

Новые результаты об уточнениях к эргодической теореме для автоморфизма Паскаля*

А.А. Лодкин[†] И.Е. Манаев[‡] А.Р. Минабутдинов[§]

Версия 1.3. от 15.03.2015[¶]

Аннотация

В работе обобщаются результаты работ E. Janvresse, T. de la Rue и Y. Velenik [22], а также работы [9], третьего автора, о случайных флуктуациях эргодических сумм автоморфизма Паскаля для широкого класса функций и произвольных инвариантных эргодических мер. В частности, получены ответы на ряд вопросов, поставленных ранее в работе E. Janvresse, T. de la Rue и Y. Velenik и, в частном случае меры Лебега, рассматривавшихся в работе [9].

Ключевые слова: автоморфизм Паскаля, эргодическая теорема, обобщенная кривая Такаги, обобщенная система Уолша-Пэли
MSC: 37A30, 28A80

1 Вступление

Рассмотрим эргодический автоморфизм $T : \Omega \rightarrow \Omega$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, T, \mu)$, функцию $g \in L^2(\Omega, \mu)$ и соответствующую эргодическую сумму

$$S_x^g(j) = \sum_{k=0}^{j-1} g(T^k x).$$

По эргодической теореме для п.в. x выполнено

$$\frac{1}{n} S_x^g(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\Omega} g d\mu. \quad (1)$$

В работе [33] рассмотрены отклонения от эргодической теоремы для квадратично суммируемых функций. Показано (см. [33], теорема 4), что для всякого эргодического автоморфизма $(\Omega, \mathcal{A}, T, \mu)$ можно найти функцию $f \in L^2(\Omega, \mu)$ и семейство

*Препринт подготовлен при поддержке гранта РФФИ 14-01-00373;

[†]СПбГУ, Математико-механический факультет, Университетский пр., д. 28, Старый Петергоф, СПб, 198504.

[‡]Санкт-Петербургский информационно-аналитический центр, отдел разработки и внедрения, ул. Черняховского, д. 59, СПб, 191040.

[§]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Департамент прикладной математики и бизнес информатики, ул. Кантемировская 3, СПб, 194100.

[¶]Версия 1.1 от 20.11.2014

гауссовских независимых одинаково распределенных величин $\{Z_i\}_{i=0}^{\infty}$, для которых выполнен принцип инвариантности¹:

$$\frac{|S_x^f(n) - \sum_{i=0}^{n-1} Z_i|}{\sqrt{n \log \log n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

для μ -п.в. $x \in \Omega$. Поэтому в работе [22] авторы предложили ограничиться рассмотрением только функций, измеримых относительно некоторого подпространства $\mathcal{F} \subset L_2(\Omega, \mu)$, для элементов которого могут получаться более интересные результаты, чем в общем случае. Они предложили рассматривать случайные (параметр случайности – это $x \in \Omega$) эргодические суммы $S_x^g(j)$ как функции от j на случайных целочисленных интервалах $1 \leq j \leq l_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, линейно интерполируя эргодические суммы между соседними значениями $j \in \mathbb{N}$. Чтобы можно было ожидать стабилизации при n , стремящемся к бесконечности, получаемых функций, нужно выбрать правильное (естественно, зависящее от x) «время» и «нормировку», а также убрать «тренд», задаваемый эргодической теоремой. В итоге было предложено рассмотреть случайные непрерывные функции $\varphi_{x, l_n}^g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_{x, l_n(x)}^g(t) = \frac{S_x^g(t \cdot l_n(x)) - t \cdot S_x^g(l_n(x))}{R_{x, l_n(x)}^g}, \quad (2)$$

где $R_{x, l_n(x)}^g$ – нормировочный множитель, канонически, выбираемый равным константе, если $\max_t |S_x^g(t \cdot l_n(x)) - t S_x^g(l_n(x))| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$, и пропорциональным $\max_t |S_x^g(t l_n(x)) - t S_x^g(l_n(x))|$ в противном случае. Если для выбранных функции g и точки x существует последовательность $l_n(x) \in \mathbb{N}$, такая, что $\varphi_{x, l_n(x)}^g$ сходится к функции φ_x^g в равномерной метрике, то $\varphi_x^g(\cdot)$ называют *предельной функцией*, ее график *предельной кривой*, а последовательность $l_n(x)$ *стабилизирующей последовательностью*.

Рассмотрим бесконечномерный единичный куб $I = \{0, 1\}^{\infty}$ с σ -алгеброй борелевских множеств \mathcal{B} , порожденной цилиндрическими множествами $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $x_i \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, меру Бернулли μ_a , являющуюся произведением $\prod_1^{\infty} (a, 1 - a)$ мер $(a, 1 - a)$, $0 < a < 1$, и автоморфизм Паскаля P . Автоморфизм Паскаля является важным примером адических преобразований (см. [1]). Он был определен² в [2] и изучался в ряде работ, см. работу [3] и ссылки в ней.

В работе [22] авторы изучали предельные кривые для автоморфизм Паскаля (в изоморфном представлении на интервале $[0, 1]$). В качестве пространства функций \mathcal{F} , для элементов которого авторы [22] строили предельные функции, выступало пространство \mathcal{F}_N , $N \in \mathbb{N}$, цилиндрических функций, зависящих лишь от первых N координат³. Авторы [22] рассмотрели цилиндрические функции $g = g(x_1, \dots, x_N)$, удовлетворяющие дополнительному условию

$$\text{cov}_{\mu_a}(g, \sum_{i=1}^N r_i) \neq 0, \quad (3)$$

где $r_i(x) = (-1)^{x_i}$, $i \in \mathbb{N}$, – функции Радемахера. Графиком предельной функции $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n(x)}^g(\cdot)$ в этом случае для μ_a -п.в. x оказалась кривая Такаги при $a = 1/2$ и ее

¹см. также работы [4], [5] и [27]

²Этот автоморфизм ранее (без упоминания этого термина, и связи с графом Паскаля) использован в [19] и [24].

³эквивалентно, функций, измеримых относительно *конечного* стандартного диадического разбиения \mathcal{P}_N интервала $[0, 1]$ ранга N в изоморфном представлении автоморфизма на $[0, 1]$

естественное обобщение при других значениях a . В общем случае ими было показано, что всякая цилиндрическая, некогомологичная константе функция f приводит к некоторой предельной функции $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n}^f$. В качестве последовательности $\{l_k(x)\}_k$ естественным образом выступают выбираемые по точке x (под)последовательности биномиальных коэффициентов $l_k(x) = \binom{n_k(x)}{k(x)}$, обладающие свойством $\frac{k(x)}{n_k(x)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$. Эти результаты из базовой для нас работы [22] будут сформулированы в теоремах 4–6 ниже.

Однако, было замечено, что в общем случае (т.е., когда не выполнено условие (3)), могут возникать другие предельные кривые. Например, в параграфе 4.1 работы [22] для случая $a = \frac{1}{2}$ авторы привели пример функций, где в качестве предельной получают совершенно другую кривую, которую они называют *переходной кривой*. В связи с этим в пунктах 4.1 и 4.2 авторы вышеупомянутой работы прямо ставят два вопроса.

Вопрос 1. *Какие предельные кривые возможны для произвольной цилиндрической функции f ?*

Авторы [22] выдвинули гипотезу, что возможны лишь две предельные кривые: обобщенная кривая Такаги и участки переходной кривой.

Вопрос 2. *Если рассмотреть случай функции $g \in L_{\mu_a}^2(I)$, удовлетворяющей естественному обобщению условия (3)⁴:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{cov}_{\mu_a}(g, \sum_{i=1}^N r_i) \neq 0, \quad (4)$$

то будет ли существовать предельная кривая?

Для того, чтобы предел в условии (4) существовал, авторы [22] предложили условие:

$$\sum_{N \geq 1} \|\mathbb{E}_{\mu_a}(g | \mathcal{F}_{N+1}) - \mathbb{E}_{\mu_a}(g | \mathcal{F}_N)\|_2 < \infty, \quad (5)$$

где $\mathcal{F}_N, N \in \mathbb{N}$ – пространство цилиндрических функций от (x_1, \dots, x_N) .

Цель данной работы – дать ответ на эти вопросы.

Основной результат можно сформулировать в виде двух теорем, обобщающих соответствующие результаты из [9] для случая произвольного $a \in (0, 1)$:

Теорема 1. *Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой (I, \mathcal{B}, μ_a) , $N \in \mathbb{N}$ и $g \in \mathcal{F}_N$ – некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда*

1. *Для μ_a -п.в. x предельной функцией является функция $\alpha_{g,x} T_a^1$, где $\alpha_{g,x} = \pm 1$.*
2. *Для всякого $x \in I$, удовлетворяющего условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(x)}{n_k(x)} = a$, предельная функция существует; найдутся вещественные числа $\alpha_{g,x}, \beta_{g,x}$, такие, что*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n}^g = \alpha_{g,x} T_a^1 + \beta_{g,x} T_a^2 \in C[0, 1],$$

где T_a^1 и T_a^2 – непрерывные самоподобные функции.

⁴Некоторое условие, безусловно необходимо, чтобы исключить функции, удовлетворяющие слабому принципу инвариантности, см. [33], для которых такая стабилизация невозможна.

График функции $\frac{1}{2}T_{1/2}^1$ является кривой Такаги, а график $T_{1/2}^2$ – переходной кривой. В параграфе 3 мы строим класс функций $\{T_a^k\}_{k \geq 1}$ и приводим результаты, описывающие свойства самоподобия линейных комбинаций $\alpha T_a^1 + \beta T_a^2$ при иррациональных a . В частности, показываем, что график любой линейной комбинации $\alpha T_a^1 + \beta T_a^2$ с точностью до нормировки⁵ приближается некоторым участком графика T_a^2 (см. предложение 1 в параграфе 3). Отметим, что функции $\{T_a^k\}_{k \geq 1}$ известны в теории чисел в связи с «sum-of-binary-digits-problem», см. подробнее параграф 6.

Возвращаясь ко второму вопросу, отметим, что вместо условия (5) мы налагаем на функцию g более сильное условие. Рассмотрим диадическую метрику ρ на аддитивной группе \mathbf{Z}_2 целых диадических чисел, которую можно отождествить с кубом I . Метрика ρ на $I \sim \mathbf{Z}_2$ задается стандартным образом: $\rho(x, y) = \|x - y\|$, где $\|z\| = 2^{-u(z)}$ – каноническая норма; здесь $u(z)$ – номер первой ненулевой координаты элемента $z \in \mathbf{Z}_2$. Обозначим через $C_\rho(I)$ пространство непрерывных в топологии, индуцированной метрикой ρ , функций⁶. Обозначим через $\{w_t\}_{t=1}^\infty$ систему функций Уолша-Пэли, а через $\{w_t^a\}_{t=1}^\infty$ систему, получаемую из $\{w_t\}_{t=1}^\infty$ применением алгоритма Грама-Шмидта для L^2 -метрики, задаваемой мерой μ_a (в частности, $\{w_t^{1/2}\}_{t=1}^\infty$ совпадает с $\{w_t\}_{t=1}^\infty$). Для ряда Фурье $\sum_{t=0}^\infty c_t w_t^a$ функции $g \in L_{\mu_a}^2(I)$ по системе функций $\{w_t^a\}_{t=1}^\infty$, обозначим через B_m сумму $\sum_{t=m+1}^\infty |c_t|$.

Теорема 2. Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой (I, \mathcal{B}, μ_a) , $N \in \mathbb{N}$, функция $g \in C_\rho(I)$ удовлетворяет условию (5) и для коэффициентов ряда Фурье по системе Уолша-Пэли выполнено условие $B_n = o(2^{-n})$, $n \rightarrow \infty$. Пусть $\alpha_g = -\text{sgn}\left(\sum_{j=1}^\infty \text{cov}(r_j, g)\right)$. Тогда для всякого $x \in I$, удовлетворяющего условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(x)}{n_{k(x)}} = a$, предельная функция существует и равна $\alpha_g T_a^1$.

Основным методом в данной работе является разложение функции $g \in C_\rho(I)$ в ряд Фурье по ортогонализированным относительно метрики, задаваемой мерой μ_a , функциям Уолша $\{w_t^a\}_{t=1}^\infty$. Для последних нам удалось получить явную формулу, задающую эргодические суммы $S_x^{w_t^a}$, что позволило (и это являлось наиболее технически сложным) оценить порядок нормирующих коэффициентов $R_{x,l}^{w_t^a}$ и в итоге определить предельную форму $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n(x)}^{w_t^a}$. Именно, результат для базисных функций позволяет сделать заключение о предельной форме φ_x^g , если g удовлетворяет предположениям из вопросов 1 и 2.

Работа устроена следующим образом. В следующем параграфе приведены основные результаты из базовой для нас работы [22]. В параграфе 3 описан класс фрактальных кривых, позволяющий описать предельные кривые, а также исследованы свойства самоподобия его элементов. В параграфе 4.1 описана система базисных функций Уолша, ортогонализованная в пространстве $L_{\mu_a}^2[0, 1]$, рассмотрение рядов Фурье по которой является основой для наших результатов. Параграф 4 посвящен основным результатам данной работы, где в пунктах 4.3 и 4.4 получены ответы на вопросы 1 и 2. В параграфе 5 мы рассказываем о связи наших результатов со знаменитой гипотезой о непрерывности спектра автоморфизма Паскаля. В параграфе 6 бу-

⁵Сдвига, растяжения и вычитания линейной функции.

⁶Пространство можно интерпретировать как пространство функций, все точки разрыва которых – первого рода и двоично-рациональны.

дет дана теоретико-числовая интерпретация наших результатов. Наконец, последний параграф 7 оставлен для некоторых доказательств и дополнительных иллюстраций.

2 Обозначения и исходные результаты

Вершину (точку) x бесконечномерного куба I естественно рассматривать как путь в графе Паскаля. Если начальный отрезок x_1, x_2, \dots, x_n длины n пути x содержит k нулей⁷, то путь проходит через вершину (n, k) графа Паскаля.

