}\int_\Omega \{\tilde\chi F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde u)+(1-\tilde\chi)F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde u)\}v^i_{x_j}\,dx+\\ +\int_\Omega\{\tilde\chi((F^+(\nabla\tilde u)+t)\delta_{kj}-\tilde u^i_{x_k}F^+_{M_{ij}}(\nabla\tilde u))+(1-\tilde\chi)(F^-(\nabla\tilde u)\delta_{kj}-\tilde u^i_{x_k}F^-_{M_{ij}}(\nabla\tilde u))\}g^k_{x_j}\,dx+\\ +\sigma\int_\Omega (\operatorname{div} g(x)-(\nabla g(x)\tilde\nu(x),\tilde\nu(x)))\,d\tilde\mu(x)=0\\ \text{для всех } v\in\mathbb{X},\ g\in N.\end{gathered} \tag{4.26}$$

Так как левая часть тождества (4.26) в силу (4.23), (4.24) служит линейной частью приращения функционала $I$ при возмущении (2.4.2), состояния равновесия $\hat u_{t,\sigma}$, $\hat\chi_{t,\sigma}$ обязаны быть критическими точками. Однако, не любая критическая точка станет состоянием равновесия. Например, пары $\tilde u=\hat u^\pm$, $\tilde\chi=\chi^\pm$ — критические точки функционала энергии $I$ при всех значениях $t$ и $\sigma$, в то время как состояниями равновесия они будут лишь в указанных в (3.30) случаях.

**Теорема 4.1.** *Фиксируем шар $B_r(x_0)\subset\Omega$ и критическую точку $\tilde u$, $\tilde\chi$ функционала энергии $I$.*

*(а) Если функция $\tilde\chi$ постоянна в $B_r(x_0)$, то функция $\tilde u\in C^\infty(B_r(x_0),R^m)$ и удовлетворяет уравнениям* (2.4.8).

*(б) Пусть шар $B_r(x_0)$ разделен на две части $m-1$-мерной поверхностью $\Gamma$ класса $C^{k,\varepsilon}$, $k\ge 2$, $\varepsilon\in(0,1)$. Предположим, что в одной из них — $B^+_r(x_0)$, функция $\tilde\chi=1$, а в другой — $B^-_r(x_0)$, функция $\tilde\chi=0$. Тогда функция $\tilde u$ принадлежит классу $C^{k,\varepsilon}$ в каждой из областей $B^\pm_r(x_0)$ вплоть до границы их раздела $\Gamma$ и удовлетворяет в них уравнениям* (2.4.9). *На $\Gamma$ выполняется условие* (2.4.9) *на скачок тензора напряжений $\Theta$, а условие на скачок тензора химического потенциала $\Phi$ заменяется на*

$$[\Phi_{kl}[\tilde u,\tilde\chi]]|_\Gamma n_k n_l+\sigma H=0,\quad k=1,\dots,m, \tag{4.27}$$

*где $H$ — средняя кривизна поверхности $\Gamma$ в направлении $n$.*

*(в) Фиксируем шар $B_r(x_0)$, $x_0 \in \partial\Omega$. Пусть множество $B_r(x_0) \cap \Omega$ разделяется на две области $m-1$-мерной поверхностью $\Gamma$ класса $C^2$. Предположим, что в одной из них функция $\tilde{\chi} = 1$, а в другой — $\tilde{\chi} = 0$. Пусть $\tilde{u}$ принадлежит классу $C^2$ в замыкании каждой из этих подобластей. Предположим, что поверхность $\Gamma$ пересекается с $\partial\Omega$ по непрерывно дифференцируемой $m-2$-мерной поверхности $\Sigma$. Тогда $\Gamma$ пересекает $\partial\Omega$ под прямым углом.*

Доказательство. Поскольку $C_0^\infty(\Omega, R^m) \subset N$, утверждение (а) и первая часть утверждения (б) доказываются так же, как в теореме 2.4.1. Остановимся подробнее на доказательстве равенства (4.27) и последнего утверждения теоремы.

Свяжем с поверхностью $\Gamma$ оператор касательного градиента

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_m), \quad \delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - n_i(x) n_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad x \in \Gamma, \tag{4.28}$$

где $n$ — единичный вектор нормали к поверхности $\Gamma$. Для определенности будем считать его внешним по отношению к $\operatorname{supp}\tilde{\chi}$. Легко видеть, что для любой вектор-функции $g$ на поверхности $\Gamma$

$$\operatorname{div} g - (\nabla g n, n) = \delta_i g^i. \tag{4.29}$$

Тогда в силу сделанных предположений о гладкости $\Gamma$ перепишем выражение (4.24) с помощью (4.25) и (4.29) в виде

$$\int_\Omega (\operatorname{div} g - (\nabla g \tilde{\nu}, \tilde{\nu}))\, d\tilde{\mu} = \int_\Gamma \delta_i g^i\, dS. \tag{4.30}$$

Для доказательства (4.27) положим в (4.26) функцию $v = 0$. В качестве $g$ возьмем произвольный элемент класса $C_0^\infty(B_r(x_0), R^m)$. Пользуясь формулой интегрирования по частям на поверхности, в силу финитности функции $g$ имеем

$$\begin{gathered}\int_{\Gamma \cap B_r(x_0)} \delta_i g^i\, dS = \int_{\Gamma \cap Br(x_0)} H g \cdot n\, dS, \\ H = \delta_i n^i \text{— средняя кривизна поверхности } \Gamma \text{ в направлении } n.\end{gathered} \tag{4.31}$$

Тогда равенства (2.4.7), (2.4.12) и (4.31) позволяют получить из соотношения (4.26) условие (4.27).

Для доказательства последнего утверждения теоремы положим в (4.26) функцию $v = 0$. В качестве $g$ возьмем произвольную функцию пространства $N$, обращающуюся в ноль вне шара $B_\rho(x_0)$, $0 < \rho < r$. Пользуясь формулой интегрирования по частям на поверхности, в этом случае имеем

$$\begin{gathered}\int_{\Gamma \cap B_r(x_0)} \delta_i g^i\, dS = \int_\Sigma g \cdot t\, d\Sigma + \int_{\Gamma \cap B_r(x_0)} H g \cdot n\, dS, \\ t(x), \quad x \in \Sigma \text{— касательный к } \Gamma \text{ вектор единичной длины, ортогональный } \Sigma.\end{gathered} \tag{4.32}$$

Тогда равенства (2.4.7), (4.32) и уже доказанное соотношение (4.27) приводят к утверждению, что

$$\int_\Sigma g \cdot t\, d\Sigma = 0. \tag{4.33}$$

Поскольку вектор-функция $g$ имеет нулевую нормальную компоненту на $\partial\Omega$, а ее касательные компоненты на $\partial\Omega \cap B_r(x_0)$ можно считать произвольными, из (4.33) имеем

$$\begin{gathered}t(x) \cdot \tau = 0, \quad x \in \partial\Omega \cap \Sigma \\ \text{для произвольного касательного к } \partial\Omega \text{ в точке } x \text{ вектора } \tau,\end{gathered} \tag{4.34}$$

что означает ортогональность $\Gamma$ и $\partial\Omega$ в $B_r(x_0) \cap \partial\Omega$. □

Тождество (4.26) для критической точки $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$, в частности, означает, что функция $\tilde{u}$ является обобщенным решением эллиптической системы (2.4.10). Перепишем эту ситему в виде

$$\begin{gathered}\mathcal{L}_{\tilde{\chi}} \tilde{u} = L\tilde{u} + L_{\tilde{\chi}} \tilde{u} = F, \\ (L\tilde{u})_i = -(a^-_{ijkl} \tilde{u}^k_{x_l})_{x_j}, \quad (L_{\tilde{\chi}} \tilde{u})_i = -(\tilde{\chi}[a_{ijkl}] \tilde{u}^k_{x_l})_{x_j}, \quad F_i = -(\tilde{\chi}[a_{ijkl}\zeta_{kl}])_{x_j}, \\ i = 1, \dots, m.\end{gathered} \tag{4.35}$$

Известно, что

$$\text{оператор } L \text{ осуществляет изоморфизм пространств } \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega, R^m) \text{ и } W_p^{-1}(\Omega, R^m) \text{ для любого } p \in [2, \infty). \tag{4.36}$$

Очевидно, что оператор $L_{\tilde{\chi}}$ переводит пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega, R^m)$ в $W_p^{-1}(\Omega, R^m)$ и для каждого $p \in [2, \infty)$ справедива равномерная по функциям $\tilde{\chi}$ оценка

$$\|L_{\tilde{\chi}}\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p \to W_p^{-1}} \le C_p |[A]|, \tag{4.37}$$

а функция $F \in W_p^{-1}(\Omega, R^m)$ для тех же $p$.

Следовательно, существует такое число $\alpha_p > 0$, что при

$$|[A]| < \alpha_p \tag{4.38}$$

оператор $\mathcal{L}_{\tilde{\chi}}$ для всех функций $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}$ осуществляет изоморфизм $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega, R^m)$ и $W_p^{-1}(\Omega, R^m)$. Таким образом, функция $\tilde{u}$, исходно лежащая в пространстве $\mathbb{X}$, при достаточно близких матрицах $A^+$ и $A^-$ попадает в пространство $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega, R^m)$, $p > 2$.

В частности, если для данного $p > 2$ выполняется оценка (4.38), равновесное поле смещений $\hat{u}_{t,\sigma}$ имеет повышенную гладкость: $\hat{u}_{t,\sigma} \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega, R^m)$.

Полученное утверждение позволяет сделать вывод о гладкости границы раздела фаз.

**Теорема 4.2.** *Пусть $m \le 7$ и выполнена оценка* (4.38) *с $p > 2m$. Тогда граница раздела фаз для двухфазового состояния равновесия эквивалентна непрерывно дифференцируемой поверхности.*

Доказательство. Перепишем выражение для величины $I[\hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma}, t, \sigma]$ в виде

$$\begin{gathered} I[\hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma}, t, \sigma] = \int_\Omega F^-(\nabla \hat{u}_{t,\sigma})\, dx + \int_\Omega q(x,t)\hat{\chi}_{t,\sigma}\, dx + \sigma S[\hat{\chi}_{t,\sigma}], \\ q(x,t) = F^+(\nabla \hat{u}_{t,\sigma}) + t - F^-(\nabla \hat{u}_{t,\sigma}). \end{gathered} \tag{4.39}$$

При сделанных предположениях функция $q(.,t) \in L_p(\Omega)$, $p > m$.

Очевидно, что при фиксированных $t$ и $\sigma$ функция $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ является решением вариационной задачи

$$\begin{gathered} j[\hat{\chi}_{t,\sigma}] = \inf_{\chi \in \mathbb{Z}} j[\chi], \quad \hat{\chi}_{t,\sigma} \in \mathbb{Z}, \\ j[\chi] = \int_\Omega q(x,t)\chi(x)\, dx + \sigma S[\chi]. \end{gathered} \tag{4.40}$$

Известно, что

> при $q(.,t) \in L_p(\Omega)$, $p > m$, $m \le 7$ и $\sigma > 0$ любое решение задачи (4.40), отличное от функций $\chi^{\pm}$, после исправения на множестве нулевой меры имеет носитель, отделенный от своего дополнения в области $\Omega$ непрерывно дифференцируемой поверхностью.

Таким образом, при достаточно близких матрицах $A^{\pm}$ в физически интересном случае $m = 3$ граница раздела фаз для двухфазового состояния равновесия непрерывно дифференцируема. □

### Библиографические замечания к главе 3.

Результаты данной главы основаны на работах [1-13]. В них же содержатся исследования в случае иных граничных условий и при наличии силовых полей. С математической точки зрения поверхностная энергия служит регуляризацией функционала с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения. В качестве иной регуляризации можно предложить слагаемое вида $\sigma\|u\|^q_{W_2^2}$ с положиельными коэффициентом $\sigma$ и степенью $q$. Данная регуляризация встречается в моментной теории упругости. При определенном подборе числа $q$ зависимость состояний равновесия от параметров $t$ и $\sigma$ на качественном уровне аналогична зависимости от этих параметров для исследуемой в данной главе регуляризации [3,19].

Свойства функции (4.8), касательного градиента (4.28) содержатся, например, в [14]. Там же даны доказательства формулы интегрирования по частям (4.30) и свойств площади (1.1), сформулированных в §1. Доказательство формулы (4.32) можно найти, в частности, в [3]. Согласованность определений площади границы раздела фаз в одномерном (§1.1) и многомерном (§3.1) случаях обсуждается в [15]. Там же и в [14] устанавливается связь между величиной $S[\chi]$ и $m-1$-мерной мерой Хаусдорфа границы раздела фаз.

Свойство (4.36) для эллиптических систем обосновано в [16]. Используемые утверждения о гладкости решения задачи (4.40) получены в работе [17]. Доказательство леммы 1.1 заимствовано из [18]. Формула (3.45) приведена в [20], стр.133.

Остановимся немного на терминологии. В механике сплошных сред двухфазовая упругая среда, у которой в каждой точке области $\Omega$ в состоянии равновесия может присутствовать лишь одна из фаз, называется гетерогенной. Попытка перехода к смесям фаз, проведенная в леммах 1.4 и 1.5 является отказом от требования гетерогенности.

## Литература


1. В.Г. Осмоловский, "Теорема существования и слабая форма уравнений Лагранжа для вариационной задачи теории фазовых превращений", Сиб. мат. журн., т.35, N4 (1994), 835-846.
2. Osmolovski V.G., "The phase transition in mechanic of continuum media for big loading". Math. Nachr., v.177(1996), s. 233-250.
3. Осмоловский В.Г., *Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды.* С.-Пб., издательство С.-Пб. гос. университета, 2000.
4. M.Bildhauer, M.Fuchs, V.Osmolovskii, "The effect of a surface energy term on the distribution of phases in an elastic medium with a two-well elastic potential", Mathematical Methods in the applid Sciens, 25(2002), p.149-178.
5. В.Г. Осмоловский, "Критерий слабой полунепрерывности снизу функционала энергии двухфазовой упругой среды". Проблемы математического анализа, вып 26(2003), с.215-254.
6. В.Г.Осмоловский, "Зависимость температуры фазовых переходов от размеров области". Записки научных семинаров ПОМИ, т.310(2004), 98-114.
7. В.Г.Осмоловский, "Зависимость состояний равновесия двухфазовой упругой среды от температуры при положительном коэффициенте поверхностного натяжения". Записки научных семинаров ПОМИ, т.318(2004), 220-232.
8. В.Г.Осмоловский, "Об определении коэффициента поверхностного натяжения в механике двухфазовых упругих сред". Проблемы математического анализа, вып.30(2005), 61-68.
9. В.Г.Осмоловский, "О множестве решений вариационной задачи о фазовых переходах в механике сплошных сред". Проблемы математического анализа, вып.35(2007), с.110-119.
10. В.Г. Осмоловский, "Изопериметрическое неравенство и состояния равновесия для двухфазовой среды", Проблемы математического анализа, вып.36(2007), с.81-88.
11. В.Г.Осмоловский, "Зависимость объема равновесной фазы от температуры в задаче о фазовых переходах в механике сплошных сред". Проблемы математического анализа, вып.37 (2008), 73-82.
12. В.Г. Осмоловский, "О температурах фазовых переходов в вариационной задаче теории упругости двухфазовых сред", Проблемы математического анализа, вып.41(2009), с.37-47.
13. В.Г. Осмоловский, "Роль однофазовых состояний равновесия для двухфазовой упругой среды", Проблемы математического анализа, вып.50(2010), с.77-86.
14. Э.Джусти, *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации*, Москва: Мир (1989).
15. Л.К. Эванс, Р.Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Новосибирск, Научная книга, 2002.
16. E.Giusti, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, New Jersey, World Scientific, 2005.
17. Tamanini I., "Regularity results for almost minimal oriented hypersurface in $R^N$", Quaderni del Dipartimento di Matematica dell Universitadi Lecce, (1984).

18. А.С.Михайлов, В.С.Михайлов, "Фазовые переходы в многофазовых средах", Проблемы математического анализа, вып.20(2000), с.120-169.
19. M.Bildhauer, M.Fuchs, V.G.Osmolovskii, "The effect of a penalty term involving higher order derivatives on the distributions of phases in an elastic medium with a two-well elastic potemtial", Math. Meth. Appl. Sci.(2002), p.289-308.
20. Д.М.Бураго, В.А.Залгаллер, *Геометрические неравенства*, Ленинград, Наука, 1980.

# ГЛАВА 4

# ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПРИ СТРЕМЛЕНИИ К НУЛЮ КОЭФФИЦИЕНТА ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

*Цель главы — попытка построения предельных точек состояний равновесия при стремлении к нулю коэффициента поверхностного натяжения. Излагаемые в ней результаты лишь частично совпадают с аналогичными утверждениями для одномерного случая (§1.3). Причиной тому служит как возможное отсутствие при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения состояний равновесия с конечной площадью границы раздела фаз, так и отсутствие вообще каких бы то ни было состояний равновесия.*



## §1. Состояния равновесия и минимизирующие последовательности.

На *первом этапе* установим роль состояний равновесия $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ функционала энергии $I[u,\chi,t,\sigma]$ с положительным $\sigma$ и фиксированном $t$ при $\sigma \to 0$.

**Лемма 1.1.** *Любая последовательность состояний равновесия*

$$\hat{u}_{t,\sigma_n}, \quad \hat{\chi}_{t,\sigma_n}, \quad \sigma_n > 0, \quad \sigma_n \to 0 \tag{1.1}$$

*является минимизирующей для функционала* $I_0[u,\chi,t]$.

