Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов переменного порядка.

А.И.Кароль[0]

Аннотация

We consider a compact selfadjoint pseudodifferential operator with a symbol $a(x,\xi)$, $a(x,\xi) \asymp |\xi|^{-\phi(x)}$, $|\xi| \to \infty$. We justify the Weyl's asymptotics the eigenvalues.

Рассматриваются компактные самосопряженные псевдодифференциальные операторы с символами, порядок убывания которых по переменной ξ зависит от точки x. Показано, что для таких операторов сохраняется вейлевская формула спектральной асимптотики.

Введение

Пусть $A = A^* > 0$ — компактный оператор в гильбертовом пространстве H, $\lambda_k(A)$ — невозрастающая последовательность его собственных чисел, занумерованных с учетом кратности. Через $N(t, A)$ обозначим функцию распределения собственных чисел, $N(t,A) \overset{def}{=} \#\{k \quad |\lambda_k(A) > t^{-1}\}$. Исследованию асимптотики функции распределения при $t \to \infty$ посвящена обширная литература. Основное внимание уделялось интегральным операторам с ядрами с особенностью на диагонали, такие операторы естественно возникают при изучении уравнений с частными производными. В последнее время выявилась еще одна область приложений спектральной теории интегральных операторов — теория случайных процессов. В задачах малых уклонений гауссовых случайных процессов возникла потребность изучения асимптотического распределения собственных чисел операторов, у которых порядок особенности ядра на диагонали (индекс Херста) — переменный.

Интегральные операторы с ядрами с особенностями на диагонали удобно исследовать, включая их в подходящую алгебру псевдодифференциальных операторов (ПДО). Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, ПДО $A = A^* > 0$,

$$Au(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\Omega} e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi) u(y) dy d\xi, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

компактен в $L_2(\Omega)$. Пусть символ $a(x,\xi)$ асимптотически однороден на бесконечности

$$a(x,\xi) = a_0(x,\xi) + o(|\xi|^{-m}), \quad |\xi| \to +\infty,$$

$$a_0(x, \rho\xi) = \rho^{-m} a_0(x,\xi), \quad \rho > 0.$$

Так как $A = A^* > 0$, то $a_0(x,\xi) \geq 0$. Для таких символов, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости, оправдана асимптотическая формула Вейля

$$N(t,A) \sim (2\pi)^{-d} vol_{2d}\{x,\xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d | \operatorname{Re} a(x,\xi) > t^{-1}\}, \quad t \to +\infty, \qquad (1)$$

[0]работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 13-01-00172а и СПбГУ 6.38.64.2012

(здесь и далее vol_d — d-мерный объём множества). Асимптотическая однородность символа приводит к явной формуле

$$N(t,A) \sim (2\pi)^{-d} vol_{2d}\{x,\xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d |\, a_0(x,\xi) > 1\} \cdot t^{d/m}, \quad t \to +\infty, \tag{2}$$

см.[2,3] и обзор [4].

Пусть теперь порядок однородности символа зависит от переменной x,

$$a(x,\rho\xi) = \rho^{-(m+\varphi(x))} a(x,\xi)(1+o(1)), \quad \rho \to +\infty, \tag{3}$$

$\varphi(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\varphi(x) \geq 0, \quad x \in \Omega$. Положим $\Gamma = \{x \in \Omega |\, \varphi(x) = 0\}$. Если d-мерная мера Лебега множества Γ положительна, то для функции распределения спектра сохраняется степенная асимптотика (2), где следует вычислять объём того множества больших значений символа, которое лежит в $\Gamma \times \mathbb{R}^d$. Если же мера Γ равна нулю, то классические результаты показывают лишь, что $N(t,A)$ растет медленнее, чем $t^{m/d}$, но быстрее, чем $t^{m/d-\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$. Соображения теории возмущений [1,4] показывают, что изменение символа вне окрестности Γ не влияет на асимптотику спектра.

Традиционное доказательство вейлевской формулы (1) состоит из следующих этапов: вначале формула проверяется для модельных операторов на торе с символами, не зависящими от x (в этой ситуации спектр явно вычисляется). Затем доказываются оценки функции распределения в подходящих классах символов, и доказательство завершается "замыканием" асимптотики.

Оба этих этапа на операторы переменного порядка не переносятся.

Целью работы является доказательство вейлевской формулы (1) для класса гипоэллиптических псевдодифферециальных операторов, в который входят операторы с символами (3). Доказательство использует метод приближенного спектрального проектора.

Автор благодарен А.И.Назарову и Я.Ю.Никитину, которые вовлекли в работу с операторами (3), и еще А.И.Назарову за внимание к работе.

Метод приближенного спектрального проектора

Метод приближенного спектрального проектора для определения асимптотического распределения собственных чисел, предложенный В.Н.Туловским и М.А.Шубиным (см. [9,12]), в дальнейшем использовался и развивался многими авторами (см. обзоры [7,8]). Многие результаты получены С.З.Левендорским [6,7]. Во всех этих работах рассматривались задачи о спектре неограниченных (псевдо)дифференциальных операторов. Задачи об асимптотике спектра операторов с переменным показателем (3) ранее не рассматривались.

Опишем модификацию метода приближенного спектрального проектора, приспособленную для определения спектральной асимптотики компактных самосопряженных операторов.