На точках (путях) автоморфизм действует следующим образом⁸ (см. работу [2]):

$$x \mapsto Px; \quad P(0^{m-l}1^l\mathbf{10}\dots) = 1^l0^{m-l}\mathbf{01}\dots \quad (6)$$

(запись подразумевает, что координаты x_i с номерами $i \geq m + 3$ остаются неизменными). Инвариантные эргодические меры автоморфизма Паскаля, согласно теореме де Финетти и закону нуля и единицы, это бернуллиевские произведения $\mu_a = \prod_1^\infty (a, 1 - a)$ мер $(a, 1 - a)$, где $0 < a < 1$.

Для всякого пути (точки) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ из I обозначим через $J_n(x)$ цилиндр $[x_1, \dots, x_n]$. Всякий такой цилиндр можно рассматривать как вершину n -мерного куба $I_n = \prod_1^n \{0, 1\}$. Тогда автоморфизм Паскаля на вершинах n -мерного куба действует переходом к следующей вершине в **обратном** лексикографическом порядке. Вершины (цилиндры), принадлежащие сечению куба I_n по вершинам с k нулями, упорядоченные в обратном лексикографическом порядке, образуют этажи башен автоморфизма Паскаля, см. [3]. Эти башни мы обозначаем через $\tau_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Например, башня $\tau_{4,2}$ состоит из шести цилиндров:

$$\begin{array}{r} 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 0\ 0 \end{array} \quad (7)$$

Аutomорфизм на точках из башни $\tau_{n,k} \subset I$, $0 \leq k \leq n$, действует по обычному правилу: точку $x \in I$, лежащую на i -ом этаже башни $\tau_{n,k}$, он переводит на $(i + 1)$ -ый этаж, при этом меняются лишь первые n координат точки x .

Для башни $\tau_{n,k}$ будем обозначать через $\tau_{n,k}(i)$ цилиндр на i -ом этаже этой башни, например, $\tau_{4,2}(1) = [1100]$. В силу того, что для всякого n набор башен $\{\tau_{n,k}\}_{k=0}^n$ содержит в себе все 2^n элементарных цилиндров длины n , всякий $x \in I$ содержится на некотором этаже i некоторой башни $\tau_{n,k(x)}$. Иногда удобнее считать, что x лежит на начальных этажах башни, что можно обеспечить, если брать n не подряд:

Теорема 3. ([22] или [21] лемма 2.5) *Для всякого $\varepsilon > 0$ и для μ_a -почти всякого x найдется последовательность башен $\tau_{n_j, k_{n_j}}$, где $n_j = n_j(x)$, $\frac{k_{n_j}}{n_j} \rightarrow a$, такая, что x принадлежит одному из интервалов $\tau_{n_j, k_{n_j}}(i)$, где $1 \leq i \leq \varepsilon \binom{n_j}{k_{n_j}}$.*

⁷соответственно, $n - k$ единиц

⁸Произвольная степень автоморфизма определена для всех точек, кроме тех, которые постоянны с некоторого места.

Стабилизирующую последовательность l_j , согласно этой теореме, удобно выбирать в виде $\binom{n_j}{k_j}$. При таком выборе отношение t_x номера i этажа башни τ_{n_j, k_j} , на котором лежит x , к высоте башни, равной $\binom{n_j}{k_j}$, сколь угодно мало. Поэтому в дальнейшем, в силу непрерывности по t функций $\varphi_{x,l}^g(t)$, можно рассматривать последовательность башен τ_{n_ν, k_ν} , таких, что $\frac{k_\nu}{n_\nu} \rightarrow a$, считая, что x принадлежит $\tau_{n_\nu, k_\nu}(1)$. Описав множество всех возможных предельных функций в этом предположении, по теореме 3, мы опишем все возможные предельные функции для μ_a -п.в. x .

Обозначим через θ отображение, переводящее $x \in I$ в $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i} \in [0, 1]$, а через I_0 обозначим множество последовательностей $x \in I$, постоянных с некоторого места; через G обозначим множество двоично-рациональных чисел из $[0, 1]$. Отображение $\theta : I \setminus I_0 \rightarrow [0, 1] \setminus G$ является взаимно однозначным, оно задает изоморфизм динамических систем $(I, \mathcal{B}, P, \mu_a)$ и $([0, 1], \mathcal{B}, T, \lambda_a)$ (см. работы [30] и [3]), где автоморфизм T действует на точках $x \in [0, 1]$, представленных в диадическом разложении, согласно формуле (6). При этом мерам μ_a на I соответствуют меры λ_a на отрезке (в том числе, мере $\mu_{1/2}$ соответствует мера Лебега $\lambda_{1/2}$), а всякому цилиндру $[\omega_1, \dots, \omega_n]$ (этажу башни) соответствует стандартный диадический интервал, точки которого начинаются с $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ в диадическом разложении.

Рассмотрим цилиндрическую функцию $f \in \mathcal{F}_N$, $N < n$. Построим частичные суммы $F_{n,k}^f(\cdot) = S_{x \in \tau_n^k(1)}^f(\cdot)$, складывая значения, которые функция принимает на этажах башни, и полагая $F_{n,k}^f(0) = 0$:

$$F_{n,k}^f(i) = \sum_{j=1}^i f(\tau_{n,k}(j)), \quad 0 \leq i \leq \binom{n}{k}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Функция $F_{n,k}^f(\cdot)$ является целочисленной функцией с целочисленным аргументом. Для нецелочисленных аргументов доопределяем ее между узлами с помощью линейной интерполяции. Пример для башни $\tau_{4,2}$ и функции Радемахера (взятой с противоположным знаком) $-r_1(x) = (-1)^{x_1}$, $x \in I$, приведен в таблице и изображен на картинке ниже.

i	Башня $\tau_{4,2}$	$-r_1$	$F_{4,2}^{-r_1}(i)$
6	0011	-1	0
5	0101	-1	1
4	1001	1	2
3	0110	-1	1
2	1010	1	2
1	1100	1	1
0			0

Таблица 1: Значения $F_{4,2}^{-r_1}$ вдоль башни $\tau_{4,2}$

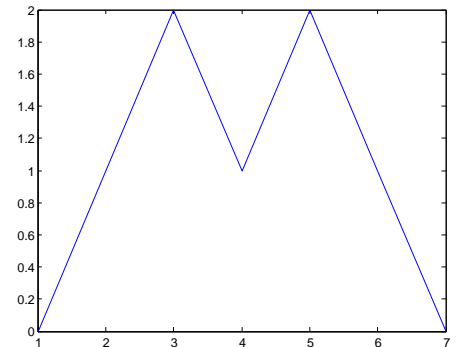


Рис. 1: График $F_{4,2}^{-r_1}$

Обозначим через $h_{N,k}^f$ сумму вдоль башни $\tau_{N,k}$:

$$h_{N,k}^f = F_{N,k}^f\left(\binom{N}{k}\right)$$

для $k = 0, \dots, N$.

Функцию g вида $f - f \circ T + C$, где $f \in L^\infty$, а C – некоторая константа, называют *когомологичной константе*.

Сформулируем основные результаты из работы [22] в наших обозначениях.

Теорема 4. ([22], лемма 2.2.) *Цилиндрическая функция $g \in \mathcal{F}_N$ когомологична константе тогда и только тогда, когда $h_{N,k} \propto \binom{N}{k}$ для $k \in \{0, \dots, N\}$.*

Теорема 5. ([22], теорема 2.4.) *Пусть g – цилиндрическая функция, принадлежащая \mathcal{F}_N . Тогда*

1. *Для μ_a -п.в. x предельная функция $\varphi_x^g \in C[0, 1]$ существует, то есть*

$$\varphi_{x, l_j(x)}^g \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \varphi_x^g,$$

тогда и только тогда, когда g не когомологична константе.

2. *Предельная функция $\varphi^g(t)$ полностью определяется своими значениями в a -рациональных точках вида a^i , $i \geq 1$.*

3. *Существование пределов $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_k(x)}^g(t_{i, k(x)}) = \varphi_x^g(a^i)$, где $t_{i, k(x)} = \frac{\binom{n_{k(x)} - i}{k(x) - i}}{\binom{n_{k(x)}}{k(x)}}$, для $i \geq 0$, вдоль стабилизирующей последовательности $l_k(x) = \binom{n_{k(x)}}{k(x)}$ влечет равномерную сходимость $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_k(x)}^g = \varphi_x^g$.*

В работе [22] показано, что предельная кривая $\varphi^g(t)$ принадлежит классу кривых, описываемых треугольными массивами $\nabla_a^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < a < 1$. Для нас наиболее важно то, что в случае $\varphi(a^i) = \frac{\partial^k p^i}{\partial p^k} \Big|_{p=a}$, $k \in \mathbb{N}$, данные кривые совпадают с кривыми T_a^k , см. теорему 8 ниже.

Теорема 6. ([22], теорема 2.5.) *Для цилиндрических функций $f \in \mathcal{F}_N$, удовлетворяющих условию $\text{cov}_{\mu_a}(f, \sum_{i=1}^N r_i) \neq 0$, предельной функцией является T_a^1 .*

Для $x \in \tau_{n,k}(1)$ обозначим через $\varphi_{n,k}^g$ функцию $\varphi_{x, \binom{n}{k}}^g$, а через $R_{n,k}^g$ соответствующий нормирующий коэффициент:

$$\varphi_{n,k}^g(t) = \frac{F_{n,k}^g(t \binom{n}{k}) - t \cdot F_{n,k}^g(\binom{n}{k})}{R_{n,k}^g}. \quad (9)$$

При доказательстве теоремы 5 авторами работы [22] было проверено, что для всякой последовательности $\{k_l\}_{l=1}^\infty$, такой, что $\frac{k_l}{n(k_l)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} a$, существуют подпоследовательности $\{k_{l_j}\}_{j=1}^\infty$, вдоль которых происходит стабилизация предельной кривой: $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n(k_{l_j}), k_{l_j}}^g \in C[0, 1]$. В настоящей работе в параграфе 4.3 мы установим точный вид предельной кривой вдоль каждой такой подпоследовательности, что дает ответ на первый вопрос.

3 Об одном классе самоподобных кривых

Цель данного параграфа – определить класс самоподобных функций T_a^k , $a \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$, и описать их свойства самоподобия.

3.1 Диадическая и обобщенная диадическая запись вещественного числа

Любое $x \in [0, 1]$ можно записать в диадическом виде $x = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k 2^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-m_n}$ для подходящей последовательности натуральных чисел $m_0 \leq m_1 \leq \dots \leq m_n \leq \dots$. Возьмем $a \in (0, 1)$. Всякое $y \in [0, 1]$ можно представить в виде:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_{k-1}} (1-a)^{s_{k-1}} = \frac{a}{1-a} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_k} (1-a)^{s_k}, \quad (10)$$

где $\omega_k \in \{0, 1\}$, $s_k = \sum_{j=1}^k \omega_j$ и (в первой формуле) $s_0 = 0$. Такую запись⁹ назовем *a-диадической*. Запись единственна для п.в. $y \in [0, 1]$, однако для *a-рациональных* точек (т.е. точек с $\omega_{l_0-1} = 0$, $\omega_k = 1$, $k \geq l_0$), как обычно, существует два представления: конечное и бесконечное. Мы выбираем конечное представление:

$$y = \sum_{k=1}^{l_0} \omega_k a^{k-s_{k-1}} (1-a)^{s_{k-1}}.$$

В дальнейшем нам иногда будет необходимо явно указывать точку, для которой мы пишем *a-диадическое* представление. В этих случаях для выбранной точки $y \in [0, 1]$ мы будем использовать обозначения $\omega_j(y)$ и $s_j(y)$, а также $l_0(y)$, если y *a-рационально*, вместо вышеупомянутых ω_j , s_j и l_0 .

Числа $y \in [0, 1]$, удовлетворяющие условию $\lim_j \frac{s_j(y)}{n} = 1-a$, называются *нормальными* числами; в частности, при $a = \frac{1}{2}$, нормальными числами по основанию 2.

Задающую *a-диадическое* число последовательность $(\omega_j(y))_{j=0}^{\infty}$, состоящую из нулей и единиц, удобно отождествлять с путем в графе Паскаля. Начальным отрезкам этой последовательности будут соответствовать *a-диадические* интервалы. Например, если $a = 1/2$, то $(\omega_1 \omega_2 \omega_3) = (101)$ соответствует обычному диадическому интервалу $[\frac{5}{8}, \frac{6}{8})$.

Замечание 1. Как было отмечено в [3], возможно задать другое представление автоморфизма Паскаля $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], T, \lambda_a)$, которое мы обозначим через $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], K_a, \lambda_{1/2})$, где соответствующей инвариантной мерой является мера Лебега $\lambda_{1/2}$, но автоморфизм K_a действует на *a-диадических* числах по формуле (6). Изоморфизмом является функция распределения L_a меры λ_a , о которой будет подробно рассказано в следующем пункте:

$$L_a \circ P = K_a \circ L_a$$

Аutomорфизм K_a рассматривался в работе [24] для доказательства равномерной распределённости деления отрезка по Какутани.

⁹Запись неявно использовалась многими авторами, например, S. Kakutani [24] рассматривал последовательности *a-диадических* интервалов, соответствующих этой записи. В работе [15] представление рассматривалось в несколько отличной форме: $y = \sum_0^{\infty} (1-a)^n a^{l_n}$ для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $l_0 \leq l_1 \leq \dots \leq l_n \leq \dots$ и называлось *обобщенным диадическим*.

3.2 Сингулярная функция Лебега и связанный с ней класс функций

Пусть параметры a и b принадлежат интервалу $(0, 1)$. Мы рассматриваем функции $S_{a,b}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, которые переводят число x , представленное в a -диадической записи в виде $x = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k a^{k-s_{k-1}}(1-a)^{s_{k-1}}$, в

$$S_{a,b}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k b^{k-s_{k-1}}(1-b)^{s_{k-1}}. \quad (11)$$

Функции $S_{a,b}(\cdot)$ были определены в [12], изучались в [14]. В частности, в работе [12] показано, что при $a \neq b$ функции являются сингулярными, непрерывными, возрастающими.