Доказательство. Требуемое утверждение вытекает из (3.3.4), леммы 3.3.1 и следующей цепочки соотношений

$$\begin{gathered}\varliminf_{n\to\infty} I_0[\hat{u}_{t,\sigma_n}, \hat{\chi}_{t,\sigma_n}, t] \ge \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t] = i(t,\Omega) = \\ = \lim_{n\to\infty} j(t,\sigma_n,\Omega) = \lim_{n\to\infty} I[\hat{u}_{t,\sigma_n}, \hat{\chi}_{t,\sigma_n}, t, \sigma_n] \ge \varlimsup_{n\to\infty} I_0[\hat{u}_{t,\sigma_n}, \hat{\chi}_{t,\sigma_n}, t]\end{gathered}$$

справедливых для любой последовательности (1.1). □

На *втором этапе* построим вспомогательный функционал $I^{\min}[u,t]$, множество точек сгущения всех минимизирующих последовательностей которого содержит множество точек сгущения первых компонент всех последовательностей (1.1). Точки сгущения будут пониматься в смысле слабой сходимости в пространстве $W_2^1(\Omega, R^m)$.

Из неравенства (3.2.2) и леммы 1.1 следует существование такого числа $R = R(t) > 0$, что $\|\hat{u}_{t,\sigma_n}\|_{W_2^1} \le R$ для всех членов последовательности (1.1). Поэтому интересующее нас множество точек для последовательностей (1.1) не пусто.

По плотностям энергии (2.1.6) определим функцию

$$F^{\min}(M,t) = \min\{F^+(M) + t, F^-(M)\}, \qquad M \in R^{m\times m}, \quad t \in R^1 \tag{1.2}$$

и свяжем с ней функционал

$$I_0^{\min}[u,t] = \int_\Omega F^{\min}(\nabla u, t)\, dx, \quad u \in \mathbb{X}, \tag{1.3}$$

для которого поставим следующую вариационную задачу

$$I_0^{\min}[\hat{u}_t, t] = \inf_{u\in\mathbb{X}} I_0^{\min}[u,t], \quad \hat{u}_t \in \mathbb{X}. \tag{1.4}$$

Для удобства дальнейшего изложения по каждой функции $u \in \mathbb{X}$ построим функцию $\chi_u$ по правилу

$$\mathbb{Z}' \ni \chi_u(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad F^+(\nabla u(x)) + t < F^-(\nabla u(x)) \\ 0 & \text{при} \quad F^+(\nabla u(x)) + t > F^-(\nabla u(x)) \\ \text{произвольна} & \text{при} \quad F^+(\nabla u(x)) + t = F^-(\nabla u(x)) \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\text{почти всюду в} \quad \Omega.$$

Для согласования в формуле (1.5) включения и выполнения третьего условия требуется, чтобы при почти всех $x \in \Omega$, при которых $F^+(\nabla u(x)) + t = F^-(\nabla u(x))$, функция $\chi_u(x)$ принимала лишь два значения — 0 и 1.

**Лемма 1.2.** (*a*) *Каждое решение $\hat{u}_t$ задачи* (1.4) *порождает решение $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ задачи* (2.1.12) *с той же функцией $\hat{u}_t$ и с $\hat{\chi}_t = \chi_{\hat{u}_t}$. Для каждого решения $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ задачи* (2.1.12) *функция $\hat{u}_t$ является решением задачи* (1.4), *а $\hat{\chi}_t = \chi_{\hat{u}_t}$.*

(*b*) *Для каждой минимизирующей последовательности $u_n$, $\chi_n$, $n = 1, 2, \dots$ функционала $I_0[u, \chi, t]$ последовательность $u_n$ будет минимизирующей для функционала $I_0^{\min}[u, t]$. Если $u_n$ — минимизирующая последовательность для функционала $I_0^{\min}[u, t]$, то последовательность $u_n$, $\chi_{u_n}$ будет минимизирующей для функционала $I_0[u, \chi, t]$.*

Доказательство. Для любой функции $u \in \mathbb{X}$ имеем

$$I_0^{\min}[u, t] = \inf_{\chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t] = I_0[u, \chi_u, t]. \tag{1.6}$$

Поэтому

$$\inf_{u \in \mathbb{X}} I_0^{\min}[u, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}} I_0[u, \chi_u, t]. \tag{1.7}$$

Пусть $\hat{u}_t$ — решение задачи (1.4). Тогда в силу (1.6), (1.7)

$$I_0[\hat{u}_t, \chi_{\hat{u}_t}, t] = I_0^{\min}[\hat{u}_t, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}} I_0^{\min}[u, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}} I_0[u, \chi_u, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I[u, \chi, t]. \tag{1.8}$$

Поэтому $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t = \chi_{\hat{u}_t}$ — решение задачи (2.1.12). Пусть $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ — решение задачи (2.1.12). Очевидно, что $\hat{\chi}_t = \chi_{\hat{u}_t}$, а из (1.8) следует справедливость второго утверждения части (*a*) доказываемой леммы.

Поскольку в силу (1.7) для любых функций $u_n \in \mathbb{X}$, $\chi_n \in \mathbb{Z}'$

$$I_0[u_n, \chi_n, t] \geq I_0[u_n, \chi_{u_n}, t] = I_0^{\min}[u_n, t] \geq \inf_{u \in \mathbb{X}} I_0^{\min}[u, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t], \tag{1.9}$$

приходим к справедливости утверждения (*b*) леммы. □

На *третьем этапе* отождествим точки сгущения минимизирующих последовательностей функционала (1.3) с решениями релаксированной вариационной задачи.

Рассмотрим квазивыпуклую оболочку функции (1.2)

$$\mathcal{F}(M, t, \Omega) = |\Omega|^{-1} \inf_{u \in \mathbb{X}} \int_\Omega F^{\min}(M + \nabla u, t)\, dx = |\Omega|^{-1} \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u + v_M, \chi, t],$$
$$M \in R^{m \times m}, \quad t \in R^1, \quad v_M(x) = Mx. \tag{1.10}$$

Известно, что функция (1.10) не зависит от области $\Omega$:

$$\mathcal{F}(M, t, \Omega) \equiv \mathcal{F}(M, t).$$

**Лемма 1.3.** *Функция $\mathcal{F}(.,.)$ локально липшицева и удовлетворяет неравенствам*

$$C_1(|e(M)|^2 - |t| - 1) \leq \mathcal{F}(M, t) \leq C_2(|e(M)|^2 + |t| + 1), \quad C_i \neq C_i(M, t, \Omega) > 0, \quad i = 1, 2. \tag{1.11}$$

Доказательство. Снабдим временно плотности энергии деформации $F^{\pm}$ дополнительными аргументами $\zeta^{\pm}$:

$$F^{\pm}(M) \equiv F^{\pm}(M, \zeta^{\pm}). \tag{1.12}$$

Заметим, что

$$F^{\pm}(M + \nabla u, \zeta^{\pm}) = F^{\pm}(\nabla u, \zeta^{\pm} - e(M)). \tag{1.13}$$

Фиксируем два набора тензоров остаточной деформации $\zeta_i^{\pm}$, $i = 1, 2$. Имеем

$$F^{\pm}(\nabla u, \zeta_2^{\pm}) - F^{\pm}(\nabla u, \zeta_1^{\pm}) =< A^{\pm}\zeta_2^{\pm} + A^{\pm}\zeta_1^{\pm} - 2A^{\pm}e(\nabla u), \zeta_2^{\pm} - \zeta_1^{\pm} > \tag{1.14}$$

для каждого из знаков $\pm$.

Снабдим временно функционал $I_0$ дополнительными аргументами $\zeta^{\pm}$:

$$I_0[u, \chi, t] \equiv I_0[u, \chi, t, \zeta^{\pm}]. \tag{1.15}$$

В силу (1.14) для некоторой константы $C > 0$ и всех $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$, $\zeta_i^{\pm} \in R_s^{m\times m}$, $t_i \in R^1$, $i = 1, 2$

$$|I_0[u, \chi, t_2, \zeta_2^{\pm}] - I_0[u, \chi, t_1, \zeta_1^{\pm}]| \le |\Omega||t_2 - t_1| +$$
$$+C|\Omega|(|\zeta_1^+| + |\zeta_2^+| + |\zeta_1^-| + |\zeta_2^-|)(|\zeta_2^+ - \zeta_1^+| + |\zeta_2^- - \zeta_1^-|) + C(\int_\Omega |e(\nabla u)|\,dx)(|\zeta_2^+ - \zeta_1^+| + |\zeta_2^- - \zeta_1^-|). \tag{1.16}$$

Снабдим временно функции (2.3.2) и функцию (1.10) дополнительными аргументами $\zeta^{\pm}$:

$$i_{\min}(t, \Omega) \equiv i_{\min}(t, \zeta^{\pm}, \Omega), \quad i(t, \Omega) \equiv i(t, \zeta^{\pm}, \Omega), \quad \mathcal{F}(M, t) \equiv \mathcal{F}(M, t, \zeta^{\pm}). \tag{1.17}$$

В силу определений (1.10) и (2.3.2)

$$|\Omega|\mathcal{F}(0, t) = i(t, \Omega). \tag{1.18}$$

Учитывая договоренность (1.17), имеем

$$|\Omega|\mathcal{F}(0, t, \zeta^{\pm}) = i(t, \zeta^{\pm}, \Omega). \tag{1.19}$$

Из неравенства (2.3.4) следует, что при вычислении по формуле (1.10) величины $\mathcal{F}(0, t, \zeta^{\pm})$ достаточно учитывать лишь те функции $\tilde{u} \in \mathbb{X}$, $\tilde{\chi} \in \mathbb{Z}'$ для которых

$$i_{\min}(t, \zeta^{\pm}, \Omega) \ge I_0[\tilde{u}, \tilde{\chi}, t, \zeta^{\pm}]. \tag{1.20}$$

Благодаря утверждениям (2.3.5), множество таких пар $\tilde{u}$, $\tilde{\chi}$ не пусто.

С помощью неравенств (3.2.2) и (1.20) для функций $\tilde{u}$ получаем оценку

$$\int_\Omega |e(\nabla \tilde{u})|^2\,dx \le \frac{4|\Omega|}{\nu^2}(|A^+\zeta^+|^2 + |A^-\zeta^-|^2). \tag{1.21}$$

Для каждых тензоров $\zeta^{\pm}$ набор пар $\{\tilde{u}, \tilde{\chi}\}$ будет, вообще говоря, своим: $\{\tilde{u}, \tilde{\chi}\} = \{\tilde{u}, \tilde{\chi}\}_{\zeta^{\pm}}$. Однако, в силу (1.21) существуе такая константа $c_R \ne c_R(\zeta^{\pm}, t, \Omega)$, что для всех $\zeta^{\pm}$ с $|\zeta^{\pm}| \le R$ каждая пара из $\{\tilde{u}, \tilde{\chi}\}_{\zeta^{\pm}}$ попадает в общее для всех указанных $\zeta^{\pm}$ множество пар $\{\bar{u}, \bar{\chi}\}$, $\bar{u} \in \mathbb{X}$, $\bar{\chi} \in \mathbb{Z}'$

$$\int_\Omega |e(\nabla \bar{u})|^2\,dx \le c_R|\Omega|, \quad \bar{\chi}\text{—произвольна.} \tag{1.22}$$

Используя (1.16) и (1.22), для пар $\{\bar{u}, \bar{\chi}\}$ приходим к неравенству с некоторой положительной константой $C_R \ne C_R(\zeta_1^{\pm}, \zeta_2^{\pm}, t, \Omega)$

$$|I_0[\bar{u}, \bar{\chi}, t_2, \zeta_2^{\pm}] - I_0[\bar{u}, \bar{\chi}, t_1, \zeta_1^{\pm}]| \le |\Omega|\{C_R(|\zeta_2^+ - \zeta_1^+| + |\zeta_2^- - \zeta_1^-|) + |t_2 - t_1|\}$$

$$\text{для все } \zeta_i^{\pm},\ t_i\ i = 1, 2 \text{ при условии } |\zeta_i^{\pm}| \le R,$$

эквивалентному соотношениям

$$\begin{aligned}I_0[\bar u,\bar\chi,t_1,\zeta_1^{\pm}] - C_R|\Omega|(|\zeta_2^+ - \zeta_1^+| + |\zeta_2^- - \zeta_1^-|) - \Omega|t_2-t_1| \le \\ \le I_0[\bar u,\bar\chi,t_2,\zeta_2^{\pm}] \le \\ \le I_0[\bar u,\bar\chi,t_1,\zeta_1^{\pm}] + C_R|\Omega|(|\zeta_2^+ - \zeta_1^+| + |\zeta_2^- - \zeta_1^-|) + \Omega|t_2-t_1|.\end{aligned}$$

Заменяя в них по очереди слева направо функционал $I_0[\bar u,\bar\chi,t,\zeta^{\pm}]$ функцией $i(t,\zeta^{\pm},\Omega)$ и пользуясь равенством (1.19), получаем

$$|\mathcal{F}(0,t_2,\zeta_2^{\pm}) - \mathcal{F}(0,t_1,\zeta_1^{\pm})| \le C_R(|\zeta_2^+ - \zeta_1^+| + |\zeta_2^- - \zeta_1^-|) + |t_2-t_1|. \tag{1.23}$$

В силу (1.13)

$$\mathcal{F}(M,t,\zeta^{\pm}) = \mathcal{F}(0,t,\zeta^{\pm} - e(M)). \tag{1.24}$$

Положим $\zeta_i^{\pm} = \zeta^{\pm} - e(M_i)$, $M_i \in R^{m\times m}$, $i=1,2$. Учитывая (1.23) и (1.24), приходим к выводу, что

$$|\mathcal{F}(M_2,t_2) - \mathcal{F}(M_1,t_1)| \le C_R|e(M_2)-e(M_1)| + |t_2-t_1|$$
$$\text{для всех}\quad t_i\in R^1,\quad M_i\in R^{m\times m},\quad |M_i|\le R,\quad i=1,2\quad \text{и фиксированных}\quad \zeta^{\pm}.$$

Поскольку (см. (2.1.4), (2.3.9))

$$\nu|e(M)+e(\nabla u)-\zeta^{\pm}|^2 \le F^{\pm}(\nabla u + M) \le \nu^{-1}|e(M)+e(\nabla u)-\zeta^{\pm}|^2,$$

$$\frac{|e(M)|^2}{2} - 2|\zeta^{\pm}|^2 + 2 < e(M), e(\nabla u) > \le |e(M)+e(\nabla u)-\zeta^{\pm}|^2 \le 3(|e(M)|^2 + |e(\nabla u)|^2 + |\zeta^{\pm}|^2),$$

для любых функций $\chi \in \mathbb{Z}'$ имеем

$$\begin{aligned}\nu(\frac{|e(M)|^2}{2} - 2(|\zeta^+|^2 + |\zeta^-|^2) + 2 < e(M), e(\nabla u) >) - |t| \le \\ \le \chi(F^+(\nabla u + M) + t) + (1-\chi)F^-(\nabla u + M) \le \\ \le 3\nu^{-1}(|e(M)|^2 + |e(\nabla u)|^2 + |\zeta^+|^2 + |\zeta^-|^2) + |t|.\end{aligned}$$

После интегрирования последних неравенств по области $\Omega$ и минимизации центральной части по функциям $u\in\mathbb{X}$, $\chi\in\mathbb{Z}'$, приходим к требуемой в лемме оценке. □

Свяжем с функцией (1.10) функционал

$$\mathfrak{I}[u,t] = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\nabla u, t)\, dx, \quad u \in \mathbb{X} \tag{1.25}$$

и рассмотрим для него следующую вариационную задачу

$$\mathfrak{I}[\check u_t, t] = \inf_{u\in\mathbb{X}} \mathfrak{I}[u,t], \quad \check u_t \in \mathbb{X}. \tag{1.26}$$

Известно, что

(1) В силу свойств квазивыпуклой оболочки (1.10) и утверждений леммы 1.3, функционал (1.25) слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен в пространстве $\mathbb{X}$. Поэтому задача (1.26) разрешима. Кроме того
$$\inf_{u\in\mathbb{X}} I_0^{\min}[u,t] = \min_{u\in\mathbb{X}} \mathfrak{I}[u,t].$$
(2) Каждое решение задачи (1.26) является слабым пределом в пространстве $\mathbb{X}$ некоторой минимизирующей последовательности функционала (1.3).
(3) Каждая слабо сходящаяся в пространстве $\mathbb{X}$ минимизирующая последовательность функционала (1.3) слабо в $\mathbb{X}$ сходится к некоторому решению задачи (1.26). В частности, каждое решение задачи (1.4) будет решением задачи (1.26).

Поскольку задача (1.4) может оказаться неразрешимой (лемма 2.1.1), свойства (1) — (3) позволяют истолковывать решение задачи (1.26) как обобщенное решение задачи (1.4). Задачу (1.26) обычно называют релаксированной по отношению к задаче (1.4).

Итогом изложенных трех этапов служит следующее утверждение.

**Теорема 1.1.** *Для любой слабо сходящейся подпоследовательности* $\hat{u}_{t,\sigma_{n'}}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}$

$$\hat{u}_{t,\sigma_{n'}} \rightharpoonup \check{u}_t \quad \text{в пространстве} \quad \mathbb{X}, \qquad \hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}} \overset{*}{\rightharpoonup} \check{\chi}_t \in \mathbb{Z}'' \tag{1.27}$$

*последовательности состояний равновесия* $\hat{u}_{t,\sigma_n}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma_n}$, $\sigma_n > 0$, $\sigma_n \to 0$, *функция* $\check{u}_t$ *является решением задачи* (1.26).

