Асимптотика малых уклонений в гильбертовой норме для процессов Каца-Кифера-Вольфовица

А.И. Назаров[*], Ю.П. Петрова[†]

14 ноября 2014 г.

1 Введение

Теория малых уклонений для норм гауссовских процессов интенсивно развивается в последние десятилетия (см., например, обзоры [1, 2]; более поздние ссылки можно найти на сайте [3]). Наиболее разработанным здесь является случай L_2-нормы. Пусть $X(t)$, $0 \le t \le 1$, — гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $\mathcal{G}(t,s) = \mathbb{E}X(t)X(s)$, $t, s \in [0,1]$. Положим

$$\|X\| = \left(\int\limits_0^1 X^2(t)\,dt \right)^{1/2}.$$

Нас интересует точная асимптотика при $\varepsilon \to 0$ величины $\mathbb{P}\{\|X\| < \varepsilon\}$. Неявное решение задачи было получено в [4]. Затем многие авторы, начиная с [5, 6, 7], занимались упрощением выражения для вероятности малых уклонений при различных предположениях.

В силу разложения Кархунена—Лоэва имеет место равенство по распределению

$$\|X\|^2 \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2,$$

где ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, — независимые стандартные гауссовские с.в., а $\lambda_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum \lambda_k < \infty$, являются собственными значениями интегрального оператора с ядром $\mathcal{G}(s,t)$. Таким образом, исходная задача сводится к описанию поведения при $\varepsilon \to 0$ вероятности $\mathbb{P}\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \le \varepsilon^2\}$. Основная трудность заключается в том, что явные формулы для собственных значений известны лишь для немногих процессов (см. [8, 9]). Если же известна достаточно точная асимптотика λ_n, то асимптотика вероятности малых уклонений с точностью до константы может быть получена с помощью принципа сравнения Венбо Ли:

Предложение 1. ([8, 10]) *Пусть ξ_k — последовательность независимых стандартных гауссовских с.в. , а λ_k и $\tilde{\lambda}_k$ — две положительные невозрастающие суммируемые*

[*]ПОМИ РАН и Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: al.il.nazarov@gmail.com.
Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00172 и грантом СПбГУ 6.38.64.2012
[†]Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: delafer21@gmail.com

последовательности такие, что $\prod \tilde\lambda_k/\lambda_k < \infty$. *Тогда*

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\xi_k^2<\varepsilon^2\Big\}\sim\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\tilde\lambda_k\xi_k^2<\varepsilon^2\Big\}\cdot\Bigg(\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde\lambda_k}{\lambda_k}\Bigg)^{1/2},\qquad \varepsilon\to 0. \tag{1}$$

В работах [11], [12] был выделен класс *гриновских* гауссовских процессов, для которых $\mathcal{G}(s,t)$ есть функция Грина обыкновенного дифференциального оператора. Это позволяет применить для нахождения асимптотики λ_k методы спектральной теории ОДО, восходящие к классическим работам Дж. Биркгофа [13], [14] и Я. Тамаркина [15], [16] (дальнейшее развитие этой теории можно найти в [17]).

Подход, развитый в [11], [12], позволил получить в [18], [19] и [20] точные асимптотики малых уклонений для большого количества конкретных процессов в L_2-норме с различными весами (см. также [21], [22], [23]).

В работе [24] рассматривалась задача о возмущении спектра ковариационного оператора при конечномерном возмущении гауссовского процесса. Было показано, что если возмущение не является “критическим”, то собственные числа $\tilde\lambda_k$ возмущенного оператора асимптотически прижимаются к невозмущенным собственным числам, причем $\prod\tilde\lambda_k/\lambda_k<\infty$. Для более узкого класса операторов аналогичный результат был получен в [25].

Мы будем рассматривать задачу об асимптотиках собственных чисел для интегральных операторов с ядрами

$$G_1(s,t)=G(s,t)-h_1(s)h_1(t), \tag{2}$$
$$G_2(s,t)=G(s,t)-h_2(s)h_2(t), \tag{3}$$
$$G_3(s,t)=G(s,t)-h_1(s)h_1(t)-h_2(s)h_2(t), \tag{4}$$

где $G(s,t)=\min(s,t)-st$ есть функция Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}u:=-u''=\lambda u,\quad u(0)=u(1)=0,$$

и

$$h_1(t)=\varphi(\Phi^{-1}(t)),\qquad h_2(t)=\varphi(\Phi^{-1}(t))\frac{\Phi^{-1}(t)}{\sqrt2},$$

где

$$\varphi(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{s^2}{2}\Big),\quad \Phi(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(s)\,ds$$

— плотность и функция нормального распределения соответственно.

Как известно, собственные функции и собственные числа интегрального оператора с ядром $G(s,t)$ имеют вид

$$y_k(t)=\sin(\pi kt),\quad \lambda_k=(\pi k)^{-2}.$$

Пусть $\lambda_k^{(i)}$ — собственные числа интегральных операторов с ядрами $G_i(s,t)$, $i=1,2,3$; $k\in\mathbb{N}$. В случаях (2) и (3) имеется одномерное возмущение оператора с ядром $G(s,t)$, поэтому, согласно минимаксимальному принципу [26, §9.2], собственные числа возмущенного и невозмущенного операторов перемежаются. Заметим, что оба возмущения h_1 и h_2 являются “критическими” (в терминах нашей задачи это означает, что $\int h_i(t)\,(\mathcal{L}h_i)\,(t)\,dt=1$, $i=1,2$). Поэтому соотношение $\prod\lambda_k^{(i)}/\lambda_k<\infty$ не имеет места. Более того, поскольку $\mathcal{L}h_i\notin L_2[0,1]$, результат теоремы 2 из статьи [24] также не применим. Мы построим асимптотику собственных чисел возмущенных операторов (2)–(4), используя явные формулы для определителей Фредгольма, полученные в [27] и [24]. Таким образом можно построить разложение $\lambda_k^{(i)}$ в асимптотический ряд, но мы ограничимся построением такого приближения $\tilde{\lambda}_k^{(i)}$, для которого $\prod \tilde{\lambda}_k^{(i)}/\lambda_k^{(i)} < \infty$.

Полученные результаты применяются к задаче о малых уклонениях в $L_2[0,1]$ для гауссовских процессов $X^{(1)}$–$X^{(3)}$ с нулевым средним, ковариационные функции которых имеют вид (2)–(4) соответственно. Эти процессы возникают как предельные в задаче о построении критериев согласия типа ω^2 для проверки выборки на нормальность в случае, когда математическое ожидание и/или дисперсия оцениваются по выборке. В работе М. Каца, Дж. Кифера и Дж. Вольфовица [27] доказана сходимость эмпирических процессов с оцененными параметрами к предельным в смысле конечномерных распределений. Аналогичные результаты были независимо получены И.И. Гихманом [28], [29]. Впоследствии в статье Дж. Дурбина [30] была строго доказана слабая сходимость к предельному процессу, а также описаны предельные процессы для значительно более широкого класса эмпирических процессов.

Заметим, что функция $h_1(t)$ четная (здесь и в дальнейшем четность понимается относительно середины отрезка $[0,1]$). Поэтому при возмущении (2) нечетные собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются. Для простоты мы будем обозначать их $\lambda_{2k}^{(1)} = \lambda_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, несмотря на то, что при этом нумерация в порядке убывания может быть нарушена. Аналогично, в силу нечетности функции $h_2(t)$ при возмущении (3) четные собственные функции и соответствующие им собственные числа не меняются, будем обозначать их $\lambda_{2k-1}^{(2)} = \lambda_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, легко видеть, что $\lambda_{2k}^{(3)} = \lambda_{2k}^{(1)}$ и $\lambda_{2k-1}^{(3)} = \lambda_{2k-1}^{(2)}$. Отметим ещё, что квадратичная форма возмущенных операторов (2)–(4) не превосходит квадратичной формы исходного оператора. Поэтому в силу минимаксимального принципа $\lambda_{2k-1}^{(1)} \le \lambda_{2k-1}$ и $\lambda_{2k}^{(2)} \le \lambda_{2k}$.

