Критерий Сильвестра для m-положительных матриц

Н. В. Филимоненкова

Аннотация

Работа посвящена новым алгебраическим понятиям, которые появились в последние десятилетия в результате развития современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Отмечена самостоятельная ценность понятий "след порядка m" и "m-положительная матрица", их естественная связь с такими общепринятыми терминами, как след матрицы, определитель матрицы, элементарная симметрическая функция порядка m, положительно определенная матрица. Целью работы является доказательство критерия Сильвестра для m-положительных матриц.

Работа рекомендована к публикации членом СПбМО Н. М. Ивочкиной.

1. Введение

Работа посвящена двум сравнительно новым понятиям в алгебре числовых матриц: след порядка m и m-положительная матрица. Они появились в последние десятилетия в результате развития современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (FNPDE – fully nonlinear partial differential equations). Как известно, классическим представителем FNPDE является уравнение Монжа – Ампера:

$$det(u_{xx}) = f, \quad u \in C^2(\Omega), \quad \Omega \subset R^n. \tag{1.1}$$

В 80-х годах 20 века его стали рассматривать как частный случай в классе m-гессиановских уравнений (в зарубежной литературе k-Hessian equation, см. Wikipedia) при $m = n$:

$$F_m(u_{xx}) = f, \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{1.2}$$

Изначально F_m определяли как элементарную симметрическую функцию порядка m от собственных чисел матрицы Гессе u_{xx}. Этой традиции придерживаются зарубежные авторы L. Caffarelly, L. Nirenberg, J. Spruck [1], N. S. Trudinger [3], X.-J. Wang [8], заложившие базу в теории FNPDE, а также их последователи. Представители Санкт-Петербургской математической школы определяют функцию F_m как сумму главных миноров порядка m матрицы u_{xx} и считают такой подход более естественным, чем обращение к собственным числам. Систематическое исследование суммы главных миноров в рамках FNPDE впервые предпринято в работах 80-х годов Н. М. Ивочкиной [9], [10]. В 90-е годы эта матричная операция приобрела название "след порядка m" [11], [2], и, начиная с 2006 года, этот термин регулярно используется для исследования m-гессиановских уравнений и родственных задач (см., например, [4], [13], [6], [12], [5]). Гораздо реже его можно встретить в зарубежной математической литературе по

FNPDE (например, k-trace в [8]), где по-прежнему сохраняется преданность исторически сложившейся методологии, основанной на центральном значении собственных чисел и симметрических функций.

Изучение уравнений (1.2) поначалу развивалось по образцу уравнения Монжа – Ампера (1.1). Известно, что для разрешимости (1.1) требуется положительная определенность матрицы u_{xx}. Исследование уравнений (1.2) при $m < n$ было направлено на выявление аналогичных требований для матрицы u_{xx}. В результате были построены специальные матричные конусы, более широкие, чем конус положительно определенных матриц. Эти конусы впервые конструктивно описаны в статье [10] 1983 года, но многообразие их алгебро-геометрических свойств не исчерпано до сих пор. Совсем недавно Н. М. Ивочкина предложила название для матриц из этих конусов – так появилось понятие m-положительной матрицы (см. [6], [12]), которое еще не успело распространиться в математической литературе.

В целом, усилиями разных авторов теория FNPDE породила целую систему новых понятий в алгебре симметричных матриц и в геометрии поверхностей: например, m-выпуклая функция, m-выпуклая поверхность, матрица кривизны, m-кривизна.

Несмотря на существенное значение этих новых алгебраических и геометрических понятий для становления теории FNPDE, их целенаправленное изучение случается редко. Обычно фрагментарные наблюдения разбросаны в технических подразделах различных публикаций, описаны неоднородно, доказаны частично. Исключением является статья [7] 1994 года, где предпринято исследование элементарных симметрических функций и порожденных ими конусов в контексте уравнений кривизны, а также современные работы [6], [12], [5]. В них делается попытка выстроить единую алгебро-геометрическую базу для теории FNPDE, в том числе согласовать ключевые понятия и собрать воедино известные свойства.