*Каждая указанная последовательность состояний равновесия содержит слабо сходящуюся в смысле* (1.27) *подпоследовательность.*

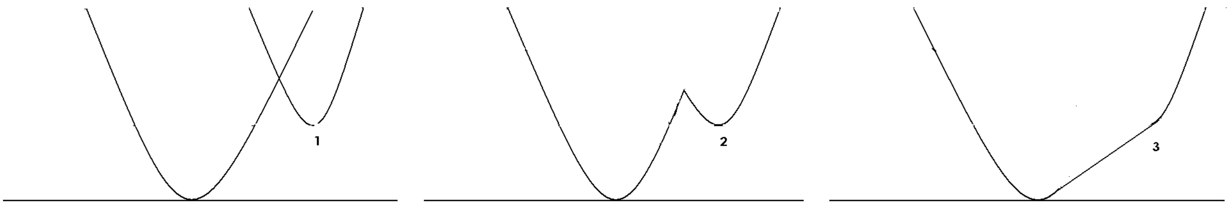


Рис.1.1

Формальные графики функций
$1: \quad F^-(M), \quad F^+(M)+t, \qquad 2: \quad F^{\min}(M,t), \qquad 3: \quad \mathcal{F}(M,t).$

На *четвертом этапе* нам предстоит изучить поведение площади границы раздела фаз для равновесных состояний $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$, $\sigma > 0$ при $\sigma \to 0$. Полученная информация позволит дать отрицательный ответ на вопрос: любое ли решение задачи (1.26) может быть получено представленным в теореме 1.1 способом.

Напомним обозначение $\mathfrak{B}_{t,\sigma}$, $t, \sigma \in R^1$, $\sigma > 0$ для множества всех состояний равновесия функционала $I[u, \chi, t, \sigma]$, введенное в §3.3. Обозначим через $\mathfrak{B}_t$ множество (возможно, пустое) всех состояний равновесия функционала $I_0[u, \chi, t]$.

**Лемма 1.4.** $(a)$ *Для любых* $t, \sigma \in R^1$, $\sigma > 0$ *существуют такие пары*

$$\hat{u}^{\min}_{t,\sigma}, \hat{\chi}^{\min}_{t,\sigma} \in \mathfrak{B}_{t,\sigma}, \quad \hat{u}^{\max}_{t,\sigma}, \hat{\chi}^{\max}_{t,\sigma} \in \mathfrak{B}_{t,\sigma}, \tag{1.28}$$

*что*

$$S[\hat{\chi}^{\min}_{t,\sigma}] = \inf_{u,\chi \in \mathfrak{B}_{t,\sigma}} S[\chi], \quad S[\hat{\chi}^{\max}_{t,\sigma}] = \sup_{u,\chi \in \mathfrak{B}_{t,\sigma}} S[\chi]. \tag{1.29}$$

$(b)$ *Пусть для данного* $t$ *множество* $\mathfrak{B}_t$ *не пусто и содержит состояние равновесия* $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ *с* $\hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}$. *Тогда существует такая пара*

$$\hat{u}^{\min}_t, \hat{\chi}^{\min}_t \in \mathfrak{B}_t, \tag{1.30}$$

*что*

$$S[\hat{\chi}^{\min}_t] = \inf_{u,\chi \in \mathfrak{B}_t} S[\chi]. \tag{1.31}$$

Доказательство. $(a)$ Введем в множестве $\mathbb{Z}$ метрику

$$\rho(\chi_1, \chi_2) = ||\chi_1 - \chi_2||_{L_1} + |S[\chi_1] - S[\chi_2]|, \quad \chi_1, \chi_2 \in \mathbb{Z}, \tag{1.32}$$

с которой оно станет (не полным) метрическим пространством $\mathbb{Z}_\rho$. В силу леммы 3.3.7 множество $\mathfrak{B}_{t,\sigma}$ компактно в $\mathbb{X}\times\mathbb{Z}_\rho$. Поскольку непрерывность функционала $S[\chi]$ зафиксирована в определении метрики (1.32), этот функционал достигает на множестве $\mathfrak{B}_{t,\sigma}$ наибольшее и наименьшее значение.

($b$) Из условий леммы вытекает, что инфимум в (1.31) следует брать лишь по множеству состояний равновесия с равномерно ограниченными площадями границ раздела фаз. Пусть $u_n, \chi_n \in \mathfrak{B}_t$ — минимизирующая последовательность для задачи (1.31). Пользуясь неравенством (3.2.2) и оценкой $S[\chi_n] \leq R \neq R(n)$, после перехода к подпоследовательности (сохраним за ней прежнее обозначение) будем считать, что

$$u_n \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{в пространстве} \quad \mathbb{X}, \qquad \chi_n \to \tilde{\chi} \in \mathbb{Z}' \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega.$$

Благодаря (3.2.7) пара $\tilde{u}, \tilde{\chi} \in \mathfrak{B}_t$, а из (3.1.7) получаем

$$S[\tilde{\chi}] \leq \varliminf_{n\to\infty} S[\chi_n] = \inf_{u,\chi\in\mathfrak{B}_t} S[\chi].$$

Поэтому пара $\hat{u}_t^{\min} = \tilde{u}$, $\hat{\chi}_t^{\min} = \tilde{\chi}$ является решением задачи (1.30), (1.31). □

Отметим, что при выполнении условия ($b$) доказанной леммы аналога второй пары (1.28) с конечной площадью границы раздела фаз может не существовать. В этом легко убедиться, пользуясь решением однородной изотропной задачи о фазовых переходах в шаре (лемма 2.2.3). Доказанная лемма не гарантирует единственности решений задач (1.29), (1.31).

Положим

$$S^{\max}(t,\sigma) = S[\hat{\chi}_{t,\sigma}^{\max}], \quad S^{\min}(t,\sigma) = S[\hat{\chi}_{t,\sigma}^{\min}], \qquad t,\sigma \in R^1, \quad \sigma > 0. \tag{1.33}$$

Пользуясь теоремами 3.3.1 и 3.3.2, приходим к выводу, что

$$S^{\max}(t,\sigma) = S^{\min}(t,\sigma) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma > \sigma(t), \qquad S^{\max}(t,\sigma) > S^{\min}(t,\sigma) = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = \sigma(t) > 0,$$
$$S^{\max}(t,\sigma) \geq S^{\min}(t,\sigma) > 0 \quad \text{при} \quad \sigma \in (0,\sigma(t)). \tag{1.34}$$

Основой для дальнейших результатов служит следующее утверждение.

**Лемма 1.5.** *Для каждого $t$ и любых $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ справедливо неравенство*

$$S^{\max}(t,\sigma_2) \leq S^{\min}(t,\sigma_1). \tag{1.35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем числа $t$, $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ и запишем два очевидных неравенства

$$I[\hat{u}_{t,\sigma_1}, \hat{\chi}_{t,\sigma_1}, t, \sigma_1] \leq I[\hat{u}_{t,\sigma_2}, \hat{\chi}_{t,\sigma_2}, t, \sigma_1], \quad I[\hat{u}_{t,\sigma_2}, \hat{\chi}_{t,\sigma_2}, t, \sigma_2] \leq I[\hat{u}_{t,\sigma_1}, \hat{\chi}_{t,\sigma_1}, t, \sigma_2]$$

с произвольными состояниями равновесия $\hat{u}_{t,\sigma_i}, \hat{\chi}_{t,\sigma_i}$, $i = 1,2$. Раскрывая эти неравенства, получаем

$$I_0[\hat{u}_{t,\sigma_1}, \hat{\chi}_{t,\sigma_1}, t] - I_0[\hat{u}_{t,\sigma_2}, \hat{\chi}_{t,\sigma_2}, t] \leq \sigma_1(S[\hat{\chi}_{t,\sigma_2}] - S[\hat{\chi}_{t,\sigma_1}]),$$
$$I_0[\hat{u}_{t,\sigma_2}, \hat{\chi}_{t,\sigma_2}, t] - I_0[\hat{u}_{t,\sigma_1}, \hat{\chi}_{t,\sigma_1}, t] \leq \sigma_2(S[\hat{\chi}_{t,\sigma_1}] - S[\hat{\chi}_{t,\sigma_2}]),$$

что после сложения дает

$$0 \leq (\sigma_1 - \sigma_2)(S[\hat{\chi}_{t,\sigma_2}] - S[\hat{\chi}_{t,\sigma_1}]).$$

Следовательно, $S[\hat{\chi}_{t,\sigma_2}] \leq S[\hat{\chi}_{t,\sigma_1}]$. Положив $\hat{\chi}_{t,\sigma_2} = \hat{\chi}_{t,\sigma_2}^{\max}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma_1} = \hat{\chi}_{t,\sigma_1}^{\min}$, приходим к неравенству (1.35). □

В силу (1.35) и очевидного неравенства $S^{\min}(t,\sigma) \leq S^{\max}(t,\sigma)$, имеем

$$S^{\max}(t,\sigma_2) \leq S^{\max}(t,\sigma_1), \quad S^{\min}(t,\sigma_2) \leq S^{\min}(t,\sigma_1) \quad \text{для всех} \quad t,\sigma_1,\sigma_2 \quad \text{с} \quad \sigma_2 > \sigma_1 > 0. \tag{1.36}$$

Из монотонности (1.36) следует существование пределов

$$S^{\max}(t,\sigma \pm 0) = \lim_{\varepsilon\to 0} S^{\max}(t,\sigma \pm \varepsilon), \quad S^{\min}(t,\sigma \pm 0) = \lim_{\varepsilon\to 0} S^{\min}(t,\sigma \pm \varepsilon), \qquad \sigma > 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.37}$$

**Лемма 1.6.** *Для пределов* (1.37) *справедливы равенства*

$$\begin{gathered} S^{\min}(t,\sigma-0)=S^{\max}(t,\sigma), \quad S^{\min}(t,\sigma+0)=S^{\min}(t,\sigma), \\ S^{\max}(t,\sigma-0)=S^{\max}(t,\sigma), \quad S^{\max}(t,\sigma+0)=S^{\min}(t,\sigma) \\ \text{для всех } t,\sigma \text{ с } \sigma>0. \end{gathered} \tag{1.38}$$

Доказательство. Докажем первую пару соотношений (1.38), вторая пара доказывается аналогично.

Пусть $0<\sigma_n\uparrow\sigma$. Из леммы 3.3.6 вытекает существование такой подпоследовательности последовательности $\hat u^{\min}_{t,\sigma_n}$, $\hat\chi^{\min}_{t,\sigma_n}$ (сохраним за ней прежнее обозначение) и такой пары $\hat u_{t,\sigma},\hat\chi_{t,\sigma}\in\mathfrak{B}_{t,\sigma}$, что $S[\hat\chi^{\min}_{t,\sigma_n}]\to S[\hat\chi_{t,\sigma}]$. В силу неравенства (1.35) имеем $S[\hat\chi^{\max}_{t,\sigma}]\le S[\hat\chi^{\min}_{t,\sigma_n}]$. После предельного перехода получаем

$$S[\hat\chi^{\max}_{t,\sigma}]\le S^{\min}(t,\sigma-0)=S[\hat\chi_{t,\sigma}]\le S[\hat\chi^{\max}_{t,\sigma}],$$

что приводит к первому соотношению (1.38).

Пусть $\sigma_n\downarrow\sigma>0$. Из леммы 3.3.6 вытекает существование такой подпоследовательности последовательности $\hat u^{\min}_{t,\sigma_n}$, $\hat\chi^{\min}_{t,\sigma_n}$ (сохраним за ней прежнее обозначение) и такой пары $\hat u_{t,\sigma}$, $\hat\chi_{t,\sigma}\in\mathfrak{B}_{t,\sigma}$, что $S[\hat\chi^{\min}_{t,\sigma_n}]\to S[\hat\chi_{t,\sigma}]$. В силу неравенств (1.36) имеем $S^{\min}(t,\sigma)\ge S^{\min}(t,\sigma_n)$. После предельного перехода получаем

$$S[\hat\chi^{\min}_{t,\sigma}]\le S[\hat\chi_{t,\sigma}]=S^{\min}(t,\sigma+0)\le S^{\min}(t,\sigma),$$

что приводит ко второму соотношению (1.38). □

Соотношения (1.38), в частности, означают непрерывность функции $S^{\min}(t,.)$ справа, а функции $S^{\max}(t,.)$ — слева.

Следующая лемма посвящена поведению площади границы раздела фаз при $\sigma\to0$.

**Лемма 1.7.** *Справедливы равенства*

$$\lim_{\sigma\downarrow0}S^{\max}(t,\sigma)=\lim_{\sigma\downarrow0}S^{\min}(t,\sigma), \quad \lim_{\sigma\downarrow0}\sigma S^{\max}(t,\sigma)=0. \tag{1.39}$$

Доказательство. Существование конечных или бесконечных пределов для обеих частей первого равенства (1.39) следует из монотонности (1.36). Поскольку для любого $\sigma>0$ в силу (1.35)

$$S^{\min}(t,\sigma)\le S^{\max}(t,\sigma)\le S^{\min}(t,\frac{\sigma}{2}),$$

приходим к равенству этих пределов.

Для фиксированного значения $t$, любого $\sigma>0$ и любых состояний равновесия $\hat u_{t,\sigma}$, $\hat\chi_{t,\sigma}$, имеем

$$i(t,\Omega)\le I_0[\hat u_{t,\sigma},\hat\chi_{t,\sigma},t]\le I[\hat u_{t,\sigma},\hat\chi_{t,\sigma},t,\sigma]=j(t,\sigma,\Omega)$$

(см. обозначения (2.3.2) и (3.3.1)). Пользуясь утверждением леммы 3.3.1 и равенством (3.3.4), получаем существование и совпадение пределов

$$\lim_{\sigma\downarrow0}I_0[\hat u_{t,\sigma},\hat\chi_{t,\sigma},t]=\lim_{\sigma\downarrow0}I[\hat u_{t,\sigma},\hat\chi_{t,\sigma},t,\sigma],$$

что приводит к справедливости второго равенства (1.39). □

Исходя из поведения площади границы раздела фаз при $\sigma\to0$, сформулируем критерий существования решения $\hat u_t,\hat\chi_t\in\mathfrak{B}_t$, с $\hat\chi_t\in\mathbb{Z}$.

**Лемма 1.8.** (*a*) *Множество* $\mathfrak{B}_t$ *всех решений вариационной задачи* (2.1.12) *содержит решение* $\hat u_t$, $\hat\chi_t$ *с* $\hat\chi_t\in\mathbb{Z}$ *в том и только том случае, если*

$$\lim_{\sigma\downarrow0}S^{\min}(t,\sigma)<\infty. \tag{1.40}$$

(*b*) *Пусть выполняется условие* (1.40). *Тогда из любой последовательности состояний равновесия* $\hat{u}_{t,\sigma_n}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma_n} \in \mathfrak{B}_{t,\sigma_n}$, $\sigma_n > 0$, $\sigma_n \to 0$ *можно выделить такую подпоследовательность* $\hat{u}_{t,\sigma_{n'}}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}$, *что для некоторой пары* $\hat{u}^{\min}_t, \hat{\chi}^{\min}_t \in \mathfrak{B}_t$

$$\hat{u}_{t,\sigma_{n'}} \to \hat{u}^{\min}_t \quad \text{в пространстве} \quad \mathbb{X}, \qquad \hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}} \to \hat{\chi}^{\min}_t \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega, \quad S[\hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}] \uparrow S[\hat{\chi}^{\min}_t]. \tag{1.41}$$

Доказательство. (*a*) Начнем с установления необходимости условия (1.40). Пусть множество $\mathfrak{B}_t$ содержит пару $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ с $\hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}$. Тогда это множество содержит пару $\hat{u}^{\min}_t$, $\hat{\chi}^{\min}_t$ (лемма 1.4 b). Поскольку для любого состояния равновесия $\hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma} \in \mathfrak{B}_{t,\sigma}$

$$I[\hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma}, t, \sigma] \le I[\hat{u}^{\min}_t, \hat{\chi}^{\min}_t, t, \sigma],$$

справедливы неравенства

$$0 \le I_0[\hat{u}_{t,\sigma}, \hat{\chi}_{t,\sigma}, t] - I_0[\hat{u}^{\min}_t, \hat{\chi}^{\min}_t, t] \le \sigma(S[\hat{\chi}^{\min}_t] - S[\hat{\chi}_{t,\sigma}]).$$

Следовательно,

$$S[\hat{\chi}_{t,\sigma}] \le S[\hat{\chi}^{\min}_t], \tag{1.42}$$

что после подстановки $\hat{\chi}_{t,\sigma} = \hat{\chi}^{\min}_{t,\sigma}$ приводит к (1.40).

Докажем достаточность условий (1.40). Фиксируем стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел $\sigma_n$. Из последовательности $\hat{u}^{\min}_{t,\sigma_n}, \hat{\chi}^{\min}_{t,\sigma_n} \in \mathfrak{B}_{t,\sigma_n}$ выберем подпоследовательность, удовлетворяющую условиям (1.27). Благодаря (1.40) и свойствам (3.1.7), (3.1.8) будет выполняться включение $\check{\chi}_t \in \mathbb{Z}$, а последняя сходимость в (1.27) заменится на сходимость почти всюду в $\Omega$. Учитывая соотношение (3.2.7), придем к выводу, что $\check{u}_t, \check{\chi}_t \in \mathfrak{B}_t$.