В статье [27] выписаны уравнения для собственных чисел интегрального оператора с ядром $G_3(s,t)$ (см. также [24, пример 5]). После некоторых преобразований этих уравнений получаем, что

$$\omega_{2k-1}^{(1)} := \left(\lambda_{2k-1}^{(1)}\right)^{-1/2}, \qquad \omega_{2k}^{(2)} := \left(\lambda_{2k}^{(2)}\right)^{-1/2}$$

являются корнями уравнений

$$D_1(\omega) := \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \cdot \mathcal{C}_1^2 + \frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2} - \frac{4\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \cdot \mathcal{I}_1 = 0, \tag{5}$$

$$D_2(\omega) := -\frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \cdot \mathcal{C}_2^2 + \frac{3\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2\omega^2} - \frac{2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} \cdot \mathcal{I}_2 = 0, \tag{6}$$

соответственно, где

$$\mathcal{C}_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1}(t)\cos(\omega t)\,dt, \quad \mathcal{C}_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\Phi^{-1}(t)\right)^2 \cos(\omega t)\,dt,$$

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^t \Phi^{-1}(t)\Phi^{-1}(s)\sin(\omega t)\cos(\omega s)\,ds\,dt,$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^t \left(\Phi^{-1}(t)\right)^2 \left(\Phi^{-1}(s)\right)^2 \sin(\omega t)\cos(\omega s)\,ds\,dt.$$

Статья организована следующим образом. В §2 вычисляются асимптотики интегралов с медленно меняющимися функциями (см. определение в Приложении), частным случаем которых являются интегралы $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$. Для этих интегралов строится полное асимптотическое разложение с оценкой остатка. В §3 получены асимптотические уравнения для корней $\omega^{(1)}_{2k-1}$ и $\omega^{(2)}_{2k}$ и найдена их асимптотика (формулы (24) и (25)). В §§4 и 5 полученные результаты применяются к задаче о малых уклонениях для процессов $X^{(1)}$–$X^{(3)}$ (формулы (29), (35) и (36)). В Приложение вынесено доказательство вспомогательной леммы об определителях Фредгольма, а также некоторых свойств $\Phi^{-1}(t)$.

Все положительные константы, значения которых нам не важны, обозначаются буквой C, а величины, от которых эти константы зависят, указываются в скобках.

2 Асимптотика интегралов

Пусть функция $F(t)$ задана на полуинтервале $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, и функции $F_0(t) = F(t)$, $F_{n+1}(t) = tF_n'(t)$, являются медленно меняющимися в нуле. Введём обозначение:

$$\int\limits_{S_N(x)} F_M\, d\mu_N := \int\limits_1^x \dots \int\limits_1^{x_N} F_M\Big(\frac{x_{N+1}}{\omega}\Big)\frac{dx_{N+1}}{x_{N+1}} \dots \frac{dx_2}{x_2}.$$

Теорема 1. *При $\omega \to \infty$ имеет место формула:*

$$\mathcal{C} := \int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\cos(\omega t)\, dt = \sum_{k=1}^{N} c_k^{cos}\frac{F_k(\frac{1}{\omega})}{\omega} + R_N^{cos}, \tag{7}$$

где

$$c_k^{cos} = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\, dx, \quad k \geq 1,$$

$$R_N^{cos} = -\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x_1)}{x_1} \int\limits_{S_N(x_1)} F_{N+1}\, d\mu_N\, \frac{dx_1}{\omega} + O\left(\frac{L_N(\omega)}{\omega^2}\right), \tag{8}$$

а $L_N(\omega)$ — некоторая медленно меняющаяся функция при $\omega \to \infty$. Более того, верна оценка:

$$|R_N^{cos}| \leq C(F, N) \cdot \frac{\left|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})\right|}{\omega}. \tag{9}$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\cos(\omega t)\, dt = -\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right)\frac{\sin(x)}{x}\frac{dx}{\omega}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая формула представления функции F_M:

$$F_M\left(\frac{x}{\omega}\right) = F_M\left(\frac{1}{\omega}\right) + \int\limits_1^x F_{M+1}\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}, \quad \forall M \geq 0. \tag{10}$$

Воспользуемся формулой (10) при $M = 1$, получим

$$\mathcal{C} = -\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx \cdot \frac{F_1(\frac{1}{\omega})}{\omega} - \frac{1}{\omega}\underbrace{\int_0^{\frac{\omega}{2}}\int_1^x F_2\Big(\frac{y}{\omega}\Big)\frac{dy}{y}\,\frac{\sin(x)}{x}\,dx}_{=R_1} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

что даёт (7) для $N = 1$. Интегрируя по частям R_1, получим

$$R_1 = \frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\bigg|_{x=0}^{x=\frac{\omega}{2}} - \int_0^{\frac{\omega}{2}}\frac{1-\cos(x)}{x^2}F_2\left(\frac{x}{\omega}\right)dx + \\ + \int_0^{\frac{\omega}{2}}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\,dx. \tag{11}$$

Для оценки возникающих интегралов нам понадобится следующее утверждение:

Предложение 2. (см. [31, гл.1, с.18]) *Пусть $\mathbb{F}(t) > 0$ — медленно меняющаяся функция в нуле, Тогда для любого $\alpha > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathbb{F}(t)t^{\alpha}$— возрастающая функция, а $\mathbb{F}(t)t^{-\alpha}$— убывающая функция в ε-окрестности нуля.*

Пусть $\alpha > 0$, и ε таково, что верно предложение 2. Тогда при больших ω $(1/\omega < \varepsilon)$ имеем оценку

$$\left|\mathbb{F}\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{y}{\omega}\right)^{\alpha} \le \left|\mathbb{F}\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\right|\omega^{-\alpha} \qquad \text{при } y \in (0,1], \tag{12}$$

$$\left|\mathbb{F}\Big(\frac{y}{\omega}\Big)\right|\left(\frac{\omega}{y}\right)^{\alpha} \le \left|\mathbb{F}\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\right|\omega^{\alpha} \qquad \text{при } y \in (1, \varepsilon\omega]\,. \tag{13}$$

Наконец, ввиду (13) и непрерывности $\mathbb{F}$ получаем

$$\left|\mathbb{F}\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{\omega}{y}\right)^{\alpha} \le C(\alpha, F)\left|\mathbb{F}\left(\frac{\varepsilon\omega}{\omega}\right)\right|\left(\frac{\omega}{\varepsilon\omega}\right)^{\alpha} \le \\ \le C(\alpha,F)\left|\mathbb{F}\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\right|\omega^{\alpha} \qquad \text{при } y \in \left[\varepsilon\omega, \frac{\omega}{2}\right]. \tag{14}$$

Оценим $\int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}$. При $x \in (0,1]$, используя оценку (12) для $\mathbb{F} = F_2$, получаем

$$\left|\int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\right| \le \omega^{\alpha}\int_1^x \left|F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{y}{\omega}\right)^{\alpha}\frac{dy}{y^{1+\alpha}} \le \left|F_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\right|\frac{|x^{-\alpha}-1|}{\alpha}. \tag{15}$$

При $x \in \left[1, \frac{\omega}{2}\right]$, используя оценки (13) и (14), имеем

$$\left|\int_1^x F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\frac{dy}{y}\right| \le \omega^{-\alpha}\int_1^x \left|F_2\left(\frac{y}{\omega}\right)\right|\left(\frac{\omega}{y}\right)^{\alpha}\frac{dy}{y^{1-\alpha}} \le C(\alpha,F)\left|F_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\right|\frac{|x^{\alpha}-1|}{\alpha}. \tag{16}$$