Лемма 1. *Пусть A — самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве H; $V(t)$, $t > 1$ — неубывающая положительная функция, $V(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. $E(t)$, $0 \leq E(t) \leq I$, — семейство самосопряженных ядерных операторов в H, для следов которых при некоторых $c, \nu > 0$ выполнены следующие условия:*

1. $\mathrm{tr}\, E(t) = V(t) + O(W(t, ct^{1-\nu})), t \to +\infty,$
2. $\mathrm{tr}\, \big(E(t)(I - E(t))\big) = O(W(t, ct^{1-\nu}))$*,* $t \to +\infty,$
где $W(t, \tau) = V(t+\tau) - V(t-\tau)$*. Тогда:*
A. Если для всех $u \in H$ *и всех* $t > 1$ *выполнено неравенство*

$$((tA - I)E(t)u, E(t)u) \geq -ct^{-\nu}\|u\|^2, \tag{4}$$

то для всех достаточно больших t

$$N(t, A) \geq V(t) - CW(t, ct^{1-\nu}). \tag{5}$$

B. Если для всех $u \in H$ *и всех* $t > 1$ *выполнено неравенство*

$$((tA - I)(I - E(t))u, (I - E(t))u) \leq ct^{-\nu}\|u\|^2, \tag{6}$$

то для всех достаточно больших t

$$N(t, A) \leq V(t) + CW(t, ct^{1-\nu}). \tag{7}$$

Доказательство. Рассуждения следуют доказательству аналогичного утверждения для спектра неограниченного оператора (см. [8], §15, [11], §28). Пусть $L(t) \subset H$ - линейная оболочка собственных векторов оператора $E(t)$, отвечающих собственным числам λ_k, большим $1/2$. Так как $0 \leq \lambda_k \leq 1$, то

$$\mathrm{tr}\, E(t) - \dim L(t) = \sum_{2\lambda_k > 1} (\lambda_k - 1) + \sum_{2\lambda_k \leq 1} \lambda_k \leq 2 \sum_{2\lambda_k \leq 1} (1 - \lambda_k)\lambda_k \leq 2\mathrm{tr}\, \big(E(t)(I - E(t))\big),$$

$$\mathrm{tr}\, E(t) - \dim L(t) \geq - \sum_{2\lambda_k > 1} (1 - \lambda_k) \geq -2 \sum_{2\lambda_k > 1} (1 - \lambda_k)\lambda_k \geq -2\mathrm{tr}\, \big(E(t)(I - E(t))\big).$$

Ввиду условия 2

$$|\mathrm{tr}\, E(t) - \dim L(t)| = O(W(t, ct^{1-\nu})), \quad t \to +\infty. \tag{8}$$

Оператор $E(t)$ взаимно однозначно отображает $L(t)$ на себя. Для $u \in L(t)$ положим $v = E(t)u$. Тогда ввиду $\|E(t)u\| \geq 1/2\|u\|$ из (4) получаем $((tA - I)v, v) \geq -4ct^{-\nu}\|v\|^2$ что приводит к $\big(\big(tA - (1 - c_1 t^{-\nu})I\big)v, v\big) > 0$ при $c_1 > 4c$ и $\forall v \in L(t)$, $v \neq 0$. Из вариационного принципа $N(t(1 - c_1 t^{-\nu})^{-1}, A) \geq \mathrm{dim} L(t)$ и (8) дает оценку снизу (5).

Далее, пространство $L(t)$ — приводящее для оператора $E(t)$. Для $u \in L(t)^\perp$ имеем $v = u - E(t)u \in E(t)^\perp, \quad \|u\| \leq 2\|v\|$, и оператор $I - E(t)$ взаимно однозначно отображает пространство $L(t)^\perp$ на себя. Так же как и при выводе оценки снизу, из неравенства (6) вытекает, что для всех $v \in L(t)^\perp$, $v \neq 0$, имеем $((tA - (1 + c_1 t^{-\nu})I)v, v) < 0$, по вариационному принципу $N(t(1 + c_1 t^{-\nu})^{-1}, A) \leq \mathrm{dim} L(t)$ и (8) дает оценку сверху (7). $\square$

Замечание 1. Если $V(t)$ — регулярно меняющяяся функция на бесконечности порядка $r > 0$, то есть $tV'(t)/V(t) \to r, \quad t \to +\infty$, то легко видеть, что $W(t, ct^{1-\nu}) \leq Ct^{-\nu}V(t)$, и функция распределения оценивается через $V(t)(1 \pm Ct^{-\nu})$.

Замечание 2. Оператор A в лемме 1 может зависеть от параметра t. Если для оператора $A = A(t)$ выполнены неравенства (4) или (6), то для функции $N(t, A(t))$ будут справедливы неравенства (5) или (7) соответственно.

Исчисление псевдодифференциальных операторов

Неравенства в условиях леммы 1 удобно проверять, когда оператор A включен в подходящую алгебру псевдодифференциальных операторов, в которой имеются хорошие теоремы о композиции и возможность получать неравенства типа Гординга для операторов с сильно эллиптическими символами.

Опишем нужные нам классы псевдодифференциальных операторов. Операторы и символы зависят от параметра $t \geq 1$. Пусть $p(t,x,\xi)$ — положительная бесконечно гладкая по $x,\xi \in \mathbb{R}^d$ весовая функция. Класс символов $S_{\rho,\delta,\kappa}(p)$ состоит по определению из бесконечно гладких функций $a(t,x,\xi)$ таких, что для любых мультииндексов α,β

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(t,x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta} t^{-\kappa|\beta|} p(t,x,\xi)(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}, \quad x,\xi \in \mathbb{R}^d, \tag{9}$$

$0 \leq \delta < \rho \leq 1, \kappa \in \mathbb{R}$. Для $p(t,x,\xi) \equiv (1+|\xi|^2)^{m/2}$ и $\kappa = 0$ мы получаем известный класс Хермандера $S^m_{\rho,\delta}$.

Для фиксированного t классы $S_{\rho,\delta,\kappa}(p)$ включаются в общие классы исчисления Вейля-Хермандера [11]. Эти классы описываются метрикой (квадратичной формой) g в $\mathbb{R}^{2d}$ и весовой функцией p. Для наших классов метрика

$$g_{x,\xi}(y,\eta) = (1+|\xi|^2)^{-\delta/2}|y|^2 + (1+|\xi|^2)^{\rho/2}|\eta|^2$$

такая же, как и у стандартных классов $S^m_{\rho,\delta}$, и поэтому удовлетворяет всем нужным требованиям ([11], §18). Для функции p простым достаточным условием применимости исчисления ПДО являются оценки

$$|\partial_{x_j} p(x,\xi)| \leq Cp(x,\xi)(1+|\xi|)^\delta, \quad |\partial_{\xi_j} p(x,\xi)| \leq Cp(x,\xi)(1+|\xi|)^{-\rho}, \quad 1 \leq j \leq d, \tag{10}$$

$$p(x,\xi) \leq Cp(y,\eta)((1+|\xi|)^N + (1+|\eta|)^N) \tag{11}$$

(леммы 1.1 и 1.2 в [6]).