(*b*) Пользуясь (1.40), (1.39), леммой 1.1 и оценкой (3.2.2), приходим к равномерной по $n$ ограниченности последовательностей $||\hat{u}_{t,\sigma_n}||_{W^1_2}$, $S[\hat{\chi}_{t,\sigma_n}]$, позволяющей выделить такую подпоследовательность $\hat{u}_{t,\sigma_{n'}}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}$, что

$$\hat{u}_{t,\sigma_{n'}} \rightharpoonup \check{u}_t \in \mathbb{X} \quad \text{в пространстве} \quad \mathbb{X}, \qquad \hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}} \to \check{\chi}_t \in \mathbb{Z} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega.$$

Учитывая утверждение леммы 1.1 и неравенство (3.2.7), имеем

$$\inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t] \le I_0[\check{u}_t, \check{\chi}_t, t] \le \varliminf_{n'\to\infty} I_0[\hat{u}_{t,\sigma_{n'}}, \hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}, t] = \lim_{n'\to\infty} I_0[\hat{u}_{t,\sigma_{n'}}, \hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}, t] = \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t]. \tag{1.43}$$

Поэтому

$$\check{u}_t, \check{\chi}_t \in \mathfrak{B}_t \quad \text{и} \quad \lim_{n'\to\infty} I_0[\hat{u}_{t,\sigma_{n'}}, \hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}, t] = I_0[\check{u}_t, \check{\chi}_t, t].$$

Тогда (лемма 3.3.5(a)) $\hat{u}_{t,\sigma_{n'}} \to \check{u}_t$ в пространстве $\mathbb{X}$.

В силу неравенства (1.42), монотонности (1.35) и свойства (3.1.7) площади границы раздела фаз, получаем

$$S[\check{\chi}_t] \le \varliminf_{n'\to\infty} S[\hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}] = \lim_{n'\to\infty} S[\hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}] \le S[\hat{\chi}^{\min}_t].$$

Следовательно, пара $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t$ — одна (если их несколько) из пар $\hat{u}^{\min}_t$, $\hat{\chi}^{\min}_t$. Таким образом, $S[\check{\chi}_t] = S[\hat{\chi}^{\min}_t]$ и $S[\hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}}] \to S[\hat{\chi}^{\min}_t]$. □

В последней из предлагаемых лемм дается достаточное условие разрешимости задачи (2.1.12).

**Лемма 1.9.** *Пусть в соотношении* (1.27) *функция* $\check{\chi}_t \in \mathbb{Z}'$. *Тогда* $\mathfrak{B}_t \neq \emptyset$.

Доказательство. Из леммы 3.1.2(b) следует существование такой подпоследовательности последовательности (1.27) (сохраним за ней прежнее обозначение), что $\hat{\chi}_{t,\sigma_{n'}} \to \check{\chi}_t$ почти вюду в $\Omega$. Тогда справедливость доказываемой леммы вытекает из соотношений (1.43), гарантирующих включение $\check{u}_t, \check{\chi}_t \in \mathfrak{B}_t$. □

Из утверждений четвертого этапа следует справедливость следующей теоремы.

**Теорема 1.2.** *Пусть множество* $\mathfrak{B}_t$ *не пусто и содержит пару* $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ *с* $\hat{\chi}_t \in \mathbb{Z}$. *Тогда в* (1.27) *в качестве пары* $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t$ *может быть только одна из пар* $\hat{u}_t^{\min}$, $\hat{\chi}_t^{\min}$.

## §2. Квазивыпуклая оболочка в изотропном случае.

Нам предстоит в случае однородной изотропной двухфазовой среды описать множество всех решений задачи (1.26). Для этого вычислим в явном виде квазивыпуклую оболочку (1.10) для плотностей энергии (2.2.2) при наличии условия (2.2.3).

Для формулировки результатов вычислений введем функции $t_\pm(z)$, $t^*(z)$ параметра $z \in R^1$

$$t_-(z) = t^*(z) - \frac{[(c-z)(a+bm)]^2}{a_- + b_-}, \quad t_+(z) = t^*(z) + \frac{[(c-z)(a+bm)]^2}{a_+ + b_+}, \qquad t^*(z) = -[m(c-z)^2(a+bm)]. \tag{2.1}$$

Функции (2.1) получаются из температур фазовых переходов $t_\pm$ и числа $t^*$, определенных в (2.2.28) заменой

$$c_\pm \mapsto c_\pm - z, \qquad t_\pm(0) = t_\pm, \quad t^*(0) = t^*. \tag{2.2}$$

Тогда в силу (2.2.29)

$$t_+(z) - t_-(z) = [(c-z)(a+bm)]^2 \frac{(a_+ + b_+) + (a_- + b_-)}{(a_+ + b_+)(a_- + b_-)} \geq 0, \tag{2.3}$$

причем равенство возможно лишь для значений $z = z^*$, определяемых уравнением

$$[(c - z^*)(a + bm)] = 0. \tag{2.4}$$

В решение $\hat{Q}(t)$ задачи (2.2.10) в качестве дополнительных аргументов введем числа $c_\pm$:

$$\hat{Q}(t) \equiv \hat{Q}(t, c_\pm). \tag{2.5}$$

Согласно (2.2) положим

$$P(t,z) \equiv \hat{Q}(t, c_\pm - z). \tag{2.6}$$

Пользуясь результатами §2.2, имеем

$$P(t,z) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leq t_-(z) \quad \text{в случае} \quad t_+(z) > t_-(z) \\ 0 & \text{при} \quad t \geq t_+(z) \quad \text{в случае} \quad t_+(z) > t_-(z) \\ \text{любое число интервала} \quad [0,1] & \text{при} \quad t = t^*(z) \quad \text{в случае} \quad t_+(z) = t_-(z) \end{cases},$$

$$\text{а при} \quad t \in (t_-(z), t_+(z)) \neq \emptyset$$

$$P(t,z) = \begin{cases} h(t,z) & \text{в случае} \quad [a+b] = 0 \\ \frac{(a_+ + b_+) + (a_- + b_-)}{2[a+b]} + \frac{1}{2} - \frac{1}{[a+b] g^{1/2}(t,z)} & \text{в случае} \quad [a+b] \neq 0 \end{cases}, \tag{2.7}$$

где функции $h(t,z)$, $g(t,z)$ получаются из функций (2.2.32) согласно замене (2.2)

$$h(t,z) = \frac{t_+(z) - t}{t_+(z) - t_-(z)}, \quad g(t,z) = \frac{h(t,z)}{(a_- + b_-)^2} + \frac{1 - h(t,z)}{(a_+ + b_+)^2}, \qquad t \in (t_-(z), t_+(z)) \neq \emptyset. \tag{2.8}$$

Очевидно, что при каждом $z$ функция $P(t,z)$ будет решением задачи (2.2.10) после замены (2.2) в функции $G$ из (2.2.4).

**Теорема 2.1.** *Для плотностей энергии* (2.2.2), *удовлетворяющих условиям* (2.2.3), *справедливо равенство*

$$\mathcal{F}(M,t) = P(t,z)(F^+(M) + t) + (1 - P(t,z))F^-(M) -$$

$$-(t_+(z) - t_-(z)) \frac{(a + b_+)(a + b_-)}{(a + b_+) + (a + b_-)} \frac{P(t,z)(1 - P(t,z))}{(a + b_-)P(t,z) + (a + b_+)(1 - P(t,z))}, \quad z = \frac{\operatorname{tr} e(M)}{m}. \tag{2.9}$$

Доказательство. (*a*) *Вычисление величины* $\mathcal{F}(0,t)$. Благодаря (1.18) и результатам §2.2, для плотностей энергии (2.2.2) при условии (2.2.3) имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{F}(0,t)=G(\hat{Q}(t),t)=\\ =t\hat{Q}(t)+mc_+^2(a+b_+m)\hat{Q}(t)+mc_-^2(a+b_-m)(1-\hat{Q}(t))-[c(a+bm)]\alpha(\hat{Q}(t))\hat{Q}(t)(1-\hat{Q}(t)).\end{gathered}\tag{2.10}$$

(*b*) *Вычисление* $\mathcal{F}(M,t)$ *с помощью формулы для* $\mathcal{F}(0,t)$. Пользуясь равенством (1.13), получаем

$$\begin{gathered}F^{\pm}(M+\nabla u,\zeta^{\pm})=F^{\pm}(M+\nabla u,c_{\pm}i)=F^{\pm}(\nabla u,c_{\pm}i-e(M)),\\ i\text{— единичная матрица в пространстве } R^m.\end{gathered}\tag{2.11}$$

Непосредственные вычисления дают

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}^2\left(e(\nabla u)-(c_{\pm}i-e(M))\right)=\operatorname{tr}^2\left(e(\nabla u)-(c_{\pm}-\frac{\operatorname{tr}e(M)}{m})i\right),\\ \operatorname{tr}\left(e(\nabla u)-(c_{\pm}i-e(M))\right)^2=\operatorname{tr}\left(e(\nabla u)-(c_{\pm}-\frac{\operatorname{tr}e(M)}{m})i\right)^2+\\ +\operatorname{tr}e^2(M)-m\frac{\operatorname{tr}^2e(M)}{m^2}+\\ +2\left(\operatorname{tr}(e(M)e(\nabla u))-\frac{\operatorname{tr}e(M)}{m}\operatorname{tr}e(\nabla u)\right).\end{gathered}\tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что

$$\begin{gathered}F^{\pm}(\nabla u+M,c_{\pm}i)=F^{\pm}(\nabla u,(c_{\pm}-\frac{\operatorname{tr}e(M)}{m})i)+\\ +a\left(\operatorname{tr}e^2(M)-m\frac{\operatorname{tr}^2e(M)}{m^2}\right)+2a\left(\operatorname{tr}(e(M)e(\nabla u))-\frac{\operatorname{tr}e(M)}{m}\operatorname{tr}e(\nabla u)\right).\end{gathered}\tag{2.13}$$

Используя обозначение (1.15), с помощью формулы (2.13) имеем

$$I_0[u+v_M,\chi,t,c_{\pm}i]=I_0[u,\chi,t,(c_{\pm}-\frac{\operatorname{tr}e(M)}{m})i]+a|\Omega|(\operatorname{tr}e(M)^2-m\frac{\operatorname{tr}^2e(M)}{m^2}).\tag{2.14}$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(M,t,c_{\pm}i)=a(\operatorname{tr}e^2(M)-m\frac{\operatorname{tr}^2e(M)}{m^2})+\mathcal{F}(0,t,(c_{\pm}-\frac{\operatorname{tr}e(M)}{m})i).\tag{2.15}$$

Учитывая формулу (2.15) и определение (2.2.4) функции $\alpha(Q)$, окончательно получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{F}(M,t)=a(\operatorname{tr}e^2(M)-mz^2)+G(P(t,z),t,z),\\ G(Q,t,z)=\\ =Qt+m(c_+-z)^2(a+b_+m)Q+m(c_--z)^2(a+b_-m)(1-Q)-\frac{[(c-z)(a+bm)]^2Q(1-Q)}{(a+b_-)Q+(a+b_+)(1-Q)},\\ z=\frac{\operatorname{tr}e(M)}{m}.\end{gathered}\tag{2.16}$$

Функция $G(Q,t,z),Q\in[0,1],t,z\in R^1$ получается из определенной в (2.2.4) функции $G(Q,t)$ заменой чисел $c_{\pm}$ на $c_{\pm}-z$.

(*c*) *Преобразование формулы* (2.16). Для любого числа $P$ имеем

$$\begin{gathered}a(\operatorname{tr}e^2(M)-mz^2)+Pt+Pm(c_+-z)^2(a+b_+m)+(1-P)m(c_--z)^2(a+b_-m)=\\ =P(a\operatorname{tr}(e(M)-c_+i)^2+b_+\operatorname{tr}^2(e(M)-c_+i)+t)+(1-P)(a\operatorname{tr}(e(M)-c_-i)^2+b_-\operatorname{tr}^2(e(M)-c_-i)),\end{gathered}\tag{2.17}$$

что вместе с (2.16) и (2.3) приводит к справедливости равенства (2.9). □

Раскрывая правые части равенств (2.1), получаем

$$\text{при } a_+ = a_- = a$$

$$\begin{aligned} t_+(z) &= -z^2m^2[b]\frac{a+b_-}{a+b_+} + 2zm[c(a+bm)]\frac{a+b_-}{a+b_+} - [mc^2(a+bm)] + \frac{[c(a+bm)]^2}{a+b_+}, \\ t_-(z) &= -z^2m^2[b]\frac{a+b_+}{a+b_-} + 2zm[c(a+bm)]\frac{a+b_+}{a+b_-} - [mc^2(a+bm)] - \frac{[c(a+bm)]^2}{a+b_-}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

При дополнительном предположении формулы (2.18) упрощаются

$$\text{при } a_- = a_+ = a,\ b_- = b_+ = b$$

$$\begin{aligned} t_+(z) &= 2zm(a+bm)[c] - m(a+bm)[c^2] + \frac{(a+bm)^2}{a+b}[c]^2, \\ t_-(z) &= 2zm(a+bm)[c] - m(a+bm)[c^2] - \frac{(a+bm)^2}{a+b}[c]^2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$[b]^2 + [c]^2 \neq 0, \tag{2.20}$$

поскольку при выполнении условия (2.2.3), в противном случае, $F^+(M) \equiv F^-(M)$ и задача о фазовых переходах вырождается в классическую задачу теории упругости.

При $[a] = 0$, $[b] \neq 0$ графики функций $t_\pm(z)$ суть сонаправленные параболы, касающиеся друг-друга вершинами, расположенными в точке

$$z^* = \frac{[c(a+bm)]}{m[b]}, \quad t^*(z^*) = \frac{(a+b_+m)(a+b_-m)}{[b]}[c]^2. \tag{2.21}$$

При $[a] = 0$, $[b] = 0$, $[c] \neq 0$ графики функций $t_\pm(z)$ суть различные параллельные негоризонтальные прямые. Очевидно, что равенство (2.4) возможно лишь в случае парабол.

Непосредственные вычисления при $[a] = 0$ дают

$$F^+(M) - F^-(M) = -t^*(z), \quad z = \frac{\operatorname{tr} e(M)}{m}. \tag{2.22}$$

Из (2.21) и (2.22) вытекает однозначная определенность и непрерывность функции (2.9) в точке неоднозначности функции (2.7). Последнее замечание согласует утверждения теоремы 2.1 и леммы 1.3.

Для облегчения доказательств ближайших утверждений нам полезно получить ряд фактов, касающихся обратных к (2.18) и (2.19) функций. Эти факты будут различны в случае (2.18) и (2.19).

*Случай* (2.19) : $[a] = 0$, $[b] = 0$, $[c] \neq 0$. Обратные к (2.19) функции задаются равенствами

$$z_\pm(t) = \frac{t}{2m(a+bm)[c]} + \frac{c_+ + c_-}{2} \mp \frac{(a+bm)}{2m(a+b)}[c], \quad t \in R^1. \tag{2.23}$$

Используя формулы (2.2.28) для чисел $t_\pm$, $t^*$, получаем

$$z_\pm(t) = \frac{(a+bm)[c]}{m(a+b)}\frac{t - t_\pm}{t_+ - t_-}, \quad t \in R^1. \tag{2.24}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered} z_+(t) - z_-(t) = -\frac{(a+bm)[c]}{m(a+b)}, \\ z_+(t) - z_-(t) > 0 \quad \text{при} \quad [c] < 0, \qquad z_+(t) - z_-(t) < 0 \quad \text{при} \quad [c] > 0. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Пересечение прямой $t = t_0$, $z \in R^1$ с зазором между прямыми (2.19) состоит из одного отрезка, проекция на ось $z$ которого имеет вид

$$(z_+(t_0), z_-(t_0)) \quad \text{при} \quad [c] > 0, \qquad (z_-(t_0), z_+(t_0)) \quad \text{при} \quad [c] < 0. \tag{2.26}$$

Интервал (2.26) совпадает с зоной непостоянства функции $P(t_0, .)$.

В исследуемом случае температуры фазовых переходов $t_\pm = t_\pm(0)$ различны. Поскольку для $t_0 \in (t_-, t_+)$

$$\hat{Q}(t_0) = \frac{t_+ - t_0}{t_+ - t_-}, \quad \alpha(\hat{Q}(t_0)) = \frac{[c](a + bm)}{a + b}$$

(формулы (2.2.33) и (2.2.4)), из (2.24) следует, что

$$z_+(t_0) = -\frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))}{m}\hat{Q}(t_0), \quad z_-(t_0) = \frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))}{m}(1 - \hat{Q}(t_0)), \qquad \text{для всех} \quad t_0 \in (t_-, t_+). \tag{2.27}$$

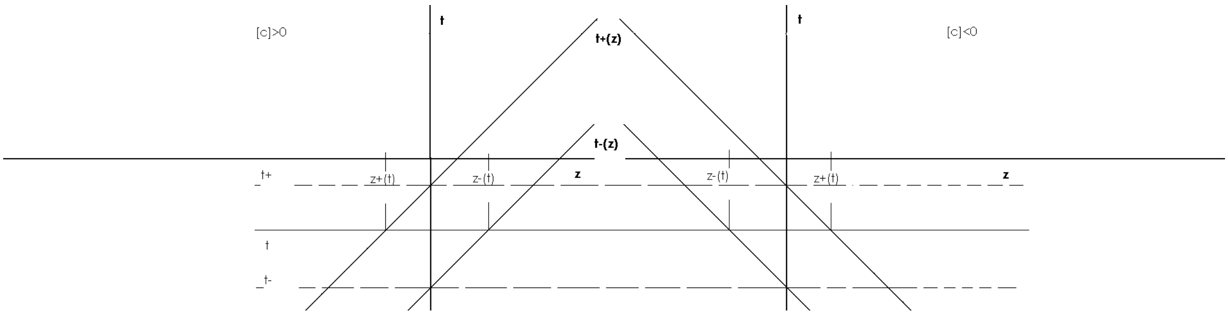


Рис.2.1

Графики функций $t_\pm(z)$, числа $z_\pm(t)$ и температуры $t_\pm$.