В частном случае $a = \frac{1}{2} \neq b$ получаем хорошо известную (см. работы [29] и [13]) функцию распределения меры λ_b , часто называемую *сингулярной функцией Лебега* или *сингулярной функцией де Рама*; см., например, [25] и [26]. Эту функцию часто обозначают $L_b(x)$. Нетрудно показать (см. [26]), что в двоично-рациональных точках вида $\frac{k}{2^l}$, $0 \leq k \leq 2^l - 1$, эта функция равна $\sum_{j=0}^{k-1} b^{j-s_2(j)}(1-b)^{s_2(j)}$, где $s_2(j)$ – сумма цифр в двоичном разложении натурального числа j . Это наблюдение позволило получить новые результаты в области (power/binomial)-sum-of-digits problems в [26]¹⁰ и большом количестве более ранних работ. Подробнее о связи с изучаемыми в данной работе эргодическими суммами смотри параграф 6 ниже. Справедливо соотношение $L_b \circ L_a^{-1} = S_{a,b}$.

В общем случае для всякой a -рациональной точки $x_0 = \sum_{j=1}^{l_0} \omega_j(x_0) a^j \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{j-1}(x_0)}$ и произвольного $x \in [0, 1]$ функция $S_{a,b}$ удовлетворяет следующему уравнению самоподобия:

$$S_{a,b}\left(x_0 + a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}(x_0)} x\right) = S_{a,b}(x_0) + b^{l_0} \left(\frac{1-b}{b}\right)^{s_{l_0}(x_0)} S_{a,b}(x). \quad (12)$$

Вывод формулы (12) приведен в приложении 7.1.1. Формула (12) означает, что график $S_{a,b}(x)$ на обобщенном диадическом интервале $[x_0, x_0 + a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}(x_0)}]$ является миниатюрной версией $S_{a,b}$, сжатой в $b^{l_0} \left(\frac{1-b}{b}\right)^{s_{l_0}(x_0)}$ раз по вертикали и в $a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}(x_0)}$ по горизонтали.

Другой способ задания функций $S_{a,b}(\cdot)$ – как решение системы уравнений де Рама. Согласно [17], система¹¹

$$\begin{cases} G(ax) = bG(x), \\ G(a + (1-a)x) = b + (1-b)G(x) \end{cases} \quad (13)$$

имеет единственное решение G^* , которое, как показано в [12], совпадает с $S_{a,b}$.

Из (13) легко получить следующие свойства $S_{a,b}$:

1. $S_{a,b} \circ S_{b,c} = S_{a,c}$,

¹⁰См. также несколько отличное изложение в [18].

¹¹Случай $a = \frac{1}{2}$ рассматривался самим де Рамом, см. [16].

2. $S_{a,b}^{-1} = S_{b,a}$,
3. $S_{a,b}(1-t) = 1 - S_{1-a,1-b}(t)$, $t \in [0, 1]$,

для произвольных $a, b, c \in (0, 1)$.

Класс $S_{a,b}(\cdot)$ позволяет определить новый класс функций¹² (см. [14])

$$T_a^k := \frac{\partial^k S_{a,b}}{\partial b^k} \Big|_{b=a}$$

При $a = 1/2$ и $k = 1$, т.е. для функции $\frac{1}{2}T_{1/2}^1$, ее график является знаменитой кривой Такаги, см. [31]. Функции T_a^k разделяют многие свойства функции Такаги. Например, см. [14], они являются нигде не дифференцируемыми функциями¹³.

Дифференцируя $S_{a,b}$ по параметру b и полагая b равным a , согласно (11), получаем явное представление для функции T_a^k :

$$T_a^k(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{\partial^k}{\partial b^k} ((1-b)^{s_j-1} b^{j-s_j+1}) \Big|_{b=a} = \quad (14)$$

$$= k! \sum_{j \geq 1} \omega_j \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{s_j-1}{i} \binom{j-s_j-1}{k-i} a^{j-k} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_j-1-i}, \quad (15)$$

где $x = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j a^{j-s_j-1} (1-a)^{s_j-1}$. Сходимость следует из равномерной суммируемости ряда в правой части.

Замечание 2. Функции $T_a^k(x)$ являются аналитическими функциями от a .

Для функций T_a^1 система уравнений де Рама принимает вид:

$$\begin{cases} T_a^1(ax) = a T_a^1(x) + x, \\ T_a^1(a + (1-a)x) = (1-a) T_a^1(x) + 1 - x. \end{cases} \quad (16)$$

Для T_a^k , где $k \geq 2$,

$$\begin{cases} T_a^k(ax) = a T_a^k(x) + k T_a^{k-1}(x), \\ T_a^k(a + (1-a)x) = (1-a) T_a^k(x) - k T_a^{k-1}(x). \end{cases} \quad (17)$$

Свойства самоподобия кривых T_a^k , $k \geq 1$, являются следствием самоподобия $S_{a,b}$ и устанавливаются, как доказано в следующей теореме¹⁴, дифференцированием равенства (12).

Теорема 7. Для всякого $k \geq 1$, для всякой a -рациональной точки $x_0 = \sum_{j=1}^{l_0} \omega_j(x_0) a^j \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{j-1}(x_0)}$ и произвольного $x \in [0, 1]$ функция T_a^k удовлетворяет функциональному соотношению

¹²Их также можно записать в виде $T_a^k = \frac{\partial^k L_b}{\partial b^k} \Big|_{b=a} \circ L_a^{-1}$.

¹³Это резко отличает их от, например, «похожих» функций $\frac{\partial^k S_{\frac{1}{2},b}}{\partial b^k} \Big|_{b=a}$, изучавшихся в [11]. Авторами [11] установлено, что функции п.в. дифференцируемы при $a \neq 1/2$, что кажется совершенно неожиданным результатом. В работе [25] описывалось множество точек, где $L_a(x)$ имеет нулевую производную, а также доказана дифференцируемость п.в. функции $(T_{1/2}^1 \circ L_a^{-1})(x)$ при $a < 1/2$.

¹⁴Частный случай $a = \frac{1}{2}$ доказан в [26], предложение 4.2.

$$T_a^k(x_0 + a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)} x) = T_a^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k c_\mu T_a^\mu(x), \quad (18)$$

где коэффициенты c_μ вычисляются по формуле

$$c_\mu = \binom{k}{\mu} \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial a^{k-\mu}} a^{l_0-1-s_{l_0-1}} (1-a)^{1+s_{l_0-1}} \quad (19)$$

и $T_a^0(x) \equiv x$.

Доказательство. Дифференцируем (12) по b и, полагая b равным a , получаем:

$$T_a^k(x_0 + rx) = T_a^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} T_a^\mu(x) \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial a^{k-\mu}} a^{l_0-1-s_{l_0-1}} (1-a)^{1+s_{l_0-1}}.$$

□

Формула (18) означает, что функция $T_a^k(x)$ на обобщенном диадическом интервале $[x_0, x_0 + \alpha_0]$, $\alpha_0 = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$, выражается через линейную комбинацию функций $\{T_a^j(x)\}_{j=1}$ и линейной функции $c_0 x$, которую естественно назвать трендом¹⁵. Для функции $\psi \in C[0, 1]$ определим новую функцию $\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c} \in C[0, 1]$ равенством

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c}(x) = \frac{1}{c} (\psi(x_0 + \alpha_0 x) - \psi(x_0) - x\psi(x_0 + \alpha_0)). \quad (20)$$

Функция $\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{\psi, c}$ получается из функции $\psi(x)$ сужением на a -диадический интервал с коррекцией на нормировку, константу и тренд.

Следствие 1. На обобщенном a -диадическом интервале $[x_0, x_0 + \alpha_0]$, где $\alpha_0(x_0) = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{1+s_{l_0-1}(x_0)}$, справедливы равенства:

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{T_a^1, C_0}(x) = T_a^1(x) \quad (21)$$

и

$$\Lambda_{x_0, \alpha_0}^{T_a^2, C_0}(x) = \gamma T_a^1(x) + T_a^2(x), \quad (22)$$

где $C_0 = a^{l_0} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0}}$, $\gamma = -\frac{2(s_{l_0}-l_0(1-a))}{a(1-a)}$.

Доказательство. На обобщенном a -диадическом интервале $[x_0, x_0 + \alpha_0]$ по теореме 7 для функции $T_a^1(x)$ выполнено:

$$T_a^1(x_0 + \alpha_0 x) = T_a^1(x_0) + C_1 x + C_0 T_a^1(x), \quad (23)$$

Для функции $T_a^2(x)$ выполнено:

$$T_a^2(x_0 + \alpha_0 x) = T_a^2(x_0) + C_2 x + C_0 (\gamma T_a^1(x) + T_a^2(x)), \quad (24)$$

где $C_\mu = \binom{2}{\mu} \frac{\partial^\mu}{\partial a^\mu} a^{l_0-s_{l_0}} (1-a)^{s_{l_0}}$, $\mu \in \{0, 1, 2\}$, $\gamma = -\frac{2(s_{l_0}-l_0(1-a))}{a(1-a)} = \frac{C_1}{C_0}$. □

¹⁵Ввиду того, что $T_a^\mu(0) = T_a^\mu(1) = 0$, $\mu \in \mathbb{N}$.

Таким образом, на таком интервале функция $T_a^1(x)$ с точностью до константы, тренда и нормировки совпадает с собой же. Для $T_a^2(x)$ это не так: необходимо привлекать линейные комбинации вида $\gamma T_a^1(x) + T_a^2(x)$.

Возникает естественный вопрос: верно ли, что всякий график линейной комбинации $\alpha T_a^1(x) + \beta T_a^2(x)$ является участком (с точностью до константы и тренда) графика $T_a^2(x)$? На этот вопрос отвечает следующее предложение:

Предложение 1. Пусть $a \in (0, 1)$. Всякую линейную комбинацию вида $\alpha T_a^1(x) + \beta T_a^2(x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, можно представить как предел в $C[0, 1]$ функций $\lim_{x_k \rightarrow z} \beta \Lambda_{x_k, c_k}^{T_a^2, c_k}$ для некоторой сходящейся последовательности a -рациональных чисел x_k и $c_k = a^{l_0(x_k) - s_{l_0(x_k)}}(1 - a)^{s_{l_0(x_k)}}$ тогда и только тогда, когда a – иррациональное число.

Доказательство. Положим γ равным $\frac{\alpha}{\beta}$. Согласно следствию 1, функция $\Lambda_{x_k, c_k}^{T_a^2, c_k}$, где $c_k = a^{l_0(x_k)} \left(\frac{1-a}{a}\right)^{s_{l_0(x_k)}}$, равна $\gamma(k)T_a^1(x) + T_a^2(x)$, где $\gamma(k) = -\frac{2(s_{l_0(x_k)} - l_0(x_k)(1-a))}{a(1-a)}$ для всякого a -рационального x_k . В силу того, что $a \in (0, 1)$, а траектории поворота окружности на иррациональный угол плотны, выражение вида $i - (1-a)j$, где $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, может приблизить произвольное $z \in \mathbb{R}$.

Поэтому мы можем выбрать x_k таким образом, чтобы $\gamma(k)$ стремилось по k к γ . Сходимость $\Lambda_{x_k, c_k}^{T_a^2, c_k}(x)$, очевидно, равномерна. В обратную сторону, если a – рационально, то числа $(i - j(1-a))$, где $i, j \in \mathbb{N}$, не плотны в \mathbb{R} , а значит найдется линейная комбинация функций $T_a^1(x)$ и $T_a^2(x)$, которая не может быть приближена функциями $\Lambda_{x_k, c_k}^{T_a^2, c_k}$. □

Упомянем также, что в базовой работе [22] авторы определили классы функций $\varphi_{\nabla_a^{(k)}} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Через ∇_a авторы [22] обозначили бесконечный треугольный массив пар чисел $(x_{i,j}, y_{i,j})$, $i \geq 0$, $0 \leq j \leq i$, удовлетворяющих системам равенств: $x_{i+1,j+1} = x_{i,j} - x_{i+1,j}$ и $y_{i+1,j+1} = y_{i,j} - y_{i+1,j}$, которые, при заданных «начальных значениях» $(x_{i,0}, y_{i,0})$, $i \geq 0$, определяют остальные пары $(x_{i,j}, y_{i,j})$, $i \geq 0$, $1 \leq j \leq i$.

В a -рациональных точках вида $x_{i,0} = a^i$ функции $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}(x_{i,0}) = y_{i,0} = i(i-1) \dots (i-k)a^{i-k-1}$, а в остальных a -рациональных точках t ранга $i+1$ с помощью равенств $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}(t + x_{i+1,j}) = \varphi_{\nabla_a^{(k)}}(t) + y_{i+1,j}$. Согласно лемме 3.1 из работы [22], данное определение на всюду плотном множестве a -рациональных точек позволяет определить самоподобные непрерывные функции на $[0, 1]$. В терминах работы [22] сформулируем следующее утверждение:

Теорема 8. При $k \in \mathbb{N}$ функции $\varphi_{\nabla_a^{(k)}}$ совпадают с функциями T_a^k .

Доказательство. Достаточно проверить, что 1) $T_a^k(x)$ сохраняет конкатенационную структуру массива ∇_a , и убедиться, что 2) значения в a -рациональных точках вида $x_{i,0}^{(k)} = a^i$ совпадают.

Для проверки 2) воспользуемся формулой (14) для $x = a^i$. Имеем:

$$\omega_j(x) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

$$T_a^k(a^i) = \frac{\partial^k}{\partial a^k} a^i = i(i-1) \dots (i-k)a^{i-k-1}.$$

Чтобы убедиться в справедливости утверждения 1), нужно проверить, что для $x_{i+1,j+1} = x_{i,j} - x_{i+1,j}$ выполнено $T_a^k(x_{i+1,j+1}) = T_a^k(x_{i,j}) - T_a^k(x_{i+1,j})$ при условии, что $x_{i,0} = a^i$. Сначала по индукции убеждаемся в том, что $x_{i,j} = a^{i-j}(1-a)^j$. Свойство $T_a^k(x_{i,j}) = T_a^k(x_{i+1,j+1}) + T_a^k(x_{i+1,j})$ можно проверить напрямую с помощью (14), но удобнее воспользоваться теоремой 7. В её обозначениях $x_0 = a^{i+1-j}(1-a)^j$, $x = 1$. \square

Графики функций $T_a^k(x)$ для некоторых значений параметров приведены в приложении 7.2.1. В данной работе нас особенно интересуют функции T_a^1, T_a^2 и их линейные комбинации $\alpha T_a^1 + \beta T_a^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, графики которых, как мы докажем, описывают все возможные предельные кривые для некогомологичных константе цилиндрических функций.