Важным примером весовой функции p является $p(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{\phi(x)}$, где $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\phi(x) = \mathrm{const}$ при достаточно больших $|x|$. При этом неравенство (10) выполняется с $\rho = 1$ и $\forall\delta > 0$, неравенство (11) также очевидно.

Через $A(t,x,D_x)$ будем обозначать ПДО с вейлевским символам $a(t,x,\xi)$, для функций u из класса Шварца

$$(A(t,x,D_x)u)x = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} a(t, \frac{x+y}{2}, \xi) u(y)dyd\xi.$$

Класс таких операторов с символами из $S_{\rho,\delta,\kappa}(p)$ обозначим через $\Psi_{\rho,\delta,\kappa}(p)$. Для классов символов с весовыми функциями $(1+|\xi|^2)^{m/2}$ сохраним стандартное обозначение $S^m_{\rho,\delta,\kappa}$, классы соответствующих операторов — $\Psi^m_{\rho,\delta,\kappa}$.

Если весовые функции $p = p(t,x,\xi)$ удовлетворяют (10), (11) равномерно по t, то справедливы следующие утверждения о композиции и ограниченности в L_2 (см.[11], §18, а также [6], §1):

Предложение 1. *Пусть a_k — вейлевские символы операторов $A_k \in \Psi_{\rho,\delta,\kappa}(p_k)$, $k = 1,2$. Тогда $A_1 A_2 \in \Psi_{\rho,\delta,\kappa}(p_1 p_2)$, и для любого n вейлевский символ оператора $A_1 A_2$ раскладывается в сумму*

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|<n} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!} (-2i)^{|\alpha+\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_1 \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_2 + r_n,$$

$r_n \in S_{\rho,\delta,\kappa}(p_1p_2(1+|\xi|^2)^{-n(\rho-\delta)/2})$.

Предложение 2. *Если весовая функция* p *ограничена в* $\mathbb{R}^{2d}$ *равномерно по* $t>1$, *то оператор* $A \in \Psi_{\rho,\delta,\kappa}(p)$, $\kappa \geq 0$, *ограничен в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *равномерно по* t.

Напомним, что оператор с вещественным вейлевским символом формально самосопряжен в L_2.

В следующей теореме формулируется неравенство Гординга (см. [7], §1 лемма $5'$).

Предложение 3. *Пусть для вещественного положительного символа* $a \in S_{\rho,\delta,\kappa}(p)$, $\kappa > 0$, *для какого-то* $N \in \mathbb{R}$ *при* $t>1$, $x,\xi \in \mathbb{R}^d$ *выполнены следующие неравенства:*

$$a(t,x,\xi) \geq c_0 t^{-N}(1+|\xi|)^{-N}, \quad c_0>0, \tag{12}$$

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(t,x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} a(t,x,\xi) t^{-\kappa|\beta|}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}, \forall \alpha,\beta, \tag{13}$$

(то есть $a(t,x,\xi)$ *— эллиптический символ в* $S_{\rho,\delta,\kappa}(a)$*). Тогда найдется* $t_0>1$, *что для* $t>t_0$

$$(A(t,x,D_x)u,u)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geq 0, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Асимптотика спектра

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей S, φ — бесконечно гладкая неотрицательная в $\mathbb{R}^d$ функция, Γ — множество нулей функции φ, $\Gamma \subset \bar{\Omega}$. Для достаточно больших $|x|$ $\varphi(x) \equiv const > 0$. Будем рассматривать оператор $A(x,D_x)$ — ПДО с вейлевским символом $a(x,\xi) \in \Psi_{\rho,\delta,0}((1+|\xi|^2)^{-(m+\varphi(x))/2})$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, $m>0$.

Потребуем, чтобы вещественный символ $a(x,\xi)$ был формально гипоэллиптичен, то есть

1. Для некоторых $c_0, m_0 > 0$,

$$a(x,\xi) \geq c_0|\xi|^{-m_0}, \text{ для всех } x \in \Omega,\ |\xi|>R, \tag{14}$$

2.
$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq c_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|} a(x,\xi), \quad |\xi|>R. \tag{15}$$

Потребуем также выполнения следующего условия невырожденности:

3. Для любого ν, $0<\nu<(\rho-\delta)/2m_0$ равномерно по $x \in \bar{\Omega}$

$$vol_d\{\xi \in \mathbb{R}^d |\, a(x,\xi) > t^{-1}\} = v(x) t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}}(1+O(t^{-\nu})), \quad t \to +\infty, \tag{16}$$

v — непрерывная положительная в $\bar{\Omega}$ функция.

Например, условие 3 выполнено, если $a(x,\xi) = a_0(x,\xi) + O(|\xi|^{-m-(\rho-\delta)})$, $|\xi| \to +\infty$, $a_0(x,\xi)$ однородна по ξ степени $-(m+\varphi(x))$, и $v(x) = vol_d\{\xi \in \mathbb{R}^d |\, a_0(x,\xi) > 1\} > 0$ в $\bar{\Omega}$.

Положим $A_\Omega := rAe$, r, e — соответственно операторы продолжения нулем и ограничения на Ω.

Теорема 1. *Для спектра оператора A_Ω с символом, удовлетворяющим условиям 1-3, справедлива асимптотическая формула Вейля*

$$N(t, A_\Omega) = (2\pi)^{-d} vol_{2d}\{x, \xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d | \; a(x, \xi) > t^{-1}\}(1 + O(t^{-\nu})), \quad t \to +\infty, \tag{17}$$

которая ввиду (16) приводит к явному интегралу Лапласа

$$N(t, A_\Omega) = (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}} v(x) dx (1 + O(t^{-\nu})), \quad t \to +\infty. \tag{18}$$

Условия 1-3 являются ограничениями на поведение символа $a(x, \xi)$ лишь в $\Omega \times \mathbb{R}^d$. Однако символ a можно изменить вне Ω (продолжить с $\Omega \times \mathbb{R}^d$ на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$) так, чтобы эти условия были бы выполнены равномерно в $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Изменение символа вне $\Omega \times \mathbb{R}^d$ приводит к замене оператора A_Ω на оператор $A_\Omega + Q$, Q — оператор с бесконечно гладким в $\overline{\Omega \times \Omega}$ ядром, что не меняет асимптотики $N(t, A_\Omega)$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что условия 1-3 выполнены равномерно по $x, \xi \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Асимптотика интеграла в формуле (18) определяется сколь угодно малой окрестностью множества Γ, где функция φ достигает минимума. Эта асимптотика, как правило, вычисляется лишь с точностью до $O((\ln t)^{-\infty})$, так что конкретное значение параметра ν оказывается несущественным .