В данной работе обращаем внимание на самостоятельную ценность понятий "след порядка m" и "m-положительная матрица", на их естественную связь с общепринятыми алгебраическими терминами. Целью работы является популяризация этих понятий и обнародование недавно полученных новых свойств.

Во второй части статьи описано понятие следа порядка m для квадратной матрицы, обобщающее классический термин "след матрицы". Указана тесная взаимосвязь этого понятия с элементарными симметрическими функциями на множестве собственных чисел симметричной матрицы. Для следа порядка m доказано соотношение, известное ранее только для элементарных симметрических функций.

В третьей части статьи сформулировано понятие m-положительной матрицы, обобщающее термин "положительно определенная матрица". Усилены ранее известные факты о структуре конуса m-положительных матриц. Доказан новый результат: критерий Сильвестра для m-положительных матриц.

Все результаты этой работы не только обоснованы теоретически, но и проверены численно с использованием математического пакета Maple на примере достаточно широкого семейства матриц .

2. След порядка m

Далее считаем, что n и m – натуральные числа. Используем символ $|A|$ для обозначения определителя матрицы A, запись $A = (a_{ij})$ – для обозначения элементов матрицы A.

Определение 2.1. Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$ и пусть $1 \leqslant m \leqslant n$. Главный минор порядка m матрицы A – это определитель матрицы, которая составлена из элементов матрицы A, стоящих на пересечении каких-либо m строк и m столбцов (с одинаковыми номерами). Следом порядка m называем сумму всех главных миноров порядка m матрицы A. Обозначаем $tr_m A$.

Положим $tr_0 A = 1$. Термин "след порядка m" впервые встречается в работах [11], [2]. Это понятие включает два крайних случая. При $m = 1$ это просто след матрицы, сумма элементов на главной диагонали: $tr_1 A = trA$. При $m = n$ это определитель матрицы: $tr_n A = |A|$. Приведем примеры вычисления следов разного порядка для матрицы размера 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$tr_1 A = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$tr_2 A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$tr_3 A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Операцию $tr_m A$ можно воспринимать как числовую функцию n^2 вещественных переменных. Используем дифференцирование функции $tr_m A$ по одному из элементов матрицы A. Нетрудно доказать, что следы порядка m и $m-1$ связаны соотношением

$$tr_{m-1} A = \frac{1}{n-m+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial tr_m A}{\partial a_{ii}}. \tag{2.1}$$

Теорема 2.2. *Пусть A, B – квадратные матрицы размера $n \times n$, матрица B обратима, $1 \leqslant m \leqslant n$. След порядка m принимает одинаковые значения для подобных матриц:*

$$tr_m(A) = tr_m(B^{-1}AB). \tag{2.2}$$

Доказательство. Обозначим $\hat{A} = B^{-1}AB$, считаем матрицу B постоянной, значение $tr_m \hat{A}$ рассматриваем как функцию от элементов матрицы A. Пусть $A = (a_{ij})$, $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $B^{-1} = (b_{ij}^{-1})$.

Для доказательства используем метод математической индукции. При $m = n$ равенство (2.2) – это известное свойство определителя. Покажем, что если след порядка m обладает свойством (2.2), то этим же свойством обладает и след порядка $m-1$.

Воспользуемся формулой связи (2.1) между следом порядка m и $m-1$:

$$tr_{m-1} A = \frac{1}{n-m+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial tr_m A}{\partial a_{ii}}.$$

По индукционному предположению $tr_m A = tr_m \hat{A}$, поэтому

$$\frac{\partial tr_m A}{\partial a_{ii}} = \frac{\partial tr_m \hat{A}}{\partial a_{ii}}.$$