*Случай* (2.18) : $[a] = 0$, $[b] \neq 0$, $[c]$ — *произвольно.* Обратные к (2.18) функции $z_\pm(t)$ определены лишь при следующих значениях аргумента $t$

$$t \geq t^*(z^*) \quad \text{при} \quad [b] < 0, \qquad t \leq t^*(z^*) \quad \text{при} \quad [b] > 0. \tag{2.28}$$

Выделяя в соотношениях (2.18) полный квадрат, получаем

$$(z - z^*)^2 = \frac{a + b_+}{a + b_-}\frac{1}{m^2[b]}(t^*(z^*) - t_+(z)), \quad (z - z^*)^2 = \frac{a + b_-}{a + b_+}\frac{1}{m^2[b]}(t^*(z^*) - t_-(z)), \tag{2.29}$$

что приводит к формуле для значений в точке $t = t_0$ двузначных функций $z_\pm(t)$, обратных к функциям (2.18)

$$(z_+(t_0) - z^*)^2 = \frac{a + b_+}{a + b_-}\frac{1}{m^2[b]}(t^*(z^*) - t_0), \quad (z_-(t_0) - z^*)^2 = \frac{a + b_-}{a + b_+}\frac{1}{m^2[b]}(t^*(z^*) - t_0). \tag{2.30}$$

Пусть $t = t_0$ удовлетворяет строгому неравентву (2.28). Тогда пересечение прямой $t = t_0$, $z \in R^1$ с зазором между параболами (2.18) состоит из двух отрезков, концы проекций которых на ось $z$ определяются равенствами (2.30). Указанные проекции задают два интервала, совпадающие с зоной непостоянства функции $P(t_0, .)$.

Пусть температуры фазовых переходов $t_\pm = t_\pm(0)$ различны. Последнее означает, что $z^* \neq 0$. Пользуясь формулой (2.2.33) для $\hat{Q}(t)$, формулой (2.2.4) для величины $\alpha(\hat{Q}(t))$ и формулой (2.21) для числа $z^*$, при $t_0 \in (t_-, t_+)$ имеем

$$\hat{Q}(t_0) = \frac{a+b_+}{[b]} - \frac{1}{[b]g^{1/2}(t_0)},$$

$$-\frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))\hat{Q}(t_0)}{m} - z^* = -(a+b_+)z^* g^{1/2}(t_0), \quad \frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))(1-\hat{Q}(t_0))}{m} - z^* = -(a+b_-)z^* g^{1/2}(t_0). \tag{2.31}$$

Непосредственные вычисления, учитывающие равенство (2.21) для $t^*(z^*)$ и формулу (2.2.32) для функции $g(t)$, дают

$$(a+b_+)^2 z^{*2} g(t_0) = \frac{a+b_+}{a+b_-}\frac{1}{m^2[b]}(t^*(z^*) - t_0), \quad (a+b_-)^2 z^{*2} g(t_0) = \frac{a+b_-}{a+b_+}\frac{1}{m^2[b]}(t^*(z^*) - t_0). \tag{2.32}$$

Комбинация равенств (2.30) и (2.32) приводит к

$$(z_\pm(t_0) - z^*)^2 = (a+b_\pm)^2 z^{*2} g(t_0). \tag{2.33}$$

С помощью (2.31) и (2.33) получаем

$$(z_+(t_0) - z^*)^2 = \left(-\frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))\hat{Q}(t_0)}{m} - z^*\right)^2, \quad (z_-(t_0) - z^*)^2 = \left(\frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))(1-\hat{Q}(t_0))}{m} - z^*\right)^2. \tag{2.34}$$

Равенства (2.34) уточняют формулы (2.30) в случае $t_0 \in (t_-, t_+)$.

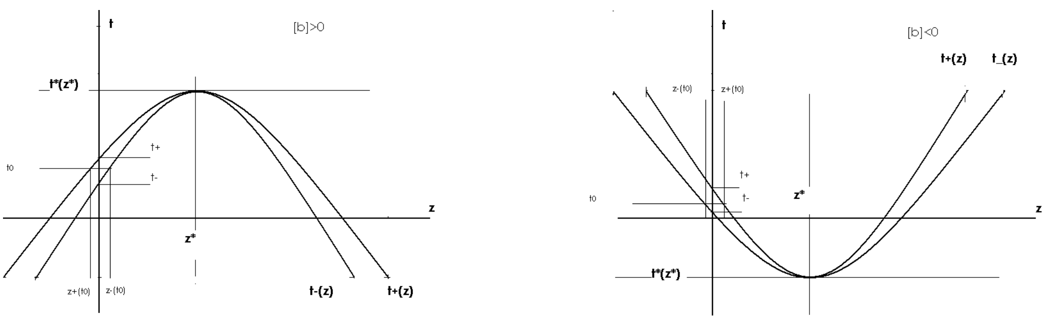


Рис.2.2

Графики функций $t_\pm(z)$, числа $z_\pm(t_0)$ и температуры $t_\pm$ в случае $z^* > 0$.

В силу равенства (2.31) величины

$$-\frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))\hat{Q}(t_0)}{m} - z^* \quad \text{и} \quad \frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))(1-\hat{Q}(t_0))}{m} - z^*$$

одного знака, противоположного знаку $z^*$. Следовательно, решения уравнений (2.34)

$$z_+(t_0) = -\frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))\hat{Q}(t_0)}{m}, \quad z_-(t_0) = \frac{\alpha(\hat{Q}(t_0))(1-\hat{Q}(t_0))}{m} \tag{2.35}$$

лежат по одну сторону от числа $z^*$. Поскольку числа (2.35) разных знаков, они задают тот из интервалов непостоянства функции $P(t_0,.)$

$$\begin{gathered}\text{в случае}\quad z^*>0\\ [z_+(t_0),z_-(t_0)]\quad\text{при}\quad[b]>0,\qquad[z_-(t_0),z_+(t_0)]\quad\text{при}\quad[b]<0,\\ \text{в случае}\quad z^*<0\\ [z_-(t_0),z_+(t_0)]\quad\text{при}\quad[b]>0,\qquad[z_+(t_0),z_-(t_0)]\quad\text{при}\quad[b]<0,\end{gathered}\tag{2.36}$$

который содержит точку $z=0$.

Продолжим изучение свойств квазивыпуклой оболочки (2.9). Пользуясь тождеством

$$\operatorname{tr} e^2(\nabla u)=\frac{|\operatorname{rot} u|^2}{4}+u^i_{x_j}u^j_{x_i},\quad u\in W^1_2(\Omega,R^m),$$

и формулой (2.16) представим ее в виде

$$\begin{gathered}\mathcal{F}(\nabla u,t)=a\frac{|\operatorname{rot} u|^2}{4}+a(u^i_{x_j}u^j_{x_i}-|\operatorname{div} u|^2)+R(t,z),\\ R(t,z)=am(m-1)z^2+G(P(t,z),t,z),\quad z=\frac{\operatorname{tr} e(\nabla u)}{m}=\frac{\operatorname{div} u}{m}.\end{gathered}\tag{2.37}$$

**Лемма 2.1.** *Функция $R(t,.)$ линейна в зоне непостоянства функции $P(t,.)$.*

Доказательство. Пусть для $t=t_0$ зона непостоянства функции $P(t_0,.)$ не пуста. Это так для всех $t_0$ при $[b]=0$. В этом случае зона непостоянства состоит из некоторого отрезка $(z_-,z_+)$, конечные точки которого определяются равенством (2.26) с помощью величин $z_\pm(t_0)$ (см.рис.2.1). При $[b]\neq 0$ зона непостоянства функции $P(t_0,.)$ не пуста лишь для $t=t_0$, удовлетворяющего строгому неравенству (2.28). В этом случае она состоит из двух непересекающихся отрезков $(z_-^{(1)},z_+^{(1)})$, $(z_-^{(2)},z_+^{(2)})$, конечные точки которых определяются из уравнений (2.30) через величины $z_\pm(t_0)$ (см.рис.2.2). Очевидно, что для таких $t_0$ число $z^*$ не лежит в зоне непостоянства функции $P(t_0,.)$.

В обоих случаях справедливо включение $t_0\in(t_-(z),t_+(z))$ для всех $z$ из зоны непостоянства функции $P(t_0,.)$. Поэтому для этих $z$ функция $P(t_0,.)$ является единственным решением уравнения

$$G_Q(P(t_0,z),t_0,z)=0,\tag{2.38}$$

дифференцируя которое, получаем

$$P_z(t_0,z)=-\frac{G_{Qz}(P(t_0,z),t_0,z)}{G_{QQ}(P(t_0,z),t_0,z)}.\tag{2.39}$$

Тогда

$$\frac{d^2}{dz^2}R(t_0,z)=2am(m-1)+G_{zz}(P(t_0,z),t_0,z)-\frac{G^2_{Qz}(P(t_0,z),t_0,z)}{G_{QQ}(P(t_0,z),t_0,z)}\tag{2.40}$$

(при выводе этой формулы использовались равенства (2.38) и (2.39)).

Непосредственные вычисления дают

$$\begin{gathered}G_{QQ}(P,t,z)=\frac{2[(c-z)(a+bm)]^2(a+b_+)(a+b_-)}{((a+b_-)P+(a+b_+)(1-P))^3},\\ G_{Qz}(P,t,z)=-\frac{2m[(c-z)(a+bm)](a+b_+)(a+b_-)}{((a+b_-)P+(a+b_+)(1-P))^2},\\ G_{zz}(P,t,z)=\frac{2m((a+b_+m)(a+b_-)P+(a+b_-m)(a+b_+)(1-P))}{(a+b_-)P+(a+b_+)(1-P)}\end{gathered}\tag{2.41}$$

(первая формула (2.41) получается из второй формулы (2.2.30) заменой (2.2)).

Подстановка (2.41) в правую часть (2.40) обнуляет ее для всех значений $P \in [0,1]$, $z, t_0 \in R^1$. $\square$

Лемма 2.1 позволяет придать формуле (2.37) для квазивыпуклой оболочки более наглядную форму. Положим

$$R^+(t,z) = am(m-1)z^2 + m(z-c_+)^2(a+b_+m)+t, \quad R^-(z) = am(m-1)z^2 + m(z-c_-)^2(a+b_-m), \tag{2.42}$$

Функции (2.42) получаются из функци $R(t,z)$ подстановкой в нее $P(t,z)=1$ и $P(t,z)=0$, соответственно. Пусть

$$R^{\min}(t,.) = \min\{R^+(t,.), R^-(.)\}. \tag{2.43}$$

Обозначим через $R_c^{\min}(t,.)$ выпуклую оболочку функции $R^{\min}(t,)$ — наибольшую выпуклую функцию, не превосходящую функции $R^{\min}(t,.)$.

**Теорема 2.2.** *В представлении* (2.37) *для квазивыпуклой оболочки* (2.9) *справедливо равенство*

$$R(t,.) = R_c^{\min}(t,.). \tag{2.44}$$

Доказательство. Начнем с гладкости функции $R(t,.)$. Непрерывность и кусочная непрерывная дифференцируемость функции $R(t,.)$ очевидна. Докажем ее непрерывную дифференцируемость, что будет сделано отдельно для предположений $[b]=0$ и $[b]\neq 0$.

Пусть $z_+$, $z_-$ — граничные точки какого либо интервала линейности функции $R(t,.)$, причем в точках $z_\pm$ прямолинейные части графика пересекают параболы $R^\pm(t,.)$, соответственно. Для проверки требуемого утверждения следует установить справедливость в точках $z_\pm$ условий Вейерштрасса-Эрдмана (1.4.17) для функций (2.42)

$$R_z^+(t,z_+) = R_z^-(t,z_-), \quad R^+(t,z_+) - z_+R_z^+(t,z_+) = R^-(t,z_-) - z_-R_z^-(t,z_-), \tag{2.45}$$

которые имеют вид

$$[zm(a+b)] = [c(a+bm)], \quad [z^2m^2(a+b)] = [mc^2(a+bm)] + t. \tag{2.46}$$

(*a*) *Случай* $[b]=0$. При этом условии система (2.46) дает

$$z_+ - z_- = \frac{(a+bm)[c]}{m(a+b)}, \quad z_+ + z_- = \frac{t}{m(a+bm)[c]} + (c_+ + c_-). \tag{2.47}$$

Из формул (2.24) получаем

$$z_+ = z_-(t) = \frac{(a+bm)[c]}{m(a+b)}\frac{t-t_-}{t_+-t_-}, \quad z_- = z_+(t) = \frac{(a+bm)[c]}{m(a+b)}\frac{t-t_+}{t_+-t_-}. \tag{2.48}$$

Пользуясь формулами (2.2.28), убеждаемся в том, что числа (2.48) являются решениями системы (2.47).

(*b*) *Случай* $[b]\neq 0$. Пользуясь очевидным при условии $[b]\neq 0$ равенством

$$z^2 = (z-z^*)^2 + 2z\frac{[c(a+bm)]}{m[b]} - \frac{[c(a+bm)]^2}{m^2[b]^2}$$

с определенным в (2.21) числом $z^*$, перепишем систему (2.46) в эквивалентном виде

$$\begin{gathered} z_+m(a+b_+) - z_-m(a+b_-) = [c(a+bm)], \\ (a+b_+)(z_+-z^*)^2 - (a+b_-)(z_- - z^*)^2 = \frac{1}{m^2}\left(t + [mc^2(a+bm)] - \frac{[c(a+bm)]^2}{[b]}\right). \end{gathered} \tag{2.49}$$

Из формул (2.29), для обоих интервалов линейности функции $R(t,.)$ следует, что

$$
\begin{aligned}
(z_+ - z^*)^2 = (z_-(t) - z^*)^2 = \frac{a+b_-}{a+b_+}\frac{1}{m^2[b]}(t^*(z^*) - t),\\
(z_- - z^*)^2 = (z_+(t) - z^*)^2 = \frac{a+b_+}{a+b_-}\frac{1}{m^2[b]}(t^*(z^*) - t).
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

с определенным в (2.21) числом $t^*(z^*)$. Непосредственно проверяется, что удовлетворяющие (2.50) числа $z_\pm$, являются решением системы (2.49).

(3) *Завершение доказательства теоремы.* Так как функции $R^\pm(t,.)$ выпуклы, из непрерывной дифференцируемости функции $R(t,.)$ следует монотонный рост ее призводной $R_z(t,.)$. Поэтому функция $R(t,.)$ также выпукла. Очевидно, что между графиками функций $R^{\min}(t,.)$ и $R(t,.)$ нельзя разместить график какой-либо иной выпуклой функции. Следовательно, $R(t,.) = R_c^{\min}(t,.)$. □

Схематичные графики функций $R(t,.)$ в случаях $[b]=0$ и $[b]\neq 0$ изображены на рисунке 2.3: верхний ряд — функция $R(t,.)$, нижний ряд — зона непостоянства функции $P(t,.)$. Отметим, что при условии $[b]=0$ график функции $R(t,.)$ имеет линейный участок при всех значениях температуры, в то время как при условии $[b]\neq 0$ график этой функции теряет линейные зоны при $t \geq t^*(z^*)$, если $[b]>0$, и при $t \leq t^*(z^*)$, если $[b]<0$.