Доказательство теоремы заключается в построении приближенных спектральных проекторов для оператора A и проверке условий леммы 1. Этому посвящены леммы 2 - 4.

Условие липшицевости S во многих случаях можно ослабить, асимптотика (17),(18) сохраняется (с возможно худшей оценкой остатка) для более широкого класса областей. Несложной модификацией доказательства основной теоремы 1 можно получить следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть A_Ω — оператор с символом, удовлетворяющим условиям 1-3. Тогда:*

1. Если Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $\Gamma \cap S = \emptyset$ и для какого-то $\sigma > 0$ равномерно по $x \in S$ $\varphi(x) \geq \sigma$, то сохраняются формулы (17),(18) с оценкой остатка $O(t^{-\tilde{\nu}})$, $\forall \tilde{\nu} < \min\{\frac{\rho-\delta}{2m_0}, \frac{m\sigma}{d(d+\sigma)}\}$.

2. Если поверхность S - не липшицева, но при некотором $\tau < 1$ для $s < s_0$ $vol_d\{x \in \mathbb{R}^d | \; dist(x, S) \leq s\} \leq Cs^\tau$, то сохраняются формулы (17),(18) с оценкой остатка $O(t^{-\tilde{\nu}})$, $\forall \tilde{\nu} < \frac{\rho-\delta}{2m_0}\tau$.

Конструкция приближенного спектрального проектора

Определим параметры $\nu, \kappa > 0$ так, что

$$(\nu + \kappa) < (\rho - \delta)/2m_0.$$

Положим

$$\rho' = \rho - (\nu + \kappa)m_0, \quad \delta' = \delta + (\nu + \kappa)m_0.$$

Отметим, что $0 \leq \delta < \delta' < \rho' < \rho \leq 1$.

Фиксируем функции $\chi_\pm(s) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \chi_\pm(s) \leq 1$,

$$\chi_\pm(s) = \begin{cases} 1, & s > \mp t^{-\nu}, \\ 0, & s < \mp 2^{\pm 1} t^{-\nu}. \end{cases}$$

Производные функций $\chi_\pm$ отличны от 0 лишь для $\mp 2^{\pm 1} t^{-\nu} \le s \le \mp t^{-\nu}$, и справедлива оценка $|\chi_\pm^{(k)}(s)| \le c_k t^{\nu k}$.

Положим

$$\chi_\pm(t,x,\xi) := \chi_\pm(ta(x,\xi) - 1). \tag{19}$$

Введем также три срезающие функции $\zeta_-(x,t), \zeta_0(x,t), \zeta_+(x,t)$. При всех $t > 1$ функция $\zeta_- \in C_0^\infty(\Omega)$, $\quad \zeta_-(x,t) = 1$, если $\mathrm{dist}(x,S) > t^{-\nu}$. Далее, при всех $t > 1$ функции ζ_0, $\zeta_+ \in C_0^\infty(R^d)$, и

$$\zeta_0(x,t) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & \mathrm{dist}(x,S) > t^{-\nu}. \end{cases}$$

Срезка ζ_+ — накрывает срезку ζ_0:

$$\zeta_+(x,t) = \begin{cases} 1, & \zeta_0(x,t) \ne 0, \\ 0, & \mathrm{dist}(x,S) > 2t^{-\nu}. \end{cases}$$

Для всех трех срезок имеем

$$0 \le \zeta(x,t) \le 1, \quad |\partial_x^\alpha \zeta(x,t)| \le c_\alpha t^{\nu|\alpha|},\ t > 1.$$

Через $\zeta = \zeta(t)$ обозначаем также оператор умножения на функцию $\zeta(x,t)$.

Отметим, что на носителе производных символа $\chi_\pm(t,x,\xi)$

$$t^\nu \le C(1 + |\xi|)^{\max\{(\rho-\rho'),(\delta'-\delta)\}}. \tag{20}$$

Лемма 2. *1. Символы $\chi_\pm(t,x,\xi)$ принадлежат классу $S^0_{\rho',\delta',\kappa}$. Соответствующие операторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяют оценке*

$$-\varepsilon I \le \chi_\pm(t,x,D_x) \le (1+\varepsilon) I \tag{21}$$

при любом $\varepsilon > 0$ и $t \ge t_0(\varepsilon)$.

2. Пусть ζ— оператор умножения на одну из срезок $\zeta_-, \zeta_0, \zeta_+$. Тогда коммутатор $[\zeta, \chi_\pm] \doteq \zeta\chi_\pm(t,x,D_x) - \chi_\pm(t,x,D_x)\zeta$ является псевдодифференциальным оператором класса $S^{-\delta}_{\rho',\delta',\kappa}$.

4. Существует t_0, такое, что для всех $t > t_0$ и $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ справедливы неравенства

$$((tA(x,D_x) - I)\chi_-(t,x,D_x)u, \chi_-(t,x,D_x)u)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \ge t^{-\nu}\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{22}$$

$$((tA(x,D_x) - I)(I - \chi_+(t,x,D_x))u, (I - \chi_+(t,x,D_x))u)_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le t^{-\nu}\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{23}$$

Доказательство. Начнем с доказательства пункта 1 леммы. Проверим необходимые оценки производных:

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\chi_\pm(t,x,\xi)| = |\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\chi_\pm(ta(x,\xi)-1)| =$$

$$= \left|\sum_{k,l} c_{k,l}\, t^{k+l}\chi_\pm^{(k+l)}(ta(x,\xi)-1)\prod_{\alpha^1+\dots\alpha^k=\alpha,\, \beta^1+\dots\beta^l=\beta}\partial_x^{\alpha^i}\partial_\xi^{\beta^j}a(x,\xi)\right| \le$$

$$\le c_{\alpha,\beta}t^{\nu(|\alpha|+|\beta|)}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|} \le c'_{\alpha,\beta}t^{-\kappa(|\alpha|+|\beta|)}(1+|\xi|)^{\delta'|\alpha|-\rho'|\beta|}. \qquad (24)$$

В последнем неравенстве использована оценка (20).