Элементы матриц A и $\hat{A}$ связаны соотношением

$$\hat{a}_{kl} = \sum_{p,t=1}^{n} b_{kp}^{-1} a_{pt} b_{tl}.$$

Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial tr_m \hat{A}}{\partial a_{ii}} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial tr_m \hat{A}}{\partial \hat{a}_{kl}} \frac{\partial \hat{a}_{kl}}{\partial a_{ii}} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial tr_m \hat{A}}{\partial \hat{a}_{kl}} b_{ki}^{-1} b_{il}.$$

По определению обратной матрицы

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ki}^{-1} b_{il} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

Тогда

$$tr_{m-1} A = \frac{1}{n-m+1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial tr_m \hat{A}}{\partial \hat{a}_{kl}} b_{ki}^{-1} b_{il} =$$

$$= \frac{1}{n-m+1} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial tr_m \hat{A}}{\partial \hat{a}_{kl}} \sum_{i=1}^{n} b_{ki}^{-1} b_{il} = \frac{1}{n-m+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial tr_m \hat{A}}{\partial \hat{a}_{kk}} = tr_{m-1} \hat{A}.$$

□

Заметим, что скорее всего имеет место более сильное свойство $tr_m(AB) = tr_m(BA)$ для любых квадратных матриц A, B. Справедливость этого свойства установлена численно (прошла проверку на достаточно широком наборе матриц в математическом пакете Maple), однако пока не доказана аналитически. В дальнейшем нам понадобится частный случай свойства (2.2) с ортогональной матрицей.

Определение 2.3. Квадратная матрица B называется ортогональной, если $B^{-1} = B^T$. Операцию на множестве квадратных матриц называем ортогональной, если она принимает одинаковое значение для матриц A и $B^T AB$, где B – ортогональная матрица.

Следствие 2.4. След порядка m обладает ортогональной инвариантностью:

$$tr_m A = tr_m(B^T AB), \quad B^{-1} = B^T.$$

В математической литературе можно встретить родственный термин – “ортогональные инварианты” матрицы (или квадратичной формы, многочлена второй степени): к ним причисляют собственные числа матрицы, след, определитель и т.д. Получается, что к ним относится также и след порядка m. Этот факт нельзя назвать новым. Во-первых, существует способ классификации линий и поверхностей второго порядка, основанный на ортогональных инвариантах для матрицы коэффициентов, которые по сути являются ее следами порядка m. Во-вторых, ортогональная инвариантность суммы главных миноров давно отмечена в публикациях по FNPDE, посвященных уравнениям типа (1.2).

Таким образом, ортогонально инвариантную операцию tr_m можно определить на множестве квадратных матриц, однако далее рассматриваем ее в приложении к симметричным матрицам, поскольку именно в этом случае ортогональная инвариантность приносит наибольшую пользу. Обозначим символом $Sym(n)$ пространство всех симметричных матриц размера $n \times n$. Известно, что для любой симметричной матрицы S существует такая ортогональная матрица B, которая приводит ее к диагональному виду:

$$B^T S B = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n),$$

$$\lambda_k \text{ – собственные числа матрицы } S.$$

Ортогональная инвариантность следа порядка m позволяет в случае необходимости обращаться к диагональной форме матрицы:

$$tr_m S = tr_m \Lambda.$$

Продемонстрируем вычисление следов для диагонализованной матрицы размера 3×3:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

$$tr_1 \Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$tr_2 \Lambda = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3,$$

$$tr_3 \Lambda = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Теперь очевидно, что в пространстве $Sym(n)$ операцию tr_m можно трактовать как элементарную симметрическую функцию порядка m от собственных чисел матрицы S. Иногда именно так и определяют след порядка m (см. [8]), хотя при этом он отчасти теряет свою содержательность и становится не применим к несимметричным квадратным матрицам (см. определение 2.1). Однако, несмотря на эти издержки, в математической литературе в силу традиции или, возможно, инерции принято избегать действий с суммой главных миноров матрицы, но сразу обращаться к элементарным симметрическим функциям от ее собственных чисел. В этих случаях вместо tr_m используют обозначения типа $S_m(\Lambda)$, $\sigma_m(\Lambda)$. Действительно, в некоторых ситуациях бывает проще работать с диагонализованной матрицей S, однако, на наш взгляд, значение собственных чисел, их простота и удобство в использовании, преувеличены. В этой работе показано, как некоторые ключевые свойства элементарных симметрических функций можно перенести без осложнений и на следы порядка m.