Подставляя оценки (15) и (16) при $\alpha = 1/2$ в выражение (11) для R_1, получим оценку (9) при $N = 1$. При $N > 1$ действуем по индукции: подставляем (10) с $M = N$ в (8) и оцениваем остаток с помощью предложения 2. ■

Теорема 2. *При $\omega \to \infty$ имеет место формула:*

$$\mathcal{S} := \int\limits_0^{\frac{1}{2}} F(t)\sin(\omega t)\,dt = \frac{F(\frac{1}{\omega})}{\omega} + \sum_{k=1}^{N} c_k^{sin} \frac{F_k(\frac{1}{\omega})}{\omega} + R_N^{sin},$$

где

$$c_k^{sin} = -\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\,dx + \int\limits_1^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!}\,dx, \quad k \geq 1,$$

$$R_N^{sin} = -\int\limits_0^1 \frac{1-\cos(x_1)}{x_1} \int\limits_{S_N(x_1)} F_{N+1}\,d\mu_N \frac{dx_1}{\omega} + \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(x_1)}{x_1} \int\limits_{S_N(x_1)} F_{N+1}\,d\mu_N \frac{dx_1}{\omega} + O\left(\frac{L_N(\omega)}{\omega^2}\right),$$

а $L_N(\omega)$ — некоторая медленно меняющаяся функция при $\omega \to \infty$.

Более того, справедлива оценка:

$$|R_N^{sin}| \leq C(F,N) \cdot \frac{|F_{N+1}(\frac{1}{\omega})|}{\omega}.$$

Доказательство аналогично теореме 1. ■

Замечание 1. *К интегралам $\mathcal{C}$ и $\mathcal{S}$ сводятся также интегралы*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\tau} F(t)F(\tau)\sin(\omega t)\sin(\omega\tau)\,dt\,d\tau = \frac{\mathcal{S}^2}{2}, \quad \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\tau} F(t)F(\tau)\cos(\omega t)\cos(\omega\tau)\,dt\,d\tau = \frac{\mathcal{C}^2}{2}.$$

Теорема 3.

$$\mathcal{I} := \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^{\tau} F(t)F(\tau)\sin(\omega\tau)\cos(\omega t)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} F^2(t)\,dt + \sum_{n=2}^{N} \sum_{\substack{k+m=n \\ k,m\geq 1}} a_{k,m} \frac{F_k(\frac{1}{\omega})F_m(\frac{1}{\omega})}{\omega^2} + R_N^{sc}, \quad (17)$$

где

$$a_{k,m} = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\frac{\ln^{k-1}(x)}{(k-1)!} \int\limits_x^{\infty} \frac{\cos(y)}{y}\frac{\ln^{m-1}(y)}{(m-1)!}\,dy\,dx$$

и справедлива оценка:

$$|R_N^{sc}| \leq C(F,N) \sum_{\substack{i+j=N+1 \\ i,j\geq 1}} \frac{|F_i(\frac{1}{\omega})F_j(\frac{1}{\omega})|}{\omega^2}. \quad (18)$$

Доказательство. Меняя порядок интегрирования и интегрируя по частям, получаем

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2\omega} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} F^2(t)\, dt - \frac{1}{\omega^2} \int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right) \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{\cos(y)}{y}\, dy\, dx.$$

Воспользуемся представлением (10) при $M = 1$:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{x}{\omega}\right) \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{\cos(y)}{y}\, dy\, dx = F_1^2\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y}\, dy\, dx + \\
&+ F_1\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \underbrace{\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx}_{=R_{11}} + \\
&+ \underbrace{\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_1^{x} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} F_1\left(\frac{y}{\omega}\right) \frac{\cos(y)}{y}\, dy\, dx}_{=R_{12}}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Несложно понять, что

$$\int\limits_0^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y}\, dy\, dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\infty} \frac{\cos(y)}{y}\, dy\, dx + O\Big(\frac{1}{\omega}\Big).$$

Таким образом, получена формула (17) при $N = 2$.

Для оценки интеграла R_{11} разобъем его на три слагаемых

$$\begin{aligned}
R_{11} = &\int\limits_0^{1} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{1} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx + \int\limits_0^{1} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx + \\
&+ \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx =: R_{111} + R_{112} + R_{113}.
\end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральное выражение в R_{111} знакопостоянно. Используя соотношение (15), а также неравенства

$$\frac{\sin(x)}{x} \le 1, \qquad \cos(y) \le 1,$$

получим оценку

$$|R_{111}| \le \Big|F_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\Big| \int\limits_0^{1} \int\limits_x^{1} \frac{y^{-\alpha} - 1}{\alpha y}\, dy\, dx = C(\alpha) \cdot \Big|F_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\Big|.$$

Далее,

$$|R_{112}| \le \left| \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx \right|.$$

Интегрируя по частям, получим

$$|R_{112}| \le \left| \frac{1+\sin(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \Bigg|_{y=1}^{y=\frac{\omega}{2}} - \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1+\sin(y)}{y^2} \left(F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) - \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right) dy \right|.$$

Подстановка $y=1$ обнуляется, подстановка $y=\frac{\omega}{2}$ с учетом (16) есть $O(|F_2(\frac{1}{\omega})| \cdot \omega^{\alpha-1})$, а полученный интеграл, используя неравенства (16), (13) и (14) для $\mathbb{F} = F_2$, оценим так:

$$\left| \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1+\sin(y)}{y^2} \left(F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) - \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \right) dy \right| \le C(\alpha, F) \left| F_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \right| \cdot \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1+\sin(y)}{y^{2-\alpha}}\, dy \le$$
$$\le C(\alpha, F) \left| F_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \right|.$$

Рассмотрим R_{113}. После интегрирования по частям получаем

$$R_{113} = \frac{1-\cos(x)}{x} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy \Bigg|_{x=1}^{x=\frac{\omega}{2}} +$$
$$+ \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx + \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{\big(1-\cos(x)\big)\cos(x)}{x^2} \int\limits_1^{x} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dx.$$

Подстановка $x = \frac{\omega}{2}$ обнуляется, подстановка $x=1$ оценивается через R_{112}. Последний интеграл с помощью (16) оценивается через $C(\alpha, F) \cdot \left| F_2\left(\frac{1}{\omega}\right) \right|$. Во втором слагаемом, интегрируя по частям по переменной y, получим

$$\int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{\cos(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z}\, dy\, dx =$$
$$= \int\limits_1^{\frac{\omega}{2}} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \Bigg[\frac{1+\sin(y)}{y} \int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} \Bigg|_{y=x}^{y=\frac{\omega}{2}} +$$
$$+ \int\limits_x^{\frac{\omega}{2}} \frac{1+\sin(y)}{y^2} \left(\int\limits_1^{y} F_2\left(\frac{z}{\omega}\right) \frac{dz}{z} - F_2\left(\frac{y}{\omega}\right) \right) dy \Bigg]\, dx.$$

Оценивая аналогично интегралу R_{112}, получаем окончательно

$$|R_{11}| \le C(\alpha, F) \left| F_2\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \right|.$$

Аналогично оценим R_{12}. Полагая $\alpha = 1/2$, получаем оценку (18) для $N=2$. При $N>2$ действуем по индукции: подставляем (10) при $M=N$ в (19) и оцениваем остатки аналогичным образом с помощью предложения 2. ■

3 Асимптотика собственных чисел

Обозначим для удобства $\mathcal{F}_0(x) := \Phi^{-1}(x)$, $\mathcal{F}_i(x) := x\mathcal{F}'_{i-1}(x)$, и заметим, что, согласно теореме 5 функции $F = \mathcal{F}_0$ и $F = \mathcal{F}_0^2$ удовлетворяют условиям, сформулированным в начале §2. Запишем асимптотики интегралов $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$, используя формулы (7) и (17) при $N = 2$ (как будет ясно из следующего параграфа, такая точность будет достаточна для наших целей):