4 Основные результаты

4.1 Система базисных функций Уолша

Систему функций Радемахера $\{r_n(y)\}_1^\infty$ на I можно коротко определить следующим образом¹⁶:

$$r_n(y) := (-1)^{y_n}, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in I.$$

Напомним определение системы функций Уолша (в нумерации Пэли).

Определение 1. Полагаем $w_0(y) \equiv 1$. Число $t \in \mathbb{N}_0$ представим в виде $t = t_0 2^0 + t_1 2^1 + \dots + t_{N-1} 2^{N-1}$, где $t_i \in \{0, 1\}$. Положим

$$w_t(y) = \prod_{i=0}^{N-1} (r_{i+1}(y))^{t_i} = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y),$$

где r_i – i -ая функция Радемахера.

Функции Уолша-Пэли образуют группу характеров диадической группы \mathbf{Z}_2 и образуют ортонормированный базис в $L_{\mu_{1/2}}^2(I)$. Для функции $f \in L_{\mu_{1/2}}^2(I)$ обозначим через $S_n(f, y)$ частичные суммы ряда Фурье по системе Уолша-Пэли: $S_n(f, y) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_k(y)$, где $c_k = \int_0^1 f(y) w_k(y) dy$.

Система Уолша $\{w_t\}_{t=0}^\infty$ является полной ортонормированной системой в $L_{\mu_{1/2}}^2(I)$, а значит, и полной системой в $L_{\mu_a}^2(I)$. В нумерации Пэли первые 2^N функций Уолша образуют также базис в \mathcal{F}_N .

Предложение 2. Если $f \in \mathcal{F}_N$ и $k \geq 2^N$, то $S_k(f) \equiv f$.

Если $a \neq 1/2$, то система Уолша не будет ортогональной в $L_{\mu_a}^2[0, 1]$, но ее можно ортогонализировать, используя алгоритм Грама-Шмидта.

Как доказано в приложении 7.1.3, среднее функции Уолша по мере μ_a является суммой $m = s_2(t)$ базисных полиномов Бернштейна, взятых в точке $1-a$ с чередующимися знаками:

$$\mathbb{E}_{\mu_a} w_t = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} a^{m-l} (1-a)^l = (-1)^{s_2(t)} (1-2a)^{s_2(t)}. \quad (25)$$

¹⁶Наше определение задает функции Радемахера на группе \mathbf{Z}_2 , при отображении θ оно естественно соответствует классическому определению $r_n(y) = \text{sign}(\sin(2^n \pi y))$, $y \in [0, 1)$, $n \geq 1$ на $[0, 1)$.

Таким образом, среднее функции Уолша w_t зависит лишь от числа $m = \mathbf{s}_2(t)$ различных функций Радемахера, произведением которых она является. Зависимость различных интегральных характеристик функций Уолша w_t только от $\mathbf{s}_2(t)$ будет постоянно встречаться в дальнейшем.

Определим операцию \oplus на парах натуральных чисел в двоичной записи как сложение без переноса: для $i = \sum_{\mu=0}^{\infty} \xi_{\mu} 2^{\mu}$ и $j = \sum_{\mu=0}^{\infty} \zeta_{\mu} 2^{\mu}$, где $\zeta_{\mu}, \xi_{\mu} \in \{0, 1\}$, по определению,

$$i \oplus j = \sum_{\mu=0}^{\infty} \eta_{\mu} 2^{\mu}, \quad \eta_{\mu} = (\zeta_{\mu} + \xi_{\mu}) \bmod 2.$$

Очевидно, что $w_t w_s = w_{t \oplus s}$, (более того, функции Уолша-Пэли образуют группу характеров диадической группы \mathbf{Z}_2). Поэтому можно записать

$$\text{cov}_{\mu_a}(w_t, w_s) = \mathbb{E}_{\mu_a} w_{t \oplus s} - \mathbb{E}_{\mu_a} w_t \mathbb{E}_{\mu_a} w_s.$$

Обозначим через C $(t-1) \times (t-1)$ -матрицу ковариаций $c_{ij} = \text{cov}_{\mu_a}(w_i, w_j)$, $1 \leq i, j \leq t-1$, через H $(t-1)$ -мерный вектор-столбец $\text{cov}_{\mu_a}(w_t, w_j)$, $1 \leq j \leq t-1$, а через $W_{1:t-1}$ $(t-1)$ -мерную вектор-строку из функций Уолша w_1, \dots, w_{t-1} . В таком случае ортогонализованная относительно меры μ_a функция Уолша w_t^a задается формулой¹⁷

$$w_t^a = w_t - W_{1:t-1} C^{-1} H.$$

Покажем, что

$$w_t^a = \sum_{j=1}^t \left[\binom{t}{j} \bmod 2 \right] \cdot (1-2a)^{\mathbf{s}_2(t-j)} w_j. \quad (26)$$

Для этого достаточно проверить, что $\text{cov}_{\mu_a}(w_t^a, w_s) = 0$ для всех s , таких, что $0 < s < t$. Обозначим через α разность $2a - 1$, тогда $\mathbb{E}_{\mu_a} w_t = \alpha^{\mathbf{s}_2(t)}$, $t \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *Для натурального t и для всякого натурального $s < t$ выполнено соотношение*

$$\sum_{j=0}^t (-1)^{\mathbf{s}_2(t-j)} \left[\binom{t}{j} \bmod 2 \right] \alpha^{\mathbf{s}_2(t \oplus j) + \mathbf{s}_2(s \oplus j)} = 0. \quad (27)$$

Пользуясь леммой, для $0 < s < t$ получаем:

$$\begin{aligned} \text{cov}_{\mu_a}(w_t^a, w_s) &= \sum_{j=1}^t (-1)^{\mathbf{s}_2(t-j)} \left[\binom{t}{j} \bmod 2 \right] \{ \alpha^{\mathbf{s}_2(t \oplus j) + \mathbf{s}_2(s \oplus j)} - \alpha^{\mathbf{s}_2(t) + \mathbf{s}_2(s)} \} = \\ &= \sum_{j=0}^t (-1)^{\mathbf{s}_2(t-j)} \left[\binom{t}{j} \bmod 2 \right] \{ \alpha^{\mathbf{s}_2(t \oplus j) + \mathbf{s}_2(s \oplus j)} \} = 0. \end{aligned}$$

Для функции из $f \in L_{\mu_a}^2[0, 1]$ обозначим через $S_k^a(f)$ k -ую частичную сумму ее ряда Фурье $\sum_{t=0}^{\infty} c_t w_t^a$ по ортогонализованной системе Уолша $\{w_t^a\}_{t=0}^{\infty}$.

¹⁷В формуле легко узнать известное выражение $Y - X(X^T X)^{-1} X^T Y$ остатков метода наименьших квадратов

Замечание 3. Начальный отрезок ряда Фурье $S_{2^N}^a(f) = \sum_{t=0}^{2^N} c_t w_t^a$ может рассматриваться как условное ожидание $\mathbb{E}_{\mu_a}(f|\mathcal{F}_N)$ для функции $f \in L_{\mu_a}^2[0, 1]$.

Как отмечалось выше, интегральные характеристики функции Уолша w_t (а значит и функций w_t^a) зависят лишь от числа $m = \mathbf{s}_2(t)$ различных функций Радемахера, произведением которых она является.

Определим d_m как сумму коэффициентов в формуле ортогонализации (26) при функциях Уолша w_t , являющихся произведением m различных функций Радемахера:

$$d_m = \sum_{1 \leq j \leq t, \mathbf{s}_2(j)=m} \left[\binom{t}{j} \bmod 2 \right] \cdot (1 - 2a)^{\mathbf{s}_2(t-j)} = \binom{\mathbf{s}_2(t)}{m} (1 - 2a)^{\mathbf{s}_2(t)-m}. \quad (28)$$

4.2 Явная формула для эргодических сумм

В этом пункте будет получена явная формула для эргодической сумм функции w_t^a , $t \in \mathbb{N}$.

4.2.1 Биномиальное разложение натурального числа

Пусть $k \in \mathbb{N}$; для любого $i \in \mathbb{N}$ существуют и единственны¹⁸ целые числа $a_k > a_{k-1} > \dots > a_{k-s} \geq 0$, такие, что $i = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_{k-s}}{k-s}$. Такое представление натурального числа называют биномиальным разложением, или k -каскадом (см., например, [23], главу 10.4). Определим функцию¹⁹ $\partial_k^{N,j}(\cdot)$ на натуральных числах равенством

$$\partial_k^{N,j}(i) = \binom{a_k - N}{k - j} + \binom{a_{k-1} - N}{k - 1 - j} + \dots + \binom{a_{k-s} - N}{k - s - j}.$$

Если натуральное i рассматривать как номер пути $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ в графе Паскаля, ведущего из вершины $(0, 0)$ в вершину (n, k) (см. таблицу 1), то $\partial_k^{N,j}(i)$ – число путей, начинающихся в вершине (N, j) и не превосходящих пути ω относительно обратного лексикографического порядка.

4.2.2 Явная формула для эргодических сумм функций Уолша

Для произвольной функции Уолша $w_t = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y)$ обозначим через m сумму $\mathbf{s}_2(t) = \sum_{i=0}^{N-1} t_i$. Тогда для любого натурального аргумента $i = \binom{a_k}{k_1} + \dots + \binom{a_1}{1}$, удовлетворяющего условию $a_1 \geq N$, выполнено:

$$F_{n,k}^{w_t}(i) = \sum_{j=0}^N h_{N,j}^{w_t} \partial_k^{N,j}(i), \quad 0 \leq i \leq \binom{n}{k}, \quad (29)$$

¹⁸В существовании легко убедиться, используя «жадный алгоритм»: возьмем a_k максимальным натуральным, таким, что $x \geq \binom{a}{k}$; на следующем шаге заменим x на $x - \binom{a}{k}$, а k на $k - 1$ и будем продолжать, пока не получим ноль. Единственность проверяется по индукции.

¹⁹Выбор обозначения связан с тем, что через $\partial^l(A)$ обозначают l -тьнь множества $A \subset \{0, 1\}^n$, т.е. множество всех векторов, получающихся из элементов A заменой l единиц на нули. Если A k -регулярно (т.е. каждый вектор из A содержит ровно k единиц), то согласно теореме Крускала-Катоны $|\partial^l(A)| \geq \partial^{0,l}(|A|)$, см., например, [23], а также [8].

где множитель $h_{N,j}^{w_t}$ равен $\binom{N}{j} \left[2 \cdot \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \frac{\binom{N-j}{2l} \binom{j}{m-2l}}{\binom{N}{m}} - 1 \right]$ и совпадает с интегралом функции w_t вдоль башни $\tau_{N,j}$. Заметим, что $F_{n,k}^{w_t}(i)$ не зависит от t , а только лишь от $m = s_2(t)$. С точки зрения динамики, это означает, что эргодические суммы $S_x^{w_{t_1}}(i)$ и $S_x^{w_{t_2}}(i)$ для функций Уолша w_{t_1} и w_{t_2} , являющихся произведением одинакового количества функций Радемахера, совпадают во всех точках $i = \binom{a_k}{k_1} + \dots + \binom{a_1}{1}$, для которых $a_1 \geq N$, см. рис. 2 и рис. 3 в пункте 7.2.2. Следовательно, достаточно установить предельные кривые для функций Уолша вида $w_{(2^m-1)} = \prod_{i=0}^{m-1} r_{i+1}$, $m \in \mathbb{N}$. Для них формула (29) принимает особо простой вид:

$$F_{n,k}^{w_{t_m}}(i) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \partial_k^{m,j}(i), \quad t_m = 2^m - 1. \quad (30)$$

Доказательство формулы (29) приведено в приложении 7.1.4.

Если вместо системы функций $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$ рассматривать ортогональную систему $\{w_t^a\}_{t=0}^{\infty}$, то, согласно (28), соответствующие эргодические суммы будут выглядеть так:

$$F_{n,k}^{w_{t_m}^a}(i) = \sum_{\mu=0}^m d_{\mu} F_{n,k}^{w_{t_m}^{\mu}}(i), \quad t_l = 2^l - 1, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (31)$$

где коэффициенты $d_{\mu} = \binom{m}{\mu} (1 - 2a)^{m-\mu}$, $\mu \in \mathbb{N}$.

Если ограничиться только аргументами вида $x_{i,k,n} = \binom{n-i}{k-i}$, то формулу (31) можно записать в виде

$$F_{n,k}^{w_{t_m}^a}(x_{i,k,n}) = S_{n-i,k-i}^{a,m} \cdot \binom{n-i}{k-i}, \quad (32)$$

где через $S_{n,k}^{a,m}$ обозначено выражение

$$\sum_{\mu=1}^m d_{\mu} \sum_{j=0}^{\mu} (-1)^{\mu-j} \binom{\mu}{j} \frac{(k)_j (n-k)_{\mu-j}}{(n)_{\mu}},$$

и где $d_{\mu} = \binom{m}{\mu} (1 - 2a)^{m-\mu}$, а через $(s)_j$ обозначена падающая степень $s(s-1)\dots(s-j+1)$.

Предположим, что a рационально. Пусть для подпоследовательности k_r выполнено: $n_r = k_r/a \in \mathbb{N}$. Можно показать, что асимптотика последовательности $S_{n_r-i,k_r-i}^{a,m}$ при $r \rightarrow \infty$ описывается следующей леммой, обобщающей лемму 1 из [9]. Лемма, в частном случае $a = 1/2$, доказана в [9] и проверена при всех $m \leq 10$ в общем случае.

Лемма 2. Пусть $m \geq 1$, $i \geq 0$ фиксированные целые; $k_r \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \infty$. Тогда

$$S_{n_r-i,k_r-i}^{a,m} = \begin{cases} C_l(2l+1)(1-a) \left[2ai - \frac{2l(2a-1)a}{3(1-a)} \right] + O\left(\frac{1}{k_r^{l+2}}\right), & m = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ C_l(D_{l,k_r} + l((1-a)i(i-1) + \frac{2}{3}(1-2a)(2l+1)i)) + O\left(\frac{1}{k_r^{l+2}}\right), & m = 2l, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где коэффициент C_l равен $\frac{(-1)^{l+1}(2l-1)!!(1-a)^l(2a)^{2l}}{k_r^{l+1}}$, а $D_{l,k_r} = -(k_r + l^2 a + \frac{l(l-1)(4l+1)}{9} \frac{(2a-1)^2}{a-1})$.