Введем специальные обозначения для укороченных матриц:

$S^{\langle i \rangle}$ – матрица, полученная из матрицы S вычеркиванием i-той строки и i-того столбца;

$S^{\langle i_1, i_2, ..., i_k \rangle}$ – матрица, полученная из матрицы S вычеркиванием k строк и k столбцов с номерами $i_1, i_2, ..., i_k$.

Заметим, что дифференцирование следа порядка m по диагональному элементу матрицы S равносильно вычислению следа порядка $m-1$ для укороченной матрицы:

$$\frac{\partial tr_m S}{\partial s_{ii}} = tr_{m-1} S^{\langle i \rangle},$$

$$\frac{\partial^k tr_m S}{\partial s_{i_1 i_1}\partial s_{i_2 i_2}...\partial s_{i_k i_k}} = tr_{m-k} S^{\langle i_1, i_2, ..., i_k\rangle}.$$

Следы укороченных матриц, разумеется, не обладают ортогональной инвариантностью относительно матрицы S. Тем не менее есть формула связи.

Лемма 2.5. Пусть $S \in Sym(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ – диагональная форма матрицы S, $\Lambda = B^T SB$, где B – ортогональная матрица с элементами b_{ij}. Справедлива формула

$$tr_{m-1} S^{\langle i\rangle} = \sum_{j=1}^{n} tr_{m-1} \Lambda^{\langle j\rangle} b_{ij}^2.$$

Доказательство. Считаем матрицу B постоянной, значение $tr_m \Lambda$ рассматриваем как функцию от элементов матрицы S. Элементы матриц S и Λ связаны соотношением

$$\lambda_j = \sum_{k,l=1}^{n} s_{kl} b_{kj} b_{lj}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Используем ортогональную инвариантность следа порядка m и правило дифференцирования сложной функции:

$$tr_{m-1} S^{\langle i\rangle} = \frac{\partial tr_m S}{\partial s_{ii}} = \frac{\partial tr_m \Lambda}{\partial s_{ii}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial tr_m \Lambda}{\partial \lambda_j}\frac{\partial \lambda_j}{\partial s_{ii}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial tr_m \Lambda}{\partial \lambda_j} b_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n} tr_{m-1} \Lambda^{\langle j\rangle} b_{ij}^2.$$

□

Подходим к доказательству ключевого неравенства, на котором основаны главные результаты этой работы.

Теорема 2.6. *Для произвольной матрицы $S \in Sym(n)$ и произвольных номеров $2 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant n$ справедливо неравенство*

$$tr_m S \cdot tr_{m-2} S^{\langle i\rangle} \leqslant tr_{m-1} S \cdot tr_{m-1} S^{\langle i\rangle}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство (2.3) для диагональных матриц $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, поскольку именно в этом случае можно использовать два удобных соотношения:

$$tr_k \Lambda = \lambda_i tr_{k-1} \Lambda^{\langle i\rangle} + tr_k \Lambda^{\langle i\rangle}, \tag{2.4}$$

$$\frac{tr_{k-1}\Lambda}{C_n^{k-1}} \cdot \frac{tr_{k+1}\Lambda}{C_n^{k+1}} \leqslant \left(\frac{tr_k \Lambda}{C_n^k}\right)^2. \tag{2.5}$$

Тождество (2.4) очевидно. Неравенство (2.5) есть не что иное, как известное неравенство Ньютона для элементарных симметрических функций, описанное и доказанное в книге [14].