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= -\frac{\pi}{2}\frac{\mathcal{F}_1}{\omega} + \frac{\gamma\pi}{2}\frac{\mathcal{F}_2}{\omega} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3|}{\omega}\right),\\
\mathcal{C}_2 &= -\pi\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1}{\omega} + \gamma\pi\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\omega} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_0\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2|}{\omega}\right),\\
\mathcal{I}_1 &= \frac{1}{4\omega} + \frac{\pi^3}{8}\frac{\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2}{\omega^2} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + \mathcal{F}_2^2}{\omega^2}\right),\\
\mathcal{I}_2 &= \frac{3}{4\omega} + \frac{\pi^3}{2}\frac{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^3}{\omega^2} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\omega^2}\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь γ — константа Эйлера, и у всех $\mathcal{F}_i$ аргумент равен $\frac{1}{\omega}$. Подставляя (20) в формулы (5) и (6) для $D_1(\omega)$ и $D_2(\omega)$, получаем

$$\begin{aligned}
D_1(\omega) &= \frac{\pi^2}{2\omega^3}\mathcal{F}_1^2\left[\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - 2\gamma\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} - \pi\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right)\right];\\
D_2(\omega) &= \frac{\pi^2}{\omega^3}\left(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1\right)^2\left[-\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + 2\gamma\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} - \pi\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} + \right.\\
&\qquad \left. + O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2 + \mathcal{F}_1^4 + |\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right)\right].
\end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим уравнение на $\omega_{2k-1}^{(1)}$. После преобразований оно примет вид

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \pi\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right), \tag{22}$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_i$ равен $\frac{1}{\omega}$. Поскольку правая часть стремится к нулю при $\omega \to \infty$, в окрестности точки $2\pi k$ при достаточно больших k находится ровно один корень данного уравнения.

Как указано во введении, $\lambda_{2k}^{(1)} = \lambda_{2k}$ и $\lambda_{2k-1}^{(1)} \le \lambda_{2k-1}$. Поэтому $\omega_{2k}^{(1)} = 2\pi k$ и $\omega_{2k-1}^{(1)} \ge \pi(2k-1)$. Из этих фактов и перемежаемости собственных чисел следует, что на промежутке $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ располагаются $\omega_{2k-1}^{(1)}$ и $\omega_{2k}^{(1)}$. Значит, в окрестности $2\pi k$ лежит корень $\omega_{2k-1}^{(1)}$ уравнения (22).

Стандартными методами получаем асимптотику $\omega_{2k-1}^{(1)}$ при $k \to \infty$:

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + 2\pi\frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{|\mathcal{F}_3\mathcal{F}_1| + \mathcal{F}_2^2}{\mathcal{F}_1^2}\right).$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_i$ равен $\dfrac{1}{2\pi k}$. В силу соотношений (43), (44)–(46) имеем

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{\mathcal{F}_0} + O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^3}\right), \quad \mathcal{F}_2 = -\frac{1}{\mathcal{F}_0^3} + O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^5}\right), \quad \mathcal{F}_3 = O\left(\frac{1}{|\mathcal{F}_0|^5}\right), \quad \omega \to \infty \tag{23}$$

(аргумент всех $\mathcal{F}_i$ равен $\frac{1}{\omega}$). Отсюда

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + \frac{2\pi}{\mathcal{F}_0^2(\frac{1}{2\pi k})} + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0^4(\frac{1}{2\pi k})}\right).$$

Известно, что (см., например, [32])

$$\mathcal{F}(x) = \Phi^{-1}(x) = -\sqrt{-2\ln(x)} \cdot \left[1 + O\left(\frac{\ln(-\ln(x))}{\ln(x)}\right)\right], \qquad x \to 0.$$

Поэтому

$$\omega_{2k-1}^{(1)} = 2\pi k + \frac{\pi}{\ln(k)} + O\left(\frac{\ln(\ln(k))}{\ln^2(k)}\right). \tag{24}$$

Рассмотрим уравнение на $\omega_{2k}^{(2)}$. После преобразований, оно примет вид

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -\pi\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2 + \mathcal{F}_1^4 + \mathcal{F}_0^2|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right),$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_i$ равен $\frac{1}{\omega}$. Рассуждая аналогичным образом, получаем, что в окрестности $2\pi k + \pi$ при достаточно больших k находится ровно один корень данного уравнения с номером $\omega_{2k}^{(2)}$. Его асимптотика:

$$\omega_{2k}^{(2)} = \pi + 2\pi k - \pi\frac{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1^2}{\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1} + O\left(\frac{(\mathcal{F}_0\mathcal{F}_2)^2 + \mathcal{F}_1^4 + \mathcal{F}_0^2|\mathcal{F}_1\mathcal{F}_3| + |\mathcal{F}_0\mathcal{F}_1^2\mathcal{F}_2|}{\mathcal{F}_0^2\mathcal{F}_1^2}\right),$$

где аргумент всех $\mathcal{F}_i$ равен $\dfrac{1}{\pi(2k+1)}$. В силу (23) имеем

$$\omega_{2k}^{(2)} = \pi + 2\pi k + O\left(\frac{1}{\mathcal{F}_0^4(\frac{1}{\pi(2k+1)})}\right) = \pi(2k+1) + O\left(\frac{1}{\ln^2(k)}\right). \tag{25}$$

4 Асимптотика малых уклонений для процесса $X^{(2)}$

Применим полученные результаты к задаче об асимптотике вероятностей малых уклонений в L^2-норме для гауссовских процессов $X^{(1)}$–$X^{(3)}$ с нулевым средним и функциями ковариации, определенными в (2)–(4).

Наиболее простой является задача для $X^{(2)}$. Применим принцип сравнения Ли (предложение 1). В качестве аппроксимации возьмём процесс с собственными числами γ_k соответствующего интегрального оператора

$$\gamma_k = \Big[(2k+1)\pi/2\Big]^{-2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Известно, что ([8, теорема 3.4], см. также [11, теорема 6.2])

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \frac{4}{\pi^{3/2}}\varepsilon^{-1}\exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big). \tag{26}$$

Для того, чтобы найти константу из (1), дополнительно введём

$$\mu_1 := \pi^{-2}, \quad \mu_{2k} = \mu_{2k+1} := \Big[(2k+1)\pi\Big]^{-2}.$$

Тогда

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\lambda_k^{(2)}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\mu_k} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{\lambda_k^{(2)}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\mu_k} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}}.$$

Первое бесконечное произведение легко считается по формуле Стирлинга:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\mu_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\pi \cdot (3\pi)^2 \cdot (5\pi)^2 \cdot \ldots \cdot ((2k+1)\pi)^2}{\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{5\pi}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{(4k+3)\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{27}$$

Заметим, что $\mu_{2k}^{-\frac{1}{2}}$ и $\left(\lambda_{2k}^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}} = \omega_{2k}^{(2)}$ есть корни целых функций

$$M(\omega) := \frac{\cos(\frac{\omega}{2})}{1 - \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^2} \quad \text{и} \quad \mathcal{D}(\omega) := \omega D_2(\omega), \quad \omega \in \mathbb{C},$$

причем эти корни достаточно близки. Заметим также, что $M(0) = \mathcal{D}(0) = 1$. Воспользуемся леммой 1 (см. Приложение). Получаем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}} = \lim_{\substack{|\omega|=2\pi k \\ k\to\infty}} \frac{M(\omega)}{\mathcal{D}(\omega)},$$