Эргодическая сумма после вычитания тренда запишется в виде

$$F_{n,k}^{w_{t_m}^a}(x_{i,k,n}) - \frac{x_{i,k,n}}{\binom{n}{k}} F_{n,k}^{w_{t_m}^a}(\binom{n}{k}) = \left(S_{n-i,k-i}^{a,m} - S_{n,k}^{a,m} \right) \cdot \binom{n-i}{k-i}. \quad (33)$$

После этого, см. формулу (9), остается рассмотреть ее как функцию аргумента $t_{i,k,n} = \frac{x_{i,k,n}}{\binom{n}{k}} \in [0, 1]$ и поделить на подходящий нормирующий множитель $R_{n,k}^{w_t^a}$:

$$\varphi_{n,k}^{w_t^a}(t_{i,k,n}) = \frac{F_{n,k}^{w_t^a}(t_{i,k,n} \binom{n}{k}) - t_{i,k,n} \cdot F_{n,k}^{w_t^a}(\binom{n}{k})}{R_{n,k}^{w_t^a}}. \quad (34)$$

4.3 Предельные кривые

В силу теоремы 5 и формулы (34) для некогомологичной константе цилиндрической функции g , принадлежащей \mathcal{F}_N , равномерный предел $\varphi_x^g = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n(x)}^g$ существует и полностью определяется (числовыми) пределами $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{n_{k\nu}, k_{\nu}}^g(t_{i,k\nu, n_{\nu}})$, где $t_{i,k\nu, n_{\nu}} = \frac{\binom{n_{k\nu}-i}{k_{\nu}-i}}{\binom{n_{k\nu}}{k_{\nu}}}$, $i \geq 1$, вдоль стабилизирующей последовательности $l_{\nu}(x) = \binom{n_{k\nu}}{k_{\nu}}$, где $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{k_{\nu}}{n_{k\nu}} = a$.

Рассмотрим сначала случай рационального a и последовательности $\tilde{n}_{\nu} = \tilde{k}_{\nu}/a$ (индекс ν для краткости мы иногда опускаем). Из леммы 2 легко получить выражения, описывающие суммы (33) (с точностью до сомножителя $\binom{n-i}{k-i}$).

Предложение 3. Пусть $m \geq 1$, $i \geq 1$ – фиксированные целые; $k \rightarrow \infty$.

$$S_{\tilde{n}-i, \tilde{k}-i}^m - S_{\tilde{n}, \tilde{k}}^m = \begin{cases} C_{l, \tilde{k}}(2l+1)(1-a)i + O(\frac{1}{\tilde{k}^{l+2}}), & \text{если } m = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ C_{l, \tilde{k}}l((1-a)i(i-1) + \frac{2}{3}(1-2a)(2l+1)i) + O(\frac{1}{\tilde{k}^{l+2}}), & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где коэффициент $C_{l,k}$ равен $\frac{(-1)^{l+1}(2l-1)!!(1-a)^l(2a)^{2l}}{k^{l+1}}$.

Как следствие, получаем, что при $x \in \tau_{\tilde{n}_{\nu}, \tilde{k}_{\nu}}(1)$ предельные формы $\varphi_x^{w_t}$ для функции Уолша w_t , $\mathbf{s}_2(t) = m$, с точностью до знака, только две: кривые T_a^1 (в случае $m = 2l+1$) и $\frac{2}{3}(1-2a)(2l+1)\frac{a}{(1-a)}T_a^1 + T_a^2$ (в случае $m = 2l$). Более того, легко получить эквивалентные выражения для нормирующих коэффициентов.

Следствие 2. 1. Пусть $y \in [0, 1]$, $m = \mathbf{s}_2(t)$. Положим $q_{a,l}$ равным $\frac{2}{3} \frac{(1-2a)(2l+1)a}{(1-a)}$. Имеет место поточечная сходимость:

$$\varphi_{\tilde{n}_{\nu}, \tilde{k}_{\nu}}^{w_t^a}(y) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} \cdot \begin{cases} T_a^1(y), & \text{если } \mathbf{s}_2(t) = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ q_{a,l} T_a^1(y) + T_a^2(y), & \text{если } \mathbf{s}_2(t) = 2l, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

При этом нормирующий коэффициент $R_{\tilde{n}_{\nu}, \tilde{k}_{\nu}}^{w_t}$ пропорционален²⁰ $(\tilde{k}_{\nu}^{-1-[m/2]} + O(\tilde{k}_{\nu}^{-2-[m/2]})) \binom{\tilde{n}_{\nu}}{\tilde{k}_{\nu}}$.

2. Сходимость также имеет место в $C[0, 1]$.

Доказательство. Согласно формуле (33)

$$\frac{F_{\tilde{n}_{\nu}, \tilde{k}_{\nu}}^{w_t^a}(t_{i, \tilde{k}_{\nu}, \tilde{n}_{\nu}}(\frac{\tilde{n}_{\nu}}{\tilde{k}_{\nu}})) - t_{i, \tilde{k}_{\nu}, \tilde{n}_{\nu}} \cdot F_{\tilde{n}_{\nu}, \tilde{k}_{\nu}}^{w_t^a}(\frac{\tilde{n}_{\nu}}{\tilde{k}_{\nu}})}{\binom{\tilde{n}_{\nu}}{\tilde{k}_{\nu}}} = \left(S_{\tilde{n}_{\nu}-i, \tilde{k}_{\nu}-i}^{a,m} - S_{\tilde{n}_{\nu}, \tilde{k}_{\nu}}^{a,m} \right) \cdot \frac{\binom{\tilde{n}_{\nu}-i}{\tilde{k}_{\nu}-i}}{\binom{\tilde{n}_{\nu}}{\tilde{k}_{\nu}}}.$$

²⁰Через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.

Предел для первого сомножителя вычислен в предложении 3 выше, второй стремится при \tilde{k}_ν , стремящемся к бесконечности к a^i . Из теорем 5 и 8 следует, что

$$\lim_{\tilde{k}_\nu \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}(t_{i, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}) = (-1)^{l+1} \begin{cases} -ia^{i-1}, & \text{если } m = 2l + 1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ q_{a,l} ia^{i-1} + i(i-1)a^{i-2}, & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а соответствующий нормирующий коэффициент $R_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t}$ эквивалентен

$$\left(\frac{\tilde{n}_\nu}{\tilde{k}_\nu} \right) \cdot \begin{cases} a(1-a)(2l+1)|C_l|, & \text{если } m = 2l + 1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ a^2(1-a)l|C_l|, & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (35)$$

где коэффициент C_l введен в предложении 3. Таким образом, $R_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t} / \left(\frac{\tilde{n}_\nu}{\tilde{k}_\nu} \right)$ имеет порядок $\tilde{k}_\nu^{-1-[m/2]}$. Согласно теореме 5, сходимость в точках $t_{i, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu} = \frac{\binom{\tilde{n}_\nu - i}{\tilde{k}_\nu - i}}{\binom{\tilde{n}_\nu}{\tilde{k}_\nu}}$ влечет равномерную сходимость. \square

Ослабим предположение о том, что $n_\nu = k_\nu/a \in \mathbb{N}$, однако будем по-прежнему предполагать, что a рационально. Не умоляя общности, считаем, что согласно теореме 5 уже выбрана последовательность k_ν , такая, что $\frac{k_\nu}{n_{k_\nu}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} a$, и предельная форма $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{n_{k_\nu}, k_\nu}^{w_t^a}$ существует. Тогда существует последовательность j_ν , такая, что $\tilde{k}_\nu = k_\nu + j_\nu$ и $\tilde{n}_\nu = n_\nu + |j_\nu|$, обладающая свойством $\frac{\tilde{k}_\nu}{\tilde{n}_\nu} = a$. На графе Паскаля последовательность j_ν задает длину кратчайшего пути из (n_ν, k_ν) в нижерасположенную вершину $(\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu)$, лежащую в точности на луче $\frac{\tilde{k}_\nu}{\tilde{n}_\nu} = a$. Положим θ_x равным (быть может, бесконечному) пределу $\lim_{\nu \rightarrow \infty} j_\nu$. Для μ_a -п.в. x этот предел бесконечен. Пусть $j_\nu > 0$. Очевидно, что значения w_t^a на башне $\tau_{n_{k_\nu}, k_\nu}$ полностью совпадают с первыми $\binom{n_{k_\nu}}{k_\nu}$ значениями w_t^a на центральной башне $\tau_{\tilde{n}_{k_\nu}, \tilde{k}_\nu}$, поэтому совпадают и интегралы:

$$F_{n_\nu, k_\nu}^{w_t^a}(i) = F_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}(i), \quad 0 \leq i \leq \binom{n_\nu}{k_\nu}.$$

Обозначим через ρ_ν отношение нормирующих коэффициентов $\frac{R_{n_\nu, k_\nu}^{w_t^a}}{R_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}}$. Тогда после замены времени и корректировки нормировки получаем (см. формулу (20)), что на $[0, 1]$ две непрерывные функции совпадают:

$$\varphi_{n_{k_\nu}, k_\nu}^{w_t^a} = \Lambda_{0, t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu}$$

Аналогично, если $j_\nu < 0$, то значения w_t^a на башне $\tau_{n_{k_\nu}, k_\nu}$ полностью совпадают с последними $\binom{n_{k_\nu}}{k_\nu}$ значениями w_t^a на центральной башне $\tau_{\tilde{n}_{k_\nu}, \tilde{k}_\nu}$. Это приводит нас к равенству

$$\varphi_{n_{k_\nu}, k_\nu}^{w_t^a} = \Lambda_{(1-t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}), t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu}.$$

Согласно следствию 2 выше,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t} = \begin{cases} (-1)^l T_a^1, & \text{если } \mathbf{s}_2(t) = 2l + 1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ (-1)^l (q_{a,l} T_a^1 + T_a^2), & \text{если } \mathbf{s}_2(t) = 2l, l \in \mathbb{N}, q_{a,l} = \frac{2}{3} \frac{a(1-2a)(2l+1)}{(1-a)}. \end{cases}$$

Поэтому $\varphi_{n_{k_\nu}, k_\nu}^{w_t^a}$ должны стремиться к перенормированным участкам кривых T_a^1 и $q_{a,l} T_a^1 + T_a^2$, что, согласно следствию 1, представляется в виде линейных комбинаций T_a^1 и T_a^2 . Уточним коэффициенты в этих линейных комбинациях. Как отмечено выше, возможны два случая: $|\theta_x| < \infty$ и $|\theta_x| = \infty$.

В первом случае ($|\theta_x| < \infty$), учитывая, что (k_ν, n_ν) уже были выбраны таким образом, чтобы существовала предельная кривая, последовательность $t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}$ стремится к a^{θ_x} , а значит, интервал $[0, t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}]$ сходится к a -диадическому интервалу $[0, a^{\theta_x}]$, интервал $[1 - t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}, 1]$ сходится к диадическому интервалу $[1 - (1 - a)^{|\theta_x|}, 1]$, а ρ_ν к ρ_{θ_x} . Согласно следствию 1, перенормированные участки графика T_a^1 совпадают с T_a^1 . Поэтому при $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, согласно (23) имеем:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{0, t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{(1-t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}), t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu} = (-1)^{l+1} T_a^1.$$

При $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, согласно (24), имеем:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{0, t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} \left(\left(\frac{2j_\nu}{a} + q_{a,l} \right) T_a^1 + T_a^2 \right) = (-1)^{l+1} \left(\left(\frac{2\theta_x}{a} + q_{a,l} \right) T_a^1 + T_a^2 \right).$$

Аналогично,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{(1-t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}), t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu} = (-1)^{l+1} \left(\left(\frac{2\theta_x}{1-a} + q_{a,l} \right) T_a^1 + T_a^2 \right).$$

Во втором случае $|\theta_x| = \infty$ (и вновь, учитывая, что (k_ν, n_ν) уже были выбраны с таким образом, чтобы существовала предельная кривая) предельными кривыми могут быть лишь $\pm T_a^1$. Действительно, при $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, согласно (23), вновь имеем:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{0, t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{(1-t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}), t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu} = (-1)^{l+1} T_a^1.$$

А при $m = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, согласно тождеству (24), имеем:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{0, t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu} = (-1)^{l+1} T_a^1, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{(1-t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}), t_{j_\nu, \tilde{k}_\nu, \tilde{n}_\nu}}^{\varphi_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}, \rho_\nu} = (-1)^{l+2} T_a^1.$$

Нормирующий коэффициент $R_{n_\nu, k_\nu}^{w_t^a}$ равен $\rho_\nu R_{\tilde{n}_\nu, \tilde{k}_\nu}^{w_t^a}$, что пропорционально

$$\begin{pmatrix} \tilde{n}_\nu \\ \tilde{k}_\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{cases} a(1-a)(2l+1)C_{l, \tilde{k}_\nu} + o(\tilde{k}_\nu^{-2-[m/2]}), & \text{если } m = 2l + 1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ a(1-a)lC_{l, \tilde{k}_\nu}(1 + q_{a,l} + j_\nu) + o(\tilde{k}_\nu^{-2-[m/2]}), & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а коэффициент $C_{l,k} = O(k^{l-1})$ введен в предложении 3.

Таким образом, для рациональных $a \in (0, 1)$ доказано следующее предложение.

Предложение 4. Пусть для функции $g = w_t^a$ и точки $x \in I$ выбраны последовательности n_ν, k_ν, j_ν , $m = \mathbf{s}_2(t)$, $q_{a,l} = \frac{2}{3} \frac{a(1-2a)(2l+1)}{(1-a)}$ и $\theta_x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} j_\nu$.

1. Для $y \in [0, 1]$ имеют место поточечные сходимости:

$$(a) \text{ Если } \mathbf{s}_2(t) = 2l + 1, l \in \mathbb{Z}_+, \text{ то } \varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t^a}(y) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} T_a^1(y).$$

(b) Если $s_2(t) = 2l$, $l \in \mathbb{N}$ и $|\theta_x| = \infty$, то $\varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(y) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} T_a^1(y)$.