Воспользуемся тождеством (2.4) для следов порядка m и $m-1$:

$$tr_m \Lambda = \lambda_i tr_{m-1} \Lambda^{\langle i\rangle} + tr_m \Lambda^{\langle i\rangle},$$

$$tr_{m-1} \Lambda = \lambda_i tr_{m-2} \Lambda^{\langle i\rangle} + tr_{m-1} \Lambda^{\langle i\rangle}.$$

Умножим обе части первого равенства на $tr_{m-2}\Lambda^{\langle i\rangle}$, второго – на $tr_{m-1}\Lambda^{\langle i\rangle}$, результаты вычитаем:

$$tr_m\Lambda tr_{m-2}\Lambda^{\langle i\rangle} - tr_{m-1}\Lambda tr_{m-1}\Lambda^{\langle i\rangle} = tr_m\Lambda^{\langle i\rangle}tr_{m-2}\Lambda^{\langle i\rangle} - \left(tr_{m-1}\Lambda^{\langle i\rangle}\right)^2.$$

Оценим слагаемое $tr_m\Lambda^{\langle i\rangle}tr_{m-2}\Lambda^{\langle i\rangle}$ с помощью неравенства Ньютона (2.5):

$$tr_m\Lambda^{\langle i\rangle}tr_{m-2}\Lambda^{\langle i\rangle} \leqslant \frac{m-1}{m}\frac{n-m+1}{n-m+2}\left(tr_{m-1}\Lambda^{\langle i\rangle}\right)^2.$$

Приходим к выводу

$$tr_m\Lambda tr_{m-2}\Lambda^{\langle i\rangle} - tr_{m-1}\Lambda tr_{m-1}\Lambda^{\langle i\rangle} \geqslant \left(tr_{m-1}\Lambda^{\langle i\rangle}\right)^2\left(1-\frac{m-1}{m}\frac{n-m+1}{n-m+2}\right) \geqslant 0.$$

Таким образом, соотношение (2.3) доказано для диагональной матрицы. Теперь докажем для произвольной матрицы $S \in Sym(n)$. Пусть $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ – диагональная форма матрицы S, $\Lambda = B^TSB$, где B – ортогональная матрица с элементами b_{ij}. Выше доказано, что для матрицы Λ справедлива серия неравенств (2.3):

$$tr_m\Lambda \cdot tr_{m-2}\Lambda^{\langle j\rangle} \leqslant tr_{m-1}\Lambda \cdot tr_{m-1}\Lambda^{\langle j\rangle}, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{2.6}$$

При каждом j умножаем неравенство (2.6) на b_{ij}^2 и складываем. Ортогональная инвариантность следа и лемма 2.5 приводят к соотношению (2.3) для матрицы S:

$$\underbrace{tr_m\Lambda}_{tr_mS} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n tr_{m-2}\Lambda^{\langle j\rangle}b_{ij}^2}_{tr_{m-2}S^{\langle i\rangle}} \leqslant \underbrace{tr_{m-1}\Lambda}_{tr_{m-1}S} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n tr_{m-1}\Lambda^{\langle j\rangle}b_{ij}^2}_{tr_{m-1}S^{\langle i\rangle}}.$$

$\square$

Неравенство (2.3) доказано в работе [10], но только для элементарных симметрических функций.

Следствие 2.7. Пусть $S \in Sym(n)$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $tr_mS > 0$ и $tr_{m-2}S^{\langle i\rangle} > 0$, то

$$tr_{m-1}S > 0 \quad \Leftrightarrow \quad tr_{m-1}S^{\langle i\rangle} > 0.$$

Отметим, что при доказательстве соотношения (2.3) ортогональная инвариантность операции tr_m использовалась только ради перехода к диагональной форме матрицы S и обращения к свойствам элементарных симметрических функций. Однако в теории FNPDE ее роль гораздо существеннее: ортогональная инвариантность матричной операции лежит в основе специальных методик, разработанных для построения априорных оценок решения уравнений типа (1.2) (см. [9], [3], [13]).

3. Симметричная m-положительная матрица

В этой части статьи рассматриваем понятие, которое может служить обобщением для симметричной положительно определенной матрицы.