Неравенства (21) являются неравенствами Гординга для операторов $\varepsilon I+\chi_\pm(t,x,D_x)$, $(1+\varepsilon)I-\chi_\pm(t,x,D_x)$ соответственно. Эти операторы — псевдодифференциальные с вейлевскими символами из $S^0_{\rho',\delta',\kappa}$. Их символы сильно эллиптичны в $S^0_{\rho',\delta',\kappa}$, для них выполнены условия предложения 3.

Докажем утверждение пункта 2 леммы. Коммутатор является псевдодифференциальным оператором с амплитудой $\chi_\pm(t,(x+y)/2,\xi)(\zeta(x,t)-\zeta(y,t))$,

$$\big([\zeta,\chi_\pm]u\big)(x) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi}\chi_\pm(t,\frac{x+y}{2},\xi)(\zeta(x,t)-\zeta(y,t))u(y)dyd\xi. \qquad (25)$$

Имеем $\zeta(x,t)-\zeta(y,t)=\sum\limits_{j=1}^{d}(x_j-y_j)\Phi_j(x,y,t)$, где

$$\Phi_j(x,y,t)=\int_0^1(\zeta)_{x_j}(y+s(x-y),t)ds, \quad |\partial_{x,y}^\alpha\Phi_j(x,y,t)|\le c_\alpha t^{\nu(|\alpha|+1)}.$$

Интегрированием по частям в (25) получаем, что коммутатор может быть задан амплитудой

$$\sum_{j=1}^{d}\Phi_j(x,y,t)\partial_{\xi_j}\chi_\pm(t,(x+y)/2,\xi).$$

Оценивая производные этой амплитуды так же как в доказательстве пункта 1, получаем, что эта амплитуда принадлежит классу $S^{-\delta}_{\rho',\delta',\kappa}$.

Докажем утверждение пункта 3. Рассмотрим подробно оценку (22), оценка (23) доказывается аналогично. Это неравенство является неравенством Гординга для оператора $P_-(t) := \chi_-(t,x,D_x)(tA-I)\chi_-(t,x,D_x)+t^{-\nu}$. Положим

$$p_-(t,x,\xi) := (ta(x,\xi)-1)\chi_-(t,x,\xi)^2+t^{-\nu}.$$

Проверим, что p_- — старший символ оператора $P_-(t)$, и выполнены условия предложения 3. По построению $p_-(t,x,\xi)\ge t^{-\nu}$. Из оценок (15),(24) следует, что

$$\left|(ta(x,\xi)-1)\partial_x^\sigma\partial_\xi^\tau((\chi_-(t,x,\xi))^2)\right| \le C_{\sigma,\tau}t^{-\kappa(|\sigma|+|\tau|)}(1+|\xi|)^{-\rho'|\tau|+\delta'|\sigma|}p_-(t,x,\xi), \qquad (26)$$

а для $|\alpha|+|\beta|>0$

$$\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(ta(x,\xi)-1)\partial_x^\sigma\partial_\xi^\tau((\chi_-(t,x,\xi))^2)\right| \le C_{\alpha,\beta,\sigma,\tau}t^{-\kappa(|\sigma|+|\tau|)}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|-\rho'|\tau|+\delta'|\sigma|}ta(x,\xi). \qquad (27)$$

На носителе производных символа $\chi_-(t,x,\xi)$ $\frac{1}{2}t^{-\nu} \le ta(x,\xi)-1 \le t^{-\nu}$ и в силу выбора параметров ρ, ρ', δ, δ' из неравенств (26), (27) вытекает, что

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (ta(x,\xi)-1)\partial_x^\sigma \partial_\xi^\tau ((\chi_-(t,x,\xi))^2)\right| \le$$

$$\le C_{\alpha,\beta,\sigma,\tau} t^{-\kappa(|\sigma|+|\tau|+|\alpha|+|\beta|)}(1+|\xi|)^{-\rho'(|\beta|+|\tau|)+\delta'(|\alpha|+|\sigma|)} p_-(t,x,\xi). \tag{28}$$

Из этих оценок с помощью (10) следует, что $p_-(t,x,\xi)$ — весовая функция, и $p_-(t,x,\xi) \in S_{\rho',\delta',\kappa}(p_-(t,x,\xi))$. В соответствии с предложением 1 полный символ композиции $\chi_-(t,x,D_x)(tA-I)\chi_-(t,x,D_x)$ является асимптотической суммой ряда из производных, оцениваемых в (28). Из этих оценок следует, что полный символ отличается от p_- на слагаемое из класса $S_{\rho',\delta',\kappa}((1+|\xi|^2)^{-(\rho'-\delta')/2}p_-(t,x,\xi))$. Оценка (22) справедлива в силу предложения 3. $\square$

Определим два семейства приближенных спектральных проекторов. Пусть $\mathcal{E}_\pm(t) := 3(\chi_\pm(t,x,D_x))^2 - 2(\chi_\pm(t,x,D_x))^3$ — приближенные спектральные проекторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Операторы $E_\pm(t)$ определим формулами

$$E_-(t) := \zeta_-(t)\mathcal{E}_-(t)\zeta_-(t), \quad E_- : \, L_2(\Omega) \mapsto C_0^\infty(\Omega);$$

$$E_+(t) := \zeta_+(t)\mathcal{E}_+(t)\zeta_+(t), \quad E_+ : \, L_2(\mathbb{R}^d) \mapsto C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Так как $0 \le 3s^2 - 2s^3 \le 1$ для $-1 \le s \le 3/2$, то из (21) следует, что для всех t, больших некоторого t_0, $0 \le \mathcal{E}_\pm$, $E_+ \le I$ в $L_2(R^d)$ и $0 \le E_- \le I$ в $L_2(\Omega)$.