причём предел можно брать только по вещественной оси. Тогда, пользуясь формулами (21) и (23), имеем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{2k}}{\lambda_{2k}^{(2)}} = \lim_{\substack{\omega=2\pi k \\ k\to\infty}} \frac{M(\omega)}{\omega D_2(\omega)} = \lim_{\substack{\omega=2\pi k \\ k\to\infty}} \left(\mathcal{F}_0\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\mathcal{F}_1\Big(\frac{1}{\omega}\Big)\right)^2 = 1. \tag{28}$$

В итоге из формул (1), (26)–(28) получаем

$$\mathbb{P}\Big\{\|X^{(2)}\| < \varepsilon\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(2)} \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \varepsilon^{-1} \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big), \quad \varepsilon \to 0. \tag{29}$$

5 Асимптотика малых уклонений для $X^{(1)}$ и $X^{(3)}$

Для процессов $X^{(1)}$ и $X^{(3)}$ точную константу в асимптотике малых уклонений найти не удается. Для того, чтобы посчитать асимптотику малых уклонений с точностью до константы, воспользуемся следующим предложением, являющимся частным случаем [9, теорема 3.1]:

Предложение 3. *Пусть $\phi(t)$ — определенная на $[1, \infty)$, положительная, логарифмически выпуклая, дважды дифференцируемая и интегрируемая функция, Тогда*

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \phi(k)\xi_k^2 \le r\Big\} \sim C\sqrt{\frac{f(u\phi(1))}{I_2(u)}} \exp(I_0(u) + ur), \qquad r \to 0,$$

где $f(t)=(1+2t)^{-1/2}$, *а* $u=u(r)$ — *функция, удовлетворяющая*

$$\lim_{r\to 0}\frac{I_1(u)+ur}{\sqrt{I_2(u)}}=0, \tag{30}$$

$$I_0(u)=\int\limits_1^\infty \ln f(u\phi(t))\,dt,$$

$$I_1(u)=\int\limits_1^\infty u\phi(t)(\ln f(u\phi(t)))'\,dt,$$

$$I_2(u)=\int\limits_1^\infty (u\phi(t))^2(\ln f(u\phi(t)))''\,dt.$$

В качестве функции $\phi(t)$ мы будем рассматривать

$$\phi(t)=(t+\delta+F(t))^{-d},\quad d>-1,$$

где $F(t)$ — медленно меняющаяся функция при $t\to\infty$, монотонно стремящаяся к нулю при $t\to\infty$. Если $\int\limits_1^\infty \frac{F(t)}{t}\,dt<\infty$, то произведение $\prod\frac{\phi(k)}{(k+\delta)^{-d}}$ сходится, и асимптотика с точностью до константы следует из [11, теорема 6.2]. Поэтому будем считать, что $\int\limits_1^\infty \frac{F(t)}{t}\,dt$ расходится.

Преобразуем интеграл I_1 так:

$$I_1=-u\int\limits_1^\infty\frac{dt}{2u+(t+\delta+F(t))^d}=-\frac{1}{2}\int\limits_{1+\delta+F(1)}^\infty\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{(2u)^{1/d}}\right)^d}+\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\frac{F'(t)\,dt}{1+\left(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\right)^d}=$$

$$=-\frac{\pi(2u)^{1/d}}{2d\sin\left(\frac{\pi}{d}\right)}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{1+\delta+F(1)}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{(2u)^{1/d}}\right)^d}+\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\frac{F'(t)\,dt}{1+\left(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\right)^d}.$$

Оба интегранта здесь имеют суммируемые мажоранты, поэтому по теореме Лебега при $u\to\infty$ имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{1+\delta+F(1)}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{(2u)^{1/d}}\right)^d}+\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty\frac{F'(t)\,dt}{1+\left(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\right)^d}\to\frac{1+\delta}{2},$$

и, таким образом,

$$I_1(u)=-\frac{\pi(2u)^{1/d}}{2d\sin\left(\frac{\pi}{d}\right)}+\frac{\delta+1}{2}+o(1),\qquad u\to\infty.$$

Проводя аналогичные рассуждения с интегралом $I_2(u)$, получаем при $u\to\infty$

$$I_2(u)=2u^2\int\limits_1^\infty\frac{dt}{(2u+(t+\delta+F(t))^d)^2}=\frac{(d-1)\pi(2u)^{1/d}}{2d^2\sin\left(\frac{\pi}{d}\right)}+O(1).$$

Заметим, что асимптотика интегралов $I_1(u)$ и $I_2(u)$ совпадает с асимптотикой соответствующих интегралов в [11], поэтому мы можем выбрать в качестве функции $u = u(r)$

$$u = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi r^{-1}}{d\sin(\frac{\pi}{d})}\Big)^{\frac{d}{d-1}}, \tag{31}$$

которая удовлетворяет условию (30).

Рассмотрим $I_0(u)$. Интегрируя по частям, получаем

$$I_0(u) = -\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \ln\Big(1 + \frac{2u}{(t+\delta+F(t))^d}\Big)\,dt =$$

$$= \frac{(1+\delta)}{2}\ln\Big(1+\frac{2u}{(1+\delta+F(1))^d}\Big) - ud\int\limits_1^\infty \frac{(t+\delta)(1+F'(t))\,dt}{(2u+(t+\delta+F(t))^d)(t+\delta+F(t))}.$$

Последний интеграл можно расписать на следующие четыре слагаемых:

$$-ud\int\limits_1^\infty \frac{dt}{2u+(t+\delta+F(t))^d} - ud\int\limits_1^\infty \frac{F'(t)\,dt}{2u+(t+\delta+F(t))^d} +$$

$$+ud\int\limits_1^\infty \frac{F(t)\,dt}{(2u+(t+\delta+F(t))^d)(t+\delta+F(t))} +$$

$$+ud\int\limits_1^\infty \frac{F(t)F'(t)\,dt}{(2u+(t+\delta+F(t))^d)(t+\delta+F(t))} =: K_1+K_2+K_3+K_4.$$

Интеграл $K_1 = -d\cdot I_1$, поэтому

$$K_1 = \frac{\pi(2u)^{1/d}}{2\sin(\frac{\pi}{d})} + const + o(1), \qquad u\to\infty.$$

У интегрантов в K_2 и K_4 имеются суммируемые мажоранты, поэтому при $u\to\infty$

$$K_2 = \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty \frac{F'(t)\,dt}{1+\Big(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)^d} \to \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty F'(t)\,dt = -\frac{d}{2}\cdot F(1) = const;$$

$$K_4 = \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty \frac{F(t)F'(t)\,dt}{\Big(1+\Big(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)^d\Big)\Big(t+\delta+F(t)\Big)} \to \frac{d}{2}\int\limits_1^\infty \frac{F(t)F'(t)\,dt}{(t+\delta+F(t))} = const.$$

Интеграл K_3 представим в виде суммы четырех интегралов

$$K_3 = \frac{d}{2}\int\limits_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)}{t}\,dt - \frac{d}{2}\int\limits_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)(\delta+F(t))}{t(t+\delta+F(t))}\,dt -$$

$$-\frac{1}{2u}\cdot\frac{d}{2}\int\limits_1^{(2u)^{1/d}} \frac{F(t)(t+\delta+F(t))^{d-1}}{1+\Big(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)^d}\,dt + \frac{d}{2}\int\limits_{(2u)^{1/d}}^\infty \frac{F(t)\,dt}{\Big(1+\Big(\frac{t+\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)^d\Big)\Big(t+\delta+F(t)\Big)} =:$$

$$=: \frac{d}{2}\cdot F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right) - K_{31} - K_{32} + K_{33},$$

где $F_{-1}(x) = \int\limits_1^x \frac{F(t)}{t}\,dt$. По теореме Лебега

$$K_{31} \to \frac{d}{2} \int\limits_1^\infty \frac{F(t)(\delta + F(t))}{t(t+\delta+F(t))}\,dt = const.$$