Определение 3.1. Симметричная матрица S называется m-положительной, если $tr_kS > 0$ для всех $k = 1, 2, ..., m$.

Приведем схематичный пример реализации определения 3.1 в случае $n = 4$, $m = 3$. Рассмотрим симметричную матрицу размера 4×4:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{pmatrix}.$$

Согласно определению 3.1 матрица S называется 3-положительной, если

$$tr_1S = s_{11} + s_{22} + s_{33} + s_{44} > 0,$$

$$tr_2S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{14} \\ s_{14} & s_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{24} \\ s_{24} & s_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{33} & s_{34} \\ s_{34} & s_{44} \end{vmatrix} > 0,$$

$$tr_3S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{24} \\ s_{14} & s_{24} & s_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} & s_{14} \\ s_{13} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{34} & s_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{vmatrix} > 0.$$

Введем обозначение для множества m-положительных матриц:

$$K_m = \{S \in Sym(n) : \ tr_kS > 0, \ k = 1, 2, ..., m\}. \tag{3.1}$$

Положим $K_0 = Sym(n)$. В пространстве симметричных матриц множество K_m является конусом, поскольку если $S \in K_m$, то $\alpha S \in K_m$ для любого $\alpha > 0$. Для конусов справедлива цепочка вложений

$$K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_n.$$

Матричные конусы K_m привлекают внимание специалистов по FNPDE с конца прошлого века: на базе K_m строится теория разрешимости уравнений типа (1.2). Есть разные способы задания этих конусов. Описание (3.1) является наиболее компактным и конструктивным. Оно было впервые представлено в работе 1983 года Н. М. Ивочкиной [10] и с тех пор преобладает в отечественной и в зарубежной математической литературе. Однако термин "m-положительная матрица" для наименования элементов из K_m введен совсем недавно в работах [6], [12] того же автора. В статье [5] представлена систематизация альтернативных описаний конусов K_m, известных и новых свойств, востребованных теорией FNPDE. Данная работа дополняет эти исследования еще одним новым результатом.

На основе неравенства (2.3) докажем несложную теорему, из которой следует сразу несколько выразительных фактов для m-положительных матриц.

Теорема 3.2. *Для произвольной матрицы $S \in Sym(n)$ и произвольных номеров $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant n$ верно следующее:*

$$S \in K_m \quad \Leftrightarrow \quad S^{\langle i \rangle} \in K_{m-1}, \ tr_mS > 0.$$

В левой части данного утверждения K_m – это конус в пространстве $Sym(n)$, а в правой части K_{m-1} – конус в пространстве $Sym(n-1)$.

Доказательство. Используем метод математической индукции. При $m = 1$ утверждение теоремы очевидно:

$$S \in K_1 \quad \Leftrightarrow \quad S^{\langle i \rangle} \in K_0,\ tr_1 S > 0.$$

Предположим, что

$$S \in K_{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad S^{\langle i \rangle} \in K_{m-2},\ tr_{m-1} S > 0.$$

Проведем цепочку равносильных переходов:

$$S \in K_m \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} S \in K_{m-1}, \\ tr_m S > 0. \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} S^{\langle i \rangle} \in K_{m-2}, \\ tr_{m-1} S > 0, \\ tr_m S > 0. \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} S^{\langle i \rangle} \in K_{m-2}, \\ tr_{m-1} S^{\langle i \rangle} > 0, \\ tr_m S > 0. \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} S^{\langle i \rangle} \in K_{m-1}, \\ tr_m S > 0. \end{cases}$$

Первый и последний равносильные переходы в этой цепочке вытекают из определения 3.1, второй – из индукционного предположения, а третий – из следствия 2.7. □

Следствие 3.3. Пусть $S \in K_m$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Тогда

$$\frac{\partial tr_m S}{\partial s_{ii}} = tr_{m-1} S^{\langle i \rangle} > 0$$

для любого номера $1 \leqslant i \leqslant n$. Более того,

$$\frac{\partial^k tr_l S}{\partial s_{i_1 i_1} \partial s_{i_2 i_2} ... \partial s_{i_k i_k}} = tr_{l-k} S^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle} > 0$$

для любых $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant m$ и любого набора различных номеров $1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_k \leqslant n$.