(c) Если $s_2(t) = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, при $0 < \theta_x < +\infty$ выполнено:

$$\varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(y) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} \left(\left(\frac{2\theta_x}{a} + q_{a,l} \right) T_a^1(y) + T_a^2(y) \right),$$

а при $-\infty < \theta_x < 0$, выполнено:

$$\varphi_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}(y) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} (-1)^{l+1} \left(\left(\frac{2\theta_x}{1-a} + q_{a,l} \right) T_a^1(y) + T_a^2(y) \right).$$

При этом нормирующий коэффициент $R_{n_\nu, k_\nu}^{w_t}$ равен²¹

$$c_{m,\nu} \binom{n_\nu}{k_\nu} (k^{-1-[m/2]} + o(k^{-2-[m/2]})),$$

$$\text{где } c_{m,\nu} = \begin{cases} (2l+1)!! a(1-a)^{l+1} (2a)^{2l}, & \text{если } m = 2l+1, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ l(2l-1)!! a^2(1-a)^{l+1} (2a)^{2l} (1+q_{a,l}+j_\nu), & \text{если } m = 2l, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Сходимость также имеет место в $C[0, 1]$.

В силу того, что функции T_a^k , $k \in \mathbb{N}$, аналитичны по a , а предложение 4 доказано для всех рациональных a , оно справедливо и для всех $a \in (0, 1)$.

Замечание 4. Можно показать, что в работе [22] в качестве примера функций, для которых вдоль последовательности $(2k, k)$ предельной кривой оказывалась $T_{1/2}^2$, рассматривались функции, совпадающие с функциями Уолша $\pm w_{2^m-1}$, $m \geq 2$. Однако не было замечено, что эти функции задают все возможные предельные кривые для **базисных** функций $\{w_t\}_{t \geq 1}$. Также не была найдена общая асимптотика при произвольном $m \in \mathbb{N}$ и не было показано, что предельными функциями для них являются функции $T_{1/2}^1$ и $T_{1/2}^2$ (что было, однако, предположено на основе нескольких расчетов асимптотики для случаев, когда $2 \leq m \leq 7$.)

Докажем теперь теорему 1, объявленную выше.

Теорема 1. Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой (I, \mathcal{B}, μ_a) , $N \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{F}_N$ – некогомологичная константе цилиндрическая функция. Тогда

1. Для μ_a -н.в. x предельной функцией является $\alpha_{g,x} T_a^1$, где $\alpha_{g,x} = \pm 1$.

2. Для всякого $x \in I$, удовлетворяющего условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(x)}{n_{k(x)}} = a$, предельная функция существует: найдутся вещественные числа $\alpha_{g,x}$, $\beta_{g,x}$, такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{x, l_n(x)}^g = \alpha_{g,x} T_a^1 + \beta_{g,x} T_a^2 \in C[0, 1].$$

Доказательство. 1. Согласно теореме 5, для x , удовлетворяющего условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(x)}{n_{k(x)}} = a$, найдется последовательность (n_ν, k_ν) , такая, что предельная кривая существует. Выберем, как и выше, последовательность j_ν , такую, что $\tilde{k}_\nu = k_\nu + j_\nu$, $\tilde{n}_\nu = n_\nu + |j_\nu|$ и положим θ_x равным $\lim_{\nu \rightarrow \infty} j_\nu$. Будем предполагать, что $|\theta_x| = \infty$ (что

²¹через $[\cdot]$ обозначена целая часть числа

выполнено для п.в. x). Будем считать ниже, что ν уже выбрано достаточно большим. Произвольную цилиндрическую функцию $g \in \mathcal{F}_N$ можно разложить в сумму Фурье по ортогональной системе w_t^a :

$$g(y) = \sum_{t=0}^{2^N-1} c_t w_t^a(y) = \sum_{m=0}^N \sigma_m^g,$$

где через σ_m^g обозначена сумма $\sum_{t: s_2(t)=m} c_t w_t^a$. Если $\sum_{t: s_2(t)=m} c_t \equiv \text{cov}_{\mu_a}(g, \sigma_m^g) \neq 0$, то, в силу зависимости предельной кривой для функции w_t^a лишь от числа $s_2(t)$, предельные функции $\varphi_{x, l_n(x)}^{\sigma_m^g}$ и $\varphi_{x, l_n(x)}^{w_t^a}$ совпадают. В противном случае функция σ_m^g когомологична константе²², предельной кривой для нее не существует, а нормирующий коэффициент $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$ ограничен.

Меняя порядок суммирования в эргодической сумме, видим, что $F_{n_\nu, k_\nu}^g = \sum_{m=0}^N F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$, а значит допредельная функция $\varphi_{n_\nu, k_\nu}^g(t_{i, k_\nu, n_\nu})$ задается суммой

$$\sum_{m=1}^N \frac{F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}(t_{i, k_\nu, n_\nu} \binom{n_\nu}{k_\nu}) - t_{i, k_\nu, n_\nu} \cdot F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}(\binom{n_\nu}{k_\nu})}{R_{n_\nu, k_\nu}^g},$$

где $R_{n_\nu, k_\nu}^g = \max_{1 \leq m \leq N} R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$.

Пусть m^* – минимальное натуральное число, такое, что $\sum_{t: s_2(t)=m^*} c_t \neq 0$. Если m^* нечетное, то, согласно пункту (а) предложения 4, $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_{m^*}^g} = \max_{1 \leq m \leq N} R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$ и предельной функцией оказывается $\alpha_g T_a^1$, где $\alpha_g = -\text{sign} \sum_{t: s_2(t)=m^*} c_t$. Если m^* четное, то, согласно пункту (b) предложения 4, $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_{m^*}^g} = \max_{1 \leq m \leq N} R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}$ (в силу нашего предположения, случай (c) исключен) и предельной функцией оказывается $\alpha_{g,x} T_a^1$, где $\alpha_{g,x} = \text{sign} \gamma_x \cdot \text{sign} \sum_{t: s_2(t)=m^*} c_t$.

2. Рассмотрим теперь случай $|\theta_x| < \infty$. Так как нормирующий коэффициент $R_{n_\nu, k_\nu}^{w_t^a}$ имеет вида $c_{m,\nu} \binom{n_\nu}{k_\nu} (k_\nu^{-1-[m/2]} + o(k_\nu^{-2-[m/2]}))$, где $k_\nu^{-1-[m/2]}$ нестрого убывает по m , а $c_{m,\nu} = o(k_\nu)$, то предельная функция для g полностью определяется взвешенной суммой предельных функций, соответствующих $\sigma_{m_1}^g$ и $\sigma_{m_2}^g$, где m_1 и m_2 – натуральные числа, такие что $m_1 = 2l$, $m_2 = 2l + 1$ для некоторого натурального l и $\sum_{t: s_2(t)=m_i} c_t \equiv \text{cov}_{\mu_a}(g, \sigma_{m_i}^g) \neq 0$, $i \in \{1, 2\}$ для хотя бы для одного i . Согласно пунктам (а) и (с) предложения 4, предельной функцией является сумма $\alpha_{g,x} T_a^1 + \beta_{g,x} T_a^2$. Отношение $\frac{\alpha_{g,x}}{\beta_{g,x}}$ равно $\frac{2l}{2l+1} \frac{\text{cov}_{\mu_a}(g, \sigma_{m_2}^g)}{\text{cov}_{\mu_a}(g, \sigma_{m_1}^g)} + q_{a,l} + \frac{2\theta_x}{a}$, если $\theta_x > 0$, и $\frac{2l}{2l+1} \frac{\text{cov}_{\mu_a}(g, \sigma_{m_2}^g)}{\text{cov}_{\mu_a}(g, \sigma_{m_1}^g)} + q_{a,l} + \frac{2\theta_x}{1-a}$, в противном случае. □

В процессе доказательства мы также установили следующий результат:

²²Это следует, например, из теоремы 4, так как коэффициенты $h_{m,j}^{\sigma_m^g}$, $0 \leq j \leq m$ нулевые.

Предложение 5. Цилиндрическая функция g , принадлежащая \mathcal{F}_N , когомологична константе тогда и только тогда, когда для всякого m , $1 \leq m \leq N$,

$$\text{cov}_{\mu_a}(g, \sum_{t: s_2(t)=m} w_t) = 0.$$

Замечание 5. Согласно теореме 1, предельной функцией могут быть произвольные линейные комбинации $\alpha T_a^1 + \beta T_a^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. При иррациональных a , перенормированные участки $\Lambda_{x_k, c_k}^{T_a^2, c_k}$ кривой T_a^2 приближают всякую такую комбинацию, см. предложение 1 выше, однако это неверно при $a = \frac{1}{2}$ (что являлось гипотезой в [22]).

4.4 Случай нецилиндрической функции.

Цель данного раздела – дать ответ на вопрос 2.

Через $S_n^a(g, y) = \sum_{k=0}^n c_k w_k^a(y)$ мы обозначаем частичную сумму ряда Фурье функции g по системе $\{w_t^a\}_{t=0}^\infty$ для функции g , а через $B_n(g)$ остаток:

$$B_n(g) = \sum_{k=n+1}^\infty |c_k|.$$

Мы предполагаем, что $B_n(g)$ убывает суперэкспоненциально:

$$B_n = o(2^{-n}), \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

В частности, ряд Фурье сходится абсолютно. Если $g \in C_\rho(I)$, то частичные суммы $S_n^a(g, y)$ сходятся к g равномерно²³.

Докажем теперь теорему 2, объявленную во введении. Сформулируем её в виде двух пунктов, аналогично теореме 1:

Теорема 2. Пусть P – автоморфизм Паскаля пространства с мерой (I, \mathcal{B}, μ_a) , $N \in \mathbb{N}$, функция $g \in C_\rho(I)$ удовлетворяет условию (5) и для коэффициентов ряда Фурье по системе Уолша-Пэли выполнено условие $B_n = o(2^{-n})$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

1. Для μ_a -п.в. x предельной функцией является $\alpha_g T_a^1$;
2. Для всякого $x \in I$, удовлетворяющего $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(x)}{n_{k(x)}} = a$, предельная функция существует и равна $\alpha_g T_a^1$,

где $\alpha_g = -\text{sgn}\left(\sum_{j=1}^\infty \text{cov}_{\mu_a}(r_j, g)\right)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1, запишем g как сумму ряда Фурье:

$$g(y) = \sum_{t=0}^\infty c_t w_t(y) = \sum_{m=0}^\infty \sigma_m^g.$$

²³При $a = 1/2$ это следует, например, из того что $|S_n^{1/2}(f, y)| = |(f * D_n)(y)| \leq \|f\|_\infty \|D_n\|_1 = \|f\|_\infty \cdot L_n$, где D_n и L_n – соответственно, ядро Дирихле и константа Лебега. Неравенство достигается при $y = 0$ для $f = \text{sgn} D_n$, поэтому $\|S_n^{1/2}\| = L_n$. При $a \neq 1/2$ имеем $\|S_n^a\| = \|A_n\| L_n$, где A_n – оператор ортогонализации, переводящий $(w_t)_{t=0}^n$ в $(w_t^a)_{t=0}^n$.

Как и выше, по x выберем последовательности $n_\nu = n_\nu(x), k_\nu = k_\nu(x), j_\nu = j_\nu(x)$, такие, что вдоль (n_ν, k_ν) , предельная кривая $\varphi_x^{w_1}$ для функции Уолша w_1 существует. Выберем, как и выше, последовательность j_ν , такую, что $\tilde{k}_\nu = k_\nu + j_\nu, 2\tilde{k}_\nu = n_\nu + |j_\nu|$.

Из усиленной центральной предельной теоремы следует, что для п.в. x выполнено неравенство $|j_\nu| < n_\nu^{2/3}$. Справедлива оценка $\frac{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^{g_1}}}{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}} < C_m |\frac{j_\nu + 1}{n_\nu}|$, при $m \geq 1$, для некоторой последовательности $C_m = O(m)$. Предположение $g \in C_\rho(I)$ влечет равномерную сходимость ряда Фурье. Поэтому, пользуясь тем что $B_n = o(2^{-n})$, для μ_a - п.в. x получаем

$$\frac{\sum_{m=2}^{m_\nu} R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}}{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0, \quad (36)$$

где m_ν определено как $\log_2 n_\nu$. Для $1 \leq m \leq m_\nu$ все функции σ_m^g определены на τ_{n_ν, k_ν} . Обозначим через g_{m_ν} сумму $\sum_{m=0}^{m_\nu} \sigma_m^g$, а через b_{m_ν} остаток $\sum_{m=m_\nu+1}^{\infty} \sigma_m^g$.

Для заданного $x \in I$ представим функцию $\varphi_{x,l}^g$ в точке $t \in [0, 1]$ в виде

$$\frac{S_x^g(t \cdot l) - t \cdot S_x^g(l)}{R_{x,l}^g} = \frac{S_x^{g_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{g_{m_\nu}}(l)}{R_{x,l}^g} + \frac{S_x^{b_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{b_{m_\nu}}(l)}{R_{x,l}^g},$$

где через S_x^f обозначена эргодическая сумма (1) для функции f .

Положим нормирующий коэффициент R_x^g равным $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g}$. Для первого слагаемого в точках $t_{i, k_\nu, n_\nu} = \frac{\binom{n_\nu - i}{k_\nu - i}}{\binom{n_\nu}{k_\nu}}$ имеем²⁴:

$$\frac{S_x^{g_{m_\nu}}(t_{i, k_\nu, n_\nu} \cdot l) - t_{i, k_\nu, n_\nu} \cdot S_x^{g_{m_\nu}}(l)}{R_{x,l}^g} = \frac{\sum_{m=1}^{m_\nu} F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}(t_{i, k_\nu, n_\nu} \binom{n_\nu}{k_\nu}) - t_{i, k_\nu, n_\nu} \cdot F_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_m^g}(\binom{n_\nu}{k_\nu})}{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g}}$$

Данная сумма в силу (36) и теоремы 1 сходится к $\alpha_g T_{1/2}^1$.