Положим

$$V(t) := (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega v(x) t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}} dx.$$

Несложные оценки показывают, что $tV'(t)/V(t) \to d/m$ при $t \to +\infty$, так что функция V является регулярно меняющейся. Ввиду замечания 1 в оценках следов и функции распределения спектра $W(t, ct^{1-\nu})$ заменяем на $Ct^{-\nu}V(t)$.

Лемма 3. *Для следов операторов $E_\pm(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ справедливы асимптотики*

$$\operatorname{tr} E_\pm(t) = V(t)(1+O(t^{-\nu})), \quad \operatorname{tr}\Big(E_\pm(t)(I-E_\pm(t))\Big) = O(t^{-\nu}V(t)), \quad t \to +\infty.$$

Доказательство. Вычисления для операторов $E_\pm$ различаются незначительно, рассмотрим лишь оператор E_-. Для каждого t оператор $E_-(t)$ — интегральный с гладким финитным в $\Omega \times \Omega$ ядром

$$(2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} \zeta_-(x,t) e_-(t,(x+y)/2,\xi)\zeta_-(y,t) d\xi,$$

$e_-(t,x,\xi) \in S^0_{\rho',\delta',\kappa}$ — вейлевский символ оператора $\mathcal{E}_-(t)$. След оператора $E_-(t)$ — интеграл от ядра на диагонали,

$$\operatorname{tr} E_-(t) = (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\zeta_-(x,t))^2 e_-(t,x,\xi) dx d\xi. \tag{29}$$

С точностью до символов класса $S^{-\infty}_{\rho',\delta',\kappa}$, которые дают вклад порядка $O(t^{-\infty})$ в интеграл (29), имеем

$$e_-(t,x,\xi) = \begin{cases} 1, & ta(x,\xi) \geq 1 + t^{-\nu}, \\ 0, & ta(x,\xi) \leq 1 + t^{-\nu}/2. \end{cases} \tag{30}$$

Оценивая интеграл и учитывая (16), имеем

$$\int\limits_{R^d} e_-(t,x,\xi)d\xi = \int\limits_{ta(x,\xi)>1} d\xi + O\left(\int\limits_{1<ta(x,\xi)<1+t^{-\nu}} d\xi\right) + O(t^{-\infty}) =$$

$$= t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}} v(x) + O\left(t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}}(1-(1+t^{-\nu})^{-\frac{d}{m+\varphi(x)}}\right) + O(t^{\frac{d}{m}-\nu}) =$$

$$= t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}} v(x) + O(t^{\frac{d}{m}-\nu}).$$

В силу липшицевости S мера приграничной полосы ширины $t^{-\nu}$ имеет порядок $t^{-\nu}$. Поэтому интегрирование по Ω даёт

$$\operatorname{tr} E_-(t) = V(t) + O(t^{\frac{d}{m}-\nu}) + O\left(\int\limits_{0<\zeta_-(x,t)<1} t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}} dx\right) = V(t) + O(t^{\frac{d}{m}-\nu}).$$

Рассмотрим теперь оператор $E_-(I-E_-)$. Запишем

$$(E_-)^2 = \zeta_-\mathcal{E}_-(\zeta_-)^2\mathcal{E}_-\zeta_- = (\zeta_-)^2(\mathcal{E}_-)^2(\zeta_-)^2 + \zeta_- Q_1 \zeta_-,$$

в оператор Q_1 вошли коммутаторы ζ_- и $\mathcal{E}_-$:

$$Q_1 := \zeta_-\mathcal{E}_-[(\zeta_-),\mathcal{E}_-] - [(\zeta_-),\mathcal{E}_-]\mathcal{E}_-\zeta_- - ([(\zeta_-),\mathcal{E}_-])^2.$$

Таким образом, $E_-(I-E_-) = \zeta_- Q_2 \zeta_- - \zeta_- Q_1 \zeta_-$, где $Q_2 := \mathcal{E}_- - \zeta_-(\mathcal{E}_-)^2\zeta_-$. Из свойств (30) символа оператора $\mathcal{E}_-(t)$ и предложения 1 следует, что с точностью до символов класса $S^{-\infty}_{\rho',\delta',\kappa}$ символ оператора Q_2 лежит в множестве

$$\{t,x,\xi |\ 0 \leq \zeta_-(x,t) \leq 1 \quad \text{или} \quad t^{-\nu}/2 \leq ta(x,\xi) - 1 \leq t^{-\nu}\}. \tag{31}$$

След оператора $\zeta_- Q_2 \zeta_-$ имеет порядок объёма этого множества, который есть $O(t^{-\nu}V(t))$.

Остается проверить, что так же оценивается и $\operatorname{tr}(\zeta_- Q_1 \zeta_-)$. Поскольку $[\zeta_-,\chi_-] \in \Psi^{-\delta}_{\rho',\delta',\kappa}$, а $\chi_- \in \Psi^0_{\rho',\delta',\kappa}$ (п.1 и 2 леммы 2), то коммутатор $[\zeta_-,\chi_-^k]$ принадлежит классу $\Psi^{-\delta}_{\rho',\delta',\kappa}$, $k \in \mathbb{N}$, а тогда и $[\zeta_-,\mathcal{E}_-] \in \Psi^{-\delta}_{\rho',\delta',\kappa}$. С точностью до символов порядка $-\infty$ носитель символа этого коммутатора, а вместе с ним и носитель символа оператора Q_1 также лежит в множестве (31) и, следовательно, $\operatorname{tr}(\zeta_- Q_1 \zeta_-) = O(t^{-\nu}V(t))$. $\square$

Лемма 4. *Существуют C, t_0 такие, что для всех $t > t_0$ справедливо неравенство*

$$((tA-I)E_-(t)u, E_-(t)u) \geq -Ct^{-\nu}\|u\|^2, \quad u \in L_2(\Omega). \tag{32}$$