Сделаем замену переменной $t = (2u)^{1/d} \cdot z$ в интегралах K_{32} и K_{33}:

$$K_{32} = \frac{d}{2} \int\limits_{\frac{1}{(2u)^{1/d}}}^{1} \frac{F((2u)^{1/d}z)\Big(z + \frac{\delta + F((2u)^{1/d}z)}{(2u)^{1/d}}\Big)^{d-1}}{1 + \Big(z + \frac{\delta + F((2u)^{1/d}\cdot z)}{(2u)^{1/d}}\Big)^{d}}\,dz,$$

$$K_{33} = \int\limits_1^\infty \frac{F((2u)^{1/d}z)\,dz}{\Big(1 + \Big(z + \frac{\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)^d\Big)\Big(z + \frac{\delta+F(t)}{(2u)^{1/d}}\Big)}.$$

Подынтегральные выражения здесь ограничены, поэтому по теореме Лебега $K_{32} \to 0$ и $K_{33} \to 0$ при $u \to \infty$. Таким образом, при $u \to \infty$

$$K_3 = \frac{d}{2} \cdot F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right) + const + o(1),$$

откуда

$$I_0(u) = \frac{(1+\delta)}{2} \ln\Big(1 + \frac{2u}{(1+\delta+F(1))^d}\Big) - \frac{\pi (2u)^{1/d}}{2\sin(\frac{\pi}{d})} + \frac{d}{2} \cdot F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right) + const + o(1). \tag{32}$$

Заметим, что функция $\exp\left(F_{-1}(t)\right)$ — медленно меняющаяся [31, теорема 1.2], поэтому с учетом (31)

$$\exp\left(F_{-1}\left((2u)^{1/d}\right)\right) = \exp\Big(F_{-1}(r^{-\frac{1}{d-1}}) + o(1)\Big), \qquad r \to 0. \tag{33}$$

Применяя предложение 3 с учетом формул (31)–(33) и перемасштабирования, приходим к следующему результату:

Теорема 4. *Рассмотрим форму* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2$, *где*

$$\Lambda_k = (\vartheta(k + \delta + F(k)))^{-d},$$

а $\vartheta > 0$, $\delta > -1$ *и* $d > 1$ *— некоторые константы. Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\mathbb{P}\Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2 \Big\} \sim C \cdot \varepsilon^{\gamma} \cdot \exp\Big(-\frac{d-1}{2} \Big(\frac{\pi}{d\vartheta \sin(\frac{\pi}{d})} \Big)^{\frac{d}{d-1}} \cdot \varepsilon^{-\frac{2}{d-1}} + \frac{d}{2} \cdot F_{-1}(\varepsilon^{-\frac{2}{d-1}}) \Big),$$

где

$$\gamma = \frac{2 - d - 2d\delta}{2(d-1)}, \quad C = C(\vartheta, \delta, d, F) = const.$$

В случае процесса $X^{(1)}$ положим

$$\Lambda_k := \Big[\pi\Big(k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln(k)}\Big)\Big]^{-2}.$$

Убедимся, что $\prod \lambda_k^{(1)}/\Lambda_k$ сходится. Для этого определим

$$\tau_{2k} := \big(2\pi k\big)^{-2}, \qquad \tau_{2k-1} := \Big[\pi\Big(2k + \frac{1}{\ln(k)}\Big)\Big]^{-2}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(1)}}{\Lambda_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{(1)}}{\tau_k} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{\Lambda_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}^{(1)}}{\tau_{2k-1}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{\Lambda_k}. \tag{34}$$

Первое произведение в (34) сходится, поскольку в силу (24)

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{2k-1}^{(1)}}{\tau_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 + O\Big(\frac{\ln\ln(k)}{k\ln^2(k)}\Big)\Big) < \infty.$$

Второе произведение представим в виде

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{2k}\tau_{2k-1}}{\Lambda_{2k}\Lambda_{2k-1}} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\big(2k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln(2k)}\big)\big(2k - \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln(2k-1)}\big)}{2k\big(2k + \frac{1}{\ln(k)}\big)} = \\
= &\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{1}{4k}\Big(\frac{1}{\ln(2k)} + \frac{1}{\ln(2k-1)} - \frac{2}{\ln(k)}\Big) + O\Big(\frac{1}{k^2}\Big)\Big) = \\
= &\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{k\ln^2(k)}\Big)\Big) < \infty.
\end{aligned}$$

Применяя теорему сравнения Ли и теорему 4, получаем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big\{\|X^{(1)}\| < \varepsilon\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(1)}\xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim C \cdot \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \\
\sim C \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \ln^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big) \cdot \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big), \qquad \varepsilon \to 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

В случае процесса $X^{(3)}$ положим

$$\tilde{\Lambda}_k = \Big[\pi\Big(k + 1 + \frac{1}{2\ln(k)}\Big)\Big]^{-2}.$$

Аналогично (35), получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big\{\|X^{(3)}\| < \varepsilon\Big\} = \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(3)}\xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim C \cdot \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Lambda}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \\
\sim C \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \ln^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big) \cdot \exp\Big(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\Big), \qquad \varepsilon \to 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

6 Приложение

6.1 Следующая лемма усиливает утверждение леммы 1.2 из [18].

Лемма 1. *Пусть последовательности чисел* ω_k *и* ρ_k *имеют одинаковую двучленную асимптотику при* $k \to \infty$

$$\omega_k \sim c(k+\delta) + a_k, \qquad \rho_k \sim c(k+\delta) + b_k,$$

где a_k, $b_k \to 0$ *и* $|a_k - b_k|$ *монотонно убывает при* $k \to \infty$, *причем*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{k} < \infty. \tag{37}$$

Тогда функции

$$f(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\zeta^2}{\omega_k^2}\Big), \quad g(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{\zeta^2}{\rho_k^2}\Big)$$

имеют одинаковое поведение на бесконечности с точностью до константы. А именно, при $|\zeta| = c(n + \delta + \frac{1}{2})$, $n \to \infty$

$$\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} \rightrightarrows const = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2}{\omega_k^2}. \tag{38}$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k^2}{\omega_k^2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{\omega_k - \rho_k}{\rho_k + \zeta}\Big) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{\omega_k - \rho_k}{\rho_k - \zeta}\Big). \tag{39}$$

Сходимость первого произведения в (39) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{c(k+\delta) + b_k},$$

который сходится благодаря условию (37). Пусть $\Re(\zeta) \geq 0$. Тогда второе произведение в (39) сходится равномерно. Третье произведение сходится равномерно, если сходится равномерно ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega_k - \rho_k|}{|\rho_k - R|}, \quad \text{где} \quad R = c(n + \delta + 1/2). \tag{40}$$

Заметим, что $|\rho_k - R| \geq c|n - k + \delta_1|$, где $\delta_1 > 0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega_k - \rho_k|}{|\rho_k - R|} \leq \Big(\sum_{k \leq \frac{2}{3}n} + \sum_{\frac{2}{3}n \leq k \leq \frac{4}{3}n} + \sum_{k \geq \frac{4}{3}n} \Big) \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|}. \tag{41}$$

Третья сумма в (41) стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\sum_{k \geq \frac{4}{3}n}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{c|n - k + \delta_1|} \leq C \sum_{k \geq \frac{4}{3}n} \frac{|a_k - b_k|}{k} \to 0.$$

Первая сумма мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{k\le \frac{2}{3}n} \frac{|a_k-b_k|}{c|n-k+\delta_1|} \le C\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k-b_k|}{k},$$