Так как $g \in C_\rho(I)$, ряд Фурье сходится равномерно и вторую сумму $|S_x^{b_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{b_{m_\nu}}(l)|$ можно оценить равномерно по x . Так как $|S_x^{b_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{b_{m_\nu}}(l)| \leq B_{m_\nu} \binom{n_\nu}{k_\nu}$, и, по предположению, $n_\nu B_{m_\nu}$ стремится к нулю, то

$$\frac{S_x^{b_{m_\nu}}(t \cdot l) - t \cdot S_x^{b_{m_\nu}}(l)}{R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0.$$

Таким образом, φ_{n_ν, k_ν}^g сходится к $\alpha_g T_a^1$, где $\alpha_g = -\text{sgn}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \text{cov}_{\mu_a}(g, r_i)\right)$. \square

Замечание 6. Несложно видеть, что если отказаться от условия (5), а вместо этого предположить более слабое условие $\text{cov}_{\mu_{1/2}}(g, \sum_{t: s_2(t)=m} w_t) \neq 0$ для $m \geq 1$, тогда утверждение 1 теоремы 2 будет также выполнено, с тем изменением, что знак предельной функции в этом случае зависит от x (что совпадает с первым утверждением теоремы 1). Второе утверждение теоремы 1 в этом случае также справедливо.

²⁴напомним, что $R_{n_\nu, k_\nu}^{\sigma_1^g} \asymp \frac{C}{k_\nu} \binom{n_\nu}{k_\nu}$ для некоторой константы C .

5 Предельные кривые и спектр автоморфизма

В этой части мы покажем связь наших результатов с известной гипотезой о непрерывности спектра. Нам потребуется теорема Халаша:

Теорема 9. ([20]) Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu, T)$ – эргодическая динамическая система. Предположим, что существует множество $A \in \mathcal{A}$ положительной меры, такое, что для всех $n \geq 1$, сумма $\sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{1}_A - \mu(A)) \circ T^k$ ограничена с положительной вероятностью. Тогда $e^{2\pi i \mu(A)}$ – собственное число T , т.е. существует измеримая ненулевая функция f , такая, что

$$f \circ T = e^{2\pi i \mu(A)} f.$$

Обратно, если существует $\nu \in (0, 1)$, такое, что $e^{2\pi i \nu}$ – собственное число T , то существует множество $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu$, и константа $C > 0$, такие, что для всех $n \geq 1$ выполнено неравенство

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{1}_A - \mu(A)) \circ T^k \right| \leq C$$

почти везде.

Безусловно, если для $g = \mathbb{1}_A$ существует предельная кривая, то сумма $|\sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{1}_A - \mu(A)) \circ T^k|$ неограниченно возрастает со скоростью $R_{x, l_n(x)}^g$. Для существования предельной формы достаточно (см. замечание б), чтобы для некоторого m выполнялось условие $\sum_{t: s_2(t)=m} \text{cov}_{\lambda_{1/2}}(g, w_t) \neq 0$ (напомним, что $\lambda_{1/2}$ – мера Лебега).

Возникает естественный вопрос: что можно сказать о коэффициентах Фурье центрированного индикатора²⁵ произвольного борелевского множества A положительной меры, конкретно, верно ли, что оно удовлетворяет свойству $\sum_{t: s_2(t)=m} \text{cov}_{\lambda_{1/2}}(\mathbb{1}_A, w_t) \neq 0$ для некоторого m ?

Другой подход основан на исследовании свойств последовательности $(f \circ P^k(x))_{k=0}^{\infty}$, $x = (x_1, x_2, \dots)$, где $f = f(x_1, \dots, x_k)$ – цилиндрическая функция. Приведем основной результат из работы [3]:

Теорема 10. (см. [3] теорема 4) Непрерывность спектра автоморфизма Паскаля $(I, \mathcal{B}, P, \mu_a)$ эквивалентна тому, что для μ_a -п.в. x , всякого натурального N и всякой цилиндрической функций f , принадлежащей \mathcal{F}_N , последовательность $(f \circ P^k(x))_{k=0}^{\infty}$ не является почти периодической по Безиковичу-Хеммингу.

Если предельная форма φ_x^f существует, то последовательность $(f \circ P^k(x))_{k=0}^{\infty}$ не может быть почти периодической по Безиковичу. Таким образом, в этой работе условие теоремы 10 проверено для всех цилиндрических функций f , не когомологических константе.

6 Теоретико-числовая интерпретация

В теории чисел известной задачей является поиск явной формулы для суммы

$$S_g(N) = \sum_{n=0}^{N-1} g(s_2(n))$$

²⁵Т.е. функции $\mathbb{1}_A - \mu(A)$.

при заданной функции $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. В классическом случае, когда $g(y) \equiv y$, ответ представляется формулой Троллопа-Деланжа, см. [32]. В современных работах [26] и [18] рассмотрены случаи $g(y) = \binom{y}{m}, m > 0$, $g(y) = y^m$ и даже $g(y, t) = \exp(ty)$. Оказывается, что $S_g(N)$ в каждом из этих случаев имеет явное выражение, ключевой частью которого являются линейные комбинации T_a^k , $k \geq 1$.

Графики линейной комбинации T_a^1 и T_a^2 возникают как предельные кривые автоморфизма Паскаля. Отметим, что так как башню $\tau_{n,k}$ автоморфизма Паскаля можно рассматривать как набор натуральных чисел (см., например, [7]) $\{j : s_2(j) = k\}$, упорядоченных по возрастанию, то изучаемые нами эргодические суммы (8) соответствуют «условным суммам»:

$$\sum_{0 \leq j < 2^n, s_2(j)=k} g(j),$$

где функция g зависит от конечного числа младших разрядов в дидической записи натурального j .

7 Доказательства и приложения

7.1 Доказательство леммы 1

Доказательство. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Обозначим через $B_k(x)$ k -кратное кронекеровское произведение $(A(x))^{\otimes k}$, $k \in \mathbb{N}$. Записывая k -кратное кронекеровское произведение последовательно и пользуясь свойством $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, по индукции легко проверить, что

$$B_k(x)B_k(y) = B_k(x + y) \quad (37)$$

Строки и столбцы матрицы B_k удобно нумеровать с нуля.

По индукции проверяется, что при $k \in \mathbb{N}$ и $0 \leq i, j < 2^k$ (i, j) -ый элемент матрицы $B_k(x)$ имеет вид

$$(B_k(x))_{i,j} = \begin{cases} x^{s_2(i-j)}, & \text{если } i > j \text{ и } (i-j) \oplus j = i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (38)$$

База индукции: при $k = 1$ – очевидна. Пусть (38) доказано для k . Пусть $p = 2^k$. Функция $s_2(\cdot)$ удовлетворяет (и определяется) уравнениями

$$s_2(j + p) = s_2(j) + 1, \quad j = 0, 1, \dots, p - 1, \quad (39)$$

$$s_2(j + p) = s_2(j), \quad j = p, p + 1, \dots, 2p - 1. \quad (40)$$

Так как $B_{k+1} = \begin{pmatrix} B_k & \mathbb{O} \\ xB_k & B_k \end{pmatrix}$, то нужно проверить формулу (38) для каждого из четырех блоков матрицы B_{k+1} . Пусть, например, $p \leq i < 2p$ и $0 \leq j < p$. Запишем (39) как $s_2(i - p - j) + 1 = s_2(i - p - j + p) = s_2(i - j)$. Тогда по индуктивному предположению получаем

$$(B_{k+1}(x))_{i,j} = \begin{cases} x \cdot x^{s_2(i-p-j)}, & \text{если } (i-p-j) \oplus j = i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} = \begin{cases} x^{s_2(i-j)}, & \text{если } (i-j) \oplus j = i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Аналогичная проверка для остальных блоков, может быть проведена с использованием (40) вместо (39).

По теореме Куммера для натуральных t и s выполнено $t \oplus s = t + s$ тогда и только тогда, когда биномиальный коэффициент $\binom{t+s}{s}$ является нечетным, отсюда

$$(B_k(x))_{ij} = \begin{cases} x^{s_2(i \oplus j)}, & \text{если } \binom{i}{j} \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(мы также воспользовались тем, что $i - j = ((i - j) \oplus j) \oplus j = i \oplus j$).

Это объясняет структуру «треугольника Серпинского», образуемую ненулевыми коэффициентами $B_k(x)$, например,

$$B_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 0 & x & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ x^3 & x^2 & x^2 & x & x^2 & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

Из (37) следует, что $B_k(x)B_k(-x) = B_k(0)$ – единичная $(k \times k)$ -матрица.

Пусть $t > s > 1$. Теперь докажем соотношение (27). Имеем

$$\sum_{j=0}^t (-1)^{s_2(t-j)} \left[\binom{t}{j} \pmod{2} \right] \alpha^{s_2(t \oplus j) + s_2(s \oplus j)} = \sum_{j=0}^t (B_t(-1))_{t,j} (B_t(1))_{j,s} = (B_t(0))_{t,s} = 0$$

□

7.1.1 Вывод формулы (12)

Будем считать, что $x = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j a^j q^{-s_j-1} (1-a)^{s_j-1} \in [0, 1]$. Обозначим через q отношение $\frac{1-a}{a}$, через $\tilde{\omega}_j$ значение $\omega_j(x_0)$, через \tilde{s}_j значение $s_j(x_0)$ для $1 \leq j \leq l_0 - 1$ и через r множитель $a^{l_0 - \tilde{s}_{l_0-1} - 1} (1-a)^{\tilde{s}_{l_0-1} + 1} = a^{l_0} q^{\tilde{s}_{l_0-1} + 1}$. Отметим, что $\tilde{\omega}_{l_0} = 1$ по определению x_0 . Имеем

$$x_0 + rx = \sum_{j=1}^{l_0} \tilde{\omega}_j a^j q^{\tilde{s}_j-1} + r \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j a^j q^{s_j-1} = \sum_{j=1}^{l_0} \tilde{\omega}_j a^j q^{\tilde{s}_j-1} + \sum_{j=l_0+1}^{\infty} \omega_{j-l_0} a^j q^{\tilde{s}_{l_0-1} + 1 + s_{j-l_0} - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j a^j q^{\tilde{s}_j-1}, \text{ где } \xi_j = \begin{cases} \tilde{\omega}_j, & 1 \leq j \leq l_0 \\ \omega_{j-l_0}, & j \geq l_0 + 1 \end{cases}, \text{ и } \tilde{s}_j = \sum_{i=1}^j \xi_i.$$

Поэтому имеем

$$S_{a,b}(x_0 + rx) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j b^j \left(\frac{1-b}{b} \right)^{\tilde{s}_j-1} = S_{a,b}(x_0) + b^{l_0} \left(\frac{1-b}{b} \right)^{1+s_{l_0-1}} S_{a,b}(x)$$

7.1.2 Вывод формулы (18)

Используем те же обозначения, что и выше. Дифференцируем (12) по b , тогда получаем

$$T_a^k(x_0 + rx) = T_a^k(x_0) + \sum_{\mu=0}^k \binom{k}{\mu} T_a^\mu(x_0) \frac{\partial^{k-\mu}}{\partial a^{k-\mu}} a^{l_0-1-s_{l_0-1}} (1-a)^{1+s_{l_0-1}}$$

7.1.3 Вывод формулы (25)

Мы докажем, что

$$\mathbb{E}_{\mu_a} w_s = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} a^{m-l} (1-a)^l, \quad m = \mathbf{s}_2(s).$$

Для этого покажем сначала, что $\mathbb{E}_{\mu_a} w_s = \mathbb{E}_{\mu_a} w_t$ для всякого t , такого что $\mathbf{s}_2(t) = m$. Затем, положив t равным $2^m - 1$, получим требуемую формулы.

Пусть $s < 2^N$, обозначим через m значение $\mathbf{s}_2(s)$, а через t число $2^m - 1$. Таким образом, t – это наименьшее натуральное меньшее s с тем же количеством единиц в двоичной записи.

Набор башен $\{\tau_{N,l}\}_{l=0}^N$ содержит в себе все 2^N цилиндров ранга N , функции Уолша w_s и w_t определены на этих башнях. Поэтому

$$\mathbb{E}_{\mu_a} w_s = \sum_{l=0}^N \int_{x \in \tau_N^l} w_s(x) d\mu_a$$

Напомним, что по определению $h_{N,l}^{w_s} = \sum_{j=1}^{\binom{N}{l}} w_s(\tau_{n,k}(j)) = F_{N,l}^{w_s}(\binom{N}{l})$, а в силу того, что все цилиндры, принадлежащие $\tau_{N,l}$ имеют одинаковую μ_a меру равную $a^l(1-a)^{N-l}$ имеем $h_{N,l}^{w_s} = \frac{1}{a^l(1-a)^{N-l}} \int_{x \in \tau_N^l} w_s(x) d\mu_a$.

Из формулы (29) получаем, что $\int_{x \in \tau_N^l} w_s(x) d\mu_a = F_{N,l}^{w_s}(\binom{N}{l}) a^l (1-a)^{N-l} = F_{N,l}^{w_t}(\binom{N}{l}) a^l (1-a)^{N-l} = \int_{x \in \tau_N^l} w_t(x) d\mu_a$. Следовательно

$$\mathbb{E}_{\mu_a} w_s = \mathbb{E}_{\mu_a} w_t.$$

Однако функция w_t полностью определена уже на башнях $\{\tau_{m,l}\}_{l=0}^m$.

$$\mathbb{E}_{\mu_a} w_s = \sum_{l=0}^m \int_{x \in \tau_m^l} w_t(x) d\mu_a = \sum_{l=0}^m h_{m,l}^{w_t} a^l (1-a)^{m-l} = \sum_{l=0}^m (-1)^l \binom{m}{l} a^l (1-a)^{m-l}$$

Последнее равенство использует $h_{m,l}^{w_t} = (-1)^l \binom{m}{l}$, что следует из формулы (30).

7.1.4 Вывод формулы (29)

Пусть функция Уолша $w_t(y)$ является произведением $m = s_2(t)$ различных функций Радемахера $\prod_{i=0}^{N-1} (r_{i+1}(y))^{t_i} = r_1^{t_0}(y) \cdot r_2^{t_1}(y) \cdot \dots \cdot r_N^{t_{N-1}}(y)$, где $t_i \in \{0, 1\}$. Пусть натуральное $i = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_1}{1}$ задает путь $(x_j)_1^n$ в графе Паскаля, ведущий из вершины $(0, 0)$ в вершину (n, k) , такой что $x_j = 0$ для $1 \leq j \leq N$. Тогда биномиальное разложение числа i удовлетворяет свойству $a_1(i) \geq N$. По определению, $F_{n,k}^{w_t}(i)$ равно сумме значений w_t на всех путях, не превосходящих в обратном лексикографическом порядке путь, соответствующий i .