Доказательство. Коммутируя операторы $\mathcal{E}_-(t)$ и ζ_-, имеем

$$((tA-I)E_-(t)u, E_-(t)u) =$$

$$= ((tA - I)\mathcal{E}_-(t)\zeta_-^2 u, \mathcal{E}_-(t)\zeta_-^2 u) + 2\mathrm{Re}((tA - I)\zeta_-\mathcal{E}_-(t)\zeta_- u, [\zeta_-, \mathcal{E}_-(t)]\zeta_- u) +$$
$$+((tA - I)[\zeta_-, \mathcal{E}_-(t)]\zeta_- u, [\zeta_-, \mathcal{E}_-(t)]\zeta_- u). \qquad (33)$$

Представим $\mathcal{E}_-(t) = \chi(t, x, D_x)Q(t)$, где $Q(t) := 3\chi(t, x, D_x) - 2\chi(t, x, D_x)^2$ — ограниченный оператор в L_2. Неравенство (18) дает оценку снизу первого слагаемого:

$$((tA - I)\mathcal{E}_-(t)\zeta_-^2 u, \mathcal{E}_-(t)\zeta_-^2 u) \geq -t^{-\nu}\|Q(t)\zeta_-^2 u\|^2 \geq -Ct^{-\nu}\|u\|^2.$$

Докажем, что два последних слагаемых в (33) оцениваются по модулю через $Ct^{-\nu}\|u\|^2_{L_2}$. Поскольку L_2-нормы операторов $\mathcal{E}_-(t) \in \Psi^0_{\rho',\delta',\kappa}$ (п.1 леммы 2) и ζ_- ограничены равномерно по t, $\quad t > 1$, достаточно проверить, что норма оператора $(tA-I)[\zeta_-, \mathcal{E}_-(t)]$ в L_2 не превосходит $Ct^{-\nu}$. Для этого докажем, что $t^\nu(tA-I)[\zeta_-, \mathcal{E}_-(t)] \in \Psi^0_{\rho',\delta',\kappa}$. Пусть $k_-(t, x, \xi)$ — вейлевский символ коммутатора $[\zeta_-, \mathcal{E}_-(t)]$, при доказательстве леммы 3 получили, что $k_-(t, x, \xi) \in S^{-\delta}_{\rho',\delta',\kappa}$. Вейлевский символ композиции $(tA - I)[\zeta_-, \mathcal{E}_-(t)]$ есть асимптотическая сумма (см. предложение 1)

$$\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(ta(x, \xi) - 1)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta k_-(t, x, \xi). \qquad (34)$$

Рассмотрим слагаемое с $\alpha = \beta = 0$; оно оценивается по модулю через $Ct^{-\nu}(1+|\xi|)^{-\delta}$, так как с точностью до символов порядка $-\infty$ носитель k_- лежит в множестве (31)

Рассмотрим теперь слагаемое в (34) с $|\alpha| + |\beta| > 0$. Из п. 2 леммы 2 и неравенств (15) следуют необходимые оценки:

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta(ta(x, \xi) - 1)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta k_-(t, x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}t^{-\kappa(|\alpha|+|\beta|)}(1 + |\xi|)^{-\delta-(\rho'-\delta)|\beta|-(\rho-\delta')|\alpha|} \leq$$
$$\leq C'_{\alpha,\beta}t^{-\nu-\kappa(|\alpha|+|\beta|)}(1 + |\xi|)^{-\delta-(\rho'-\delta')(|\alpha|+|\beta|)}.$$

Последнее неравенство следует из оценки (20) с учетом выбора параметров $\rho, \delta, \rho', \delta'$.

Производные по x, ξ ряда (34) оцениваются аналогично. Итак, мы проверили, что $t^\nu(tA - I)[\zeta_-, \mathcal{E}_-(t)] \in \Psi^0_{\rho',\delta',\kappa}$, и, тем самым, оценки двух последних слагаемых в (33) получены. □

Положим $A_0(t) := \zeta_0(t)A(x, D_x)\zeta_0(t)$, где $\zeta_0(t)$ — оператор умножения в $L_2(\mathbb{R}^d)$ на функцию $\zeta_0(x, t)$. Для краткости вместо $\zeta_0(t)$ будем писать просто ζ_0.

Лемма 5. *Существуют C, t_0 такие, что для всех $t > t_0$ справедливо неравенство*

$$((tA_0(t) - I)(I - E_+(t))u, (I - E_+(t))u) \leq Ct^{-\nu}\|u\|^2, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d). \qquad (35)$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4 прокоммутируем операторы ζ_0 и $\mathcal{E}_+(t)$. Учитывая, что норма оператора ζ_0 равна 1 и $\zeta_0(x, t)\zeta_+(x, t) = \zeta_0(x, t)$, имеем

$$((tA_0(t)-I)(I-E_+(t))u, (I-E_+(t))u) \leq ((tA-I)\zeta_0(I-\zeta_+\mathcal{E}_+(t)\zeta_+)u, \zeta_0(I-\zeta_+\mathcal{E}_+(t)\zeta_+)u) =$$
$$= ((tA - I)(I - \mathcal{E}_+(t))\zeta_0 u, (I - \mathcal{E}_+(t))\zeta_0 u) - 2\mathrm{Re}((tA - I)[\zeta_0, \mathcal{E}_+(t)]\zeta_+ u, (I - \mathcal{E}_+(t))\zeta_0 u) +$$
$$+((tA - I)[\zeta_0, \mathcal{E}_+(t)]\zeta_+ u, [\zeta_0, \mathcal{E}_+(t)]\zeta_+ u). \qquad (36)$$

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство леммы 4. Запишем $I - \mathcal{E}_+(t) = (I - \chi_+(t, x, D_x))\tilde{Q}(t)$, где $\tilde{Q}(t) = I + \chi_+ - 2\chi_+^2$ — ограниченный оператор в L_2.