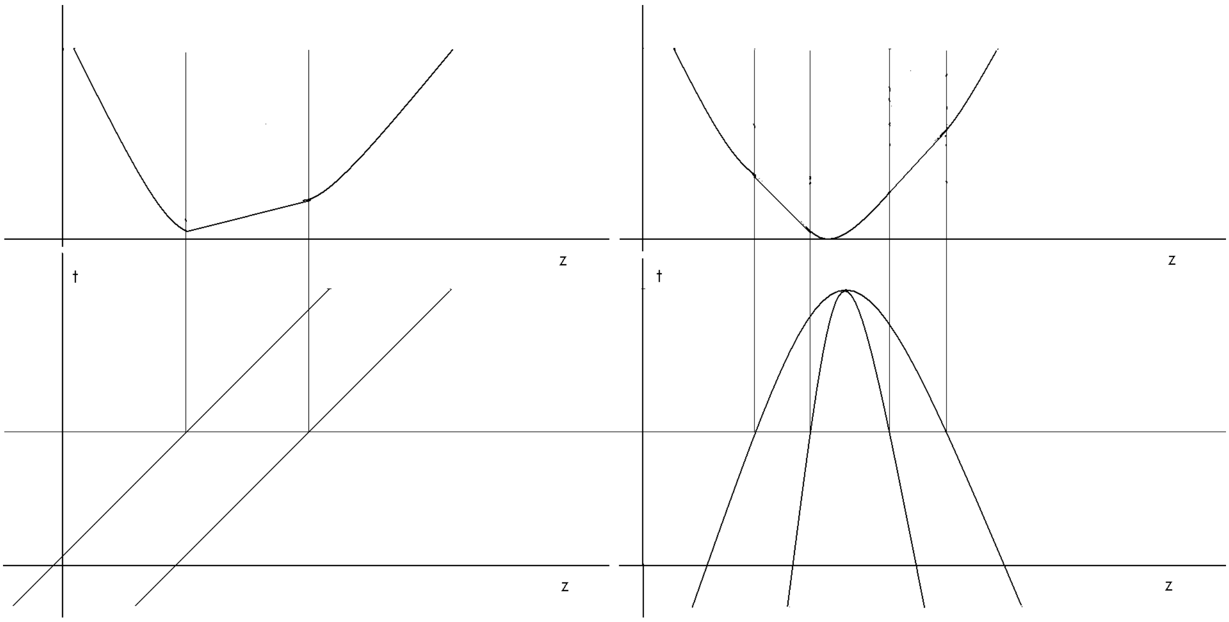


Рис.2.3

При интегрировании по области $\Omega$ правой части (2.37) центральное слагаемое исчезает. Поэтому формула для релаксированного функционала имеет вид

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{I}[u,t] = \int_\Omega \mathcal{F}(\nabla u, t)\,dx, \qquad u \in \mathbb{X}, \quad t \in R^1,\\
\mathcal{F}(\nabla u, t) = a\frac{|\operatorname{rot} u|^2}{4} + R_c^{\min}(t,z), \quad z = \frac{\operatorname{tr} e(\nabla u)}{m} = \frac{\operatorname{div} u}{m},
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

говорящий о его выпуклости по аргументу $u \in \mathbb{X}$.

Явная формула для квазивыпуклой оболочки позволит дать описание множества всех решений задачи (1.26) и указать, какая их доля является решением задачи (1.4). Для этого нам потребуется множество

$$\mathbb{Y}_t'' = \{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'' : \operatorname{rot} u = 0, \operatorname{div} u = \alpha(\hat{Q}(t))(\chi - \hat{Q}(t)), \ \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi\, dx = \hat{Q}(t)\}. \tag{2.52}$$

Напомним, что согласно лемме 1.2 функция $\hat{u}_t$ является решением задачи (1.4) в том и только том случае, если она является первой компонентой пары $\hat{u}_t, \hat{\chi}_t \in \mathbb{Y}_t'$ (см.(2.2.36)).

Если $[c(a+bm)] \neq 0$, то функция $\hat{Q}(t)$ однозначна и $\alpha(\hat{Q}(t))) \neq 0$. Поэтому в указанном случае в паре $u, \chi \in \mathbb{Y}_t''$ каждая ее компонента однозначно определяется другой. Если $[c(a+bm)] = 0$, но $t \neq t^*(=t_\pm)$, то $\hat{Q}(t)$ по-прежнему однозначна, но $\alpha(\hat{Q}(t)) = 0$. Поэтому в данном случае множество $\mathbb{Y}_t''$ исчерпывается парами $u = 0, \chi = 1$ при $t < t^*$ и $u = 0, \chi = 0$ при $t > t^*$. Если же $[c(a+bm)] = 0$ и $t = t^*$, то в силу неоднозначности величины $\hat{Q}(t^*)$ и равенства нулю числа $\alpha(\hat{Q}(t^*))$, множество $\mathbb{Y}_t''$ состоит из пар $u = 0$, $\chi$ — произвольный элемент множества $\mathbb{Z}''$.

**Теорема 2.3.** *Для плотностей энергии* (2.2.2)*, удовлетворяющих условию* (2.2.3)*, функция* $\check{u}_t$ *будет решением задачи* (1.26) *в том и только том случае, если она является первой компонентой пары* $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t$*, принадлежащей множеству* $\mathbb{Y}_t''$.

Доказательство. (1) *Доказательство необходимости.* Пусть $\check{u}_t$ — решение задачи (1.26). Тогда (свойство (2) квазивыпуклой оболочки и равенство (1.7)) существует такая минимизирующая последовательность $u_n$, $\chi_n$ функционала $I_0[.,.,t]$, что для некоторой функции $\check{\chi} \in \mathbb{Z}''$ при $n \to \infty$

$$u_n \rightharpoonup \check{u}_t \quad \text{в пространстве} \quad W_2^1(\Omega), \qquad \chi_n \rightharpoonup \check{\chi}_t \quad \text{в пространстве} \quad L_2(\Omega). \tag{2.53}$$

Для плотностей энергии (2.2.2), удовлетворяющих условию (2.2.3), в силу представления (2.2.4) и лемм 2.2.2, 2.2.3, имеем

$$\begin{gathered}\operatorname{rot} u_n \to 0, \quad \operatorname{div} u_n - \alpha(Q_n)(\chi_n - Q_n) \to 0 \quad \text{в пространстве} \quad L_2(\Omega),\\ G(Q_n, t) \to G(\hat{Q}(t), t), \quad Q_n = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi_n\, dx.\end{gathered} \tag{2.54}$$

Из последних соотношений (2.53) и (2.54) следует, что $Q_n \to \hat{Q}(t)$. Поэтому предельный переход в (2.53) приводит к требуемому включению $\check{u}_t, \check{\chi}_t \in \mathbb{Y}_t''$.

(2) *Доказательство достаточности.* Доказательство разобьем на ряд этапов.

(*a*) *Случай* $t_- < t_+$, $t \notin (t_-, t_+)$. При сделанных предположениях $\hat{Q}(t) = 1$ при $t \leq t_-$, $\hat{Q}(t) = 0$ при $t \geq t_+$. Следовательно, функция $\check{\chi}_t$ из множества (2.52) может иметь лишь следующий вид $\check{\chi}_t \equiv 1$ при $t \leq t_-$, $\check{\chi}_t \equiv 0$ при $t \geq t_+$. Поэтому множество (2.52) исчерпывается парами

$$\check{u}_t \equiv 0, \quad \check{\chi}_t \equiv 1 \quad \text{при} \quad t \leq t_-, \qquad \check{u}_t \equiv 0, \quad \check{\chi}_t \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_+. \tag{2.55}$$

Поскольку пары $\hat{u}_t \equiv 0$, $\hat{\chi}_t \equiv 1$ и $\hat{u}_t \equiv 0$, $\hat{\chi}_t \equiv 0$ являются состояниями равновесия исследуемой двухфазовой упругой среды при $t \leq t_-$ и $t \geq t_+$, соответственно, функция $\check{u}_t \equiv 0$ будет решением задачи (1.4), а, следовательно, и задачи (1.26). Таким образом, в рассматриваемом случае первая компонента любой пары (первая компонента — функция $\check{u}_t \equiv 0$, а пары перечислены в (2.55)) множества (2.52) является решением задачи (1.26).

(*b*) *Случай* $t_- = t_+(=t^*)$, $t \neq t^*$. Исследование этого случая осуществляется так же, как и предыдущего.

(*c*) *Случай* $t_- = t_+(=t^*)$, $t = t^*$. Как уже отмечалось, в этом случае множество (2.52) состоит из пар $\check{u}_t \equiv 0$, $\check{\chi}_t$ — произвольный элемент множества $\mathbb{Z}''$. Осталось доказать, что при сделанных предположениях функция $\check{u}_t \equiv 0$ является решением задачи (1.26). При $t = t_\pm = t^*$ множество состояний равновесия исследуемой двухфазовой упругой среды исчерпывается парами $\hat{u}_t \equiv 0$, $\hat{\chi}_t$ — произвольный элемент множества $\mathbb{Z}'$. Следовательно, функция $\check{u}_t = 0$ будет решением задачи (1.4), а, стало быть, и задачи (1.26).

$(d)$ *Случай* $t_- < t_+$, $t \in (t_-, t_+)$. Из (2.51) следует, что для всех пар $u, \chi \in \mathbb{Y}''_t$

$$\begin{gathered} \mathfrak{I}[u,t] = \int_\Omega R_c^{\min}(t,z)\,dx, \\ z \equiv z(x) = \frac{\operatorname{div} u(x)}{m} = \frac{\alpha(\hat{Q}(t))(\chi(x) - \hat{Q}(t))}{m} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \end{gathered} \tag{2.56}$$

Поскольку $0 \le \chi(x) \le 1$ почти всюду в $\Omega$, значения функции $z(x)$ лежат при почти всех $x \in \Omega$ в интервале зоны непостоянства функции $P(t,.)$, содержащем точку $z = 0$, в котором функция $R_c^{\min}(t,.)$ линейна. Так как среднее значение функции $z(x)$ равно нулю,

$$\text{величина } \int_\Omega R_c^{\min}(t,z)\,dx \text{ при } t \in (t_-, t_+) \text{ не зависит от } z \text{ на множестве пар } u, \chi \in \mathbb{Y}''. \tag{2.57}$$

Пусть $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ — какое либо состояние равновесия исследуемой двухфазовой упругой среды. Из включений $\hat{u}_t, \hat{\chi}_t \in \mathbb{Y}'_t \subset Y''_t$ и сотношений (2.56), (2.57) следует, что

$$\begin{gathered} \mathfrak{I}[u,t] = \mathfrak{I}[\hat{u}_t, t] \\ \text{для первой компоненты } u \text{ любой пары } u, \chi \in \mathbb{Y}''_t,\ t \in (t_-, t_+). \end{gathered} \tag{2.58}$$

Поскольку функция $\hat{u}_t$ минимизирует функционал $\mathfrak{I}[.,t]$, первая компонента $u$ любой пары множества $\mathbb{Y}''_t$, $t \in (t_-, t_+)$ также минимизирует этот функционал. $\square$

Примеры пар $u, \chi \in \mathbb{Y}''_t$ при $t \in (t_-, t_+) \neq \emptyset$ могут быть построены различными способами. Рассмотрим два из них.

(1). По любой функции $p$

$$p \in \overset{\circ}{W}{}^2_2(\Omega), \qquad \frac{\Delta p(x)}{\alpha(\hat{Q}(t))} \in [-\hat{Q}(t), 1 - \hat{Q}(t)] \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \tag{2.59}$$

(отметим, что при $t \in (t_-, t_+) \neq \emptyset$ число $\alpha(\hat{Q}(t)) \neq 0$ и $\hat{Q}(t) \in (0,1)$) вычислим функции $u$ и $\chi$ согласно формулам

$$u = \nabla p, \quad \chi = \frac{\Delta p}{\alpha(\hat{Q}(t))} + \hat{Q}(t). \tag{2.60}$$

Очевидно, что пары (2.59), (2.60) лежат в множестве $\mathbb{Y}''_t$ и среди этих пар имеются как пары с $\chi \in \mathbb{Z}'$, так и пары с $\chi \notin \mathbb{Z}'$.

(2). Фиксируем открытое множество $\omega \subset \Omega$. По его произвольному покрытию Витали и по числу $\hat{Q}(t)$ построим в нем решение $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ задачи (2.2.11). На замкнутое в $\Omega$ множество $\Omega \setminus \omega$ продолжим функцию $\hat{u}_t$ нулем, а функцию $\hat{\chi}_t$ константой $\hat{Q}(t)$. Очевидно, что полученная пара $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t$ лежит в множестве $\mathbb{Y}''_t$ и при $|\omega| \neq |\Omega|$ не является решением задачи (2.1.12).

При переходе от исходной задачи (2.1.12) к релаксированной (1.26) мы приобретаем теорему существования состояний равновесия (для плотностей (2.2.2), (2.2.3) состояния равновесия и так существуют), но теряем информацию о распределении фаз — функцию $\hat{\chi}_t$. Теорема 2.3 восстанавливает эту потерю. В случае $\check{\chi}_t \notin \mathbb{Z}'$ эта функция описывает долю фазы с индексом + в двухфазовом релаксированном состоянии равновесия.

Другой способ перехода от чистых двухфазовых состояний к смеси фаз предлагался в лемме 3.1.4. Отметим (лемма 3.1.5), что эти два способа для плотностей (2.2.2), (2.2.3) совпадают лишь при условии $t = t_\pm = t^*$. Как уже отмечалось, в иных случаях для этих плотностей способ леммы 3.1.4 не приводит к смеси фаз в состоянии равновесия.

## §3. Квазивыпуклая оболочка в анизотропном случае.

Теперь нам предстоит получить определенную информацию о квазивыпуклой оболочки для общего вида (2.1.6) плотностей энергии двухфазовой упругой среды и сделать ряд выводов о состояниях равновесия релаксированного функционала.

Начнем с получения двусторонней оценки квазивыпуклой оболочки. Для формулировки ближайшей теоремы нам потребуется ряд обозначений. Положим

$$
\begin{gathered}
t^*(M) = -[< A(e(M)-\zeta), e(M)-\zeta >], \quad M \in R^{m\times m}, \\
\mu_1^-(M) = t^*(M) - \frac{|[A(e(M)-\zeta)]|^2}{\nu}, \quad \mu_2^-(M) = t^*(M) + \frac{|[A(e(M)-\zeta)]|^2}{\nu}, \\
\mu_1^+(M) = t^*(M) - \frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A(e(M)-\zeta)]}{m^2}, \quad \mu_2^+(M) = t^*(M) + \frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A(e(M)-\zeta)]}{m^2}.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Очевидно, что $\mu_2^\pm(M) \ge \mu_1^\pm(M)$, причем равенство возможно лишь для тех $M \in R^{m\times m}$, для которых

$$
\mathrm{tr}[A(e(M)-\zeta)] = 0, \quad [A(e(M)-\zeta)] = 0 \tag{3.2}
$$

для знаков $+$ и $-$, соответственно.

Зададим функции $P_\pm(t,M)$, $t \in R^1$, $M \in R^{m\times m}$ равенствами

$$
\begin{gathered}
\text{для тех } M, \text{ для которых } \mu_1^+(M) < \mu_2^+(M) \\
P_+(t,M) = 1 \quad \text{при} \quad t \le \mu_1^+(M), \qquad P_+(t,M) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge \mu_2^+(M), \\
P_+(t,M) = \frac{\mu_2^+(M) - t}{\mu_2^+(M) - \mu_1^+(M)} \quad \text{при} \quad t \in (\mu_1^+(M), \mu_2^+(M)); \\
\text{для тех } M, \text{ для которых } \mu_1^+(M) = \mu_2^+(M) = t^*(M) \\
P_+(t,M) = 1 \quad \text{при} \quad t < t^*(M), \qquad P_+(t,M) = 0 \quad \text{при} \quad t > t^*(M), \\
P_+(t^*(M), M) \text{— произвольное число из интервала } [0,1];
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{для тех } M, \text{ для которых } \mu_1^-(M) < \mu_2^-(M) \\
P_-(t,M) = 1 \quad \text{при} \quad t \le \mu_1^-(M), \qquad P_-(t,M) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge \mu_2^-(M), \\
P_-(t,M) = \frac{\mu_2^-(M) - t}{\mu_2^-(M) - \mu_1^-(M)} \quad \text{при} \quad t \in (\mu_1^-(M), \mu_2^-(M)); \\
\text{для тех } M, \text{ для которых } \mu_1^-(M) = \mu_2^-(M) = t^*(M) \\
P_-(t,M) = 1 \quad \text{при} \quad t < t^*(M), \qquad P_-(t,M) = 0 \quad \text{при} \quad t > t^*(M), \\
P_-(t^*(M), M) \text{— произвольное число из интервала } [0,1].
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

Функции $P_\pm(t,M)$ участвуют в определений функций $\mathcal{F}_\pm(M,t)$

$$
\begin{gathered}
\mathcal{F}_+(M,t) = \\
= P_+(t,M)(F^+(M)+t) + (1-P_+(t,M))F^-(M) - \frac{\mu_2^+(M) - \mu_1^+(M)}{2} P_+(t,M)(1-P_+(t,M)), \\
\mathcal{F}_-(M,t) = \\
= P_-(t,M)(F^+(M)+t) + (1-P_-(t,M))F^-(M) - \frac{\mu_2^-(M) - \mu_1^-(M)}{2} P_-(t,M)(1-P_-(t,M)),
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

в которых плотности энергий деформации $F^\pm(M)$ имеют вид (2.1.6).

Поскольку

$$
F^+(M) - F^-(M) = -t^*(M), \tag{3.6}
$$

неоднозначность в определении функций $P_\pm(t,M)$ не мешает однозначной определенности и непрерывности функций $\mathcal{F}_\pm(M,t)$.