поэтому она сходится равномерно, и при $n\to\infty$

$$\sum_{k\le \frac{2}{3}n} \frac{|a_k-b_k|}{c|n-k+\delta_1|} \to 0.$$

Поскольку $|a_k-b_k|$ монотонно убывает, имеем

$$\sum_{\frac{2}{3}n\le k\le \frac{4}{3}n} \frac{|a_k-b_k|}{c|n-k+\delta_1|} \le 2\sum_{\frac{2}{3}n\le k\le n} \frac{|a_k-b_k|}{c|n-k+\delta_1|} \le \frac{2}{c}\sum_{m\le \frac{1}{3}n} \frac{|a_{m+\frac{n}{3}}-b_{m+\frac{n}{3}}|}{|m+\delta_1|}.$$

Последняя сумма мажорируется сходящимся рядом, поэтому она сходится равномерно. Таким образом, ряд (40) сходится равномерно. Значит, в (39) можно перейти к пределу при $|\zeta| = c(n+\delta+\frac{1}{2})\to\infty$, что даёт (38) для $\Re(\zeta)\ge 0$. Доказательство при $\Re(\zeta)\le 0$ аналогично. ■

6.2 Свойства $\Phi^{-1}(x)$. Введём обозначения:

$$x=\Phi(y), \qquad y=F_0(x) := \Phi^{-1}(x).$$

Построим последовательность функций:

$$F_{N+1}(x) := xF'_N(x), \quad N\ge 0. \tag{42}$$

Обозначим $\tilde F_N(y) := F_N(x(y))$ и заметим, что

$$\begin{aligned}\tilde F_1(y) &= x(y)\frac{dF(x(y))}{dx} = x(y)\frac{dy}{dx},\\ \tilde F_{N+1}(y) &= x(y)\frac{dF_N(x)}{dx} = x(y)\frac{dy}{dx}\frac{d\tilde F_N(y)}{dy} = \tilde F_1(y)\tilde F'_N(y).\end{aligned} \tag{43}$$

Исследуем поведение функций $\tilde F_N(y)$. Рассмотрим функцию $\tilde F_1(y)$:

$$\tilde F_1(y) = x(y)\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{x(y)}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y}\exp(-\frac{t^2}{2})\,dt}{\exp(-\frac{y^2}{2})} = \exp\Big(\frac{y^2}{2}\Big)\int\limits_{-\infty}^{y}\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\infty}\exp\Big(yz-\frac{z^2}{2}\Big)\,dz = -\frac{1}{y}\int\limits_0^{\infty}\exp\Big(-u-\frac{u^2}{2y^2}\Big)\,du.$$

Введем вспомогательные функции:

$$e_N(y) := \int\limits_0^{\infty}\exp\Big(-u-\frac{u^2}{2y^2}\Big)u^{2N-2}\,du.$$

Лемма 2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$1. \quad e'_N(y) = \frac{e_{N+1}(y)}{y^3}; \tag{44}$$

$$2. \quad (2N-2)!\Big(1 - \frac{N(2N-1)}{y^2}\Big) < e_N(y) < (2N-2)!. \tag{45}$$

Доказательство. 1. Проверяется непосредственным вычислением.
2. Учитывая, что

$$1 - \frac{u^2}{2y^2} < \exp\Big(-\frac{u^2}{2y^2}\Big) < 1,$$

получаем

$$\int\limits_0^\infty \exp(-u)\Big(1 - \frac{u^2}{2y^2}\Big)u^{2N-2}\,du < e_N(y) < \int\limits_0^\infty \exp(-u)u^{2N-2}\,du,$$

$$(2N-2)! - \frac{(2N)!}{2y^2} < e_N(y) < (2N-2)!,$$

что даёт (45). ■

Лемма 3. *Для N-ой производной функции $\tilde{F}_1(y)$ справедливо следующее тождество:*

$$\tilde{F}_1^{(N)}(y) = \frac{(-1)^{N+1}N!e_1(y)}{y^{N+1}} + \frac{c_2e_2(y)}{y^{N+3}} + \ldots + \frac{c_{N+1}e_{N+1}(y)}{y^{3N+1}}, \tag{46}$$

где

$$c_2 = c_2(N), c_3 = c_3(N), \ldots, c_{N+1} = c_{N+1}(N) \text{ — константы.}$$

Доказательство проводится по индукции с помощью (44). ■

Следствие 1.

$$\tilde{F}_1^{(N)}(y) \sim \frac{(-1)^{N+1}N!}{y^{N+1}} \qquad \text{при } y \to -\infty. \tag{47}$$

Доказательство. Следует из (45) и (46). ■

Лемма 4. *$\tilde{F}_N(y)$ представимо в следующем виде*

$$\tilde{F}_N(y) = \sum_{\{n_1,\ldots,n_N\}} c_{n_1,\cdots,n_N}\tilde{F}_N^{n_1,\ldots,n_N}(y), \tag{48}$$

где

$$\tilde{F}_N^{n_1,\ldots,n_N}(y) := \Big(\tilde{F}_1(y)\Big)^{n_1} \cdot \Big(\tilde{F}'_1(y)\Big)^{n_2} \cdot \ldots \cdot \Big(\tilde{F}_1^{(N-1)}(y)\Big)^{n_N}, \tag{49}$$

причем

$$\begin{aligned} &n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}; \\ &1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \ldots + N \cdot n_N = 2N - 1; \end{aligned} \tag{50}$$

а коэффициенты в (48) *удовлетворяют следующим неравенствам*

$$c_{n_1,\cdots,n_N} \geq 0, \qquad \sum_{\{n_1,\ldots,n_N\}} c_{n_1,\cdots,n_N} > 0. \tag{51}$$

Доказательство проведем по индукции.
База: $N = 1 : \tilde{F}_1(y) = c_{n_1}\tilde{F}_1^{n_1}$, $n_1 = 1, c_{n_1} = 1$. Свойства (49)–(51) очевидно выполняются.
Индукционный переход: Пусть утверждение верно для $\tilde{F}_N(y)$. Запишем (50) в виде:

$$1 \cdot n_1 + \ldots + N \cdot n_N + (N+1) \cdot n_{N+1} = 2N - 1,$$

где $n_{N+1} = 0$. В силу (43) и (48)

$$\tilde{F}_{N+1}(y) = \sum_{\{n_1,\ldots,n_N\}} c_{n_1,\ldots,n_N} \tilde{F}_1(y) \cdot \frac{d}{dy}\Big[\Big(\tilde{F}_1(y)\Big)^{n_1} \cdot \Big(\tilde{F}_1'(y)\Big)^{n_2} \ldots \Big(\tilde{F}_1^{(N-1)}(y)\Big)^{n_N}\Big],$$

где коэффициенты $c_{n_1,\ldots,n_N}$ удовлетворяют условию (51). Дифференцируя, получим

$$\sum_{k=0}^{N} c_{n_1,\ldots,n_N} \cdot n_k \cdot \Big(\tilde{F}_1\Big)^{n_1+1} \cdot \ldots \cdot \Big(\tilde{F}_1^{(k-1)}\Big)^{n_k-1} \cdot \Big(\tilde{F}_1^{(k)}\Big)^{n_{k+1}+1} \cdot \ldots \cdot \Big(\tilde{F}_1^{(N-1)}\Big)^{n_N}. \qquad (52)$$

Рассмотрим слагаемое с номером k в сумме (52). Пусть $n_1', n_2', \ldots, n_{N+1}'$ — показатели степеней соответствующих производных $\tilde{F}_1$ в этом слагаемом.

Если $k = 1$, то $n_2' = n_2 + 1$ и $n_i' = n_i$ для остальных i.

Если $k \geqslant 2$, то $n_1' = n_1 + 1$, $n_k' = n_k - 1$, $n_{k+1}' = n_{k+1} + 1$ и $n_i' = n_i$ для остальных i.

Отсюда видно, что свойство (50) выполнено. Далее, все коэффициенты в (52) очевидно неотрицательные, причем

$$\sum_{\substack{k=1..N \\ \{n_1,\ldots,n_N\}}} c_{n_1,\ldots,n_N} \cdot n_k > 0.$$

Таким образом, неравенства (51) выполнены, и лемма доказана. ■

Лемма 5. *При $y \to -\infty$ имеем*

$$\tilde{F}_N(y) \sim -\frac{C}{y^{2N-1}}, \qquad (53)$$

где $C = C(N) > 0$ — константа.