Первое слагаемое в правой части равенства (36) оценивается с помощью неравенства (23):

$$((tA - I)(I - \mathcal{E}_+(t))\zeta_+ u, (I - \mathcal{E}_+(t))\zeta_+ u) \le t^{-\nu}\|\tilde{Q}(t)\zeta_+ u\|^2 \le Ct^{-\nu}\|u\|^2.$$

Оставшиеся два слагаемых ограничиваются по модулю через $Ct^{-\nu}\|u\|^2$, так как норма оператора $(tA - I)[\zeta_+, \mathcal{E}_+(t)]$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ не превосходит $Ct^{-\nu}$ (см. доказательство леммы 4). □

Доказательство основной теоремы 1 следует из лемм 2-5, проверяющих выполнение условий леммы 1. Лемма 4 и часть A леммы 1 дают оценку снизу для функции распределения спектра оператора A_Ω : $\quad N(t, A_\Omega) \ge V(t)(1 - Ct^{-\nu})$ для $t \ge t_0$. Лемма 4, часть B леммы 1 с замечанием 2 и очевидное неравенство $A_\Omega \le A_0(t)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ дают оценку сверху: $N(t, A_\Omega) \le N(t, A_0(t)) \le V(t)(1 + Ct^{-\nu})$. □

Примеры

Приведем простейший пример, когда выполнены условия теоремы 1. Пусть A — ПДО с вейлевским символом $a(x,\xi)$ из класса Хермандера $S^{-m}_{1,\delta}$ $(m > 0)$ с любым $\delta > 0$. Символ a асимптотически однороден на бесконечности, т.е. для любого $\theta < 1 \quad a(x,\xi) = a_0(x,\xi) + O(|\xi|^{-(m+\theta)})$, $|\xi| \to +\infty$, а функция $a_0(x,\xi) \ge 0$ однородна по ξ степени $-(m + \varphi(x))$. Пусть символ $a(x,\xi)$ формально гипоэллиптичен, т.е. выполнены условия (14),(15) с параметрами $\rho = 1$ и $\forall\delta > 0$, а функция $v(x) = vol_d\{\xi \in \mathbb{R}^d |\, a_0(x,\xi) > 1\}$ положительна в $\bar{\Omega}$.

Тогда условия теоремы 1 выполнены и для функции распределения спектра соответствующего оператора A_Ω для любого $\nu < \frac{1}{2m_0}$ справедлива асимптотическая формула (18).

Порядок асимптотики спектра существенно зависит от поведения функции φ вблизи Γ. Опишем простейшие примеры применения метода Лапласа (см. например [10]) к вычислению асимптотики интеграла в формуле (18).

1. Пусть вначале Γ — множество положительной меры. Так как $\varphi(x) \equiv 0$ на Γ, то $\partial^\alpha\varphi(x) \equiv 0$ на границе Γ и сохраняется чисто степенная асимптотика спектра. Однако остаток стремится к нулю медленнее любой отрицательной степени логарифма:

$$N(t, A_\Omega) = (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}} v(x) dx (1 + O(t^{-\nu})) = (2\pi)^{-d}\, t^{\frac{d}{m}} \int\limits_\Gamma v(x)\, dx (1 + O(r(t)),$$

где при $t \to +\infty \quad r(t)(\ln t)^\epsilon \to +\infty, \quad \forall\epsilon > 0.$

2. Пусть теперь мера Γ равна нулю, Γ — гладкая поверхность коразмерности $k, \quad 1 \le k \le d$ (при $k = d \quad \Gamma$ — точка). Обозначим через $n_1(x), \cdots n_k(x)$ ортонормированный базис нормалей к Γ в точке $x \in \Gamma$. В ситуации общего положения $k \times k$ матрица вторых производных $\varphi''_{nn}(x) := \big(\varphi_{n_i n_j}(x)\big)$ невырождена, и возникает асимптотический ряд по степеням $(\ln t)^{-1}$:

$$N(t, A_\Omega) = (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega t^{\frac{d}{m+\varphi(x)}} v(x) dx (1 + O(t^{-\nu})) \sim t^{\frac{d}{m}} (\ln t)^{-\frac{k}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} p_j (\ln t)^{-j}.$$

Главный член асимптотики вычисляется по формуле

$$p_0 = (2\pi)^{-d+\frac{k}{2}} \int\limits_{\Gamma} (\det \varphi''_{nn}(x))^{-\frac{1}{2}}\, v(x)\, d\Gamma(x), \quad k < d.$$

Для $k = d$, т.е. $\Gamma = \{x^*\} \in \Omega$,

$$p_0 = (2\pi)^{-\frac{k}{2}}\, (\det \varphi''_{nn}(x^*))^{-\frac{1}{2}}\, v(x^*).$$

Если $\Gamma = \{x^*\} \in \Omega$, то общем случае асимптотика интеграла (18) определяется асимптотикой при $s \to +0$ объёма множества $\{x \in \Omega |\, \varphi(x) < s\}$ меньших значений функции φ [10]. В вырожденном случае, когда $\det \varphi''_{nn}(x^*) = 0$, получить асимптотику этого объема можно в терминах многогранника Ньютона функции φ [5].

список литературы

1. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве // Л.: изд-во Ленингр.ун-та, 1980. 264 с.

2. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами // Вестник ЛГУ, сер. матем., 1977, № 13, с.13-21.

3. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами II // Вестник ЛГУ, сер. матем., 1979, № 13, с.5-10.

4. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов. // Успехи матем. наук, 1977, т.32, № 1, с.17-84.

5. *Кароль А.И.* Многогранник Ньютона, асимптотики объёмов и асимптотики экспоненциальных интегралов. // Труды СПб мат. об-ва, 2008. Т. 14, С. 19-39

6. *Левендорский С.З.* Метод приближенного спектрального проектора // Изв. АН СССР, сер. мат., 1985, т.49 №6 с.1177-1229.

7. *Levendorskii S.Z.* The approximate spectral projector method // Acta Appl.Math., 1986, v.7, 137-197.

8. *Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов // М.,: Итоги науки и техн. ВИНИТИ Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. 1989, т.64. с.1-242.

9. *Туловский В.Н., Шубин М.А.* Об асимптотическом распределении собственных значений псевдодифференциальных операторов в R^n // Матем. сб., 1973, т.93, №4, с.571-588.

10. *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды // М.: "Наука", 1987. 544 с..

11. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, том 3// М.: "Мир", 1987, 696с.

12. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория // М.: "Наука", 1978. 280 с.

А.И.Кароль, СПбГУ, karol@ak1078.spb.edu