**Теорема 3.1.** *Для функции* (1.2)*, построенной по плотностям энергии* (2.1.6)*, квазивыпуклая оболочка* (1.10) *допускает оценку*

$$
\mathcal{F}_-(M,t) \le \mathcal{F}(M,t) \le \mathcal{F}_+(M,t), \qquad M \in R^{m\times m}, \quad t \in R^1. \tag{3.7}
$$

Доказательство. Из формул (1.24), (2.3.25), (2.3.29) следует, что

$$\min_{Q\in[0,1]} G_-(Q,t,M) \le \mathcal{F}(M,t) \le \min_{Q\in[0,1]} G_+(Q,t,M), \tag{3.8}$$

где

$$\begin{gathered} G_-(Q,t,M) = \\ = Qt + < A^+(e(M)-\zeta^+), e(M)-\zeta^+ > Q + < A^-(e(M)-\zeta^-), e(M)-\zeta^- > (1-Q) - \\ -\frac{|[A(e(M)-\zeta)]|^2}{\nu} Q(1-Q), \\ G_+(Q,t,M) = \\ = Qt + < A^+(e(M)-\zeta^+), e(M)-\zeta^+ > Q + < A^-(e(M)-\zeta^-), e(M)-\zeta^- > (1-Q) - \\ -\frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A(e(M)-\zeta)]}{m^2} Q(1-Q). \end{gathered} \tag{3.9}$$

Поскольку

$$\begin{gathered} G_{\pm Q}(1,\mu_1^{\pm}(M),M) = 0, \quad G_{\pm Q}(0,\mu_2^{\pm}(M),M) = 0, \\ G_{+QQ}(Q,t,M) = 2\frac{\nu\,\mathrm{tr}^2[A(e(M)-\zeta)]}{m^2}, \quad G_{-QQ}(Q,t,M) = 2\frac{|[A(e(M)-\zeta)]|^2}{\nu}, \end{gathered} \tag{3.10}$$

минимизирующие левую и правую часть (3.8) числа $Q$, совпадают с величинами $P_\pm(t,M)$, заданными равенствами (3.3), (3.4). Их подстановка в (3.8) приводит к требуемой оценке (3.7). □

На втором этапе установим некоторые свойства решений релаксированной задачи (1.26). В формулировке следующей теоремы будут использованы числа $\mu_{1,2}^-$, определенные равенствами (2.3.10) и температуры фазовых переходов $t_\pm$ для функционала энергии $I_0[u,\chi,t]$, для которых доказана оценка (2.3.13).

**Теорема 3.2.** (1) *Функция $\breve{u}_t = 0$ является решением задачи* (1.26) *для каждого значения температуры $t$.*

(2) *Если для данного $t \in (t_-,t_+) \ne \emptyset$ функция $\breve{u}_t = 0$ является единственным решением задачи* (1.26), *то для этого $t$ задача* (2.1.12) *не разрешима.*

(3) *Единственным решением задачи* (1.26) *при $t \notin [\mu_1^-,\mu_2^-]$ является функция $\breve{u}_t = 0$.*

Доказательство. (1) Утверждение этого пункта следует из определений (1.3), (1.10), свойства (1) квазивыпуклой оболочки и цепочки равенство

$$|\Omega|\mathcal{F}(0,t) = \inf_{u\in\mathbb{X}} I_0^{\min}[u,t] = \min_{u\in\mathbb{X}} \mathfrak{I}[u,t] = \min_{u\in\mathbb{X}} \int_\Omega \mathcal{F}(\nabla u,t)\,dx. \tag{3.11}$$

(2) Предположим, что для некоторого $t \in (t_-,t_+) \ne \emptyset$ существует решение $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ задачи (2.1.12), которое обязано быть двухфазовым. Так как функция $\hat{u}_t$ является решением задачи (1.26), справедливо равенство $\hat{u}_t = 0$, приводящее к противоречию с утверждением леммы 3.3.4.

(3) Для любой минимизирующей последовательности $u_n$, $\chi_n$ функционала $I_0[u,\chi,t]$ имеем

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \{\chi_n(F^+(\nabla u_n)+t) + (1-\chi_n)F^-(\nabla u_n)\}\,dx - |\Omega|(F^+(0)+t) \to 0 \quad \text{в случае} \quad t < t_-, \\ &\int_\Omega \{\chi_n(F^+(\nabla u_n)+t) + (1-\chi_n)F^-(\nabla u_n)\}\,dx - |\Omega|F^-(0) \to 0 \qquad \text{в случае} \quad t > t_+. \end{aligned}$$

Раскрывая эти соотношения, приходим к выводу, что

$$(t^* - t)\int_\Omega (1-\chi_n)\,dx+$$
$$+\int_\Omega (\chi_n < A^+e(\nabla u_n), e(\nabla u_n) > + (1-\chi_n) < A^-e(\nabla e_n), e(\nabla u_n) >)\,dx+$$
$$+\int_\Omega 2(1-\chi_n) < [A\zeta], e(\nabla u_n) > \,dx \to 0 \quad \text{при} \quad t < t_-,$$

$$(t - t^*)\int_\Omega \chi_n\,dx+$$
$$+\int_\Omega (\chi_n < A^+e(\nabla u_n), e(\nabla u_n) > + (1-\chi_n) < A^-e(\nabla e_n), e(\nabla u_n) >)\,dx-$$
$$-\int_\Omega 2\chi_n < [A\zeta], e(\nabla u_n) > \,dx \to 0 \quad \text{при} \quad t > t_+.$$

Пользуясь условием (2.1.4) и неравенством Гельдера, получаем

$$(t^* - t)\int_\Omega (1-\chi_n)\,dx+$$
$$+\int_\Omega (\chi_n < A^+e(\nabla u_n), e(\nabla u_n) > + (1-\chi_n) < A^-e(\nabla e_n), e(\nabla u_n) >)\,dx+$$
$$+\int_\Omega 2(1-\chi_n) < [A\zeta], e(\nabla u_n) > \,dx \geq (\mu_1^- - t)\int_\Omega (1-\chi_n)\,dx \geq 0 \quad \text{при} \quad t < \mu_1^-,$$

$$(t - t^*)\int_\Omega \chi_n\,dx+$$
$$+\int_\Omega (\chi_n < A^+e(\nabla u_n), e(\nabla u_n) > + (1-\chi_n) < A^-e(\nabla e_n), e(\nabla u_n) >)\,dx-$$
$$-\int_\Omega 2\chi_n < [A\zeta], e(\nabla u_n) > \,dx \geq (t - \mu_2^-)\int_\Omega \chi_n\,dx \geq 0 \quad \text{при} \quad t > \mu_2^-.$$

Следовательно, переходя к подпоследовательности (и сохраняя прежнее обозначение), можем считать, что почти всюду в $\Omega$

$$\chi_n(x) \to 1 \quad \text{при} \quad t < \mu_1^-, \qquad \chi_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad t > \mu_2^-.$$

После очередного перехода к подпоследовательности, пара $u_n$, $\chi_n$ станет удовлетворять условиям (3.2.3). Тогда в силу (3.2.7) при $t \notin [\mu_1^-, \mu_2^-]$ ее предельная точка $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ — однофазовое состояние равновесия функционала $I_0[u,\chi,t]$.

Благодаря лемме 1.2 и свойству (2) квазивыпуклой оболочки, для каждого решения $\check{u}_t$ задачи (1.26) существует такая минимизирующая последовательность $u_n$, $\chi_n$, что $\check{u}_t = \hat{u}_t$.

Для завершения доказательства осталось лишь воспользоваться тем, что у однофазового состояния равновесия равновесное поле смещений тождественно равно нулю. □

Анизотропность плотностей энергии $F^\pm(M)$ может возникать как вследствие анизотропности тензоров модулей упругости $A^\pm$, так и тензоров остаточной деформации $\zeta^\pm$. Вычислим квазивыпуклую оболочку для плотностей

$$\begin{gathered} F^\pm(M) = |e(M) - c_\pm \lambda \otimes \lambda|^2, \\ M \in R^{m\times m}, \qquad c_\pm \in R^1, \quad c_+ \neq c_-, \qquad \lambda \in R^m, \quad |\lambda| = 1 \end{gathered} \tag{3.12}$$

с анизотропными тензорами остаточной деформации $\zeta^\pm = c_\pm \lambda \otimes \lambda$.

Для формулировки теоремы введем следующие обозначения

$$\begin{gathered} H^+(z,t) = (z-c_+)^2 + t, \quad H^-(z) = (z-c_-)^2, \quad H^{\min}(z,t) = \min\{H^+(z,t), H^-(z)\}, \\ H_c^{\min}(.,t) \text{— выпуклая оболочка функции } H^{\min}(.,t). \end{gathered} \tag{3.13}$$

**Теорема 3.3.** *Для квазивыпуклой оболочки плотностей энергии* (3.12) *справедлива формула*

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(M,t) = |e(M)|^2 - z^2(M) + H_c^{\min}(z(M),t), \\ z(M) = (e(M)\lambda, \lambda). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Доказательство. Доказательство теоремы будет опираться на результаты теоремы 2.3.3. и использовать методы вычисления квазивыпуклой оболочки в изотропном случае. Его изложение разобьем на ряд этапов.

(1) *Формула для* $\mathcal{F}(0,t)$. Плотности (3.12) являются частным случаем плотностей (2.3.56). Пользуясь установленным в теореме 2.3.3 равенством (2.3.66) и формулой (1.2.1) для функции $G(Q,t)$ с $a_\pm = 1$, в силу (1.18) получаем

$$\mathcal{F}(0,t) = t\hat{Q}(t) + c_+^2\hat{Q}(t) + c_-^2(1-\hat{Q}(t)) - [c]^2\hat{Q}(t)(1-\hat{Q}(t)), \tag{3.15}$$

где величина $\hat{Q}(t)$ определена равенствами

$$\hat{Q}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \le t_- \\ \frac{t_+ - t}{t_+ - t_-} & \text{при} \quad t \in (t_-, t_+) \\ 0 & \text{при} \quad t \ge t_+ \end{cases}, \qquad t_\pm = t^* \pm [c]^2, \quad t^* = -[c^2] \tag{3.16}$$

(см. (1.2.7), (1.2.14)).

(2) *Формула для* $\mathcal{F}(M,t)$. Пользуясь очевидными соотношениями

$$\begin{gathered} |e(\nabla u) - c_\pm\lambda\otimes\lambda + e(M)|^2 = |e(\nabla u) - c_\pm\lambda\otimes\lambda|^2 + 2 < e(\nabla u), e(M) > + |e(M)|^2 - 2c_\pm z, \\ z = z(M) = < e(M), \lambda\otimes\lambda > = (e(M)\lambda,\lambda), \end{gathered} \tag{3.17}$$

получаем

$$\begin{gathered} \int_\Omega \{\chi(|e(\nabla u) - c_+\lambda\otimes\lambda + e(M)|^2 + t) + (1-\chi)|e(\nabla u) - c_-\lambda\otimes\lambda + e(M)|^2\}\,dx = \\ = I_0[u,\chi,t(z)] + |\Omega|(|e(M)|^2 - 2c_- z), \qquad t(z) = t - 2[c]z. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(M,t) = \mathcal{F}(0,t(z)) + |e(M)|^2 - 2c_- z = |e(M)|^2 - z^2 + H(z,t), \\ H(z,t) = z^2 + t(z)\hat{Q}(t(z)) + c_+^2\hat{Q}(t(z)) + c_-^2(1-\hat{Q}(t(z)) - [c]^2\hat{Q}(t(z))(1-\hat{Q}(t(z)) - 2c_- z. \end{gathered} \tag{3.19}$$

(3) *Исследование функции* $H(z,t)$. Определим функции $z_\pm(t)$ равенствами

$$z_-(t) = \frac{t - t_-}{2[c]}, \quad z_+(t) = \frac{t - t_+}{2[c]}, \qquad z_+(t) - z_-(t) = -[c]. \tag{3.20}$$

Очевидно, что

для $[c] > 0$ справедливо соотношение $z_+(t) < z_-(t)$ и следующие неравенства эквивалентны

$$z \ge z_-(t) \quad \text{и} \quad t(z) \le t_-, \qquad z \le z_+(t) \quad \text{и} \quad t(z) \ge t_+,$$

для $[c] < 0$ справедливо соотношение $z_-(t) < z_+(t)$ и следующие неравенства эквивалентны

$$z \le z_-(t) \quad \text{и} \quad t(z) \le t_-, \qquad z \ge z_+(t) \quad \text{и} \quad t(z) \ge t_+.$$

Кроме того, равенства $t(z) = t_\pm$ означают, что $z = z_\pm(t)$.

Учитывая (3.16), приходим к выводу, что

$$\begin{gathered}
\hat{Q}(t(z)) = 1 \\
\text{при } z \geq z_-(t) \text{ в случае } [c] > 0 \text{ и при } z \leq z_-(t) \text{ в случае } [c] < 0, \\[2ex]
\hat{Q}(t(z)) = 0 \\
\text{при } z \leq z_+(t) \text{ в случае } [c] > 0 \text{ и при } z \geq z_+(t) \text{ в случае } [c] < 0, \\[2ex]
\hat{Q}(t(z)) = \frac{z_+(t) - z}{z_+(t) - z_-(t)} \\
\text{при } z \in [z_+(t), z_-(t)] \text{ в случае } [c] > 0 \text{ и при } z \in [z_-(t), z_+(t)] \text{ в случае } [c] < 0.
\end{gathered} \tag{3.21}$$

Непосредственные вычисления приводят к равенству для второй производной функции $H(.,t)$

$$H_{zz}(z,t) = 0 \quad \text{в интервале непостоянства функции} \quad \hat{Q}(t(z)). \tag{3.22}$$

Поскольку

$$H(z,t) = H^+(z,t) \quad \text{при} \quad \hat{Q}(t(z)) = 1, \qquad H(z,t) = H^-(z) \quad \text{при} \quad \hat{Q}(t(z)) = 0,$$

из (3.21) и (3.22) получаем

$$\begin{gathered}
H(z,t) = \begin{cases} H^+(z,t) & \text{при} \quad z \geq z_-(t) \\ H^+(z_-(t),t)\hat{Q}(t(z)) + H^-(z_+(t))(1 - \hat{Q}(t(z)) & \text{при} \quad z \in (z_+(t), z_-(t)) \quad \text{для} \quad [c] > 0, \\ H^-(z) & \text{при} \quad z \leq z_+(t) \end{cases} \\
H(z,t) = \begin{cases} H^+(z,t) & \text{при} \quad z \leq z_-(t) \\ H^+(z_-(t),t)\hat{Q}(t(z)) + H^-(z_+(t))(1 - \hat{Q}(t(z)) & \text{при} \quad z \in (z_-(t), z_+(t)) \quad \text{для} \quad [c] < 0. \\ H^-(z) & \text{при} \quad z \geq z_+(t) \end{cases}
\end{gathered} \tag{3.23}$$

При получении средних равенств (3.23) учитывается линейность функции $H(.,t)$ в интервалах непостоянства функции $\hat{Q}(t(.))$ и ее непрерывность в точках $z_\pm(t)$.

Несложные вычисления приводят к справедливости условий Вейерштрасса-Эрдмана

$$\begin{gathered}
H_z^+(z_-(t),t) = H_z^-(z_+(t)), \\
H^+(z_-(t),t) - z_-(t)H_z^+(z_-(t),t) = H^-(z_+(t)) - z_+(t)H_z^-(z_+(t)),
\end{gathered} \tag{3.24}$$

гарантирующих непрерывную дифференцируемость функции $H(.,t)$.

Равенство $H(z,t) = H_c^{\min}(z,t)$ устанавливается таким же способом, как при завершении доказательства теоремы 2.2. □

Как и при выводе формулы (2.37) перепишем выражение (3.14) в виде

$$\begin{gathered}
\mathcal{F}(\nabla u, t) = \frac{|\operatorname{rot} u|^2}{4} + (\operatorname{div} u)^2 - z^2(\nabla u) + H_c^{\min}(z(\nabla u), t) + (u^i_{x_j} u^j_{x_i} - (\operatorname{div} u)^2), \\
z(\nabla u) = (e(\nabla u)\lambda, \lambda).
\end{gathered} \tag{3.25}$$

Поскольку при интегрировании по области $\Omega$ последнее слагаемое правой части (3.25) обнуляется, получаем следующее равенство для релаксированного функционала

$$\begin{gathered}
\mathfrak{J}[u,t] = \int_\Omega \mathcal{F}(\nabla u, t)\, dx \qquad u \in \mathbb{X}, \quad t \in R^1, \\
\mathcal{F}(\nabla u, t) = \frac{|\operatorname{rot} u|^2}{4} + (\operatorname{div} u)^2 - z^2(\nabla u) + H_c^{\min}(z(\nabla u), t), \quad z(\nabla u) = (e(\nabla u)\lambda, \lambda),
\end{gathered} \tag{3.26}$$

по виду близкое к формуле (2.51) для релаксированного функционала изотропной двухфазовой упругой среды.

Множество всех решений задачи (1.26) для функционала (3.26) описано в следующей теореме.

**Теорема 3.4.** *При любых* $t \in R^1$ *функция* $\check{u}_t = 0$ *является единственным решением задачи* (1.26) *для функционала* (3.26).

Доказательство. Представление (2.3.57) для плотностей энергии (3.12) перепишется в виде

$$\begin{gathered} I_0[u,\chi,t] = J_1[u,\chi,t] + J_2[u], \\ J_1[u,\chi,t] = \int_\Omega \{\chi(e_{mm}(\nabla u) - c_+)^2 + t) + (1-\chi)(e_{mm}(\nabla u) - c_-)^2\}\,dx \\ J_2[u] = \int_\Omega \{\Sigma_{i,j=1,\dots,m,\, i+j<2m} e_{ij}(\nabla u) e_{ij}(\nabla u)\}\,dx, \\ u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}'. \end{gathered} \tag{3.27}$$

Как было установлено в теореме 2.3.3 для цилиндрической области $\Omega = B \times (0,l)$

$$|\Omega|^{-1} \inf_{u\in\mathbb{X},\chi\in\mathbb{Z}'} I_0[u,\chi,t] = G(\hat{Q}(t),t), \tag{3.28}$$

где функции $G(Q,t)$ и $\hat{Q}(t)$ определяются равенствами (1.2.1) и (1.2.4) при дополнительном предположении $a_\pm = 1$, соответственно. Благодаря (1.10) и независимости квазивыпуклой оболочки от области $\Omega$, формула (3.28) справедлива для любой области.