Разобьем все пути в графе Паскаля, ведущие в вершину (n, k) , на два класса, в соответствии с тем, какое значение (1 или -1) принимает на них функция w_t . Каждый путь, в свою очередь, разобьем на 2 части: начало длины N и хвост длины $\binom{n}{k} - N$. Начало длины N всякого пути заканчивается в одной из вершин (N, j) , $0 \leq j \leq N$, и полностью определяет значение w_t на всем пути. Количества путей, проходящих через вершину (N, j) , из первого класса дает следующая комбинаторная лемма.

Лемма 3. Пусть для натурального N заданы m различных натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^m$, таких что $1 \leq n_i \leq N$. Число векторов (r_1, \dots, r_N) , состоящих из N единиц и минус единиц, удовлетворяющих двум условиям:

1. $\prod_{i=1}^m r_{n_i} = 1$, $1 \leq n_i \leq N$, $1 \leq i \leq m$, $m \leq N$;
 2. число r_i , равных 1 при $1 \leq i \leq N$, равно j ,
- равно

$$\sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{N-j-2l}.$$

Пути проходящие через вершину (N, j) , из второго класса – это все оставшиеся пути, число которых равно

$$\binom{N}{j} - \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{N-j-2l} = \sum_{l: 1 \leq 2l+1 \leq m} \binom{m}{2l+1} \binom{N-m}{N-j-2l-1}.$$

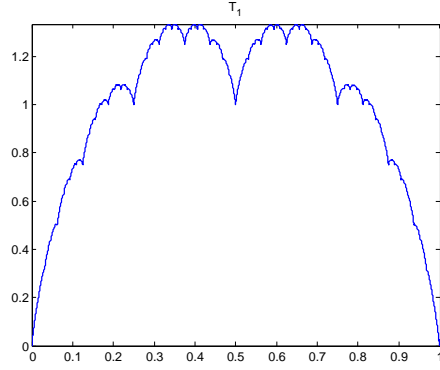
Количество хвостов считается по формуле $\binom{a_k-N}{k-j} + \dots + \binom{a_1-N}{1-j}$ (биномиальные коэффициенты доопределены нулем).

В итоге получаем формулу:

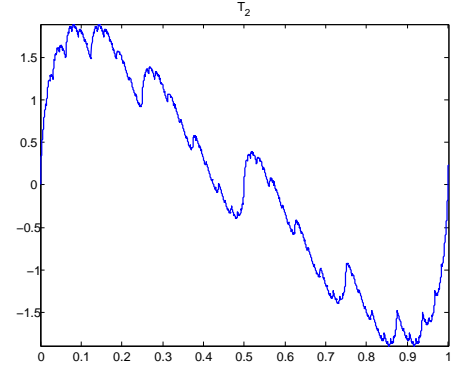
$$F_{n,k}^{w_t}(i) = \sum_{j=0}^N \left[2 \cdot \sum_{l: 0 \leq 2l \leq m} \binom{m}{2l} \binom{N-m}{N-j-2l} - \binom{N}{j} \right] \cdot \left(\binom{a_k-N}{k-j} + \dots + \binom{a_1-N}{1-j} \right) \quad (41)$$

7.2 Иллюстрации

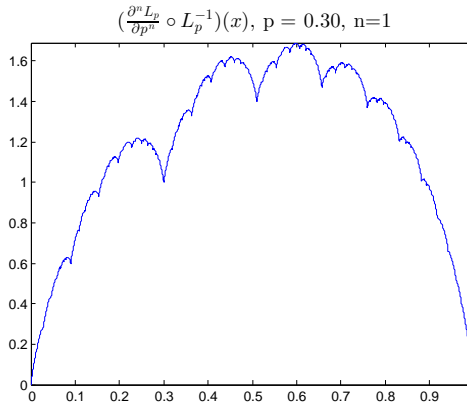
7.2.1 Графики функций T_p^n



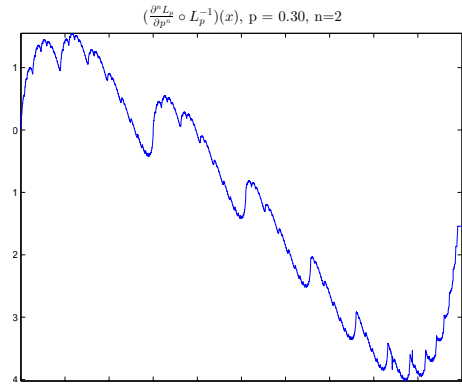
(a) $n = 1, p = \frac{1}{2}$



(b) $n = 2, p = \frac{1}{2}$



(c) $n = 1, p = 0.3$



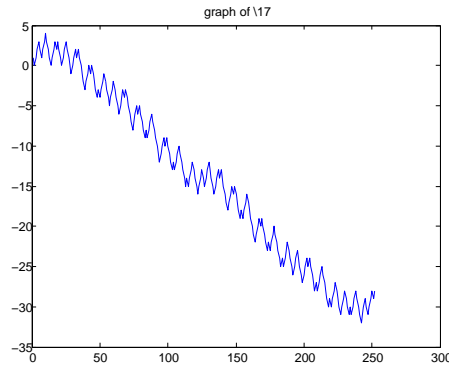
(d) $n = 2, p = 0.3$

7.2.2 Примеры эргодических сумм

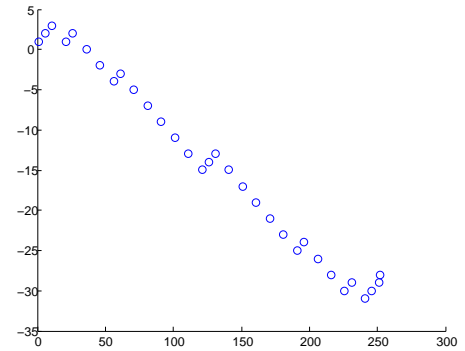
Ниже на картинках слева приведены графики функций $F_{10,5}^{w_{17}}$ и $F_{10,5}^{w_{18}}$, вычисленных во всех точках $1 \leq i \leq \binom{10}{5}$. Справа – их графики согласно формуле (29) в точках $1 \leq i \leq \binom{10}{5}$ с представлениями в виде 5-каскада удовлетворяющими неравенству $a_1(i) \geq 5$. Хотя функции $F_{10,5}^{w_{17}}$ и $F_{10,5}^{w_{18}}$ различны, в точках i , имеющих в 5-каскаде $a_1(i) \geq 5$, они совпадают.

Функция $w_{17}(\cdot) = r_1(\cdot)r_5(\cdot)$, а функция $w_{18}(\cdot) = r_2(\cdot)r_5(\cdot)$. В обоих случаях $N = 5$, $m = 2$. Явная формула для аргумента $i \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего свойству $a_1(i) \geq 5$, согласно формуле (29) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 F_{10,5}^{w_{17}}(i) &= \sum_{j=0}^5 24 \frac{j^2 - 5j + 5}{j! (5-j)!} \partial_{n-k}^{5,j}(i) = \\
 &= \partial_{n-k}^{5,0}(i) + \partial_{n-k}^{5,1}(i) - 2\partial_{n-k}^{5,2}(i) - 2\partial_{n-k}^{5,3}(i) + \partial_{n-k}^{5,4}(i) + \partial_{n-k}^{5,5}(i) = F_{10,5}^{w_{18}}(i).
 \end{aligned}$$

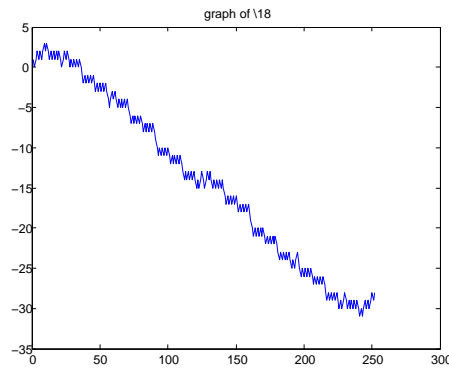


(e) $0 \leq i \leq 252$

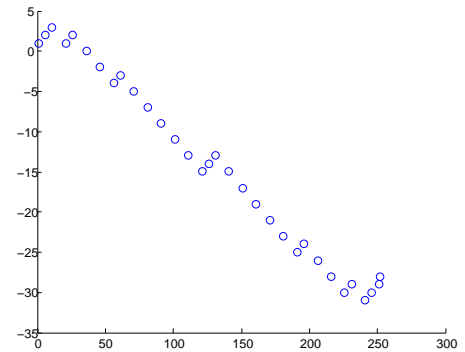


(f) $i \in A_2 = \{i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i \leq 252, a_1(i) \geq 5\}; |A_2| = 32$

Рис. 2: График $S_x^{w_{17}}(i)$, $x \in \tau_{10,5}(1)$



(a) $0 \leq i \leq 252$



(b) $i \in A_2 = \{i \in \mathbb{Z} : 0 \leq i \leq 252, a_1(i) \geq 5\}; |A_2| = 32$

Рис. 3: График $S_x^{w_{18}}(i)$, $x \in \tau_{10,5}(1)$

Список литературы

- [1] А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения*, ДАН СССР, **259:3** (1981), 526–529.
- [2] А. М. Вершик, *Теорема о марковской периодической аппроксимации в эргодической теории*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 115(1982), 72–82.
- [3] А. М. Вершик, *Автоморфизм Паскаля имеет непрерывный спектр*, Функци. анализ и его прил., 45:3 (2011), 16–33.
- [4] М. И. Гордин, *О центральной предельной теореме для стационарных процессов*, ДАН СССР, 188:4, (1969), 739–741.
- [5] М. И. Гордин, *Замечание о мартингалном методе доказательства центральной предельной теоремы для стационарных последовательностей*, Вероятность и статистика. 7, Зап. научн. сем. ПОМИ, 311, ПОМИ, СПб., 2004, 124–132.
- [6] А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Асимптотика масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля*, в сб.: Теория представлений,

- динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы, вып. 18, Зап. научн. сем. ПОМИ, 378 (2010), 58–72.
- [7] А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Реализация автоморфизма Паскаля в графе конкатенаций и функция $s_2(n)$* , Зап. научн. сем. ПОМИ, 403, ПОМИ, СПб., 2012, 95–102.
- [8] А. Р. Минабутдинов, И. Е. Манаев, *Функция Крускала–Катоны, последовательность Конвея, кривая Такаги и автоморфизм Паскаля*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 411 (2013), 135–147.
- [9] А. Р. Минабутдинов, *Случайные отклонения эргодических сумм в автоморфизме Паскаля для меры Лебега*, будет опубликовано в Зап. научн. сем. ПОМИ.
- [10] Е. М. Рудо, *Асимптотика распределений случайных блужданий на многомерных графах Паскаля и на решетках корней*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 403 (2012), 158–171.
- [11] P. Allaart, K. Kawamura, *The Takagi function: a survey*. Real Anal. Exch., 37:1 (2012), 1–54.
- [12] L. Berg, M. Krüppel. *De Rham’s singular function and related functions*, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, 19:1 (2000), 227–237.
- [13] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley, New York, 3rd edition, 1995.
- [14] E. de Amo, M. Diaz Carrillo, J. Fernandez-Sanchez, *Singular functions with applications to fractal dimensions and generalized Takagi functions*, Acta Applicandae Mathematicae, 119:1 (2012), 129–148.
- [15] M. de Amo, J. Fernandez-Sanchez, *A generalised dyadic representation system*, Int. J. Pure Appl. Math., 52:1 (2009), 49–66.
- [16] G. de Rham, *Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles*, Rend. Sem. Mat., 16 (1956), 101–113.
- [17] R. Girgensohn, *Nowhere differentiable solutions of a system of functional equations*, Aequationes mathematicae, 47:1 (1994), 89–99.
- [18] R. Girgensohn, *Digital sums and functional equations*, Integers, 12:1 (2012), 141–160.
- [19] A. Hajan, Y. Ito, S. Kakutani, *Invariant measure and orbits of dissipative transformations*, Adv. in Math., 9:1 (1972), 52–65.
- [20] G. Halasz, *Remarks on the remainder in Birkhoff’s ergodic theorem*, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica, 28:3-4 (1976), 389–395.
- [21] E. Janvresse, T. de la Rue, *The Pascal adic transformation is loosely Bernoulli*, Annales de l’Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics, 40:2 (2004), 133 – 139.
- [22] E. Janvresse, T. de la Rue, and Y. Velenik, *Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation*, Stoch. Dyn., 5:1 (2005), 1–25.
- [23] S. Jukna, *Extremal Combinatorics: With Applications in Computer Science*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition, 2010.
- [24] S. Kakutani, *A problem of equidistribution on the unit interval $[0, 1]$* , in: Lecture Notes in Math., vol. 541, Springer-Verlag, Berlin, 1976, 369–375.

- [25] K. Kawamura,
On the set of points where Lebesgue's singular function has the derivative zero,
Proc. Japan Acad., Ser. A, 87(9):162–166, 2011.
- [26] M. Krüppel, *De Rham's singular function, its partial derivatives with respect to the parameter and binary digital sums*, *Rostocker Math. Kolloq.*, 64 (2009), 57–74.
- [27] M. Lacey, *On weak convergence in dynamical systems to self-similar processes with spectral representation*, *Transactions Amer. Math. Soc.* 328 (1991), 767–778.
- [28] N. R. Ladhawala, *Absolute summability of walsh-fourier series*. *Pacific J. Math.*, 65:1 (1976), 103–108.
- [29] Z. Lomnicki, S. Ulam, *Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités. I. Variables indépendantes. (French) [On measure theory in combinatorial spaces and its application to the computation of probabilities]*, 23 (1934), 237–278.
- [30] X. Mela, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation*, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25:1 (2005), 227–256.
- [31] T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*, *Proc. Phys.-Math. Soc.*, 5–6 (1903), 176–177.
- [32] E. Trollope, *An explicit expression for binary digital sums*, *Mat. Mag.*, 41 (1968), 21–25.
- [33] D. Volný, *Invariance principles and Gaussian approximation for strictly stationary processes*. *Trans. Am. Math. Soc.*, 351:8, (1999), 3351–3371.