Таким образом, получается, что след порядка m обладает монотонностью по диагональным элементам m-положительной матрицы S. Для диагональных матриц малого размера монотонность следа порядка m можно вывести непосредственно из определения 3.1 (несложное учебное упражнение). Для диагональных матриц (точнее, для элементарных симметрических функций) произвольного размера монотонность впервые установлена в статье [10]. Затем доказана альтернативным способом в работе [6] для произвольных m-положительных матриц. Доказательство, предложенное в теореме 3.2, синтезирует и усиливает предыдущие подходы: ключевую роль в нем играет неравенство (2.3).

Следствие 3.3 к тому же показывает, что в конусе K_m неравенство (2.3) строгое.

Укажем еще один, ранее известный факт о конусе K_m, который можно вывести из теоремы 3.2.

Следствие 3.4. Пусть $S \in Sym(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Если матрица S является m-положительной, то она имеет по крайней мере m положительных элементов на главной диагонали.

В частности, любая m-положительная матрица имеет хотя бы m положительных собственных чисел. Обратное утверждение верно только для случая $n = m$.

Доказательство. Предположим, что m-положительная матрица S имеет не более, чем $m - 1$ положительных элементов на главной диагонали. Тогда существует такой набор различных номеров $1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_{m-1} \leqslant n$, что матрица $S^{\langle i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\rangle}$ вообще не имеет положительных диагональных элементов. Отсюда, $tr_1 S^{\langle i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\rangle} \leqslant 0$, что противоречит следствию 3.3.

Благодаря ортогональной инвариантности следов делаем вывод, что любая m-положительная матрица имеет хотя бы m положительных собственных чисел.

Обратное утверждение верно только для случая $n = m$. Действительно, если симметричная матрица S имеет n положительных собственных чисел, то она положительно определенная, все ее главные миноры положительны, поэтому $tr_k S > 0$, $k = 1, 2, ..., n$, т.е. матрица S является n-положительной. Если же матрица S имеет m положительных собственных чисел и $m < n$, то она не обязательно является m-положительной. Приведем пример:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$tr_1 S = 1 + 3 - 5 = -1, \quad tr_2 S = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-5) + 1 \cdot (-5) = -17.$$

Получается, что данная матрица S имеет два положительных собственных числа, однако она не является ни 2-положительной, ни даже 1-положительной. □

Следствие 3.4 показывает, что n-положительная матрица – это то же самое, что симметричная положительно определенная матрица. Значит, K_n – это конус положительно определённых матриц.

Для положительно определенных матриц широко известен критерий Сильвестра: матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные угловые миноры положительны. Основным результатом данной работы является получение аналога критерия Сильвестра для m-положительных матриц.

Следствие 3.5. (Критерий Сильвестра) Пусть $S \in Sym(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_{m-1} \leqslant n$ – произвольный набор различных номеров. Справедлив следующий критерий:

$$S \in K_m \quad \Leftrightarrow \quad tr_m S > 0,\ tr_{m-1} S^{\langle i_1\rangle} > 0,\ tr_{m-1} S^{\langle i_1, i_2\rangle} > 0, ..., tr_1 S^{\langle i_1, i_2, \dots, i_{m-1}\rangle} > 0.$$

Доказательство. Достаточно несколько раз воспользоваться теоремой 3.2:

$$S \in K_m \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} S^{\langle i_1\rangle} \in K_{m-1}, \\ tr_m S > 0. \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} S^{\langle i_1, i_2\rangle} \in K_{m-2}, \\ tr_{m-1} S^{\langle i_1\rangle} > 0, \\ tr_m S > 0. \end{cases} \quad \text{и так далее.}$$

□

Приведем схематичный пример применения критерия Сильвестра в случае $n = 4$, $m = 3$, $i_1 = 4$, $i_2 = 3$. Рассмотрим симметричную матрицу размера 4×4:

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра матрица S является 3-положительной, если выполнены три условия:

$$tr_3 S = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{24} \\ s_{14} & s_{24} & s_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} & s_{14} \\ s_{13} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{34} & s_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{24} & s_{43} & s_{44} \end{vmatrix} > 0,$$

$$tr_2 S^{\langle 4 \rangle} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

$$tr_1 S^{\langle 4,3 \rangle} = s_{11} + s_{22} > 0.$$

Если сравнить эти действия с примером после определения 3.1, то ясно, что критерий Сильвестра экономит время, затрачиваемое на технические выкладки или компьютерные вычисления при проверке m-положительности матрицы.

Следствие 3.5 вместе с теоремами 3.2, 2.6, на которые оно опирается, является новым фактом в алгебре симметричных матриц. Автор благодарит П. А. Бакусова за помощь в его обнаружении. В утверждении следствия 3.5 новизна обеспечена обратной импликацией $\Leftarrow$. Прямая импликация $\Rightarrow$ отмечена отдельно в следствии 3.3, и это свойство конусов K_m было ранее известно.

В результате доказательства следствия 3.5 получен, кроме прочего, и альтернативный путь обоснования классического критерия Сильвестра: частный случай при $m = n$, $i_1 = n$, $i_2 = n - 1$, $\ldots$, $i_{n-1} = 2$.

Критерий Сильвестра для m-положительных матриц оказался полезен при исследовании эволюционных m-гессиановских уравнений.

Список литературы

[1] Caffarelly L., Nirenberg L., Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian // Acta Math. – 1985. – Vol. 155. – P. 261–301.

[2] Ivochkina N. M. On the dirichlet problem for fully nonlinear parabolic equations // Journal of Mathematical Sciences. – 1999. – Vol. 93, Issue 5. – P. 689–696.

[3] Ivochkina N. M., Trudinger, N., Wang, X.-J. The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations // Comm.Partial Differ. Equations. – 2004. – Vol. 29. – P. 219–235.

[4] Ivochkina N. M. Weakly first-order interior estimates and Hessian equations // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – Vol. 143, Issue 2. – P. 2875–2882.

[5] Ivochkina N. M., Filimonenkova N.V. On the bakgrounds of the theory of m-Hessian equations // Communications on Pure and Applied Analysis. -– 2013. -– Vol. 12. -– №4. — P. 1687–1703.

[6] Ivochkina N. M., Yakunina G. V., Prokof'eva S. I. The Garding cones in the modern theory of fully nonlin-ear second order differential equations // Journal of Mathematical Sciences. -– 2012. -– Vol. 184, Issue 3. — P. 295-–315.

[7] Lin M., Trudinger N. S., On some inequalities for elementary symmetric functions. Bull. Austr. Math. Soc. – 1994. – Vol. 50. – P. 317 – 326.

[8] Wang X.-J. The k-hessian equation // Lecture Notes in Mathematics. — 2009. — Vol. 1977. — P. 177–252.

[9] Ивочкина Н. М., Интегральный метод барьерных функций и задача Дирихле для уравнений с операторами типа Монжа–Ампера // Математический сборник. – 1980. – Т. 112(154). – № 2(6) – С. 193—206.

[10] Ивочкина Н. М., Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа-Ампера // Математический сборник. – 1983. – Вып.22. – С. 265–275.

[11] Ивочкина Н. М., Мини-обзор основных понятий в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 1997. – Т. 249. – С. 199—211.

[12] Ивочкина Н. М., От конусов Гординга к p-выпуклым гипербоповерхностям // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2012. – Т. 45 – С. 94–104.

[13] Филимоненкова Н. В., О классической разрешимости задачи Дирихле для невырожденных m-гессиановских уравнений // Проблемы математического анализа. — 2011. -– Вып. 60. — С. 89—111.

[14] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства. – М.: издательство «Государственное издательство иностранной литературы». – 1948. — 456 с.