Выберем систему координат, в которой ось $x_m$ направлена вдоль вектора $\lambda$, совокупность оставшихся координат $x_1,\dots,x_{m-1}$ обозначим через $x'$. Пересечение прямой $x' \in R^{m-1}$ — фиксировано, $x_m \in R^1$ — произвольно с областью $\Omega$ отрыто на этой прямой. Поэтому оно либо пусто, либо состоит из не более чем счетного (зависящего от $x'$) набора интервалов $l_j$, $j = 1,\dots$. Для каждой пары $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$ при почти всех $x' \in R^{m-1}$ ограничение функции $u$ на каждый интервал набора $l_j$, $j=1,\dots$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(l_j,R^m)$, а ограничение функции $\chi$ на эти интервалы будет измеримой характеристической функцией аргумента $x_m$. Тогда (теорема 1.2.1)

$$\int_{l_j} \{\chi(x',x_m)((u^m_{x_m}(x',x_m) - c_+)^2 + t) + (1-\chi(x',x_m))(u^m_{x_m}(x',x^m) - c_-)^2\}\,dx_m \ge |l_j| G(\hat{Q}(t),t)$$

при почти всех $x'$ для всех интервалов $l_j$ набора.

Следовательно,

$$J_1[u,\chi,t] \ge |\Omega| G(\hat{Q}(t),t) \qquad \text{для всех} \quad u\in\mathbb{X}, \quad \chi\in\mathbb{Z}', \quad t\in R^1. \tag{3.29}$$

Пусть $\check{u}_t$ — решение задачи (1.26). Тогда существует такая минимизирующая последовательность $u_n \in \mathbb{X}, \chi_n \in \mathbb{Z}'$, $n = 1,2,\dots$ функционала $I_0[u,\chi,t]$, что $u_n \rightharpoonup \check{u}_t$ в пространстве $\mathbb{X}$. Благодаря (3.28) и неравенству (3.29) для этой последовательности имеем

$$J_1[u_n,\chi_n,t] \to |\Omega| G(\hat{Q}(t),t), \quad J_2[u_n] \to 0. \tag{3.30}$$

Из второго утверждения (3.30) вытекает, что

$$e_{ij}(\nabla \check{u}_t) = 0, \quad i,j = 1,\dots,m-1, \qquad e_{mi}(\nabla\check{u}_t) = 0, \quad i = 1,\dots,m-1. \tag{3.31}$$

Поместим область $\Omega$ в цилиндр $\hat{\Omega}$: $|x'| < R$, $|x_m| < h$. Интегрируя по частям по сечениям $x_m = \mathrm{const}$, приходим к неравенству

$$\int_{\hat\Omega} |u|^2\,dx \le C \int_{\hat\Omega} \Sigma_{i,j=1}^{m-1} e_{ij}(\nabla u) e_{ij}(\nabla u)\,dx \quad \text{для всех} \quad C_0^\infty(\hat\Omega, R^{m-1}),$$

из которого вытекает аналогичная оценка для функции $\check{u}_t$

$$\int_\Omega \Sigma_{i=1}^{m-1}|\check{u}_t^i|^2\,dx \le C\int_\Omega \Sigma_{i,j=1}^{m-1} e_{ij}(\nabla\check{u}_t)e_{ij}(\nabla\check{u}_t)_{ij}\,dx,$$

приводящая в силу (3.31) к соотношениям

$$\check{u}_t^i = 0 \quad i=1,\dots,m-1 \qquad (\check{u}_t^m)_{x_i}=0, \quad i=1,\dots,m-1. \tag{3.32}$$

Следовательно, функция $\check{u}_t(x)$ задается равенством

$$\check{u}_t(x) = \lambda v(x_m) \tag{3.33}$$

с некоторой скалярной функцией $v$.

Осталось заметить, что представление (3.33) для функции из множества $\mathbb{X}$ возможно лишь в случае $v=0$. □

Непосредственным следствием теорем 2.3.3, 3.2 и 3.4 является тот факт, что задача (2.1.12) для плотностей энергии (3.12) в любой ограниченной области $\Omega\subset R^m$ (напомним, что $m\ge 2$) при $t\in(t_-,t_+)$, $t_\pm = -[c^2]\pm[c]^2$, $[c]\ne 0$ не имеет решений. Для $t\le t_-$ и $t\ge t_+$ ее решения исчерпываются стандартными парами $\hat{u}_t=0$, $\hat{\chi}_t=1$ и $\hat{u}_t=0$, $\hat{\chi}_t=0$, соответственно.

Вычисление квазивыпуклой оболочки в теореме 3.3 было проведено для плотностей энергии деформации (2.3.56) при дополнительном условии $a_\pm=1$. Однако для доказательства теоремы 3.4 это предположения не носит принципиальный характер. Использование равенства (2.3.57) вместо упрощенного (3.27) приводит к аналогичному результату: единственным решением релаксированной задачи при любых $a_\pm>0$ является функция $\check{u}_t=0$. Поэтому для любых положительных $a_\pm$ задача (2.1.12) не имеет решений при $t\in(t_-,t_+)$ в случае $t_-<t_+$.

## §4. Примеры предельных при $\sigma\to 0$ точек для равновесных полей смещений.

Наша цель — на основании полученных ранее результатов описать возможное поведение при $\sigma\to 0$ равновесных полей смещений $\hat{u}_{t,\sigma}$ для двух модельных задач: изотропной (плотности энергии (2.2.2) при условии (2.2.3)) и анизотропной (плотности энергии (2.3.56)).

В формулировке следующей теоремы использовались формулы (2.2.28) для температур фазовых переходов $t_\pm$, обозначения (2.2.36) для множества $\mathbb{Y}_t'$ и (1.30) для состояний равновесия $\hat{u}_t^{\min}$, $\hat{\chi}_t^{\min}$ с $\sigma=0$ и минимальной площадью границы раздела фаз.

**Теорема 4.1.** *Пусть плотности энергии задаются равенствами* (2.2.2), (2.2.3), *а область* $\Omega = B_R\subset R^m$, $m\ge 2$ — *шару радиуса* $R$ *с центром в нуле. Тогда при* $t\in(t_-,t_+)$

(*a*) *ни одна первая компонента* $\hat{u}_t$ *пары* $\hat{u}_t,\hat{\chi}_t\in\mathbb{Y}_t'$, *построенной по покрытию Витали шара* $B_R$, *не может быть предельной точкой ни какой последовательности* $\hat{u}_{t,\sigma_n}$, $\sigma_n\to 0$,

(*b*) *предельной точкой любой последовательности* $\hat{u}_{t,\sigma_n}$, $\sigma_n\to 0$ *будет лишь первая компонента* $\hat{u}_t$ *какой-либо пары* $\hat{u}_t^{\min},\hat{\chi}_t^{\min}\in\mathbb{Y}_t'$.

Доказательство. При $\sigma=0$ для двухфазовой упругой среды с плотностями (2.2.1), (2.2.3) в шаре существуют как решения с различными конечными площадями границ раздела фаз (лемма 2.2.3(a)), так и с бесконечными площадями границ раздела фаз, построенные по произвольному покрытию Витали (леммы 2.2.3(c), 3.1.1). Однако, по теореме 1.2, лишь равновесные поля с минимальной площадью границы раздела фаз могут быть предельными точками последовательности $\hat{u}_{t,\sigma_n}$ при $0<\sigma_n\to 0$. □

**Теорема 4.2.** *Пусть плотности энергии деформации задаются равенствами* (2.3.56). *Тогда в произвольной области* $\Omega$ *с липшицевой границей для любых состояний равновесия* $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$, $\sigma>0$ *справедливо соотношение* $\hat{u}_{t,\sigma}\rightharpoonup 0$ *в пространстве* $\mathbb{X}$ *при* $\sigma\to 0$.

Доказательство. Предположим, что для фиксрованного $t$ и некоторой последовательности положительных чисел $\sigma_n\to 0$ найдутся такие состояния равновесия $\hat{u}_{t,\sigma_n},\hat{\chi}_{t,\sigma_n}$, что для какого-то линейного ограниченного в пространстве $\mathbb{X}$ функционал $l$, положительного числа $\varepsilon$ и всех $n=1,2,\dots$ выполняется неравенство $|l(\hat{u}_{t,\sigma_n})|\ge\varepsilon$. Переходя к подпоследовательности $\hat{u}_{t,\sigma_{n'}}$, добьемся ее слабой в $\mathbb{X}$ сходимости к некорой функции $u\in\mathbb{X}$. Поскольку $u$ обязано быть решением релаксированной задачи, из теоремы 3.4 и замечания в конце предыдущего параграфа следует равенство $u = 0$, противоречащее начальному предположению. $\square$

### Библиографические замечания к главе 4.

Основные результаты этой главы изложены в работах [1-4]. С теорией релаксированных задач и квазивыпуклых оболочек подробнее можно ознакомиться по монографиям [5-7] и полезной в идейном смысле статье [8]. В этой главе мы не затрагивали вопроса о Γ сходимости функционала энергии двухфазовой упругой среды при $\sigma \to 0$. Основные моменты теории Γ- сходимости изложены в [9]. Частичный их перенос на теорию фазовых переходов осуществлен, в частности, в работе [10].

### Литература

1. В.Г.Осмоловский. "Поведение площади границы раздела фаз в задачах о фазовых переходах при стремлении к нулю коэффициента поверхностного натяжения". Проблемы математического анализа, вып.62(2012), с.101-108.
2. В.Г.Осмоловский. "Квазивыпуклая оболочка для однородной изотропной фвухфазовой упругой среды и решения исходной и релаксированной задач". Проблемы математического анализа, вып.70(2013), с.161-170.
3. В.Г.Осмоловский. "Описание множества всех решений релаксированной задачи для однородной изотропной двухфазовой упругой среды". Проблемы математического анализа, вып.72(2013), с.147-155.
4. В.Г.Осмоловский. "Температуры фазовых переходов, и квазивыпуклая оболочка для функционалов энергии двухфазовой упругой среды с анизотропными тензорами остаточной деформации".
5. Dacorogna B., *Direct methods in the calculus of variations*, Berlin, 1989.
6. E.Giusti, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, New Jersey, World Scientific, 2005.
7. Л.К.Эванс, *Методы слабой сходимости для нелинейных уравнений с частными производными*, Издательство "Тамара Рожковская", Новосибирск, 2006.
8. B.Dacorogna, G.Pisante, A.M.Ribeiro. "On non quasiconvex problems of the calculus of variations." Discrete and Continuous Systems. vol.13, num.4(2005), p.961-983.
9. В.В.Жиков. "Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления". Известия Российской академии наук. Серия математическая. т.47, N5(1983), с.961-998.
10. А.В.Демьянов. "Релаксация и Γ-сходимость функционалов энергии для двухфазовой упругой среды". Проблемы математического анализа, вып.30(2005), с.17-30.

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ.

Общие обозначения.

- $R^m$, $R^{m\times m}$, $R_s^{m\times m}$ — $m$-мерное евклидово пространство, пространство $m\times m$-матриц, и $m\times m$-симметричных матриц.
- $< M_1, M_2 >$, $M_i \in R_s^{m\times m}$, $i=1,2$ — скалярное произведение в пространстве $R_s^{m\times m}$: стр.29.
- $\Omega \subset R^m$, $m\geq 2$ — произвольная ограниченная область для задач с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения и с липшицевой границей $\partial\Omega$ для задач с положительным коэффициентом поверхностного натяжения.
- $B_R(x_0)$, $B_R$ — открытый шар пространства $R^m$ с радиусом $R$ и ценром $x_0\in R^m$ и $x_0=0$, соответственно.
- $\nu$ — постоянная в условии эллиптичности: стр.29, стр.42.
- $\kappa_\gamma$ — константа в изопериметрическом неравенстве: стр.60.

Характеристики двухфазовой упругой среды.

- $A^\pm$, $a^\pm_{ijkl}$ — тензоры модулей упругости: анизотропный случай — стр.29, изотропный случай — стр.33, одномерный случай — стр.7.
- $\zeta^\pm$ — тензоры остаточной деформации: анизотропный случай — стр.29, изотропный случай — стр.33, одномерный случай — стр.7.
- $\sigma$ — коэффициент поверхностного натяжения: одномерный случай — стр.8, многомерный случай — стр.59.
- $t$ — температура: одномерный случай — стр.7, многомерный случай — стр.30

Плотности энергии деформации.

- $F^\pm(M)$, $M\in R^{m\times m}$ — плотности энергии деформации: анизотропный случай — стр.29, изотропный случай — стр.33, одномерный случай — стр.7.
- $F^{\min}=\min\{F^+(M)+t, F^-(M)\}$, $M\in R^{m\times m}$, $t\in R^1$: одномерный случай — стр.27, многомерный случай — стр.95.
- $\mathcal{F}(M,t)$ — квазивыпуклая оболочка функции $F^{\min}(M,t)$ по первому аргументу: стр.96.
- $e(M)$, $M\in R^{m\times m}$ — тензор деформации: стр.29.
- $\Theta$ — тензор напряжений: одномерный случай — стр.37, многомерный случай — стр.55.
- $\Phi$ — тензор химического потенциала: одномерный случай — стр.37, многомерный случай — стр.55.

Функционал энергии и область его определения.

- $u$ — поле смещений, $\chi$ — функция распределения фаз.
- $I^\pm[u]$ — функционалы энергии однофазовых сред с плотностями $F^\pm(M)$: одномерный случай — стр.8, многомерный случай — стр.30.
- $I_0[u,\chi,t]$ — функционал энергии двухфазовой упругой среды с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения: одномерный случай — стр.7, многомерный случай — стр.30, изотропный случай — стр.33.
- $I[u,\chi,t,\sigma]$ — функционал энергии с положительным коэффициентом поверхностного натяжения: одномерный случай — стр.8, многомерный случай — стр.59.
- $I_0^{\min}[u,t]$ — функционал энергии для плотности $F^{\min}(M,t)$: одномерный случай — стр.27, многомерный случай — стр.95.
- $\mathfrak{I}[u,t]$ — функционал энергии для плотности $\mathcal{F}(M,t)$ (релаксированный функционал): стр.98.
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}'$, $\mathbb{Z}''$ — множества допустимых распределений фаз: стр.59, 30, 61, соответственно, одномерный случай — стр.7.
- $\mathbb{X}$ — множество допустимых полей смещений: одномерный случай — стр.7, многомерный случай — стр.30.
- $S[\chi]$ — площадь границы раздела фаз: одномерный случай — стр.8, многомерный случай — стр.59.
- $Q\in[0,1]$ — объемная доля фазы с индексом "+": одномерный случай — стр.8, многомерный случай — стр.33.
- $G(Q,t)$ — внеинтегральное слагаемое в функционале энергии изотропной двухфазовой среды: одномерный случай — стр.8, многомерный случай — стр.33.

Состояния равновесия.

- $\hat{u}_t$, $\hat{\chi}_t$ — состояние равновесия двухфазовой упругой среды с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения и фиксированным значением $t$: одномерный случай — стр.7, многомерный случай — стр.30.
- $\hat{u}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ — состояние равновесия двухфазовой упругой среды при фиксированном положительном $\sigma$ и фиксированном значении $t$: одномерный случай — стр. 8, многомерный случай — стр.59.
- $\check{u}_t$ — состояние равновесия для функционала $\mathfrak{J}[u,t]$: стр.98.
- $\hat{u}_t^{\pm}$, $\chi^{\pm}$ — однофазовые состояния равновесия: одномерный случай — стр.7, многомерный случай — стр.30.
- $\mathfrak{B}_t$ — множество всех состояний равновесия для функционала $I_0[u,\chi,t]$: стр.99.
- $\mathfrak{B}_{t,\sigma}$ — множество всех состояний равновесия для функционала $I[u,\chi,t,\sigma]$: стр.80.
- $\mathbb{Y}_t'$ — множество всех состояний равновесия для изотропной двухфазовой среды с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения: стр.40.
- $\mathbb{Y}_t''$ — множество всех состояний равновесия релаксированной задачи для изотропной двухфазовой среды: стр.111.

Характеристики состояний равновесия.

- $t_{\pm}$ — температуры фазовых переходов при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения: одномерный случай — стр.10, многомерный случай — стр.40, многомерный изотропный случай — стр.38.
- $t_{\pm}(\sigma)$ — температуры фазовых переходов при положительном коэффициенте поверхностного натяжения: одномерный случай — стр.20, многомерный случай — стр.80.
- $\hat{Q}(t)$ — объемная доля фазы с индексом "+" при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения и данного $t$ в состоянии равновесия: одномерный случай — стр.12, изотропный многомерный случай — стр.39.
- $\hat{Q}[t,\sigma]$ — объемная доля фазы с индексом "+" при положительном коэффициенте поверхностного натяжения $\sigma$ и произвольной температуре $t$ в состоянии равновесия: одномерный случай — стр.16, многомерный случай — стр.80.
- число $t^*$: одномерный случай — стр. 27, многомерный изотропный случай — стр.38, многомерный случай — стр.41.
- число $\sigma^*$: одномерный случай — стр.18, многомерный случай — стр.80.
- функция $\sigma(t)$: одномерный случай — стр.15, многомерный случай — стр.76.
- функции $i^{\pm}(t)$, $i_{\min}(t)$, $i(t)$: одномерный случай — стр.15, многомерный случай — стр.41.
- функции $j^{\pm}(t,\sigma)$, $j_{\min}(t,\sigma)$, $j(t,\sigma)$: одномерный случай — стр.15, многомерный случай — стр.75.

**Осмоловский Виктор Георгиевич.**
**Санкт-Петербургский государственный университет.**
**Математико-механический факультет.**
**vicos@VO8167.spb.edu**