Доказательство. Для каждого слагаемого вида (49) с ненулевым коэффициентом $c_{n_1,\ldots,n_N}$ в силу (47) и (50) получаем

$$\begin{aligned}
&\Big(\tilde{F}_1(y)\Big)^{n_1} \cdot \Big(\tilde{F}_1'(y)\Big)^{n_2} \cdot \ldots \cdot \Big(\tilde{F}_1^{(N-1)}(y)\Big)^{n_N} \sim \\
&\qquad \sim \Big(\frac{(-1)0!}{y^1}\Big)^{n_1} \cdot \Big(\frac{(-1)^2 1!}{y^2}\Big)^{n_2} \cdots \Big(\frac{(-1)^N (N-1)!}{y^N}\Big)^{n_N} = \\
&\qquad = \underbrace{0!^{n_1} 1!^{n_2} \ldots (N-1)!^{n_N}}_{c_N} \frac{(-1)^{n_1+2n_2+\ldots+Nn_N}}{y^{n_1+2n_2+\ldots+Nn_N}} = c_N \frac{(-1)^{2N-1}}{y^{2N-1}} = -\frac{c_N}{y^{2N-1}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (53) выполнено для

$$C = c_N \sum_{\{n_1,\ldots,n_N\}} c_{n_1,\cdots,n_N}.$$

Лемма доказана. ■

Определение. (см. [31, гл.1, с.1]) *Функция* $L(x)$ *называется медленно меняющейся на бесконечности, если она измерима и знакопостоянна на полуоси* $[A, \infty)$, $A > 0$, *и для произвольного* $\lambda > 0$ *выполнено:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1.$$

Функция $L(x)$ *называется медленно меняющейся в нуле, если* $L(\frac{1}{x})$ *медленно меняется на бесконечности.*

Медленно меняющимися на бесконечности являются, например, $\ln^{\alpha}(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Теорема 5. $F_N(x)$ — *медленно меняющиеся функции в нуле при всех* $N \geq 0$.

Доказательство. Достаточно доказать (см. [31, гл.1, с.15]), что $F_N(x)$ — знакопостоянны в окрестности $x = 0$ (или, что тоже самое, $\tilde{F}_N(y)$ — знакопостоянны в окрестности $y = -\infty$) и

$$\lim_{y \to -\infty} \frac{\tilde{F}_{N+1}(y)}{\tilde{F}_N(y)} = 0.$$

Оба эти утверждения очевидно следуют из леммы 5. ■

Замечание 2. *Теорема остаётся справедливой, если последовательность* (42) *построить по функции* $F_0(x) = \left(\Phi^{-1}(x)\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Мы весьма признательны Я.Ю. Никитину за ценные замечания и консультации по истории вопроса.

Список литературы

[1] Li W. V., Shao Q. M. Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications // Stochastic processes: theory and methods. — 2001. — Vol. **19**. — P. 533–597.

[2] Lifshits M. A. Asymptotic behavior of small ball probabilities // Probab. Theory and Math. Statist. Proc. VII International Vilnius Conference. — 1999. — P. 453–468.

[3] Lifshits M. A. Bibliography on small deviation probabilities // http://www. proba. jussieu. fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf. — 2014.

[4] Сытая Г. Н. О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве // Теория случайных процессов. — 1974. — Т. **2**. — С. 93–104.

[5] Zolotarev V. M. Gaussian measure asymptotic in L_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero // 12th Europ. Meeting of Statisticians, Varna. — 1979. — P. **254**.

[6] Hoffmann-Jorgensen J., Shepp L. A., Dudley R. M. On the lower tail of Gaussian seminorms // The Annals of Probability. — 1979. — Vol. **7**. — P. 319–342.

[7] Ибрагимов И. А. О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса // Записки научных семинаров ПОМИ. — 1979. — Т. **85**. — С. 75–93.

[8] Li W. V. Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms // Journal of Theoretical Probability. — 1992. — Vol. **5**, no. **1**. — P. 1–31.

[9] Dunker T., Lifshits M. A., Linde W. Small deviation probabilities of sums of independent random variables. — 1998. — Vol. **43**. — P. 59–74.

[10] Gao F., Hannig J., Torcaso F. Comparison theorems for small deviations of random series // Electron. J. Probab. — 2003. — Vol. **8**, no. **21**. — P. 1–17.

[11] Nazarov A. I., Nikitin Ya. Y. Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems // Probability theory and related fields. — 2004. — Vol. **129**, no. **4**. — P. 469–494.

[12] Nazarov A. I. Exact small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary value problems // J. Theor. Probab. — 2009. — Vol. **22**, no. **3**. — P. 640–665.

[13] Birkhoff G. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Transactions of the American Mathematical Society. — 1908. — Vol. **9**, no. **2**. — P. 219–231.

[14] Birkhoff G. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Transactions of the American Mathematical Society. — 1908. — Vol. **9**, no. **4**. — P. 373–395.

[15] Tamarkin J. Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. — 1912. — Vol. **34**, no. **1**. — P. 345–382.

[16] Tamarkin J. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Mathematische Zeitschrift. — 1928. — Vol. **27**, no. **1**. — P. 1–54.

[17] Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — Т. **9**. — С. 190–229.

[18] Назаров А. И. О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Т. Рожковская. — 2003. — Т. **26**. — С. 179–214.

[19] Назаров А. И., Пусев Р. С. Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме с весом для некоторых гауссовских процессов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2009. — Т. **364**. — С. 166–199.

[20] Назаров А. И., Пусев Р. С. Теоремы сравнения для вероятностей малых уклонений весовых L_2-норм гриновских гауссовских процессов // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. **25**, № 3. — С. 131–146.

[21] Никитин Я. Ю., Харинский П. А. Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме для одного класса гауссовских процессов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. **311**. — С. 214–221.

[22] Deheuvels P., Martynov G. Karhunen-Loeve expansions for weighted Wiener processes and Brownian bridges via Bessel functions // Proc. Conf. High Dimensional Probability. III. Progress in Probability. — 2003. — Vol. **55**. — P. 57–93.

[23] Gao F., Hannig J., Lee T.-Y., Torcaso F. Laplace transforms via Hadamard factorization // Electronic Journal of Probability. — 2003. — Vol. **8**. — P. 1–20.

[24] Назаров А. И. Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций // Теория вероятностей и ее применения. — 2009. — Т. **54**, № **2**. — С. 209–225.

[25] Владимиров А. А., Шейпак И. А. О задаче Неймана для уравнения Штурма-Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа // Функциональный анализ и его приложения. — 2013. — Т. **47**, № **4**. — С. 18–29.

[26] Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: Учебное пособие. — Издательство Ленинградского университета, 1980.

[27] Kac M., Kiefer J., Wolfowitz J. On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods // The Annals of Mathematical Statistics. — 1955. — Vol. **26**, no. **2**. — P. 189–211.

[28] Гихман И. И. О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах математической статистики // Укр. мат. журн. — 1953. — Vol. **5**, no. 4.

[29] Гихман И. И. Процессы Маркова в задачах математической статистики // Укр. мат. журн. — 1954. — Vol. **6**. — P. 28–36.

[30] Durbin J. Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated // The Annals of Statistics. — 1973. — Vol. **1**, no. 2. — P. 279–290.

[31] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции: Пер. с англ. — Наука, 1985.

[32] Blair J. M., Edwards C. A., Johnson J. H. Rational Chebyshev approximations for the inverse of the error function // Mathematics of Computation. — 1976. — Vol. **30**, no. **136**. — P. 827–830.